

Untersuchung des Spektrums von Rubin-
Riesenpulslasern im Hinblick auf
kleine Halbwertsbreite

(Investigation of Spectrum of Giant
Pulse Ruby Lasers with Respect to
Narrow Line Width)

L.Kellerer, D. Meisel, H. Röhr

IPP 1/75

Februar 1968

I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K

G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Untersuchung des Spektrums von Rubin-
Riesepulslasern im Hinblick auf
kleine Halbwertsbreite

(Investigation of Spectrum of Giant
Pulse Ruby Lasers with Respect to
Narrow Line Width)

L. Kellerer, D. Meisel, H. Röhr

IPP 1/75

Februar 1968

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

IPP 1/75

L. Kellerer
D. Meisel
H. Röhr

Investigation of Spectrum
of Giant Pulse Ruby Lasers
with Respect to Narrow Line
width

(in German) 1968

Abstract

It is shown that in general the spectrum of a giant pulse ruby laser consists of one or more lines. The width of the spectrum may be $0.3 - 0.5 \text{ \AA}$. Using a resonant reflector and cooling the ruby to a temperature of 10° C (this temperature probably depends on the resonant reflector used) the line width always can be made $< 0.1 \text{ \AA}$.

Einleitung

Für manche Lichtstreuexperimente an Plasmen, z.B. Vorwärtsstreuung werden Q-switch-Laserimpulse mit einer spektralen Linienbreite benötigt, die kleiner als ein Zehntel Angström ist. Manche Rubine emittieren sporadisch solch schmale Linien, andere dagegen nie. Messungen mit breiteren Linien sind jedoch für die betreffenden Experimente unbrauchbar. Es wurde daher untersucht, ob unter Benützung eines Resonant-Reflektors jeder Rubin stets schmale Linien emittieren kann und zwar unabhängig von seiner Qualität und Herkunft.

Hilfsmittel

Zur Bestimmung von Laserlinienbreiten bietet sich ein Fabry-Perot-Interferometer an. Es besteht aus 2 planparallelen Spiegeln mit hohem Reflexionskoeffizienten R . Das Auflösungsvermögen $\lambda/\Delta\lambda_{\min}$ ($\Delta\lambda_{\min}$ ist die Wellenlängendifferenz von 2 Linien, die noch getrennt werden können) hängt theoretisch nur von R und dem Abstand d der beiden Spiegel ab. Es ergibt sich [1,2]

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\min}} = \frac{2\pi d \sqrt{R}}{\lambda(1-R)}$$

Für hohe Reflexion $R \approx 1$

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\min}} \approx \frac{2\pi d}{\lambda(1-R)}$$

λ ist die fest vorgegebene Laserwellenlänge von 6943 Å.

Bei normalen Fabry-Perots beträgt der Reflexionsgrad R 90-96 %; die Metallspiegel sind sehr empfindlich, das Gerät teuer. Für die Rubinlaserwellenlänge gibt es jedoch hochreflektierende, dielektrische Spiegel (zur Zeit bis 99,7 % Reflexion), mit denen sich ein fast ideales Fabry-Perot aufbauen lässt; das allerdings nur im Wellenlängenbereich 6900 ± 150 Å hohe Auflösung hat. Der

Spiegel P = Polarisator PZ = Pockelszelle
Polarisator mit Kühlung M = Mattscheibe F = Filter (20/5)
Fabry-Perot

Aufbau des von uns mit einfachen Mitteln hergestellten Gerätes ist im Anhang I beschrieben.

Die theoretische Auflösung ist in jedem Fall höher als benötigt; sie betrug in unserem Fall ($R = 99\%$, $d = 0,5\text{ cm}$, $\lambda = 6943\text{ \AA}$) ungefähr $2 \cdot 10^{-3}\text{ \AA}$. Sie wird verschlechtert durch die endliche Grösse; Verbiegungen und Unebenheiten der Spiegel [2].

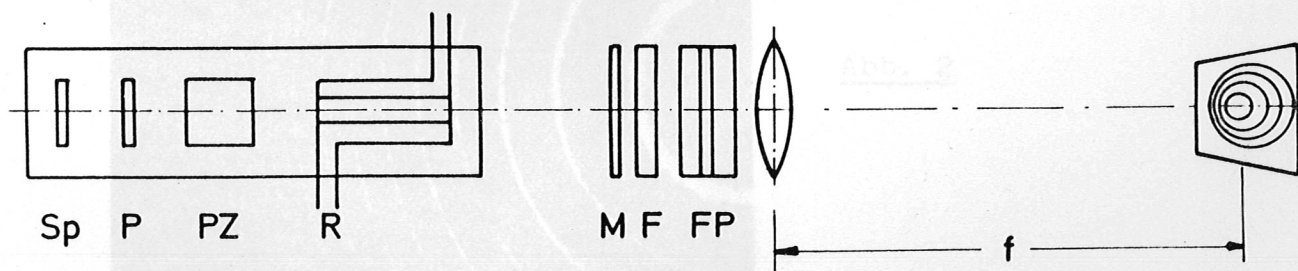
Zur Bestimmung des Wellenlängenabstandes $\Delta\lambda_{\text{Ring}}$, der zwei benachbarten Ringen auf der Aufnahme des Ringssystems entspricht, das das Fabry-Perot liefert, ist es nicht unbedingt nötig den Spiegelabstand zu kennen und daraus $\Delta\lambda_{\text{Ring}}$ zu berechnen [1]:

$$\Delta\lambda_{\text{Ring}} = \frac{\lambda^2}{2d}$$

Man kann $\Delta\lambda_{\text{Ring}}$ auch direkt aus der Aufnahme mit der Formel

$$\Delta\lambda_{\text{Ring}} = \frac{D_1^2 - D_2^2}{8f^2} \cdot \lambda$$

erhalten, wobei f die Brennweite der verwendeten Linse ist. D_1 und D_2 sind die Durchmesser benachbarter Ringe auf der Aufnahme. Die Formel gilt, soweit $\cos\varphi$ näherungsweise durch $1 - \frac{\varphi^2}{2}$ ersetzt werden kann ($\text{tg}\varphi$ ist das Verhältnis Ringradius zu Brennweite). Die optische Anordnung bei der Messung zeigt Abb. 1:



- Sp = Spiegel P = Polarisator PZ = Pockelszelle
 R = Rubin mit Kühlung M = Mattscheibe F = Filter (RG 5)
 FP = Fabry-Perot

Benützt wird ein normaler Q-switch-Aufbau. Eine Kerrzelle zur Schaltung des Riesenpulses scheidet beim Laser aus, da sie die emittierte Linie durch Brillouinstreuung auf $0,5 - 1 \text{ \AA}$ verbreitert. Es wurde deshalb eine Pockelszelle (PZ) verwendet, die diesen Effekt nicht zeigt.

Die Mattscheibe (M) dient zur divergenten Beleuchtung des Fabry-Perot's (FP), das Rotfilter (F) (RG 5) soll kurzwelliges Pumplicht absorbieren und damit den Kontrast der Aufnahmen steigern. Als Aufnahmematerial diente ein weicher Polaroidfilm (47/3000), der allerdings nur eine halbquantitative Auswertung der Profile zulässt (da die Schwärzungskurve nicht bekannt ist). Es war daher nur eine Abschätzung der mittleren Linienbreite möglich, die jedoch für die beabsichtigte Untersuchung völlig ausreichend war. Die Laserleistungen betragen $50 - 100 \text{ Megawatt}$. Das Fabry-Perot wurde mit einem kontinuierlich arbeitenden Gaslaser einjustiert. Für seine Wellenlänge von 6328 \AA ist die Auflösung des Fabry-Perots nicht mehr sehr gut, wegen der geringeren Reflexion der Spiegel in dem Bereich. Eine Aufnahme der Gaslaserlinien zeigt Abb.2. Bei diesem Bild stört die Granulation der Mattscheibe noch etwas, da der Gaslaserstrahl nur $1 - 2 \text{ mm}$ dick war. Die Störung tritt beim Rubinlaser nicht mehr auf.

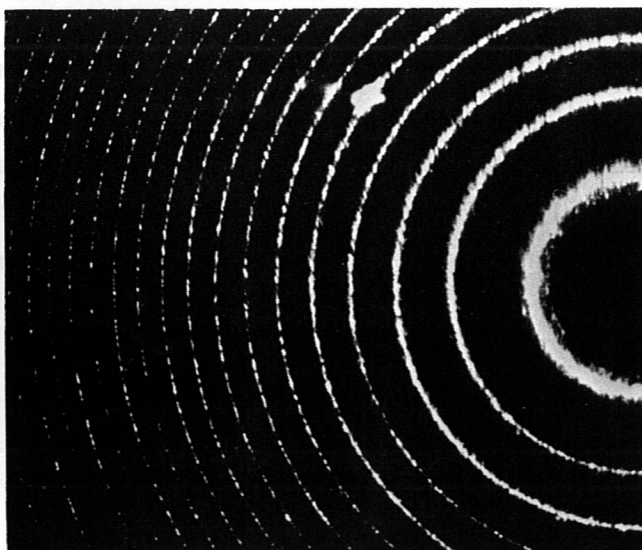


Abb. 2

Ergebnisse

Mit der geschilderten Anordnung wurden einige Rubine verschiedener Hersteller untersucht. Der Abstand von Ring zu Ring entspricht auf allen Bildern etwa $0,5 \text{ \AA}$. Bild (3) zeigt die breiten Linien, die auftreten, wenn die Pockelszelle durch eine Kerrzelle ersetzt wird.

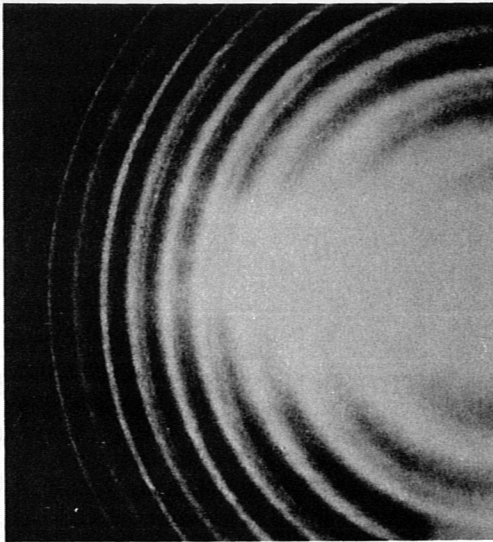


Abb. 3

(Alle weiteren Bilder sind mit Pockelszelle aufgenommen.)

Die beiden nächsten Bilder, (4) und (5), zeigen Aufnahmen des gleichen Rubins, wenige Minuten hintereinander unter gleichen äusseren Bedingungen aufgenommen. Bild (4) zeigt die sporadisch emittierte schmale Linie, Bild (5) die wesentlich breitere Linie von ungefähr $0,3 \text{ \AA}$.

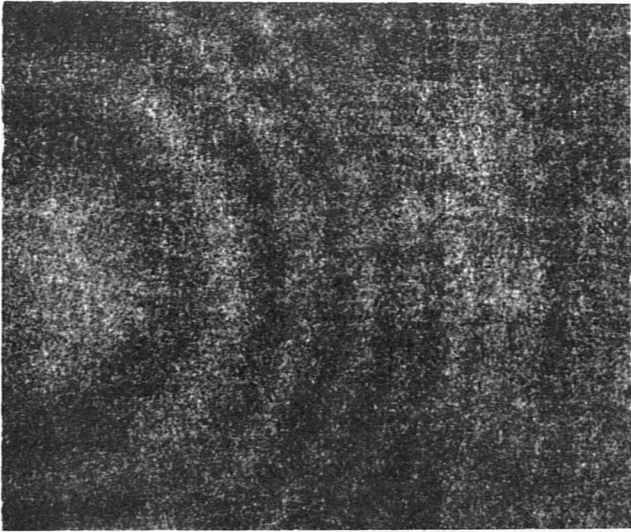


Abb. 4

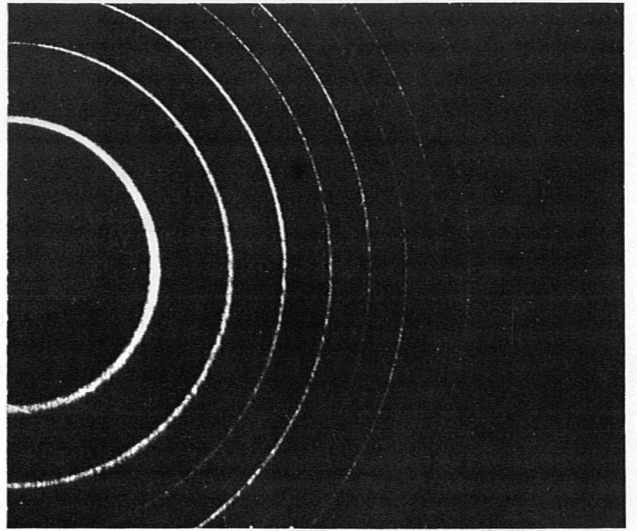


Abb. 5

Bild (6) zeigt die Aufnahme eines anderen Rubins, der je nach abgegebener Leistung 2 - 3 Linien emittiert. Auch dieser Rubin emittiert eigentlich breite Linien von 0,2 - 0,3 Å Halbwertsbreite.

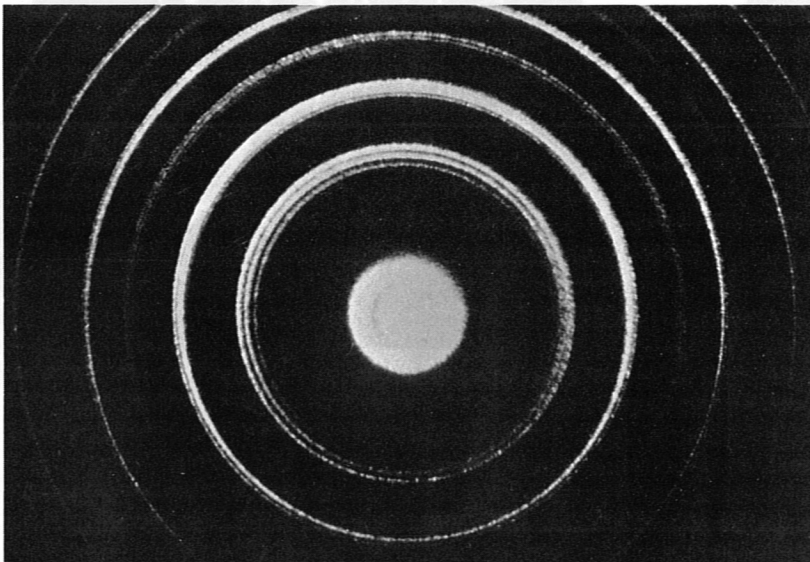


Abb. 6

Abb. 8

18°C

Um stets schmale Linien zu erhalten wurde der 99 % - Spiegel im Laser durch einen Resonantreflektor ersetzt (Beschreibung und Wirkungsweise im Anhang II. Es sei hier bloss kurz erwähnt, dass ein Resonantreflektor nur in einem engen Spektralbereich hohe Reflexion besitzt, allerdings wiederholt sich der Bereich mit einer Periode von $0,2 - 0,7 \text{ \AA}$ bei gebräuchlichen Ausführungen.)

Zusätzlich wird der Rubin noch abgekühlt [3] ; das Verhalten der Linien bei abnehmender Rubintemperatur zeigt die nächste Bildserie (Abb. 7 - 10).

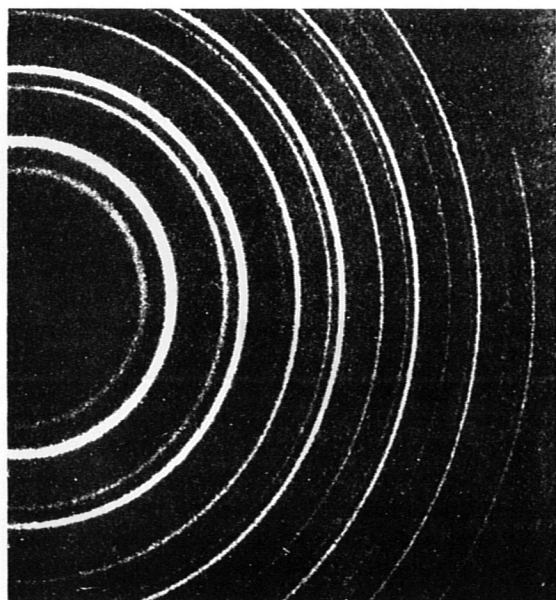


Abb. 7

23°C

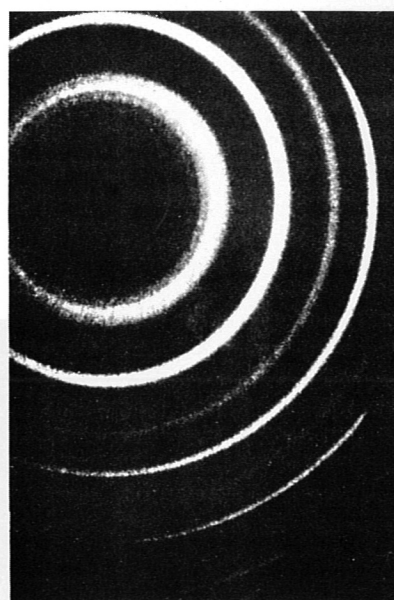


Abb. 8

18°C

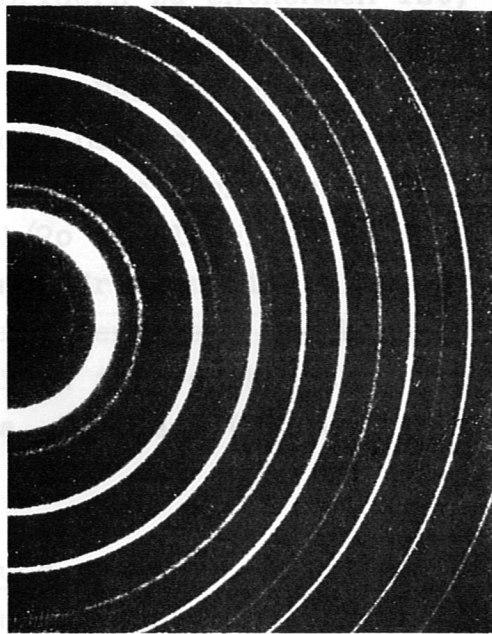


Abb. 9
13°C

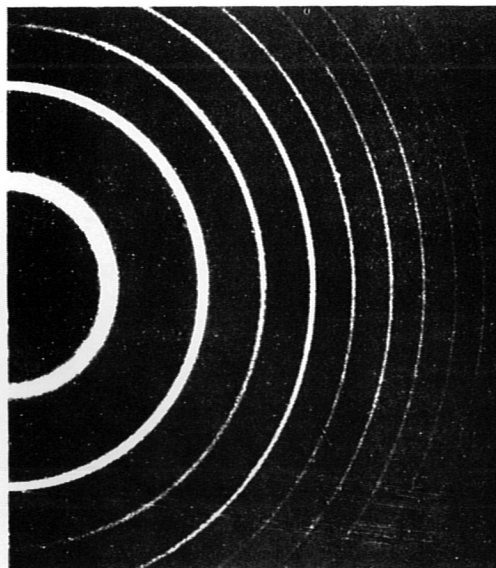


Abb. 10
10°C

Wie aus den Bildern zu entnehmen ist, werden bei relativ hohen Temperaturen mehrere scharfe Linien emittiert; der Abstand entspricht etwa der Periode des Resonantreflektors. Durch Abkühlung gelingt es, die Linien nach und nach "auszufrieren". Es bleibt bei $10 - 14^{\circ}$ Celsius noch eine intensive, scharfe Linie (mit weniger als $1/20 \text{ \AA}$ Halbwertsbreite) übrig. Eine zweite lässt sich nicht ganz unterdrücken; ihre Intensität beträgt aber nur etwa $1/100$ der intensiven und kann meist vernachlässigt werden. Dieses Verhalten ist repräsentativ für alle untersuchten Rubine (Linde, Djéva, Raytheon (vermutlich Valpey)).

Zusammenfassung

Mit Hilfe eines Resonantreflektors und geeigneter Wahl der Temperatur kann jeder Rubin dahin gebracht werden, dass er Linien mit einer Halbwertsbreite kleiner $1/20 \text{ \AA}$ emittiert. Schwache Nebenlinien ($\approx 1/100$ der Intensität der Hauptlinie) treten zwar auf, stören jedoch selten. Eine schmale Linie wird also auch von Rubinen geringerer Qualität, das heisst niedriger Preisklasse, emittiert.

A N H A N G I

Aufbau und Justierung des Fabry-Perot-Interferometers

Bei der Konstruktion eines Fabry-Perots hat man folgende Aufgabe zu lösen: Zwei Spiegelflächen müssen für längere Zeit genau parallel und in konstantem Abstand gehalten werden.

In der Literatur [4,5] wird die Verwendung von Invar-Abstandsringen beschrieben. Leider ist die Herstellung solcher Ringe recht aufwendig und ein käufliches Fabry-Perot steht meist nicht zur Verfügung. Ein billiger und einfacher Aufbau hat sich bei den vorliegenden Untersuchungen bewährt: Die Spiegel sind in Aluminium-Platten eingesetzt, die durch Federn und Schrauben beliebig gegeneinander verkippt werden können (Abb. 11). Durch Verschieben der Spiegelhalterbuchsen kann jeder beliebige Abstand der Spiegel von 0,5 mm bis ca. 40 mm eingestellt werden. Als Spiegel werden dielektrische Spiegel (Reflexionsvermögen 99 %), wie man sie auch im Laser verwendet, benutzt.

Da die Justierung der Spiegelflächen erst durch Drehen an den Schrauben erfolgt, ist die Lage der reflektierenden Flächen beim Einbau belanglos, und man kann genau darauf achten, dass jede Verspannung und Verbiegung vermieden wird. Denn schon eine Abweichung von der idealen ebenen Gestalt um $\lambda/4$ setzt die kleinste auflösbare Wellenlängendifferenz auf den halben Ordnungsabstand herab [2] .

Zur Justierung wurde ein He-Ne-Gaslaser benutzt. Bei verkippten Spiegelflächen erkennt man mit dem blossen Auge das Streulicht von den Auftreffpunkten des mehrfach reflektierten Gaslaserstrahls. Zur Vorjustierung dreht man an den Schrauben so, dass sich die Punkte vereinigen. Zur Feinjustierung kann man das System der Interferenzkreise mit einer Lupe als Okular beobachten. Die gegenseitige Lage der Spiegel wird so verändert, dass man vollkommen konzentrische Kreise sieht. Die letzte Feinjustierung ist erreicht, wenn die Breite eines jeden Ringes auf seinem ganzen Umfang konstant bleibt.

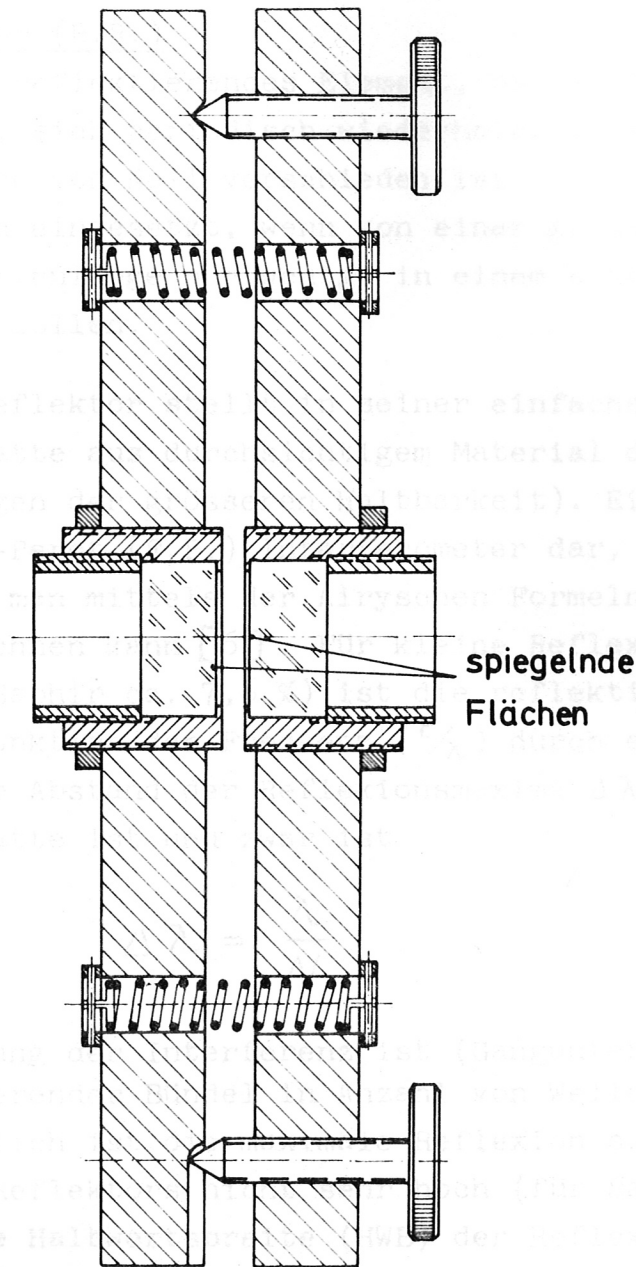


Abb. 11

wobei λ die Ordnungszahl (für die Ordnungszahl n der Maxima) ist, d die Dicke der Platten (für die Dicke d der Platten) und λ die Wellenlänge der Lichtstrahlung (für die Wellenlänge λ der Lichtstrahlung) bedeutet. Ausserdem ist die Halbwertsbreite der Maxima gleich $1/2 \Delta\lambda$, also im Vergleich zum Abstand der Maxima recht hoch.

Durch hintereinander Anordnen zweier oder mehrerer Platten kann jedoch die Maximalreflexion erhöht sowie die HSB im Vergleich zum Abstand der Maxima verri... den. Hintereinander anordnen heisst aber nicht einfach, die beiden Platten hintereinander aufstellen, sondern Abstand sowie Parallelität der Platten müssen auf Bruchteile von λ genau eingehalten werden. Man kann sich die Kombination zweier Platten wieder als Fabry-Pérot-Interferometer vor-

A N H A N G II

Resonant-Reflektor (R.R.)

Ein R.R. ist ein reflektierendes Element, dessen Reflexion nur in sehr schmalen, sich periodisch wiederholenden Wellenlängenbereichen merklich von Null verschieden ist. R.R. werden als Spiegel in Lasern eingesetzt, wenn von einer grossen Zahl von Moden verschiedener Wellenlänge nur wenige in einem schmalen Frequenzband anschwingen sollen.

Einen Resonant-Reflektor stellt in seiner einfachsten Form eine planparallele Platte aus durchsichtigem Material dar (Glas; für Laser Saphir, wegen der grösseren Haltbarkeit). Eine solche Platte stellt ein Fabry-Perot (F.P.) Interferometer dar, dessen Reflexion und Transmission man mittels der Airyschen Formeln als Funktion der Wellenlänge berechnen kann [6]. Für kleine Reflexion der einen Oberfläche (bei Saphir ca. 7,6 %) ist die reflektierte Intensität der Platte als Funktion der Frequenz ($\frac{c}{\lambda}$) durch eine \sin^2 -Kurve darzustellen. Der Abstand der Reflexionsmaxima $\Delta\lambda$ ist umso kleiner, je dicker die Platte ist und zwar ist

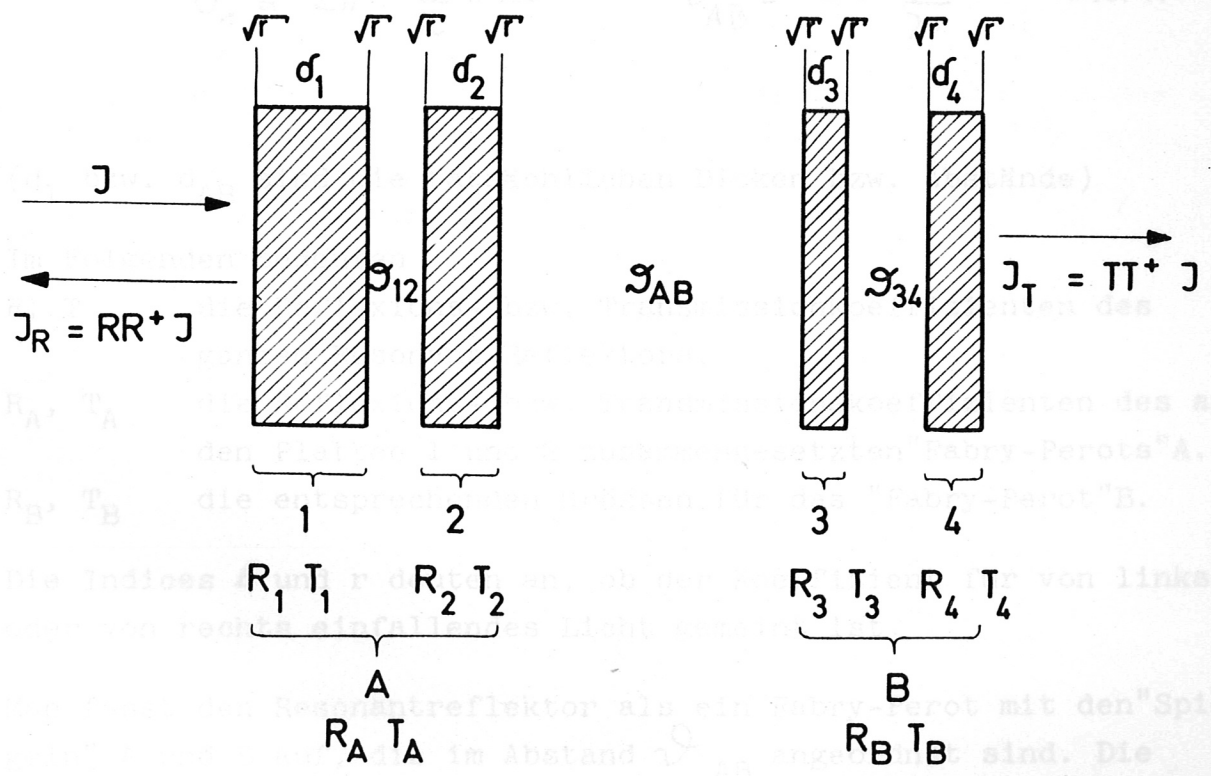
$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{N}$$

wobei N die Ordnung der Interferenz ist (Gangunterschied benachbarter interferierender Bündel in Anzahl von Wellenlängen λ ausgedrückt). Natürlich ist die maximale Reflexion solch eines einfachen Resonant-Reflektors nicht sehr hoch (für Saphir 26 %). Ausserdem ist die Halbwertsbreite (HWB) der Reflexionsmaxima gleich $1/2 \Delta\lambda$, also im Vergleich zum Abstand der selben noch recht hoch.

Durch hintereinander Anordnen zweier oder mehrerer Platten kann jedoch die Maximalreflexion erhöht sowie die HWB im Vergleich zum Abstand der Maxima verringert werden. Hintereinander anordnen heisst aber nicht einfach, die beiden Platten hintereinander aufstellen, sondern Abstand sowie Parallelität der Platten müssen auf Bruchteile von λ genau eingehalten werden. Man kann sich die Kombination zweier Platten wieder als Fabry-Perot-Interferometer vor-

stellen, dessen Reflexion (Transmission) genau wie bei einem einfachen Fabry-Perot berechnet werden kann. Nur muss man anstelle der Reflexionskoeffizienten (Transmission) des Einzelspiegels (die beim normalen F.P. reell sind) die nunmehr komplexen Reflexionskoeffizienten (Transmissionkoeffizienten) einer Platte verwenden.

Als Beispiel wird das Rechenschema für einen R.R., bestehend aus 4 Platten, angegeben:



(*) bedeutet konjugiert. Abb. 12

Die Abbildung 12 zeigt den Aufbau eines Resonant-Reflektors mit 4 Platten in allgemeinsten Form.

\sqrt{r} ist der Reflexionskoeffizient einer einzelnen Oberfläche (ohne zusätzliche Verspiegelung, $\sqrt{r} = \frac{n-1}{n+1}$ mit n = Brechungsindex).

\mathcal{D}_j bzw. \mathcal{D}_j^* bedeuten die Dicken bzw. die Abstände der Platten, ausgedrückt in Vielfachen der Wellenlänge des benutzten Lichts:

$$\mathcal{D}_1 = 2\pi \cdot \frac{d_1}{\lambda} \cdot n \qquad \mathcal{D}_{AB} = 2\pi \frac{d_{AB}}{\lambda} \qquad \text{u. s. w.}$$

(d_1 bzw. d_{AB} sind die tatsächlichen Dicken bzw. Abstände)

Im Folgenden bedeuten

- R, T die Reflexions- bzw. Transmissionskoeffizienten des ganzen Resonant-Reflektors,
- R_A, T_A die Reflexions- bzw. Transmissionskoeffizienten des aus den Platten 1 und 2 zusammengesetzten "Fabry-Perots" A.
- R_B, T_B die entsprechenden Größen für das "Fabry-Perot" B.

Die Indices ℓ und r deuten an, ob der Koeffizient für von links oder von rechts einfallendes Licht gemeint ist.

Man fasst den Resonantreflektor als ein Fabry-Perot mit den "Spiegeln" A und B auf, die im Abstand \mathcal{D}_{AB} angeordnet sind. Die Reflektierte (J_R) bzw. durchgelassene (J_T) Intensität ist

$$J_R = R \cdot R^* J \qquad J_T = T T^* \cdot J$$

(* bedeutet konjugiert komplex).

R, der Reflexionskoeffizient des R.R., wird berechnet als Reflexionskoeffizient des aus den "Spiegeln" A und B gebildeten Fabry-Perots [6]:

$$R = R_A e + T_A^2 \cdot R_B \frac{e^{2i\vartheta_{AB}}}{1 - R_{Ar} \cdot R_B e^{2i\vartheta_{AB}}}$$

Das gleiche Verfahren ergibt den Transmissionskoeffizienten des R.R.:

$$T = T_A \cdot T_B \frac{e^{i\vartheta_{AB}}}{1 - R_{Ar} \cdot R_B e^{2i\vartheta_{AB}}}$$

Die R_A , T_A usw. werden nach den selben Formeln als Reflexions- bzw. Transmissionskoeffizienten der Fabry-Perots A und B mit den "Spiegeln" 1 und 2 bzw. 3 und 4 berechnet, wobei die R_j , T_j die Reflexions- bzw. Transmissionskoeffizienten des "Spiegels" j bedeuten:

$$T_A = T_1 T_2 \frac{e^{i\vartheta_{12}}}{1 - R_1 R_2 e^{2i\vartheta_{12}}}$$

$$T_B = T_3 T_4 \frac{e^{i\vartheta_{34}}}{1 - R_3 R_4 e^{2i\vartheta_{34}}}$$

$$R_{Ae} = R_1 + T_1^2 R_2 \frac{e^{2i\vartheta_{12}}}{1 - R_1 R_2 e^{2i\vartheta_{12}}}$$

$$R_{Ar} = R_2 + T_2^2 R_1 \frac{e^{2i\vartheta_{12}}}{1 - R_1 R_2 e^{2i\vartheta_{12}}}$$

$$R_B = R_{Be} = R_3 + T_3^2 R_4 \frac{e^{2i\vartheta_{34}}}{1 - R_3 R_4 e^{2i\vartheta_{34}}}$$

(R_{Br} kommt in der Rechnung nicht vor, da das Fabry-Perot B nicht von rechts beleuchtet wird.)

Es überrascht zunächst, dass es einen Unterschied zwischen R_{Ae} und R_{Ar} gibt. Dieser Unterschied äussert sich jedoch nur in der Phase, nicht in der Amplitude des reflektierten Lichtes:

$$|R_{Ae}| = |R_{Ar}|$$

(Allgemein bekannt ist dieser Unterschied bei der Reflexion an einer Glas-Luft-Fläche: In der einen Richtung tritt ein Phasensprung π auf, in der anderen nicht.)

Als letztes müssen nur noch die Transmissions- und Reflexionskoeffizienten der einzelnen Platten (1...4) berechnet werden. Dies erfolgt mittels der Airy-Formeln für ein F.P. mit dem Reflexionskoeffizient $\tilde{r} = \frac{n-1}{n+1}$ und dem Spiegelabstand δ_j [6] :

$$R_j = \sqrt{r} \frac{1 - e^{2i\delta_j}}{1 - r e^{2i\delta_j}}$$

$$T_j = \frac{(1-r) e^{i\delta_j}}{1 - r e^{2i\delta_j}}$$

$$j = 1 \dots 4$$

Genau genommen müsste auch bei den R_j zwischen R_{jl} und R_{jr} unterschieden werden. Aus Symmetriegründen ergibt sich jedoch, dass $R_{jl} = R_{jr} = R_j$ ist.

Die analytische Berechnung von J_R führt zu langen, unübersichtlichen Formeln. Daher wurden Spezialfälle numerisch berechnet.

Der übersichtlichste Fall ist der, bei dem alle 4 Platten gleich dick und die Abstände Platten in Wellenlängen ausgedrückt gleich der Plattendicke sind ($d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_{12} = d_{34} = d_{AB}$). In diesem Fall ergibt sich für Saphir ($n = 1,76$) eine maximale Reflexion von 96 % bei einer Halbwertsbreite der Peaks von ca. $1/4$ ihres Abstandes (Abb. 13). Benutzt man unterschiedliche Plattendicken und -abstände, so wird die Reflexionskurve komplizierter. Die Nebenmaxima werden mehr oder weniger betont und es kommen zusätzliche Maxima hinzu. Ein interessanter Fall (zumindest im Hinblick auf die Herstellung des Filters) ist der, bei dem die Plattenabstände klein sind gegen die Plattendicke (z.B. $d_1 = d_2 = d_3 = d_4; d_{12} = d_{34} = d_{AB} = 1/2000 d_1$). Abb. 14 zeigt den Verlauf

der Reflexion in dem Wellenlängenbereich, für den der Plattenabstand $\approx \lambda/4$ beträgt: $d_1 = (500 \dots 501) \cdot 2\pi$. Für die halbe Wellenlänge ($d_1 = (1000 - 1001) 2\pi$) wirkt der Resonant Reflektor wie ein einfaches Fabry-Perot Interferometer mit der Dicke $4 d_1$ (Die Abstände der Platten machen sich nicht bemerkbar (Abb. 15)). Für Wellenlängen im Zwischenbereich treten entsprechend kompliziertere Übergangskurven auf.



Abb. 15 Reflexion eines Resonant-Reflektors bei den die optischen Plattenabständen gleich den Abständen $\lambda/4$ sind, ($N = 0, 1, 2 \dots$)

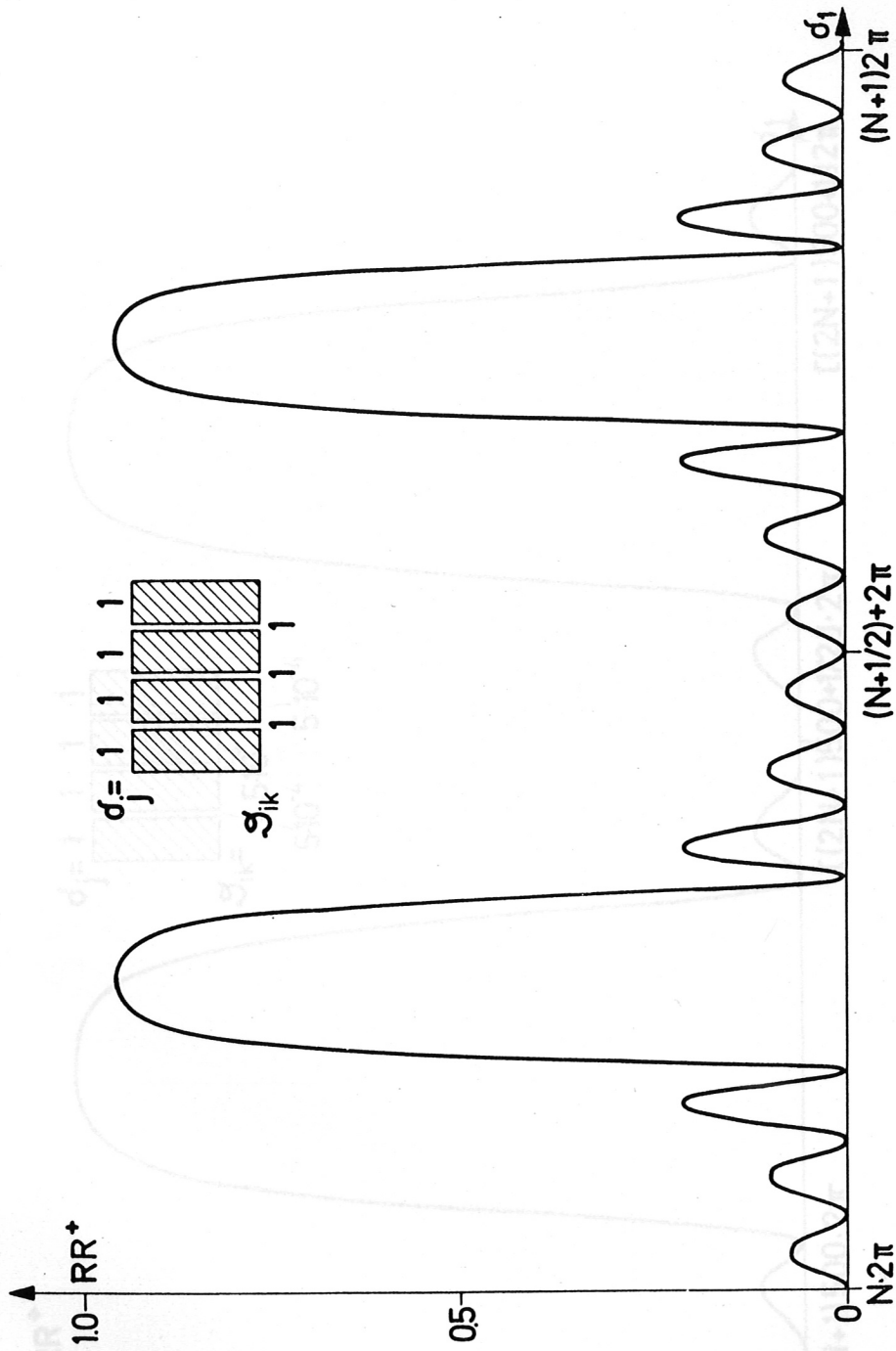


Abb. 13
 Reflexion eines Resonant-Reflektors bei dem die optischen Plattendicken d gleich den Abständen s sind. ($N = 0, 1, 2, \dots$)

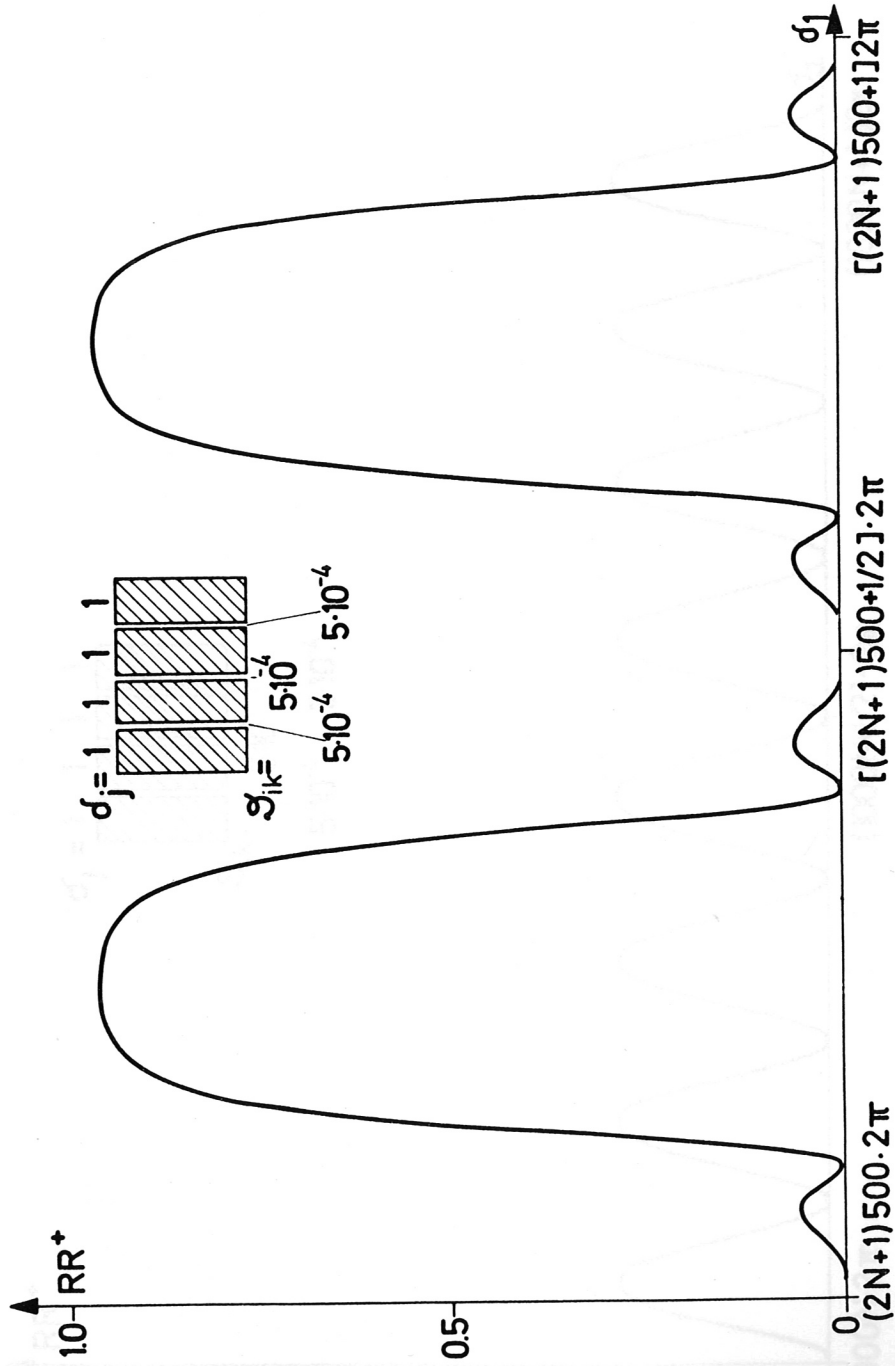


Abb. 14
 Reflexion eines Resonant-Reflektors bei dem die optischen Plattendicken δ
 2000 mal so gross sind wie die Abstände ϑ . ($N = 0, 1, 2, \dots$)

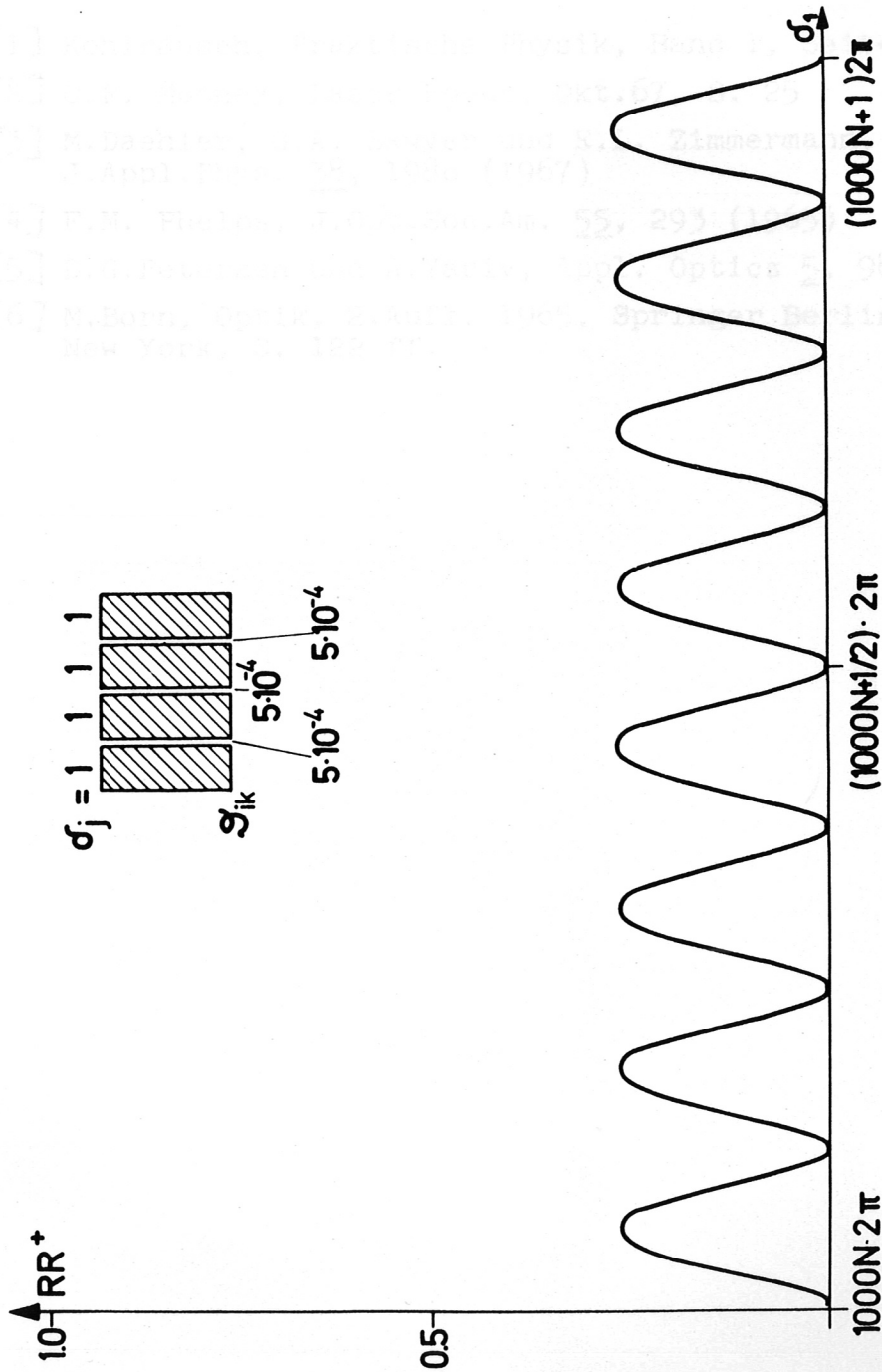


Abb. 15
 Reflexion desselben Resonant-Reflektors wie in Abb. 14, jedoch in einem
 anderen δ -Bereich ($N = 0, 1, 2, \dots$)

Literatur

- [1] Kohlrausch, Praktische Physik, Band 1, Seite 608
- [2] C.F. Mooney, Laser Focus, Okt.67, S. 25
- [3] M.Daehler, G.A. Sawyer und E.L. Zimmermann,
J.Appl.Phys. 38, 1980 (1967)
- [4] F.M. Phelps, J.Opt.Soc.Am. 55, 293 (1965)
- [5] D.G.Petersen und A.Yariv, Appl. Optics 5, 985 (1966)
- [6] M.Born, Optik, 2.Aufl. 1965, Springer Berlin, Heidelberg,
New York, S. 122 ff.