

Zweidimensionale Thetapinch-Dynamik
bei transversalen Magnetfeldern

D. Duchs

IPP 1/81

April 1968

I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K
G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

IPP 1/81

D. Düchs

Two Dimensional Theta Pinch
Dynamics with Transverse
Magnetic Fields

Zweidimensionale Thetapinch-Dynamik bei transversalen Magnetfeldern

D. Düchs

Abstract

IPP 1/81

April 1968

The complete set of equations for the two fluid model of a fully ionized plasma, the parameters of which depend on two spatial dimensions and time, is solved by a computer program. This program is applied to the problem of plasma rotation in a theta pinch caused by transverse magnetic fields. The results show that the plasma does not rotate like a cylindrical rigid body, rather the velocity varies strongly with azimuth. Moreover, the rotation is changing direction along the radius. Therefore transfer of angular momentum from outside is not necessary for the existence of rotation. Even in small transverse fields (30-500 Gauss) the rise time for the angular velocity is of the order of 10^{-7} sec and very short compared with those obtained from previous theoretical models.

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

	Seite
IPP 1/81 D. Düchs	
Two Dimensional Theta Pinch Dynamics with Transverse Magnetic Fields	1
(in German)	2
April 1968	
1. Ziel der Arbeit	4
2. Gültigkeitsbereich der Ergebnisse	8
3. Rechenprogramm	12
Ergebnisse	
<u>Abstract</u> Übersicht über die Ergebnisse	12
Größenordnungen	23
<p>The complete set of equations for the two fluid model of a fully ionized plasma, the parameters of which depend on two spatial dimensions and time, is solved by a computer program. This program is applied to the problem of plasma rotation in a theta pinch caused by transverse multipole fields. The results show that the plasma does not rotate like a cylindrical rigid body, rather the velocity varies strongly with azimuth. Moreover the rotation is changing direction along the radius. Therefore transfer of angular momentum from outside is not necessary for the existence of rotation. Even in small transverse fields ($B \sim 500$ Gauss) the rise time for the angular velocity is of the order of 10^{-7} sec. and very short compared with those obtained from previous theoretical models.</p>	
Zusammenfassung	60
Literaturverzeichnis	67

Inhaltsverzeichnis

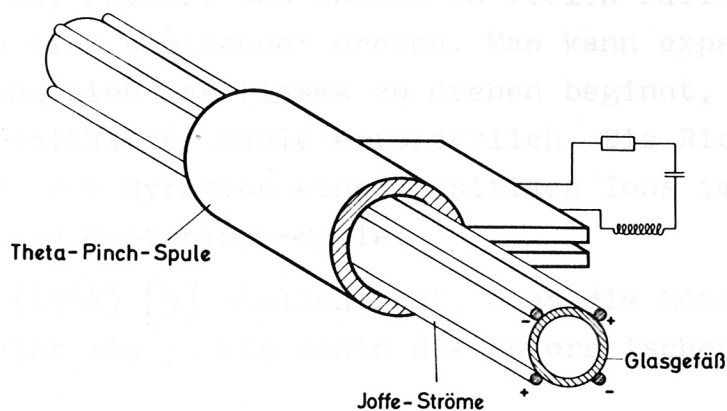
	Seite
Übersicht	
1. Einleitung	1
2. Literatur	2
Modell	
3. Ziel der Arbeit	4
4. Gültigkeitsbereich der Ergebnisse	8
5. Rechenprogramm	12
Ergebnisse	
6. Übersicht über die Ergebnisse	12
7. Grössenordnungen	23
a) Elektrische Felder und Stromdichten	
b) Äussere Kräfte	
8. Mechanismus der Aufspaltung	32
9. Drehimpuls	42
10. Abhängigkeit der Rotation von p_o , B_{zo} und B_x	42
11. Vierpol	48
12. Geschwindigkeiten der Plasmakomponenten	55
Fehlerabschätzungen	
13. Verwendung von \mathcal{N} anstelle von \mathcal{N}_i oder \mathcal{N}_e	58
14. Schleichende Diffusion	61
15. Stromträgheit	61
16. Viskosität	62
17. Axiale Geschwindigkeit	63
Zusammenfassung	66
Literaturverzeichnis	67

1. Einleitung

Eines der wichtigsten Ziele der Plasmaphysik ist es, ein Deuteriumplasma auf Temperaturen der Grössenordnung 10^8 °K aufzuheizen und es dann etwa 10^{-2} Sekunden lang genügend dicht (ca. 10^{17} cm $^{-3}$) zusammenzuhalten [1].

Durch eine schnelle magnetische Kompression des Plasmas bei Theta-pinch-Experimenten gelingt die Erzeugung von ungefähr 10^7 °K bei Teilchenzahldichten von einigen 10^{16} cm $^{-3}$. Das Prinzip des Theta-pinches ist in Abb. 1 dargestellt. Die zusätzlich eingezeichneten Joffeströme können ein überlagertes Multipolfeld erzeugen.

Abb. 1



Über die Eigenschaften der Physikalien und Inhomogenitäten des B_z -Feldes - z.B. aufgrund der einseitigen Stromführung zur Theta-pinch-Spule (s. Abb. 1) - und überlagerten, transversaler Multipolfelder -

Der Einschluss dieser komprimierten Plasmen dauert aber nur etwa 10^{-5} Sekunden. Gründe dafür sind z.B. Verluste an geladenen Teilchen längs der Magnetfeldlinien in axialer Richtung; daneben treten unerwünschte radiale Driften der Plasmasäule zu den Gefässwänden auf. Sehr häufig beobachtet man auch eine schnelle Rotation des Plasmas, die zu Abweichungen von der rotationssymmetrischen Form und schliesslich zu seinem Zerfall führt. Die Entwicklung derartiger Drehbewegungen soll in den folgenden Abschnitten, deren englische Fassung zur Veröffentlichung vorgesehen ist, untersucht werden.

2. Literatur

Die Literatur über dieses wichtige Gebiet der Plasmadynamik ist sehr umfangreich. Im Jahr 1960 versuchten K. Boyer et al. [2] eine kleine azimutale Anisotropie in der Neutronenemission durch die Annahme einer Plasmarotation zu erklären. Ein direkter Nachweis gelang mit stereoskopischer Kurzzeitphotographie; es wurden Einzelbilder mit Hilfe von Kerrzellen, Schmierkamera- und kinematographische Aufnahmen gemacht. Auch Magnetfeldsonden dienten vereinzelt zur Beobachtung. Verschiedene Autoren (Rostoker und Kolb (1961) [3], Griem et al. (1962) [4], Little et al. (1962) [5], Bodin et al. (1962) [6], Kvaratskhava et al. (1963) [7], Bodin and Newton (1963) [8]) finden, dass der Querschnitt der Plasmasäule nach einigen Mikrosekunden oval wird, rotiert und danach in vielen Fällen in zwei Fäden aufspaltet, die sich umeinander drehen. Man kann experimentell nicht entscheiden, wann sich das Plasma zu drehen beginnt, denn dazu sind etwa 10% Exzentrizität der Säule erforderlich. Die Richtung der Rotation ist stets die der Gyration eines positiven Ions im Magnetfeld zwischen Plasma und Thetapinch-Spule.

Beckner und Banister (1964) [9] stellen fest, dass die Rotation bedeutend früher erscheint als es bis dahin die theoretischen Modelle vorhergesagt hatten.

Über den Einfluss von Asymmetrien und Inhomogenitäten des B_z -Feldes - z.B. aufgrund der einseitigen Stromzuführung zur Thetapinch-Spule (s. Abb. 1) - und überlagerter, transversaler Multipolfelder - z.B. Joffe-Ströme (s. Abb. 1) - auf Drift, Rotation und Stabilität des Plasmas berichten Little und Quinn (1963) [10], Hintz et al. (1963) [11], Miyamoto und Ohnishi (1964) [12], Takeda et al. (1964) [13], Kolb et al. (1965) [14], Hintz und Kolb (1965) [15], sowie Goldman und Hurwitz (1965) [16].

Schon Störfelder von etwa 100 Gauss können zu Rotationsinstabilitäten führen. Eine besonders starke Einwirkung zeigt sich bei überlagerten Feldern, die schon vor der Zündung der Thetapinch-Entladung eingeschaltet sind.

Keilhacker et al. (1965) [17] messen die Dopplerverschiebung der Spektrallinien von kleinen Kohlenstoffmengen, die dem Deuteriumgas zugesetzt wurden. Sie finden damit Rotation schon während der ersten Implosion des Plasmas; ausserdem beobachten sie, im Gegensatz zu früheren Veröffentlichungen, auch Drehungsrichtungen entgegen der Gyration eines Ions im äusseren Feld, die noch dazu nicht mit denen des nachfolgenden, verformten (d.h. auf photographischen Aufnahmen sichtbar rotierenden) Plasmas übereinstimmen müssen.

Theoretische Betrachtungen über die Stabilität von rotierenden Plasmen wurden angestellt von Rosenbluth et al. (1962) [18] für dünne Plasmen mit $\beta \rightarrow 0$, von Rostoker und Kolb (1961) [3], von Taylor (1962) [19] und von Haines (1965) [20].

Es gibt ausserdem eine Reihe von Theorien über den Ursprung des Drehimpulses. Nach Roberts (1962) [21] wird im Plasma durch die Wechselwirkung des azimuthalen Stromes mit dem B_z -Feld eine radiale Hallspannung erzeugt; ausserhalb der Spule geschieht an der Glaswand ein Kurzschluss, so dass radiale Stromdichten entstehen, die zusammen mit B_z das Plasma zum Drehen bringen. Die Wand nimmt den entgegengesetzt gleichen Drehimpuls auf.

Taylor (1962) [19] lässt den Kurzschluss von E_r zu Beginn der Entladung stattfinden, während das Plasma noch an den Glaswänden liegt; danach ist das Plasma elektrisch isoliert.

Nach Bostick und Wells (1963) [22] ist die Drehrichtung des Plasmas in der Nähe der Spulenenden der im Inneren der Spule entgegengesetzt. Der Gesamtdrehimpuls bleibt somit gleich Null.

Ein anderer Mechanismus beruht auf der axialen Hallfeldstärke. Sie tritt bei Magnetfeldkomponenten senkrecht zur Spulenachse (transversal) auf (Haines (1963) [23], Thonemann und Kolb (1964) [24]). Der Drehimpuls wird infolge der Verzerrung der transversalen Magnetfelder auf äussere Leiter übertragen.

Zwei weitere Modelle setzen eine Viskosität voraus: im Drucktensor werden keine Stösse berücksichtigt, wohl aber Korrekturen für endlichen Larmorradius angebracht. Velikhov (1962) [25] findet damit,

dass die Rotationsrichtung im Plasma längs des Radius umkehrt. Bei Haines (1965) [20] bekommt das Plasma bei der anfänglichen Wandberührung durch Reibung einen Drehimpuls.

Eine kritische Übersicht über die bisherigen Theorien zur Rotation gibt Haines (1965) [20]; einige Modelle, die hier nicht erwähnt sind, halten darin seiner Kritik nicht stand.

3. Ziel der Arbeit

In den eben erwähnten theoretischen Modellen werden eine Reihe von Annahmen gemacht, die zumindest nicht für alle Phasen einer Thetapinch Entladung gültig sind. So geht man z.B. von der Vorstellung eines oder mehrerer Plasmateile aus, die wie starre Körper rotieren. Radiale Bewegungen werden ausser Acht gelassen, zeitliche Änderungen - z.B. in der Leitfähigkeit oder in den Temperaturen - nicht betrachtet. Mathematisch ausgedrückt verkürzt man das Gleichungssystem des Zweiflüssigkeitsmodells so lange, bis einfache algebraische Gleichungen oder gewöhnliche Differentialgleichungen vorliegen. Dazu werden Kopplungsterme gestrichen, die Abhängigkeit der gesuchten Funktionen von gewissen Koordinaten entweder von vornherein nicht berücksichtigt oder durch Mittelungen beseitigt. Diese Vernachlässigungen sind meistens nicht begründet.

Im folgenden soll umgekehrt verfahren werden. Es wird versucht, möglichst viele Effekte mit ihren Kopplungen untereinander zu erfassen und ihre Bedeutung abzuschätzen. Das ist nur mit Hilfe von numerischen Lösungsverfahren, d.h. für spezielle Bedingungen möglich. Eine gewisse Allgemeingültigkeit der Aussagen kann man - analog den Experimenten - aufgrund der numerischen Behandlung des Problems für mehrere Sätze von Anfangs- und Randbedingungen gewinnen.

Das Flüssigkeitsmodell (Schlüter (1950) [30]) hat sich beim Verständnis der Thetapinch-Entladungen bis heute am besten bewährt. Eindeutige Widersprüche mit Experimenten sind mir nicht bekannt.

+ $\frac{2}{3} \text{ div } (n_i \text{ grad } T_i)$

Die Gleichungen für dieses Modell kann man durch Momentenbildung mit der Geschwindigkeit aus der Boltzmannschen Gleichung herleiten (siehe z.B. [31]). Das folgende System (1) bis (7) enthält nur solche Glieder, die auch in den Rechnungen berücksichtigt sind.

$$(1) \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n \cdot v) = 0 ;$$

n ist die Teilchenzahldichte; von (1) an ist die Quasineutralitätsbedingung $n_i = n_e = n$ (Index i : Ionen; Index e : Elektronen) für Ionen mit der Kernladung $Z = 1$ verwendet, die beim Thetapinch für Dichten über 10^{10} cm^{-3} gültig ist (Chodura (1964) [32]).

Bezeichnet man mit m die Teilchenmasse, dann bedeutet

$$v = \frac{m_i v_i + m_e v_e}{m_i + m_e} \quad \text{die Schwerpunkts-} \text{geschwindigkeit, die man}$$

mit $m_i \gg m_e$ aus

$$(2) \quad m_i \left[\frac{\partial (n \cdot v)}{\partial t} + n \cdot (v \operatorname{grad}^2) v + v \operatorname{div}(n v) \right] = - \operatorname{grad}^2 (p_i + p_e) + \frac{1}{c} (j \times B)$$

berechnen kann. p_e und p_i stehen für den Partialdruck der Elektronen bzw. der Ionen. Sie sind hier als Skalare angesetzt. Das ist bei Dichten über 10^{15} cm^{-3} und mässig hohen Temperaturen erlaubt, weil die Stossfrequenz der Ionen genügend hoch ist und dann das Gas drei Freiheitsgrade hat [37]. Daher darf das Modell zunächst auch nicht auf Experimente mit niedrigem Fülldruck, wo auch hohe Temperaturen zu erwarten sind, angewendet werden (siehe Tab. 2).

Die Gleichungen für den Partialdruck p_e bzw. p_i lauten:

$$(3) \quad \frac{\partial p_e}{\partial t} + \operatorname{div}(p_e \cdot v) = - \frac{2}{3} p_e \operatorname{div} v - \frac{1}{t_{eq}} (p_e - p_i) + \frac{2}{3} \operatorname{div}(k_e \operatorname{grad}^2 T_e) + \frac{2}{3} n j^2$$

und

$$(4) \quad \frac{\partial p_i}{\partial t} + \operatorname{div}(p_i \cdot v) = - \frac{2}{3} p_i \operatorname{div} v + \frac{1}{t_{eq}} (p_e - p_i) + \frac{2}{3} \operatorname{div}(k_i \operatorname{grad}^2 T_i) .$$

Der elektrische Widerstand η , die Koeffizienten der Wärmeleitung K_i, K_e und des Temperatenausgleichs $1/t_{eq}$ haben die gleiche Form wie in [33], wenn man dort die Korrekturen für das neutrale Gas streicht. Eine Aufspaltung von Koeffizienten senkrecht und parallel zum Magnetfeld wurde nicht vorgenommen, so dass die Störungen der Thetapinch-Symmetrie (Querfelder usw.) nicht zu gross sein dürfen. Der thermoelektrische Effekt scheint nur bei langsamen (\dot{L} sehr viel kleiner als in Tab. 1 angegeben) Entladungen bedeutsam zu sein [37] und ist daher hier vernachlässigt. Dasselbe geschah mit Energieverlusten durch Strahlung, die man nach [39] für ein reines Deuteriumplasma als geringfügig abschätzen kann. Zum vollständigen System fehlen noch die Gleichungen für die elektrische Feldstärke \mathcal{E} , die magnetische Induktion \mathcal{L} und die Stromdichte j :

$$(5) \quad \mathcal{E} = -\frac{1}{c}(\boldsymbol{\omega} \times \mathcal{L}) + \frac{1}{n \cdot e \cdot c}(j \times \mathcal{L}) - \frac{1}{n \cdot e} \operatorname{grad} p_e + \\ + \frac{m_e}{m_i} \frac{1}{n \cdot e} \operatorname{grad} p_i + \eta j;$$

$$(6) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathcal{E};$$

$$(7) \quad j = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathcal{L}.$$

In Gleichung (7) ist der Verschiebungsstrom weggelassen, der keine Rolle spielt, wenn $\frac{\omega^2}{c^2} \ll 1$ gilt; ω liegt bei Thetapinch-Entladungen nämlich unter 10^8 cm sec^{-1} (c ist die Vakuumlichtgeschwindigkeit $3 \cdot 10^{10} \text{ cm sec}^{-1}$).

Einige weitere Vereinfachungen durch die Vernachlässigung von innerer Reibung, Stromträgheit, schleichender Diffusion usw. werden im Anschluss an die Diskussion der Ergebnisse noch näher untersucht.

Die Gleichungen sind für ein Plasma aus Ionen und Elektronen angeschrieben. Im allgemeinen haben in den Anfangsphasen einer Entladung noch andere Komponenten wie z.B. neutraler Wasserstoff [34] oder H_2 , H_2^+ , H^- oder Verunreinigungen (O, C) grösseren Einfluss. Aus rechen-

technischen Gründen (Grösse des Speichers und Dauer der Rechnung bei einer IBM-7090 Rechenmaschine) war es jedoch nicht möglich, mehr als zwei Flüssigkeiten in das Modell aufzunehmen.

Daraus ergibt sich eine Beschränkung auf Entladungen mit guter Vorionisierung oder auf spätere Phasen. In beiden Fällen bereitet die Wahl der Anfangsbedingungen Schwierigkeiten, da man einige Plasma-parameter noch nicht genügend genau messen kann.

Die gleichen rechentechnischen Gründe gestatten es aber auch noch nicht, ein Zweiflüssigkeitsmodell durchzurechnen, in dem die gesuchten Funktionen n , p_e , p_i und \mathcal{L} von allen drei Raumkoordinaten und der Zeit abhängen. Aus

$$\operatorname{div} \mathcal{L} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} B_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} B_z = 0$$

sieht man, dass zur Behandlung von transversalen Streufeldern, die ja nach Abschnitt 2 als Ursache für Rotation in Frage kommen, auch mindestens zwei Koordinaten notwendig sind. z sei die Richtung der Achse der Thetapinch-Spule.

Wählt man r und z , dann kann man z.B. den Einfluss der Feldlinienkrümmung am Spulenrand oder in magnetischen Spiegeln studieren. Roberts et al. (1963) [35] und Schneider und Hertweck [36] haben für ein Einflüssigkeitsmodell solche Rechenprogramme geschrieben. Doch stösst man dabei auf das sehr schwierige Problem der Randbedingungen zum Aussenraum. Ausserdem kann man damit die Wirkung von transversalen Streufeldern und Joffeströmen nicht erfassen.

Bei der Wahl von r und dem Winkel φ sind die Randbedingungen einfacher; notfalls kann man für die Vakuumfelder das Koordinatennetz auf das Gebiet zwischen Glasgefäss und Spule ausdehnen.

In z -Richtung gelten die Rechnungen dann nur für den Raum innerhalb der Spule, wo die Funktionen nicht von z abhängen. Von den Enden her wandern aber Störungen in den Innenraum, d.h. in der Spulenmitte gilt die Theorie für Zeiten

$$\Delta t < \frac{\frac{1}{2} \ell}{v} ,$$

wobei ℓ die Spulenlänge und v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Störungen bedeuten. Typische Werte sind $\ell \geq 20$ cm, $v \approx 10^7$ cm sec⁻¹ und damit $\Delta t \approx 10^{-6}$ sec. Natürlich können auch Rotationsmechanismen wie sie Roberts [21] und Bostick und Wells [22] vorschlagen bei dieser Koordinatenwahl nicht behandelt werden.

4. Gültigkeitsbereich der Ergebnisse

Einige Probleme, die man mit einer auf solche Weise begrenzten Theorie angehen kann, sind:

Asymmetrien und Inhomogenitäten des B_z -Feldes beim Thetapinch (Rotation und Drift des Plasmas);

Störungen in der räumlichen Verteilung des Plasmas, die zu Instabilitäten führen können (z.B. Rayleigh-Taylor-Instabilitäten);

Einfluss von überlagerten Stabilisierungsfeldern (z.B. Joffe-Ströme);

Dynamik einer linearen Cusp-Anordnung (z.B. Rückwirkung des Plasmas auf die Feldkonfiguration).

Im Hinblick auf das allgemeine Interesse wird hier - wie schon in den vorhergehenden Abschnitten angedeutet - der Einfluss von transversalen Multipolfeldern auf eine Thetapinch-Entladung untersucht. Die Formeln für solche Felder im Vakuum lauten nach K. Uo (1963) [38]:

$$(8) \quad B_r = B_0 \cdot \frac{\beta^{m-1} (1 + \beta^{2m}) \sin(m\varphi)}{(1 + \beta^{2m})^2 - 4\beta^{2m} \cos^2(m\varphi)}$$

und

$$(9) \quad B_\varphi = B_0 \cdot \frac{\beta^{m-1} (1 - \beta^{2m}) \cdot \cos(m\varphi)}{(1 + \beta^{2m})^2 - 4\beta^{2m} \cos^2(m\varphi)}$$

wobei $B_0 = - \frac{\mu_0 m J}{\pi \cdot a}$ und $\beta = \frac{r}{a}$ angeben. Die übrigen Bezeichnungen gehen aus Abb. 2 hervor, welche den Fall $m = 2$ qualitativ darstellt.

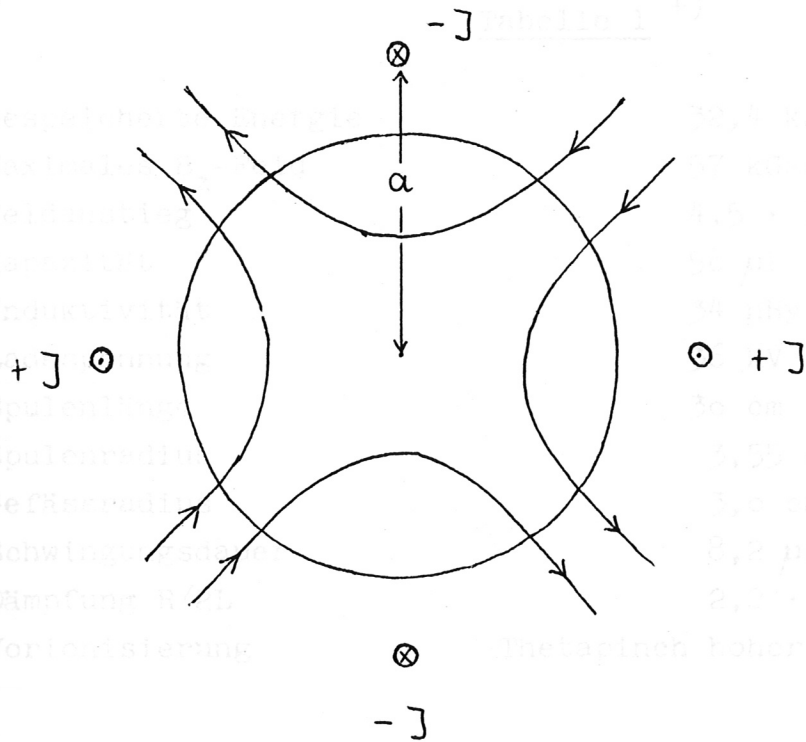


Abb. 2

An dieser Anordnung wurden zum Teil die von Kellbacher et al. [17] berichteten Experimente gemacht. Als Füllgas diente Deuterium. Da die auffälligsten Teile solcher Felder sind Gebiete, wo die Feldlinien parallel zur Gefässwand und solche, wo sie senkrecht dazu verlaufen. Man wird erwarten, dass sich die physikalischen Vorgänge an diesen beiden Stellen am meisten voneinander unterscheiden. Dann ist es aber zweckmässig, den einfachsten Fall mit diesen Eigenschaften zu studieren. Dazu werden einmal $m = 1$ gesetzt und zweitens die Ströme weit vom Gefässrand weg ($Q \rightarrow \infty$) verschoben. Dann bleiben nur noch die mittleren geraden Feldlinien im Gefässbereich, d.h. es herrscht ein homogenes Querfeld, wie es auch experimentell in [14] und [17] angewendet ist.

Die Rechnungen sind bis jetzt durchgeführt für einen Thetapinch mittlerer Grösse bezüglich der Anstiegszeit und des Maximums des B_z -Feldes. Seine Daten sind in Tab. 1 aufgeführt.

*) Institut für Plasmaphysik, Garching. Thetapinch Isar III, [44]

Tabelle 1 +)

Gespeicherte Energie	32,4 kJ
Maximales B_z -Feld	57 kGauss
Feldanstieg	$4,5 \cdot 10^{10}$ Gauss sec^{-1}
Kapazität	50 μF
Induktivität	34 nHy
Ladespannung	36 kV
Spulenlänge	30 cm
Spulenradius	3,55 cm
Gefässradius	3,0 cm
Schwingungsdauer	8,2 μsec
Dämpfung R/2L	$2,2 \cdot 10^{-2}$ μsec^{-1}
Vorionisierung	Thetapinch hoher Frequenz oder z-Pinch

An dieser Apparatur wurden zum Teil die von Keilhacker et al. [17] berichteten Experimente gemacht. Als Füllgas diente Deuterium. Da keine Messungen über Anfangswerte vorlagen, waren (mit einer Ausnahme) homogene Verteilungen von Dichte, Temperaturen und B_z -Feld über den Querschnitt des Gefäßes die nächstliegenden Annahmen. Die transversalen Felder sollen von stationären Strömen erzeugt werden und bis zum Beginn der Thetapinch-Entladung das vorher vollständig ionisierte Plasma durchdrungen haben (Vakuumsfeldkonfiguration). Das entspricht den in Abschnitt 2 erwähnten Experimenten, bei denen diese Felder vor der Zündung des Thetapinches schon eingeschaltet waren.

Wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit von der z-Koordinate (s. Abschnitt 3) und um Rechenzeit zu sparen, wurde in der Regel nur die Phase der ersten Implosion behandelt, das sind Zeiten $\Delta t < 0,5 \mu\text{sec}$.

Wo nichts anderes erwähnt ist, gilt für $t = 0$:

+) Institut für Plasmaphysik, Garching, Thetapinch Isar III, [44]

$$\begin{aligned}
 T_e(r, \varphi) &= 2 \text{ eV;} \\
 T_i(r, \varphi) &= 2 \text{ eV;} \\
 v_r(r, \varphi) &= 0; \\
 v_\varphi(r, \varphi) &= 0.
 \end{aligned}$$

Variiert wurden n , B_z und die transversalen Felder. Eine Übersicht über die gerechneten Fälle gibt die Tabelle 2. Der Fülldruck bezieht sich auf Moleküle D_2 bei Normaltemperatur, die Anfangsdichte auf die Zahl der Ionen D^+ (bzw. der Elektronen).

Tabelle 2

Fall	Fülldruck mTorr	Dichte cm ⁻³	B _z -Feld k ^Z -Gauss	Transvers. Feld m ⁺)	B _x Gauss
1	40	2,8 · 10 ¹⁵	+1 (1↑)	1	500
2	80	5,5 · 10 ¹⁵	+1 (1↑)	1	500
3	120	8,4 · 10 ¹⁵	+1 (1↑)	1	500
4	40	2,8 · 10 ¹⁵	-1 (1↓)	1	500
5	80	5,6 · 10 ¹⁵	-1 (1↓)	1	500
6	80	5,6 · 10 ¹⁵	0	1	500
7	80	5,6 · 10 ¹⁵	+1 (1↑)	1	100
8	80	5,6 · 10 ¹⁵	+1 (1↑)	1	1000
9	42,5	rad. Profil 3 · 10 ¹⁶ ↔ 5 · 10 ¹⁴	rad. Profil 1 ↔ 25 (1↑)	1	500
10	80	5,6 · 10 ¹⁵	+1 (1↑)	2	0 - 1100

+) m = 1 : homogenes transversales Magnetfeld;

m = 2 : Vierpolfeld durch Joffe-Ströme.

5. Rechenprogramm

Das Koordinatennetz für die numerische Rechnung ist zeitlich fest. Aus früheren Berechnungen einer zylindersymmetrischen Thetapinch-Dynamik ergab sich, dass mindestens 30 - 40 Gitterpunkte längs des Radius notwendig sind. Um z.B. sicherzustellen, dass ein homogenes Querfeld auch numerisch wirbelfrei ist, sollte für die Winkelkoordinate $\frac{\sin(\Delta\varphi)}{\Delta\varphi}$ möglichst nahe bei 1 liegen, wobei mit $\Delta\varphi$ die Winkeldifferenz zwischen den Koordinatenpunkten bezeichnet wird.

$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{18}$ genügt nur bei schwacher Winkelabhängigkeit der Plasma-parameter. Dimensioniert ist das Programm für 45 Winkelteile.

Soweit als möglich wurden die Differentialgleichungen für jeweils ein Volumenelement in integraler Form benutzt, um Fehler durch Interpolationen zu verhindern. Dadurch kann man z.B. die Massenerhaltung erzwingen. Der Energiesatz für das Gesamtsystem dient zur Kontrolle der Rechnung.

Das Differenzenschema ist bezüglich der Zeit explizit geschrieben. Eine ausführliche Beschreibung des Programms soll als Laborbericht des Instituts für Plasmaphysik, Garching, erscheinen.

6. Übersicht über die Ergebnisse

Die einzelnen numerischen Experimente werden im folgenden "Fälle" genannt mit einer Nummer, die sich auf Tab. 2 bezieht. Die Bildserie 1 gibt einen Überblick über den zeitlichen Verlauf der Dynamik bis zur ersten Kompression. Sie zeigt wie im Experiment die Momentaufnahmen mit einer Linsenkranzkamera für aufeinanderfolgende Zeitpunkte die Verteilung der Strömungsvektoren $n \cdot \mathcal{W}$ über den Plasmaquerschnitt. Die Länge der Vektoren ist deren Betrag proportional. Eine für alle Zeitpunkte feste Normierung erwies sich als unbrauchbar, deshalb sind die Einheiten für jedes Bild eingezeichnet. Die Vektoren gehören zu dem Ortspunkt, den ihre Mitte angibt. Man sieht sofort, dass die radiale Thetapinch-Dynamik dominierend ist. Der Charakter der Strömung ist in den Fällen 1 - 8 gleich; hier ist Fall 1 ausgewählt, weil bei niedrigem Fülldruck die Abweichungen von der rein radialen Bewegung besonders deutlich sind.

$t = 170 \text{ nsec}$

50E

$t = 221 \text{ nsec}$

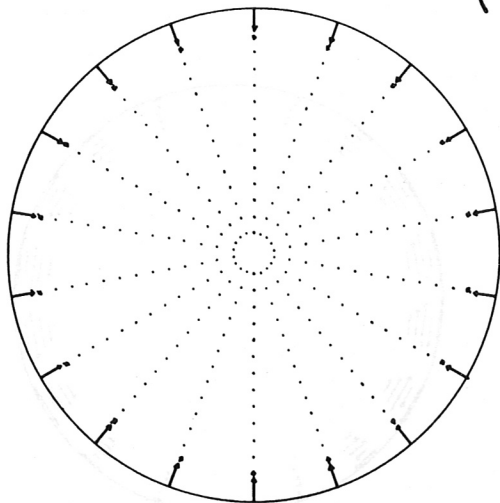
50E

$1E = 10^{10} \text{ cm sec}^{-1} \text{ cm}^{-3}$

STRÖMUNG

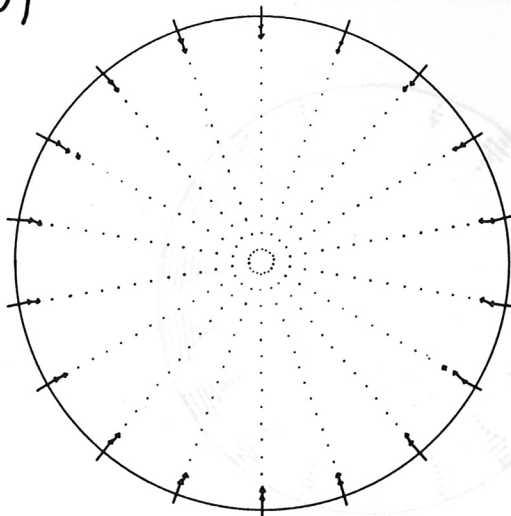
Bildserie 1

($\eta \cdot \omega$)



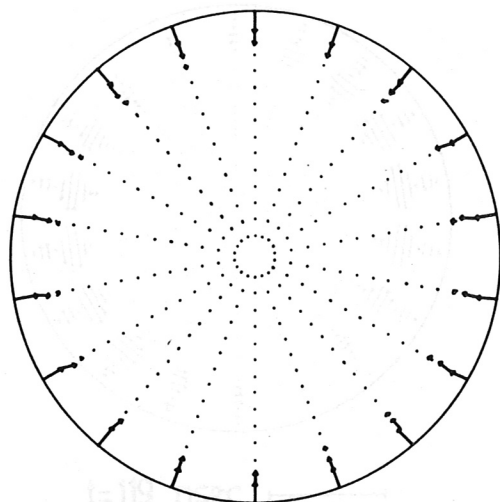
t=15 nsec

$\overline{1/10E}$



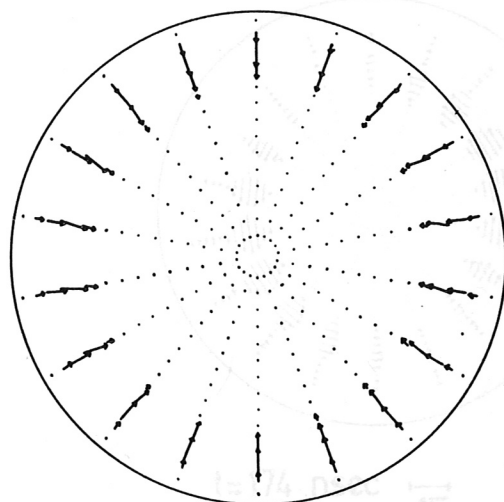
t=34 nsec

$\overline{1E}$



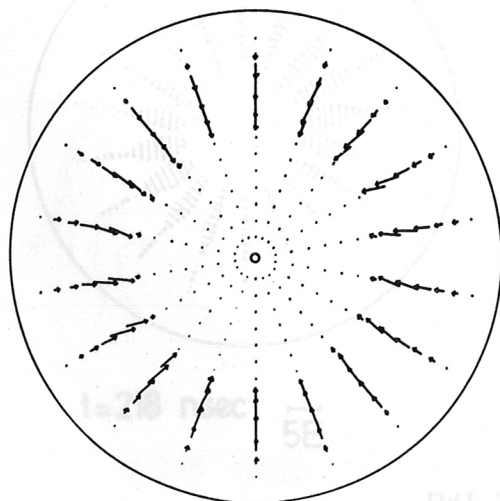
t=65 nsec

$\overline{10E}$



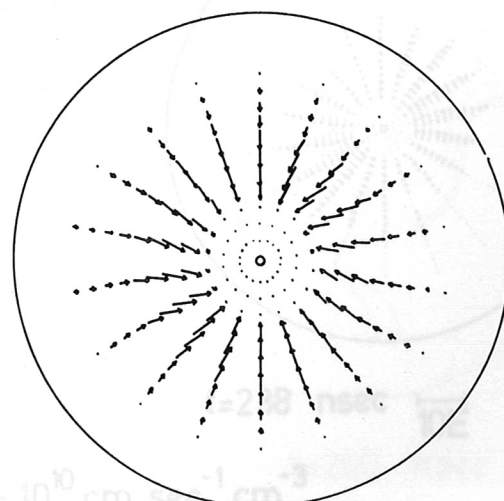
t=123 nsec

$\overline{10E}$



t=170 nsec

$\overline{50E}$



t=221 nsec

$\overline{50E}$

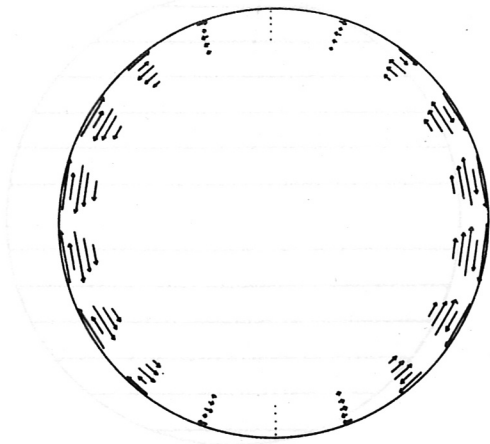
$1E = 10^{10} \text{ cm sec}^{-1} \text{ cm}^{-3}$

ROTATION

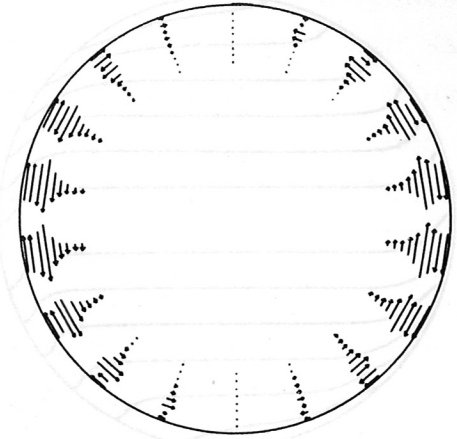
Bildserie 2

QUERMAGNETFELD

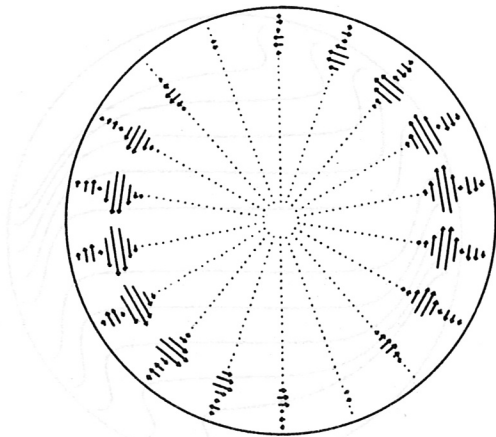
Bildserie 3



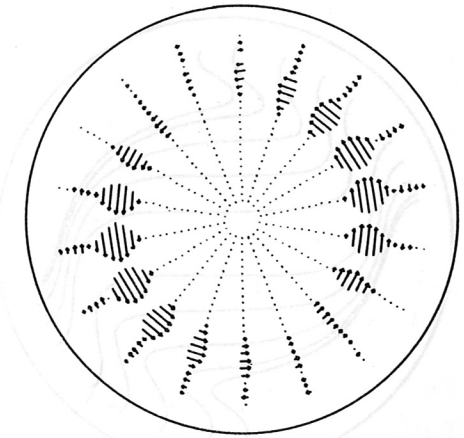
t = 33,5 nsec $\overline{1/100E}$



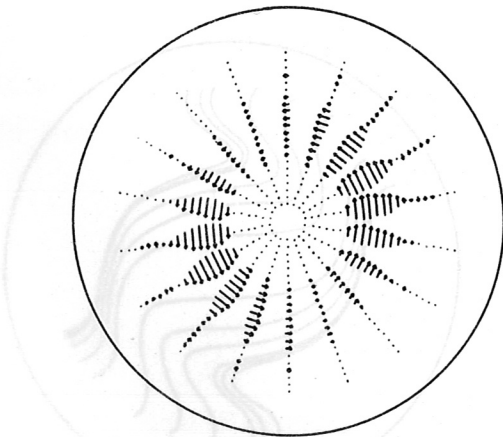
64,4 nsec $\overline{1/10E}$



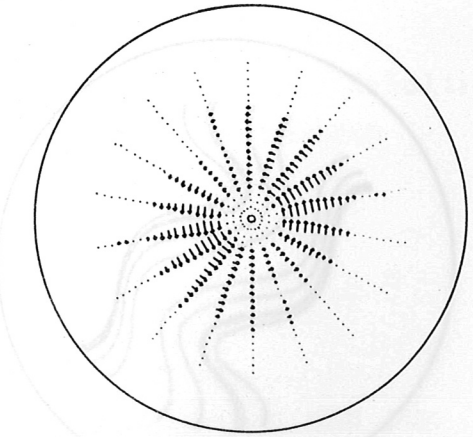
t = 119 nsec $\overline{1E}$



t = 174 nsec $\overline{1E}$



t = 218 nsec $\overline{5E}$



t = 238 nsec $\overline{10E}$

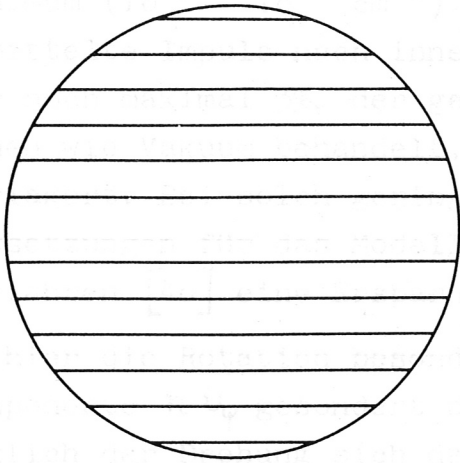
$n \cdot \sigma_{\varphi}: 1E = 10^{10} \text{ cm sec}^{-1} \text{ cm}^{-3}$

Rotationskomponente der Plasmaströmung

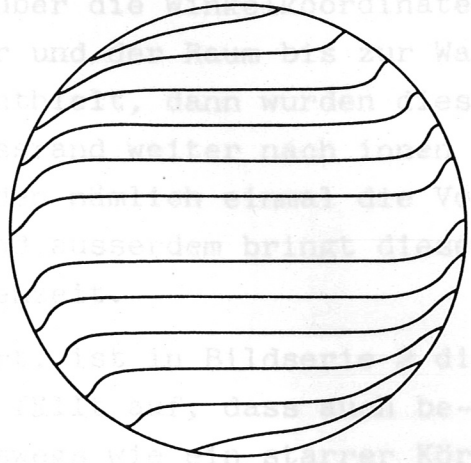
Entwicklung des transversalen Magnetfeldes

QUERMAGNETFELD

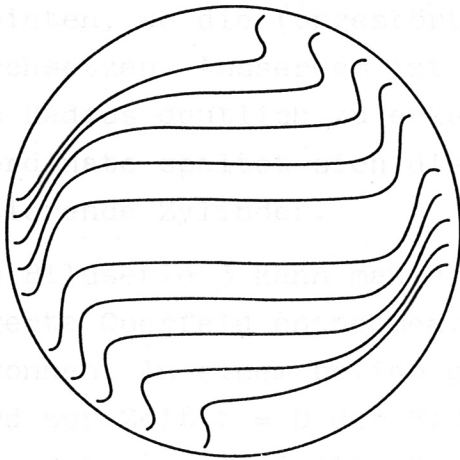
Bildserie 3



t=0 nsec



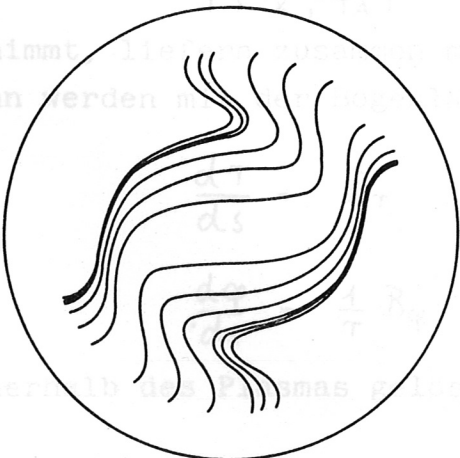
t=64 nsec



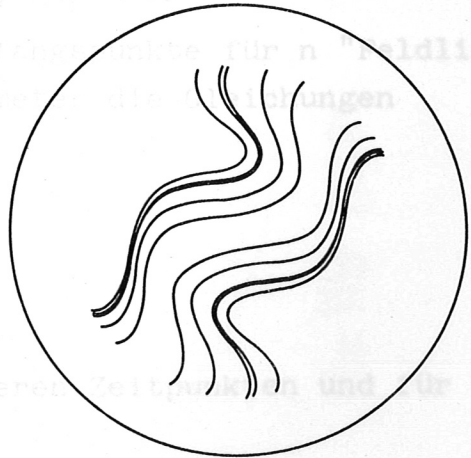
t=119 nsec



t=174 nsec



t=218 nsec



t=250 nsec

Entwicklung des transversalen Magnetfeldes

Wenn in den wandnahen Zonen die Dichte unter ein vorgegebenes Minimum ($10^{13} - 10^{14} \text{ cm}^{-3}$) gesunken, der über die Winkelkoordinate gemittelte Impuls nach innen gerichtet war und der Raum bis zur Wand nur noch maximal 3% der gesamten Masse enthielt, dann wurden diese Zonen wie Vakuum behandelt, d.h. der Gefäßrand weiter nach innen verlagert. Bei solch geringen Dichten werden nämlich einmal die Voraussetzungen für das Modell zweifelhaft und ausserdem bringt dieses Verfahren [40] eine Ersparnis in der Rechenzeit.

Da hier die Rotation besonders interessiert, ist in Bildserie 2 die Komponente $n \cdot v_\varphi$ gesondert dargestellt. Es fällt auf, dass auch bezüglich der Drehung sich das Plasma keineswegs wie ein starrer Körper verhält. Dort, wo die (ungestörten) Feldlinien des Querfeldes parallel zur Wand verlaufen, dreht sich das Plasma langsam verglichen mit den Gebieten, wo die (ungestörten) Feldlinien die Glaswand senkrecht durchsetzen. Ausserdem ist eine Umkehr der Rotationsrichtung längs des Radius deutlich zu erkennen. Bei einer Mittelung über die Winkelkoordinate spaltet sich die Plasmaschicht auf in entgegengesetzt rotierende Zylinder.

Aus Bildserie 3 kann man die Rückwirkung des Plasmas auf das überlagerte Querfeld entnehmen. Die Bilder wurden auf folgende Weise gewonnen: An einem beliebig wählbaren Winkel φ_A des Koordinatennetzes wird zur Zeit $t = 0$ der Fluss $\Phi_c = 0,95 \left| \int_0^R B_\varphi dr \right|$ n-fach (n willkürlich vorgegeben) unterteilt. Die Radien r_k , bei denen der magnetische Fluss dann die Werte

$$\Phi(r_k, \varphi_A) = \frac{k}{n} \Phi_0, \quad k = 1, \dots, n$$

annimmt, liefern zusammen mit φ_A die Anfangspunkte für n "Feldlinien". Dann werden mit der Bogenlänge s als Parameter die Gleichungen

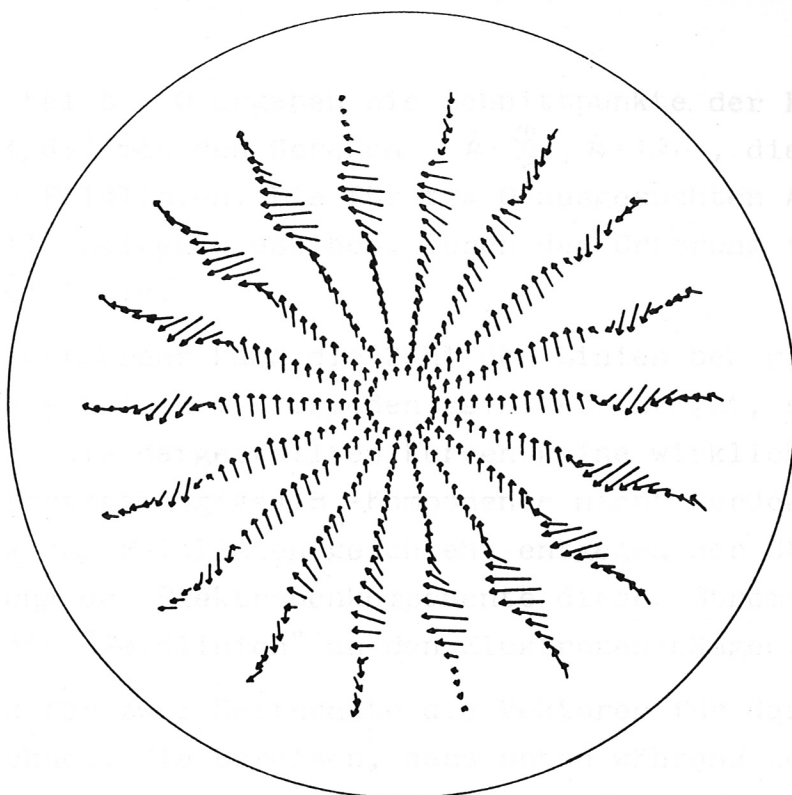
$$\frac{dr}{ds} = B_r$$

und

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{r} B_\varphi$$

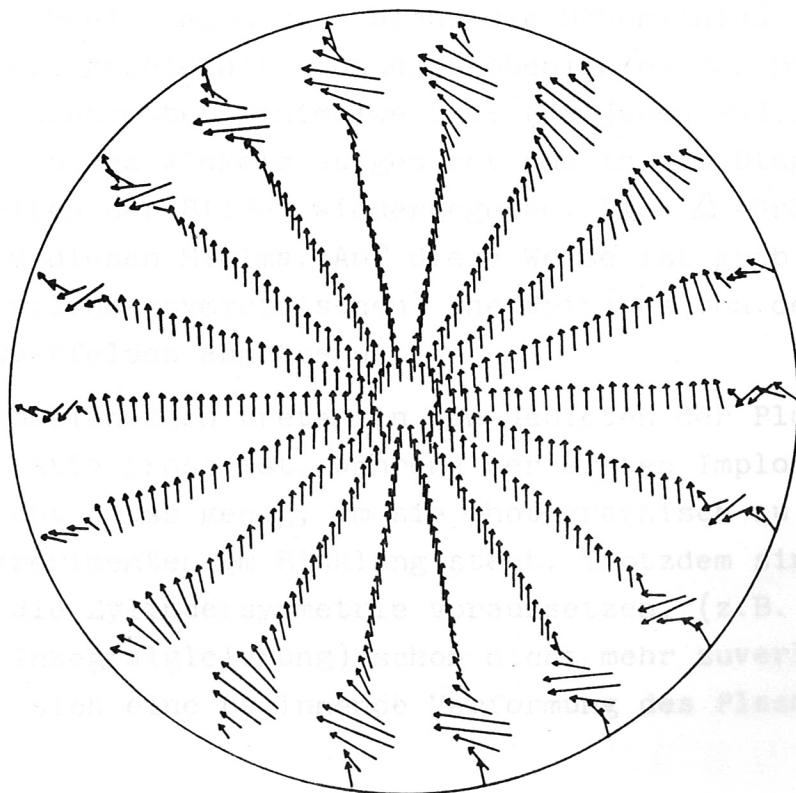
innerhalb des Plasmas gelöst. Zu den späteren Zeitpunkten und für

QUERMAGNETFELD



5 kG

$t = 218 \text{ nsec}$



2 kG

$t = 119 \text{ nsec}$

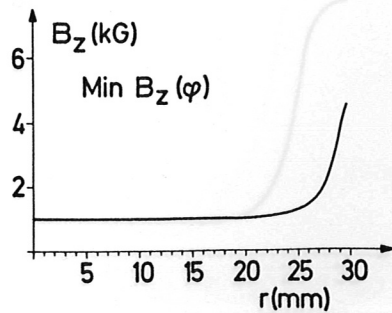
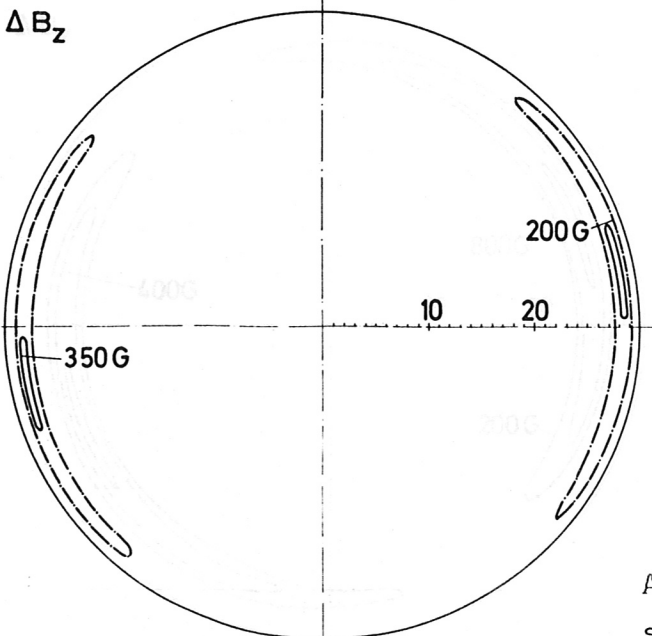
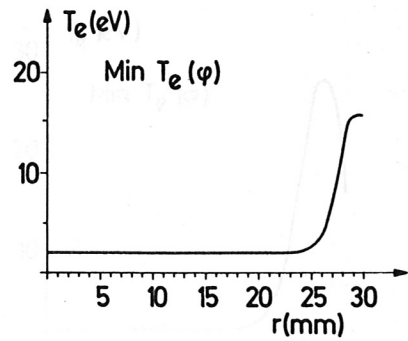
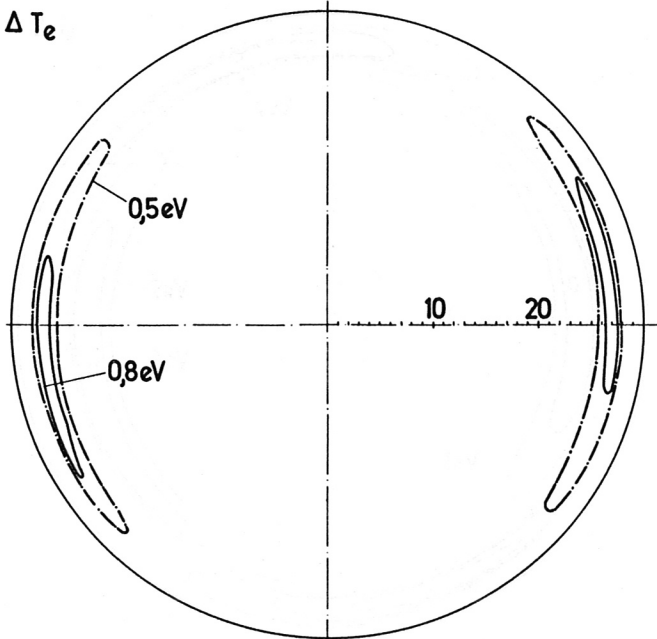
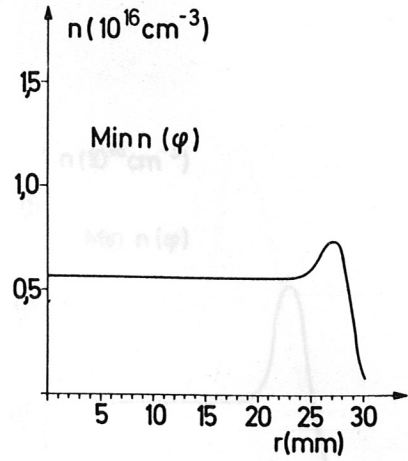
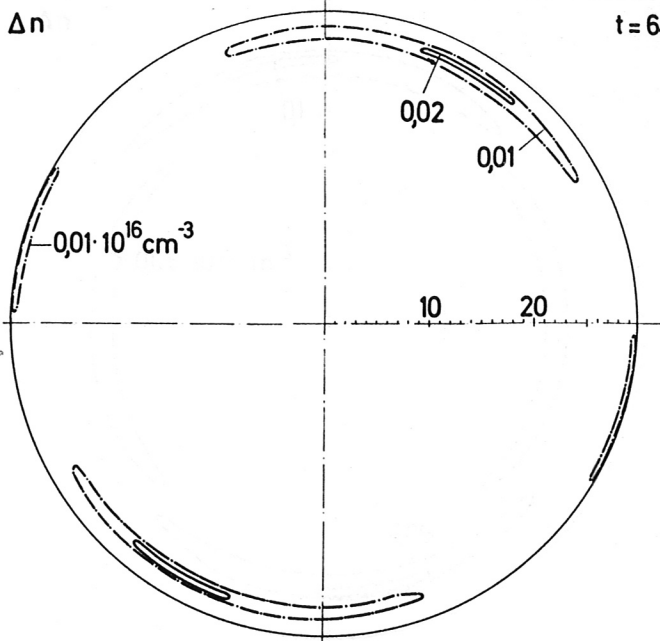
andere Winkel bei $t = 0$ ergaben die Schnittpunkte der Kurve $|\Phi(r)| = \left| \int_0^r B_\varphi dr \right|$ mit den Geraden $k \cdot \frac{\Phi_0}{n}$, $k = 1, 2, \dots$, die Anfangsradien für die Feldlinien. Die für $t = 0$ ausgesuchten Anfangswinkel blieben für alle Zeiten dieselben. Durch den Ursprung ($r = 0$) verläuft keine Feldlinie.

Wegen dieses Verfahrens kann die Zahl der Linien bei gleichem Winkel für verschiedene Zeiten verschieden sein. Es ist gut, sich vor Augen zu halten, dass die dargestellten Kurven keine wirklichen Feldlinien sind, da die (ortsabhängige) B_z -Komponente nicht berücksichtigt ist. Die Verbiegung der Feldlinien geschieht entgegen der Stromdichte j_φ , d.h. in Richtung der Elektronenkomponente dieses Stroms; anschaulich bleiben also die "Feldlinien" an den Elektronen hängen.

In Abb. 3 sind für zwei Zeitpunkte die Vektoren für das (B_r, B_φ) -Feld eingezeichnet. Sie beweisen, dass schon während des Einlaufens der Plasmaschicht die Feldstärke des Querfeldes auf den 5 - 6-fachen Betrag ihres Anfangswertes ansteigen und dementsprechend wirksamer sein kann.

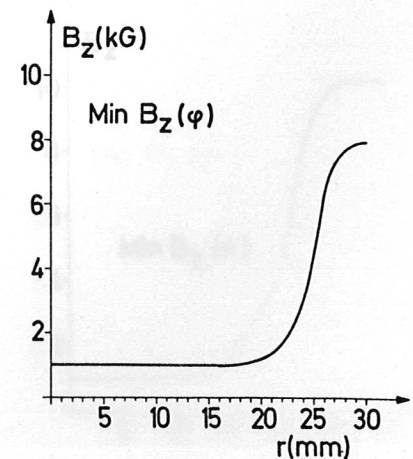
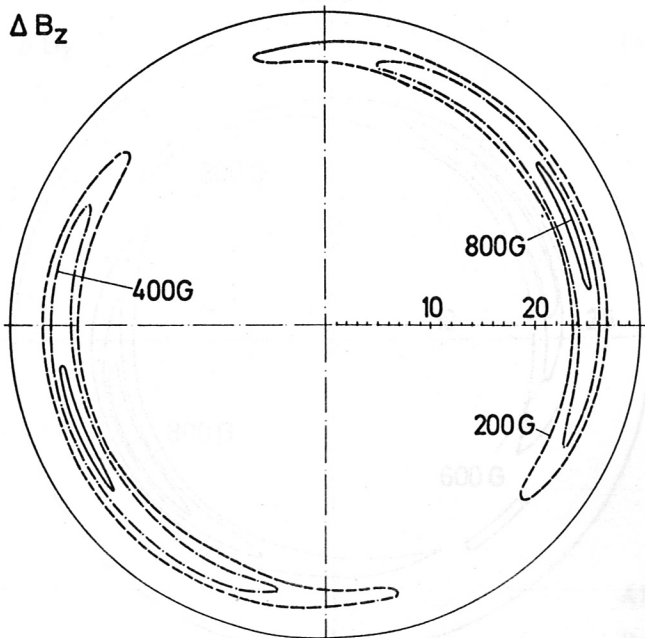
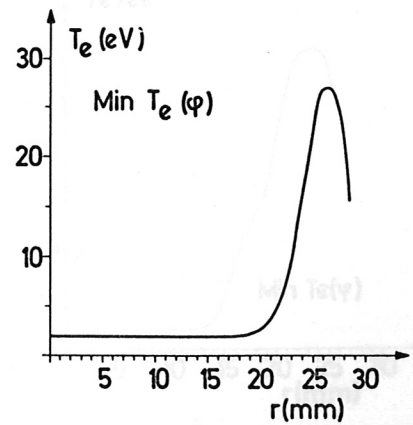
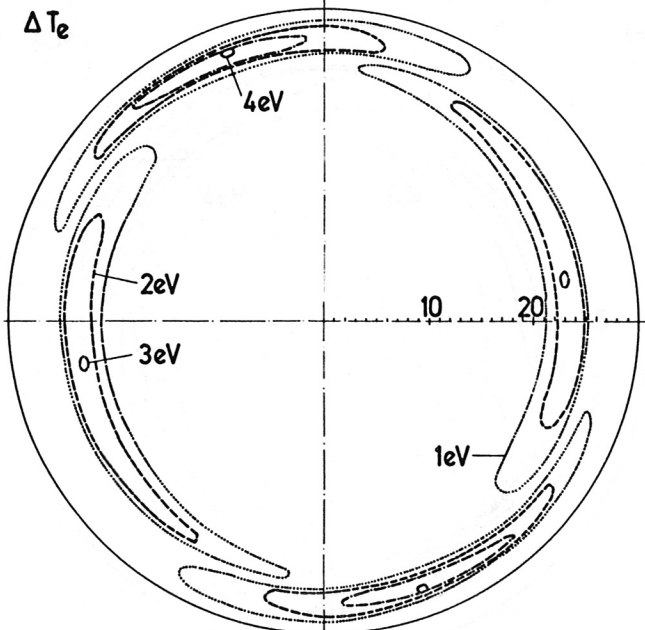
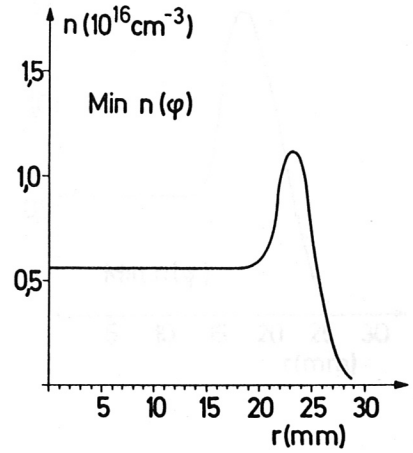
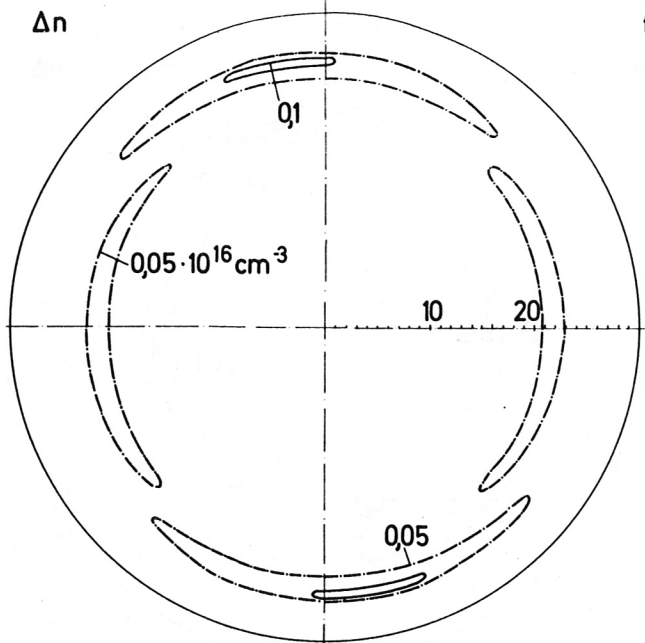
Die Bildserie 4 führt die Abweichungen in der Dichte n , der Elektronentemperatur T_e und der Feldkomponente B_z von der Zylindersymmetrie vor. Der Deutlichkeit wegen sind nicht die Höhenlinien dieser Funktionen selbst gezeichnet, sondern Höhenlinien der Differenzen Δn , ΔT_e , ΔB_z zu bestimmten Minimalwerten: Für jeden Radius wurde das Minimum bezüglich des Winkels aufgesucht und in den Diagrammen auf den rechten Seiten der Bilder wiedergegeben. Die Δ -Größen sind die Unterschiede zu diesen Minima. Auf diese Weise ist grob die Wirkung des normalen (zylindersymmetrischen) Thetapinches von der des überlagerten Querfeldes abgetrennt.

Die grössten Abweichungen treten in den Gebieten der Plasmaschicht auf, wo $\left| \frac{\partial n}{\partial r} \right|$ relativ gross ist. Während der ersten Implosion sind sie jedoch noch nicht gross genug, um sie photographisch zu beobachten, was mit den Experimenten im Einklang steht. Trotzdem sind manche Messmethoden, die Zylindersymmetrie voraussetzen, (z.B. Anwendung der Abelschen Integralgleichung) schon nicht mehr zuverlässig. Deutlich lässt sich eine beginnende Verformung des Plasmaquerschnitts,

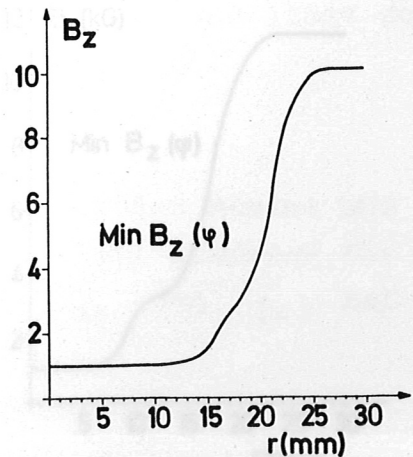
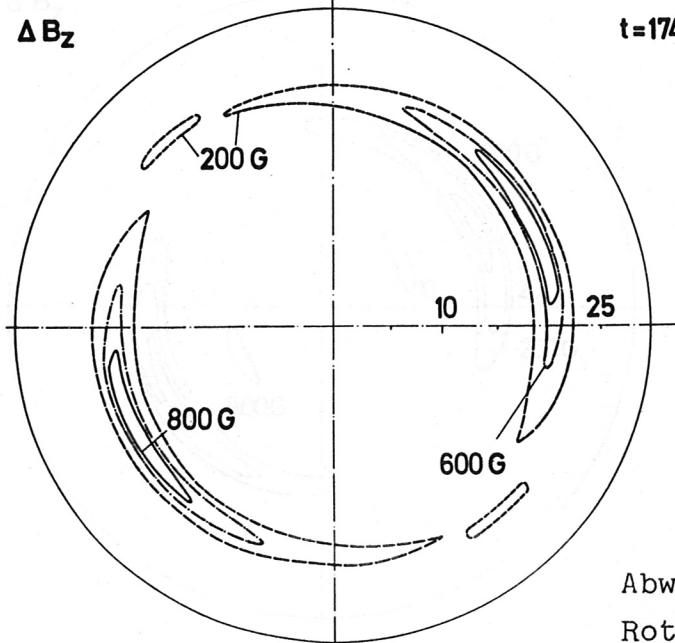
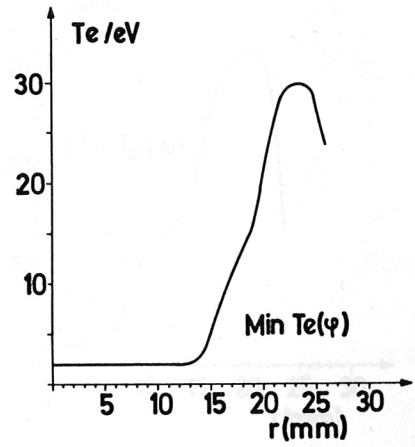
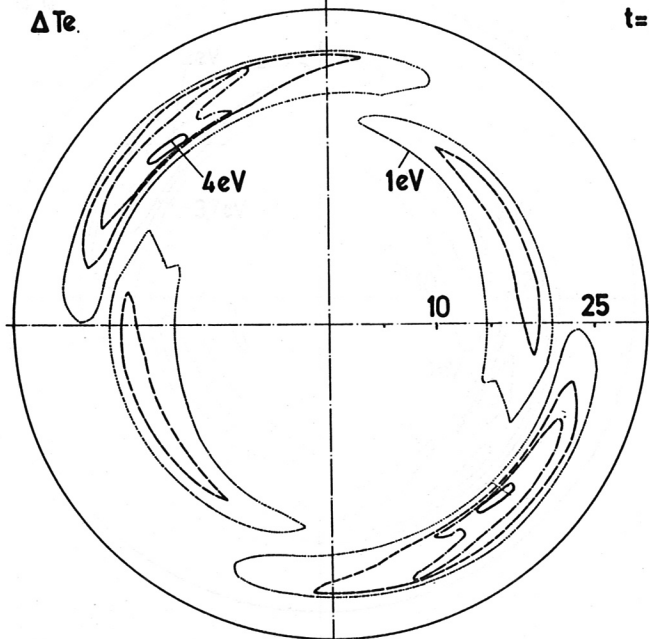
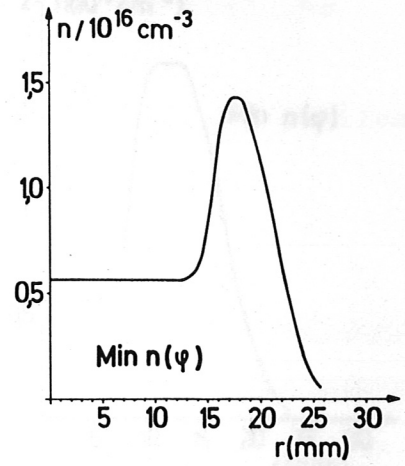
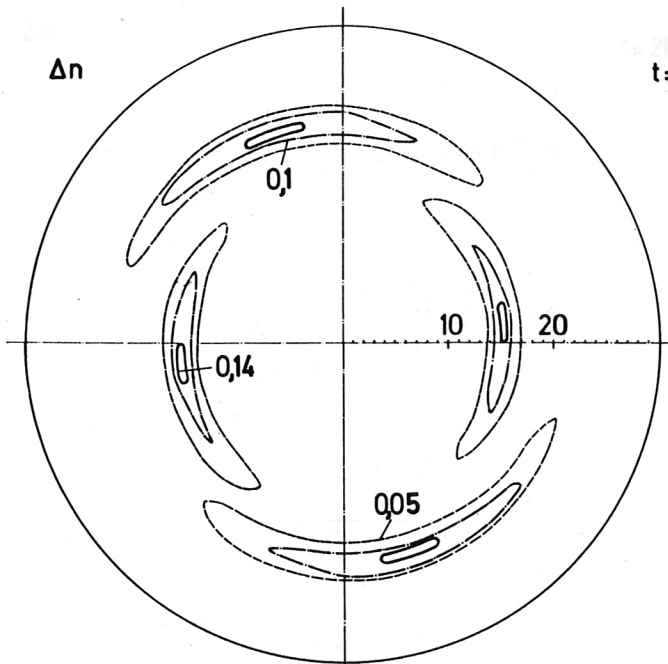


Abweichung von der Rotations-
symmetrie

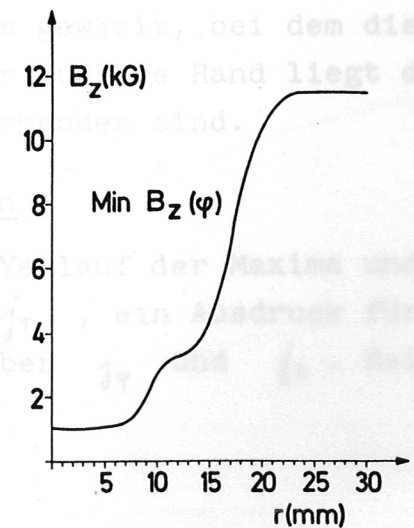
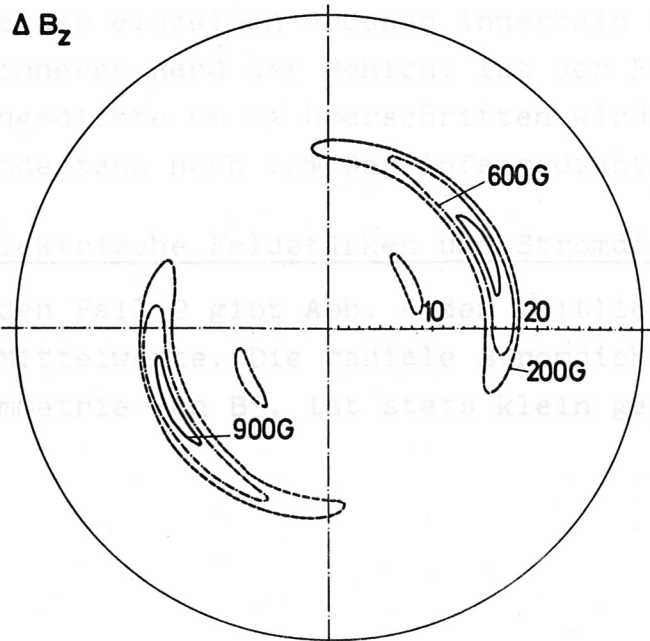
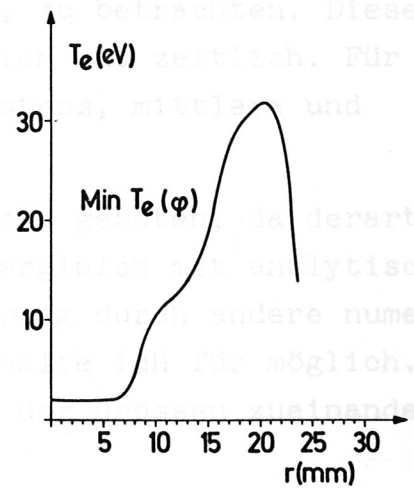
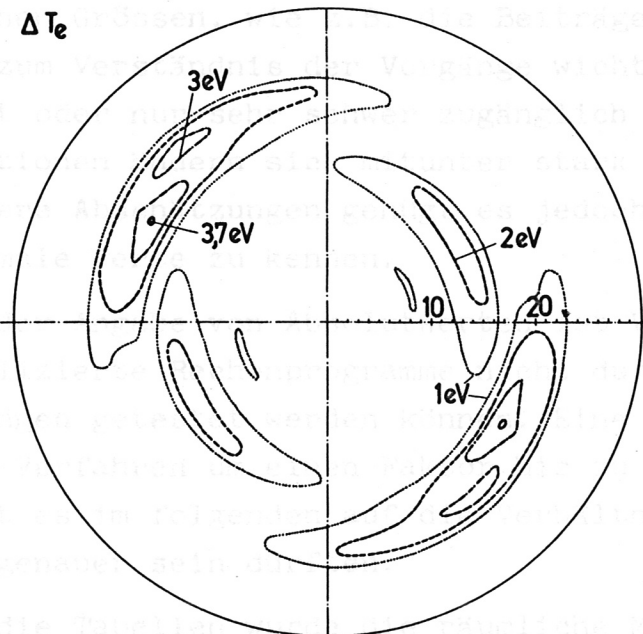
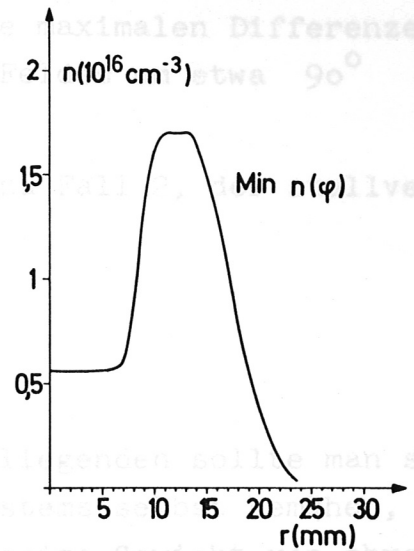
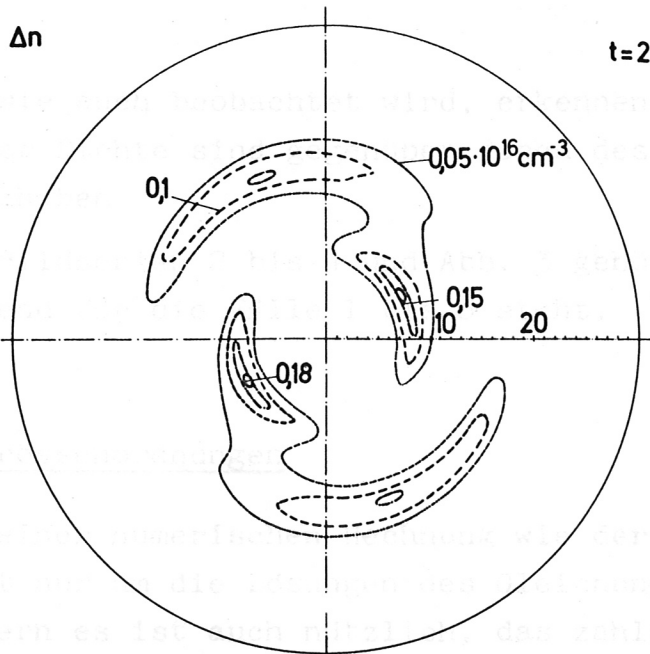
t=119 nsec



Abweichungen von der
Rotationssymmetrie



Abweichungen von der
Rotationssymmetrie



Abweichungen von der
Rotationssymmetrie

wie sie auch beobachtet wird, erkennen. Die maximalen Differenzen in der Dichte sind gegenüber denen des B_z -Feldes um etwa 90° verschoben.

Die Bildserien 2 bis 4 und Abb. 3 gehören zu Fall 2, der stellvertretend für die Fälle 1 bis 8 steht.

7. Grössenordnungen

Bei einer numerischen Rechnung wie der vorliegenden sollte man sich nicht nur um die Lösungen des Gleichungssystems selbst bemühen, sondern es ist auch nützlich, das zahlenmässige Gewicht von physikalischen Grössen, wie z.B. die Beiträge zu den Feldstärken und Kräften, die zum Verständnis der Vorgänge wichtig und experimentell noch nicht oder nur sehr schwer zugänglich sind, zu betrachten. Diese Funktionen ändern sich mitunter stark örtlich und zeitlich. Für gröbere Abschätzungen genügt es jedoch meistens, mittlere und maximale Werte zu kennen.

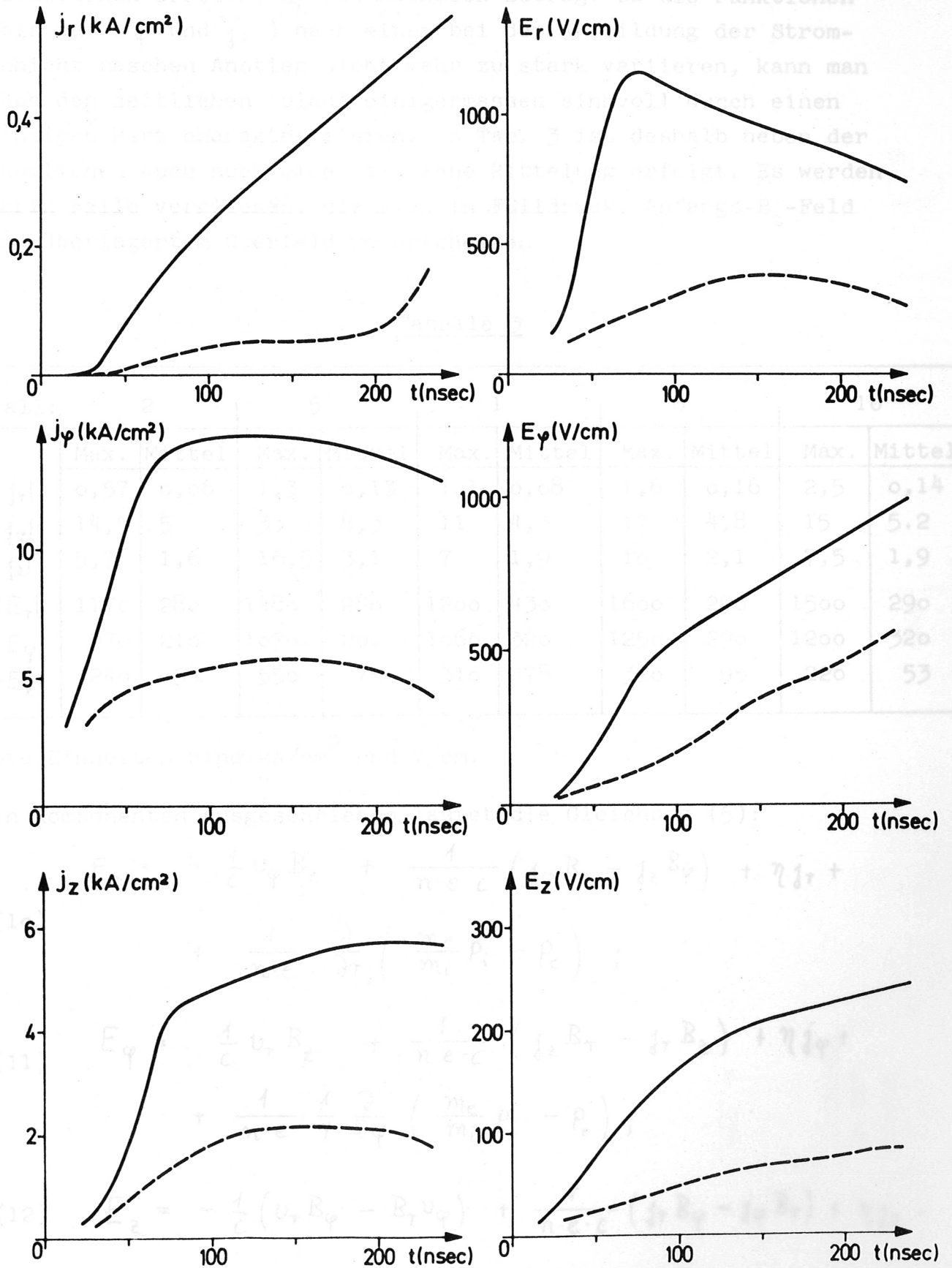
Bei der Angabe von Absolutwerten ist Vorsicht geboten, da derartig komplizierte Rechenprogramme nicht durch Vergleich mit analytischen Lösungen getestet werden können. Eine Änderung durch andere numerische Verfahren um einen Faktor bis zu 1,5 halte ich für möglich. Doch kommt es im folgenden auf die Verhältnisse der Grössen zueinander an, die genauer sein dürften.

Für die Tabellen wurde die räumliche Mittelung über die Absolutbeiträge der einzelnen Grössen innerhalb der Plasmaschicht vorgenommen. Als innerer Rand der Schicht ist der Radius gewählt, bei dem die Anfangsdichte um 2% überschritten wird. Der äussere Rand liegt dort, womindestens noch 10% der Anfangsdichte vorhanden sind.

a) Elektrische Feldstärken und Stromdichten

Für den Fall 2 gibt Abb. 4 den zeitlichen Verlauf der Maxima und der Mittelwerte. Die radiale Stromdichte j_r , ein Ausdruck für die Unsymmetrie von B_z , ist stets klein gegenüber j_φ und j_z . Bei den

Abb. 4



Zeitlicher Verlauf der räumlichen Mittelwerte und Maxima

Feldstärken erreicht E_r den höchsten Betrag. Da die Funktionen (bis auf E_φ und j_r) nach einem bei der Ausbildung der Stromschicht raschen Anstieg nicht mehr zu stark variieren, kann man auch den zeitlichen Ablauf einigermaßen sinnvoll durch einen einzigen Wert charakterisieren. In Tab. 3 ist deshalb neben der räumlichen auch noch eine zeitliche Mittelung erfolgt. Es werden darin Fälle verglichen, die sich in Fülldruck, Anfangs- B_z -Feld und überlagertem Querfeld unterscheiden.

Tabelle 3

Fall:	2		5		1		8		10	
	Max.	Mittel	Max.	Mittel	Max.	Mittel	Max.	Mittel	Max.	Mittel
$ j_r $	0,57	0,06	1,3	0,13	1,1	0,08	1,6	0,16	2,5	0,14
$ j_\varphi $	14,5	5	33	8,3	11	4,3	17	4,8	15	5,2
$ j_z $	5,7	1,6	16,5	3,1	7	1,9	10	2,1	7,5	1,9
$ E_r $	1170	280	1480	280	1200	430	1600	290	1500	290
$ E_\varphi $	970	210	1020	200	1060	320	1250	290	1200	320
$ E_z $	240	54	550	75	310	78	320	95	220	53

Die Einheiten sind kA/cm^2 und V/cm .

In Komponenten ausgeschrieben lautet die Gleichung (5):

$$(10) \quad E_r = -\frac{1}{c} v_\varphi B_z + \frac{1}{n \cdot e \cdot c} (j_\varphi B_z - j_z B_\varphi) + \eta j_r + \frac{1}{n \cdot e} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{m_e}{m_i} \rho_i - \rho_e \right);$$

$$(11) \quad E_\varphi = \frac{1}{c} v_r B_z + \frac{1}{n \cdot e \cdot c} (j_z B_r - j_r B_z) + \eta j_\varphi + \frac{1}{n \cdot e} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{m_e}{m_i} \rho_i - \rho_e \right);$$

$$(12) \quad E_z = -\frac{1}{c} (v_r B_\varphi - B_r v_\varphi) + \frac{1}{n \cdot e \cdot c} (j_r B_\varphi - j_\varphi B_r) + \eta j_z.$$

Zur Abschätzung der Einzelbeiträge zu den Komponenten der elektrischen Feldstärke im Plasma

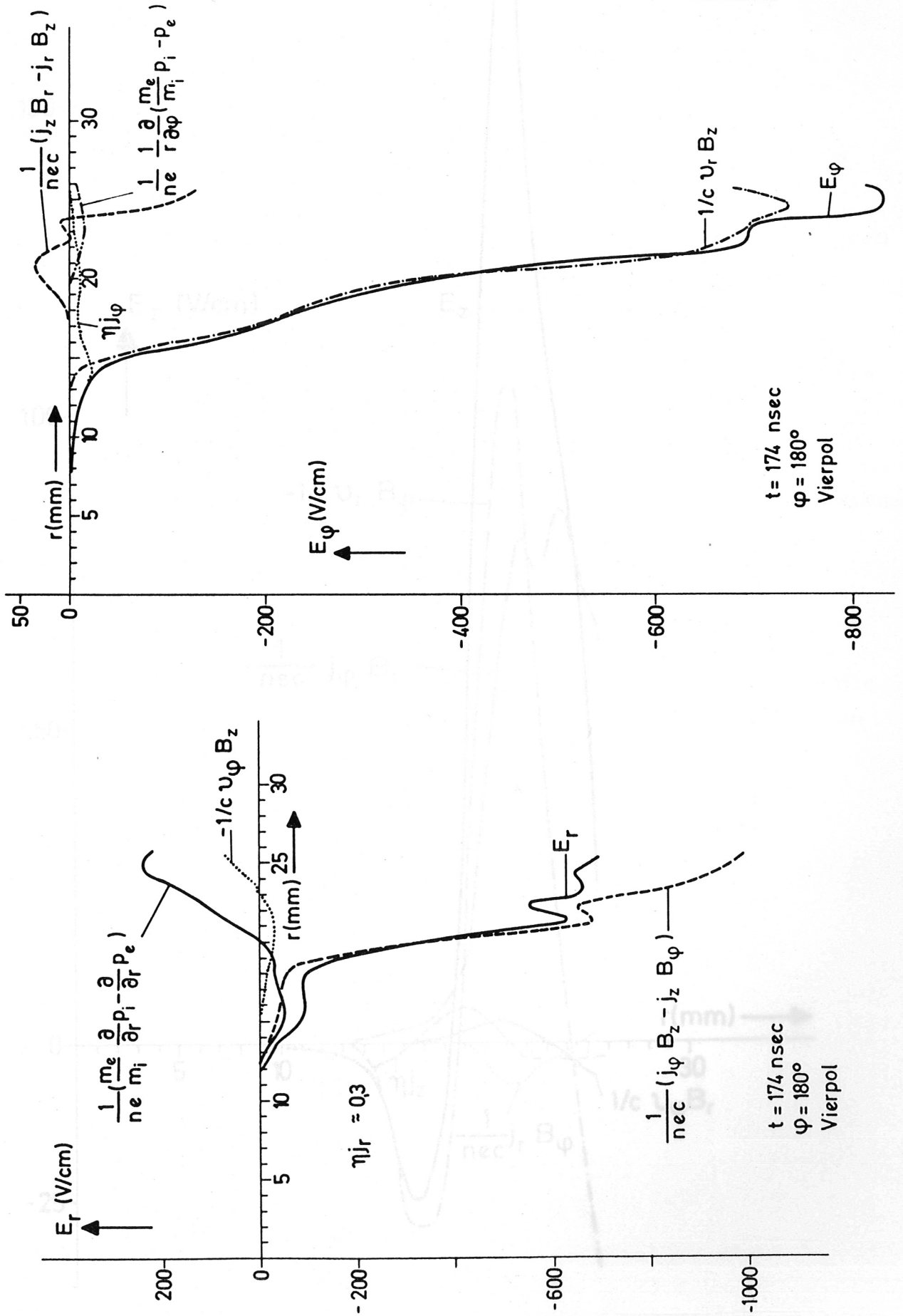
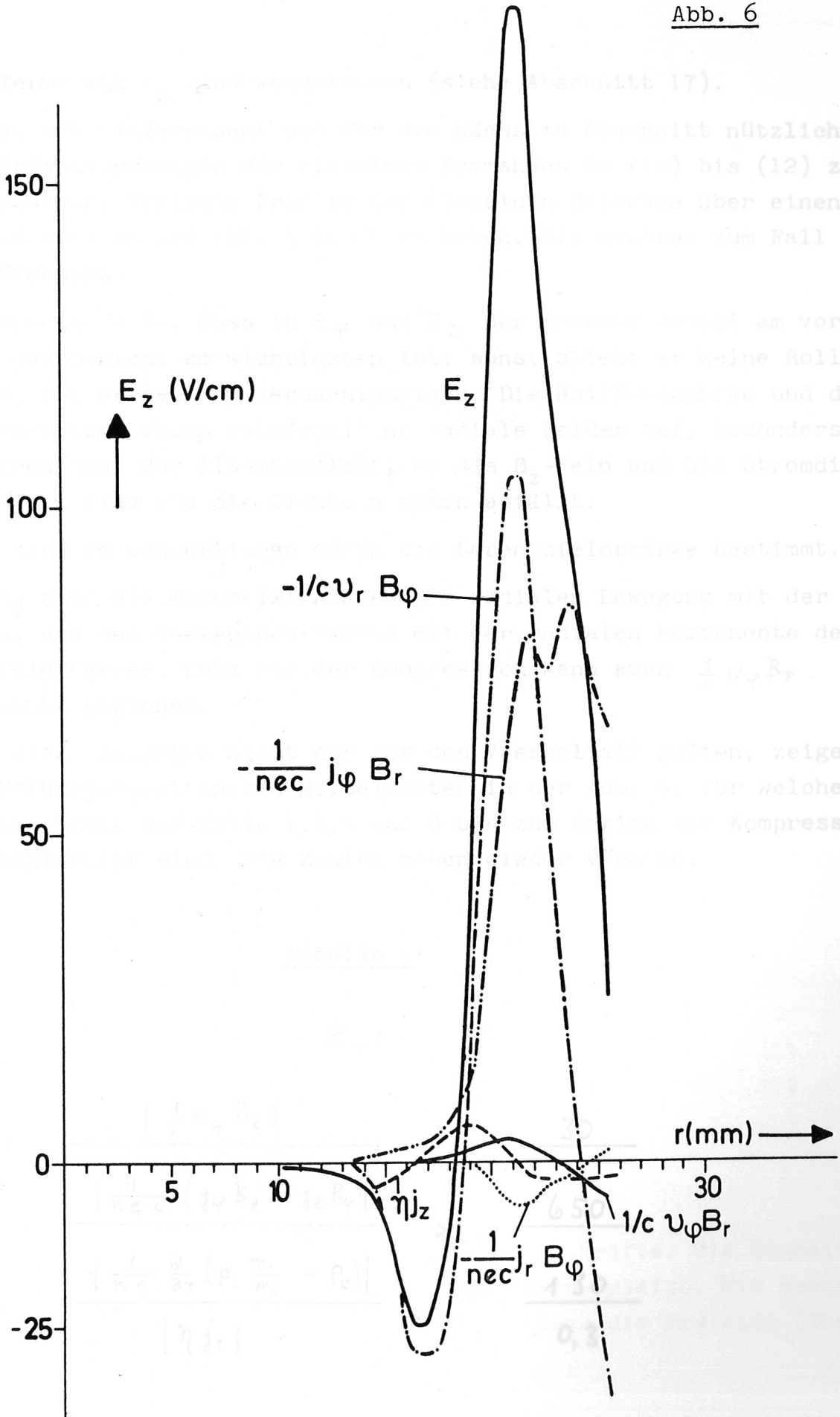


Abb. 6

Abb. 5

Zusammensetzung der axialen Komponente des elektrischen Feldes im Plasma



Zusammensetzung der axialen Komponente des elektrischen Feldes im Plasma

Die Terme mit v_z sind weggelassen (siehe Abschnitt 17).

Es ist sehr interessant und für den nächsten Abschnitt nützlich, die Größenordnungen der einzelnen Summanden in (10) bis (12) zu untersuchen. Typische Profile der einzelnen Beiträge über einen Radius sind in den Abb. 5 und 6 zu sehen. Sie gehören zum Fall 10 des Vierpols.

Man erkennt z.B., dass in E_φ und E_z der Ohmsche Anteil am vorderen Rand der Schicht am wichtigsten ist; sonst spielt er keine Rolle. Bei E_r ist er ganz zu vernachlässigen. Die Hallfeldstärke und der Druckgradient bauen beträchtliche radiale Felder auf, besonders am äusseren Rand der Plasmaschicht, wo das B_z -Feld und die Stromdichte j_φ hoch sind und die Dichte n schon abfällt.

E_φ wird im wesentlichen durch die Lorentzfeldstärke bestimmt.

Bei E_z sind die Wechselwirkungen der radialen Bewegung mit der azimuthalen, und des Thetapinch-Stroms mit der radialen Komponente des Querfeldes gross. Kurz vor der Kompression kann auch $\frac{1}{c} v_\varphi B_r$ Bedeutung gewinnen.

Dass diese Aussagen nicht nur für den Vierpolfall gelten, zeigen die Verhältnisketten von Mittelwerten in der Tab. 4, für welche die Plasmaschicht der Fälle 1,2,5 und 8 bis zum Beginn der Kompression berücksichtigt sind. Die Zahlen geben wieder V/cm an.

Tabelle 4

$E_r :$

$\left \frac{1}{c} v_\varphi B_z \right $	\approx	30
$\left \frac{1}{n \cdot e \cdot c} (j_\varphi B_z - j_z B_\varphi) \right $		650
$\left \frac{1}{n \cdot e} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho_i \frac{m_e}{m_i} - \rho_e \right) \right $		130
$\left \eta j_r \right $		0,3

pinch) Kräfte die in azimutaler Richtung um etwa eine Grössenordnung
 übertreffen. An der inneren Rand E_φ - Schicht wird das Plasma haupt-
 sächlich durch den Druckgradienten nach innen getrieben. Im übrigen
 Teil des inneren Rand überwiegen die magnetische Kräfte.

$$\begin{array}{rcl}
 \frac{\left| \frac{1}{c} v_r B_z \right|}{\left| \frac{1}{n \cdot e \cdot c} (j_z B_r - j_r B_z) \right|} & \approx & \frac{650}{30} \\
 \frac{\left| \frac{1}{n \cdot e} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{m_e}{m_i} p_i - p_e \right) \right|}{\left| \eta j_\varphi \right|} & & \frac{3}{7}
 \end{array}$$

E_z :

$$\begin{array}{rcl}
 \frac{\left| -\frac{1}{c} v_r B_\varphi \right|}{\left| \frac{1}{c} v_\varphi B_r \right|} & & \frac{120}{13} \\
 \frac{\left| \frac{1}{n \cdot e \cdot c} j_r B_\varphi \right|}{\left| \frac{-1}{n \cdot e \cdot c} j_\varphi B_r \right|} & \approx & \frac{3}{70} \\
 \left| \eta j_z \right| & & 7
 \end{array}$$

b) Äussere Kräfte

Die Abb. 7 zeigt typische Verteilungen der Kräfte. Die Einheiten
 sind willkürlich, aber auf beiden Diagrammen gleich. Wie schon aus
 der Bildserie 1 lernt man auch hieraus, dass die radialen (Theta-

pinch) Kräfte die in azimuthaler Richtung um etwa eine Grössenordnung übertreffen. Am vorderen Rand der Schicht wird das Plasma hauptsächlich durch den Druckgradienten nach innen getrieben. Im übrigen Teil und am äusseren Rand überwiegt der magnetische Kolben.

In Richtung des Winkels kann man den Druckgradienten weglassen. Eine grössere Bedeutung hat die (bis jetzt nicht berücksichtigte) innere Reibung (s. Abschnitt 16). Es ist hier auch zu erkennen, dass die azimuthale elektromagnetische Kraft längs des Radius ihre Richtung ändert. Nur um deren Nulldurchgänge führt der Druckgradient zu kleinen Verschiebungen dieser Nullstellen.

Die Tabellen 5 und 6 sollen belegen, dass diese Eigenschaften allgemeingültiger sind. Zu ihrer Aufstellung wurden für mehrere (3 - 7) Zeiten an allen Punkten des Koordinatennetzes innerhalb der Plasmaschicht die Verhältnisse V der Kraftkomponenten gebildet. Der Betrag dieses Verhältnisses ist in der aus den Tabellen ersichtlichen Weise von $V < 0,5$ bis $V > 5$ aufgeschlüsselt und die entsprechende Häufigkeit in Prozenten angegeben.

φ - Richtung:

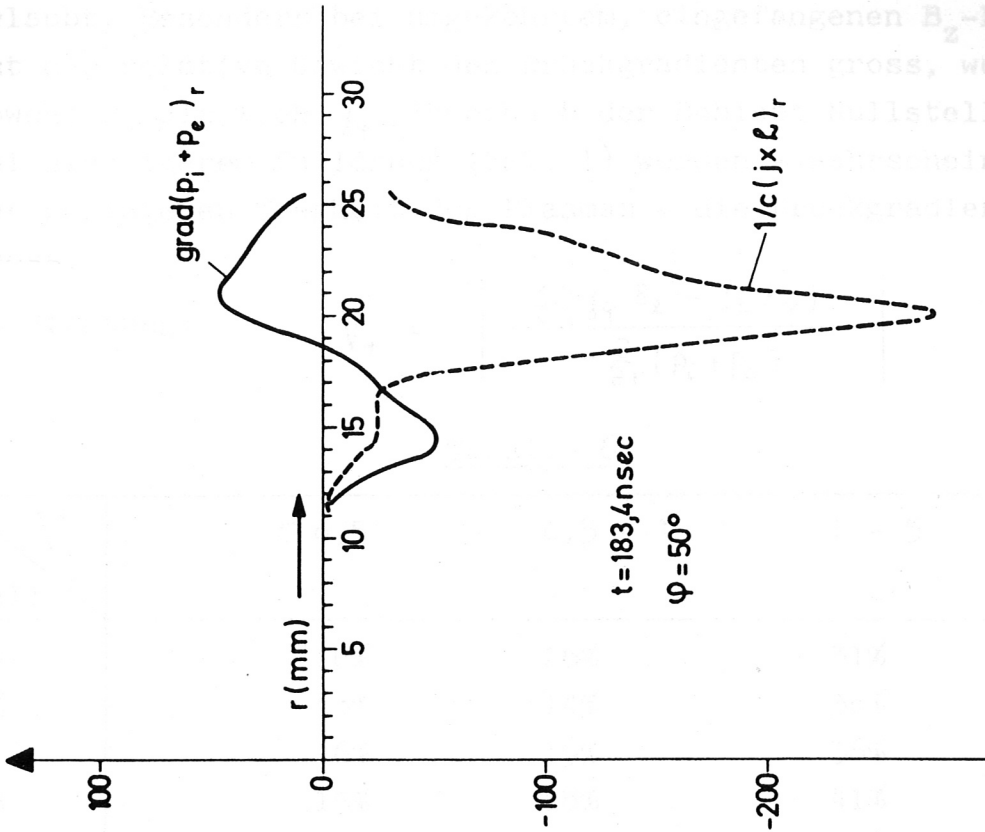
$$V_{\varphi} = \left| \frac{\frac{1}{c} (j_z B_r - B_z j_r)}{-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (p_i + p_e)} \right| .$$

Tabelle 5

V_{φ} Fall	$< 0,5$	$0,5 - 1$	$1 - 5$	> 5
2	11%	8%	23%	58%
5	13%	11%	24%	52%
1	10%	5%	23%	62%
8	8%	8%	23%	61%

Man findet bestätigt, dass der azimuthale Druckgradient ein relativ geringes Gewicht hat.

KRÄFTE IN RADIALER RICHTUNG



KRÄFTE IN WINKELRICHTUNG

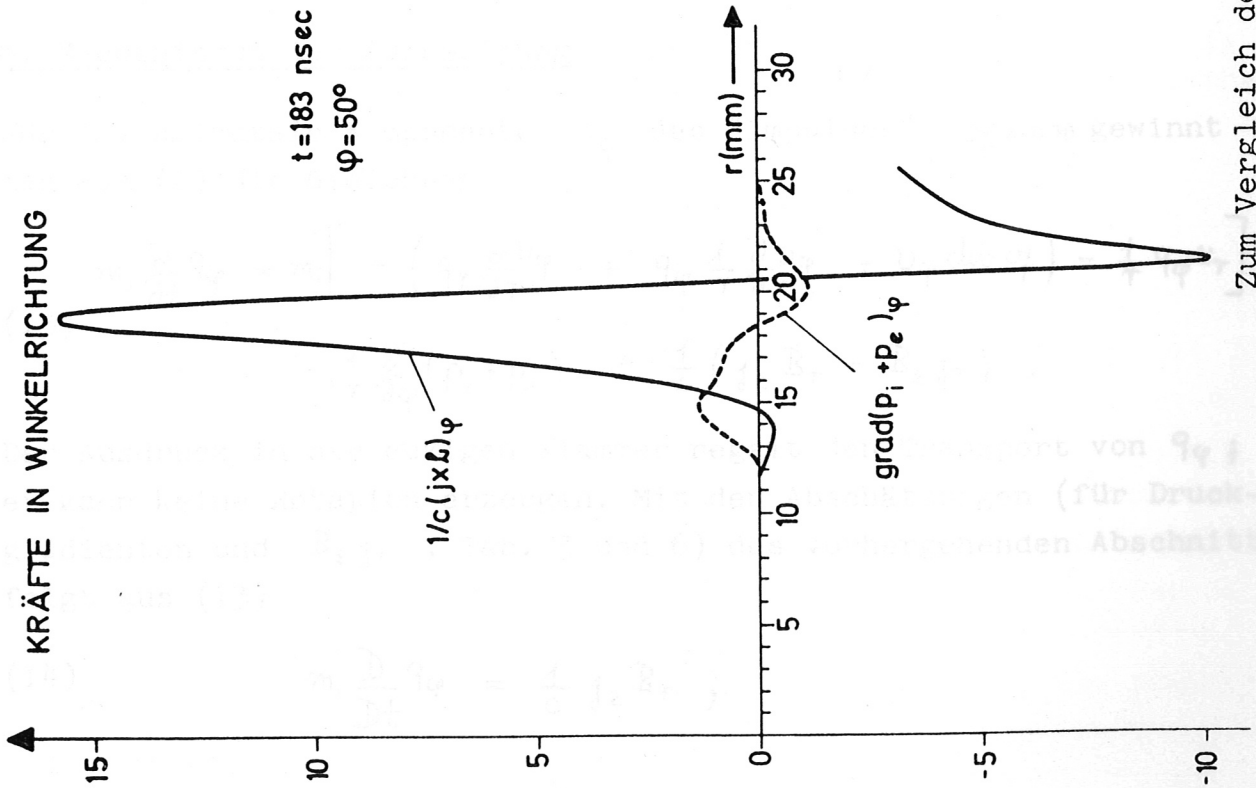


Abb. 7

Zum Vergleich der Kraftkomponenten

Eine derartige Vereinfachung ist für die radiale Richtung nicht erlaubt. Besonders bei umgekehrtem, eingefangenen B_z -Feld (Fall 5) ist das relative Gewicht des Druckgradienten gross, weil hier sowohl B_z als auch j_φ innerhalb der Schicht Nullstellen haben. Bei niedrigerem Fülldruck (Fall 1) werden - wahrscheinlich wegen der geringeren Trägheit des Plasmas - die Druckgradienten nicht so gross.

r- Richtung:
$$V_r = \left| \frac{\frac{1}{c} (j_\varphi B_z - j_z B_\varphi)}{-\frac{\partial}{\partial r} (p_i + p_e)} \right|$$

Tabelle 6

V_r Fall	< 0,5	0,5 - 1	1 - 5	> 5
2	16%	26%	31%	27%
5	43%	14%	30%	13%
1	6%	19%	36%	39%
8	15%	18%	41%	26%

8. Mechanismus der Aufspaltung

Für die azimutale Komponente q_φ des "Impulses" $\sigma_T = n\omega$ gewinnt man aus (2) die Gleichung

$$(13) \quad m_i \frac{\partial}{\partial t} q_\varphi = m_i \left[- \left(q_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + q_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_\varphi \operatorname{div} \sigma_T \right) - \frac{1}{r} q_\varphi v_r \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (p_i + p_e) + \frac{1}{c} (j_z B_r - B_z j_r) .$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer regelt den Transport von q_φ ; er kann keine Rotation erzeugen. Mit den Abschätzungen (für Druckgradienten und $B_z j_r$, Tab. 3 und 6) des vorhergehenden Abschnitts folgt aus (13)

$$(14) \quad m_i \frac{D}{Dt} q_\varphi = \frac{1}{c} j_z B_r ,$$

wobei in $\frac{D}{Dt} q\varphi$ auch der (hier unwesentliche) Transportterm enthalten sein soll.

Um die Rotation zu verstehen, muss also j_z und B_r genauer untersucht werden; das soll nun geschehen für die ersten Phasen der Implosion bei überlagertem, homogenem Querfeld (Fälle 1 bis 9):

$$(15) \quad \left. \begin{aligned} B_r &= B_x \cos \varphi, \\ B_\varphi &= -B_x \sin \varphi \end{aligned} \right\} \text{für } t = 0.$$

Dass die Ergebnisse auch für Quadrupolfelder gelten, wird später (Abschnitt 11) dargelegt.

Es ist sofort klar, dass zu Beginn (bei wenig gestörtem Querfeld) für die Winkel $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\frac{3}{2}\pi$ keine azimutale Kraft wirkt, weil dort unabhängig vom Radius $B_r = 0$ gilt. Aus den ersten Bildern der Bildserien 1 und 2 geht das auch deutlich hervor.

Die Stromdichte j_z ergibt sich aus (7) zu

$$j_z = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} B_r \right).$$

Für $t = 0$ verschwindet bei homogenem Querfeld natürlich auch j_z ; für spätere Zeiten kann man den B_r enthaltenden Summanden innerhalb der Plasmaschicht weglassen, wie z.B. aus Abb. 8 hervorgeht. Also bleibt noch

$$(16) \quad j_z = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi).$$

B_φ wird aber nach Gleichung (6)

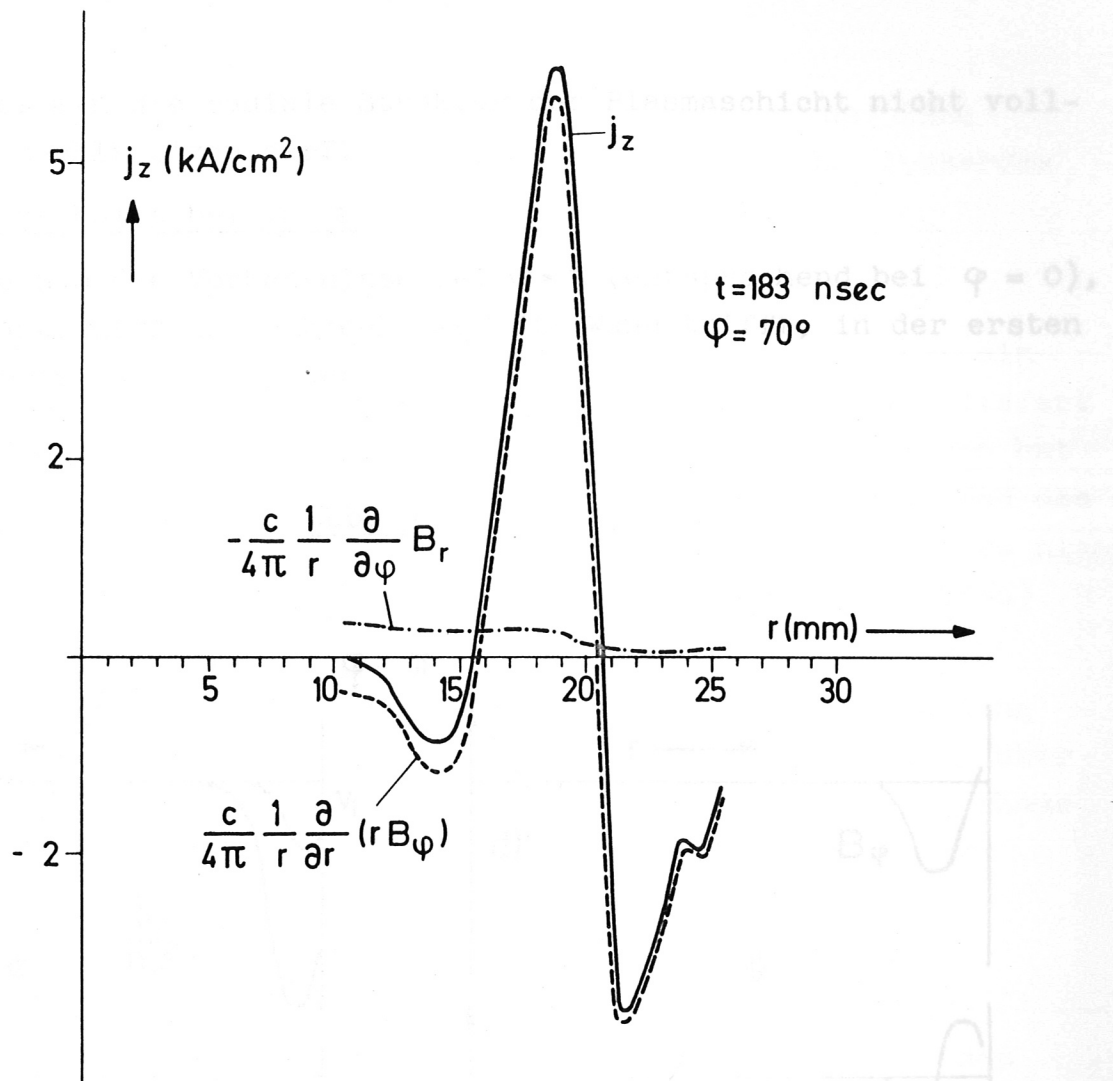
$$(17) \quad \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = c \frac{\partial E_z}{\partial r}$$

verändert. Diese Änderung kann man also aus der z-Komponente der elektrischen Feldstärke ausrechnen, wobei nach Abschnitt 6 die Formel (12) auf

$$(18) \quad E_z = -\frac{1}{c} v_r B_\varphi - \frac{1}{n \cdot e \cdot c} j_\varphi B_r$$

zusammenschrumpft.

Abb. 8



Aus dem System (14) und (16) bis (18) ist es schon möglich, den Mechanismus abzulesen:

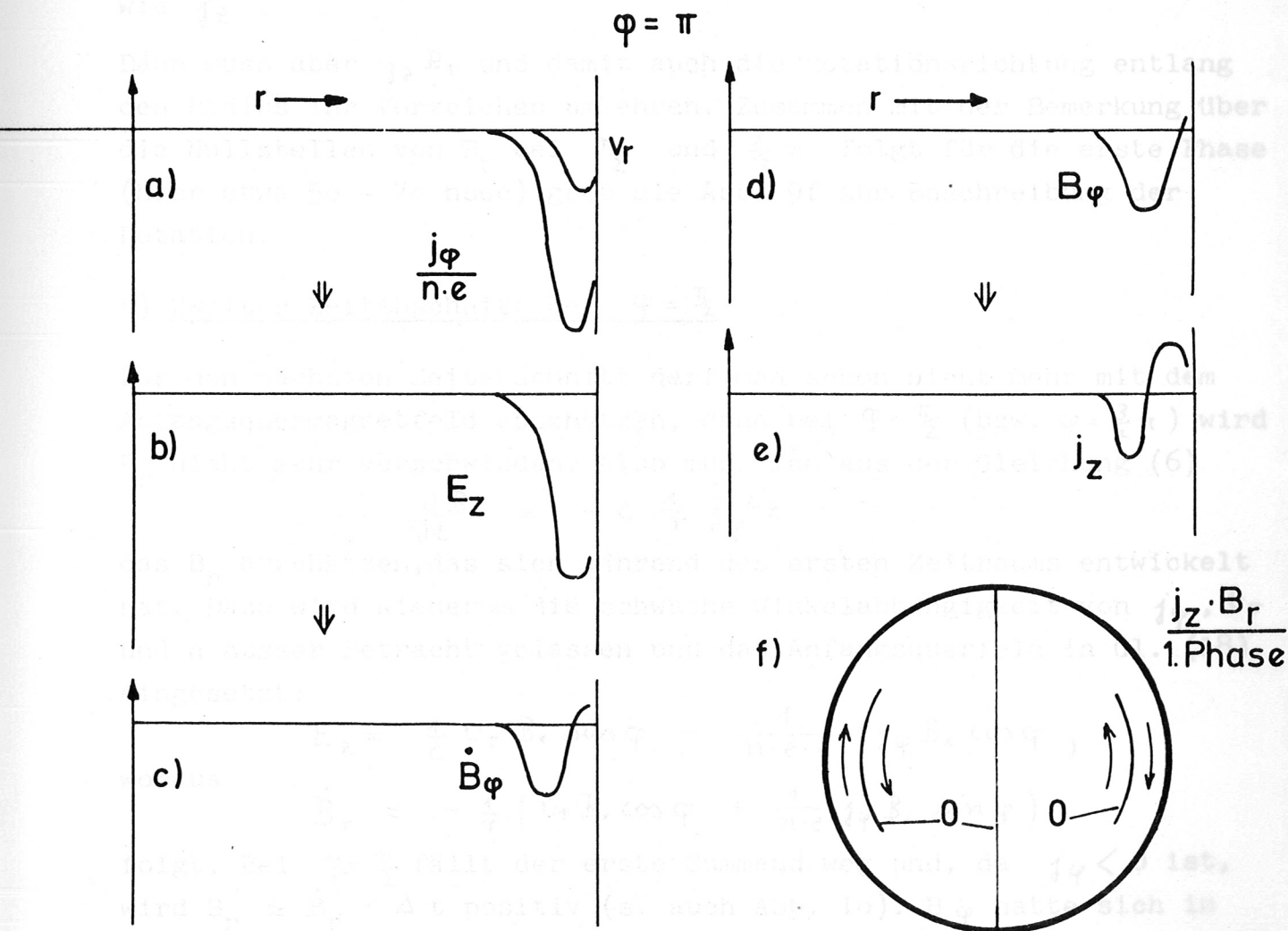
Der Thetapinch erzeugt eine leitfähige Schicht, in der ein Strom in φ -Richtung fließt (j_φ) und die sich nach innen bewegt (v_r). Der bewegte Leiter findet ein zur Bewegungsrichtung senkrechtes Feld (B_φ) vor, so dass in ihm eine Feldstärke in z-Richtung entsteht, die mit der Hallfeldstärke aus j_φ und B_r zusammen E_z (Gl. (18)) liefert. Dieses E_z "verbiegt" das Magnetfeld B_φ (Gl. (17)). Ein anderer Ausdruck für ein verbogenes Magnetfeld B_φ ist ein axialer Strom j_z (Gl. (16)). Dieser wiederum fließt quer zu einem Magnetfeld B_r , so dass der Leiter eine Kraft in Winkelrichtung erfährt (Gl. (14)). Wenn man von der radialen Dynamik absieht, ist das gerade der Mechanismus wie ihn Haines [23] vorschlägt. Es wird sich jedoch

zeigen, dass man die radiale Struktur der Plasmaschicht nicht vollständig vernachlässigen darf.

a) 1. Zeitabschnitt bei $\varphi = \pi$

Dazu sollen nun die Verhältnisse bei $\varphi = \pi$ (entsprechend bei $\varphi = 0$), wo das Anfangsquersfeld senkrecht auf die Wand trifft, in der ersten Phase näher betrachtet werden.

Abb. 9



Vorzeichenwechsel in \dot{j}_z

u_r und $\frac{j_\varphi}{n \cdot e}$ hängen zuerst nur ganz schwach vom Winkel ab. Ihre Profile über den Radius haben etwa die Form von Abb. 9a. Ausserdem ist $B_r = -B_x$ und $B_\varphi = 0$,

so dass $E_z = \frac{1}{n \cdot e \cdot c} j_\varphi B_x$ wird.

Die radiale Ableitung dieser Funktion, also \dot{B}_φ (Gl. (17)) hat ein Minimum und damit auch $B_\varphi \approx \dot{B}_\varphi \Delta t$. Dieses Minimum wiederum liefert eine Nullstelle in j_z (Gl. (16)) bei diesem Winkel. B_r dagegen hat in diesem Bereich ein Extremum und ändert sich hier kaum während des in Frage stehenden Zeitraums (s. Abb. 10), zumindest wechselt es nicht sein Vorzeichen im gleichen Punkt (und im entgegengesetzten Sinn) wie j_z .

Dann muss aber $j_z B_r$ und damit auch die Rotationsrichtung entlang des Radius ihr Vorzeichen umkehren. Zusammen mit der Bemerkung über die Nullstellen von B_r bei $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3}{2}\pi$ folgt für die erste Phase (hier etwa 50 - 70 nsec) grob die Abb. 9f zur Beschreibung der Rotation.

b) Zweiter Zeitabschnitt bei $\varphi = \frac{\pi}{2}$

Für den nächsten Zeitabschnitt darf man schon nicht mehr mit dem Anfangsquermagnetfeld abschätzen, denn bei $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (bzw. $\varphi = \frac{3}{2}\pi$) wird B_r nicht mehr verschwinden. Also muss man aus der Gleichung (6)

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -c \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi}$$

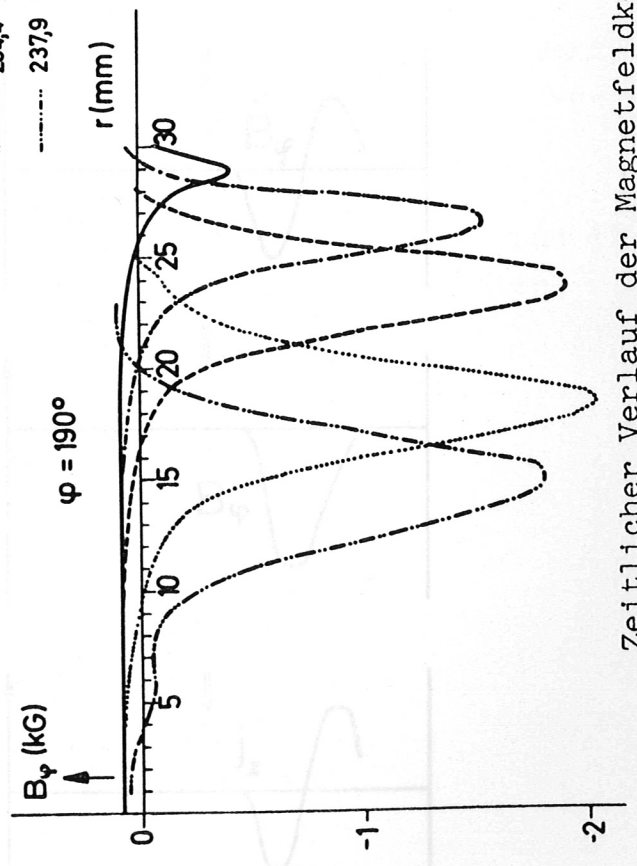
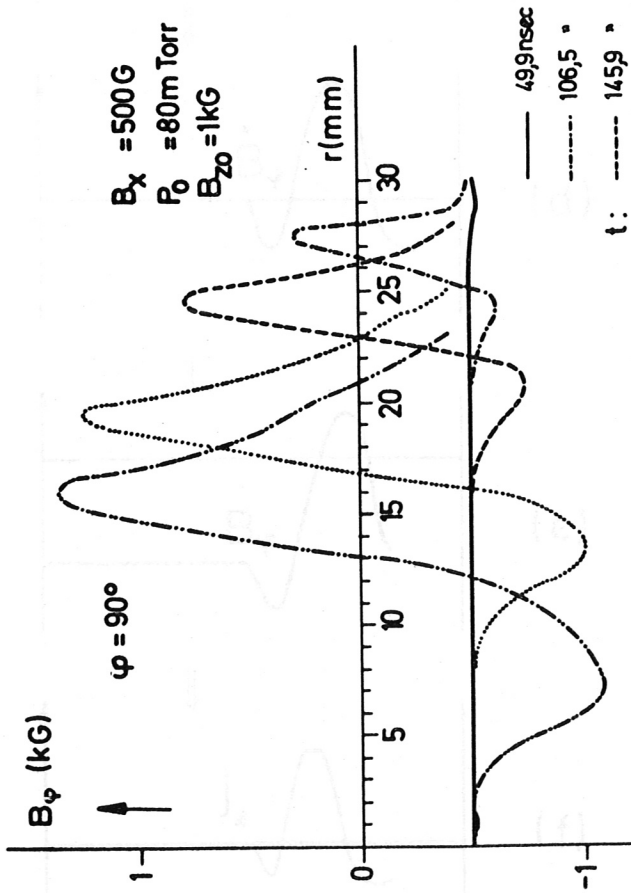
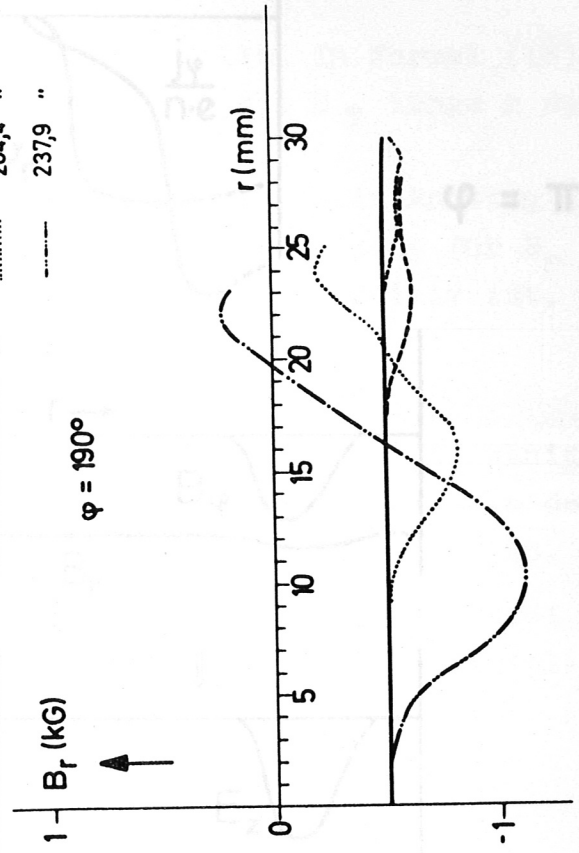
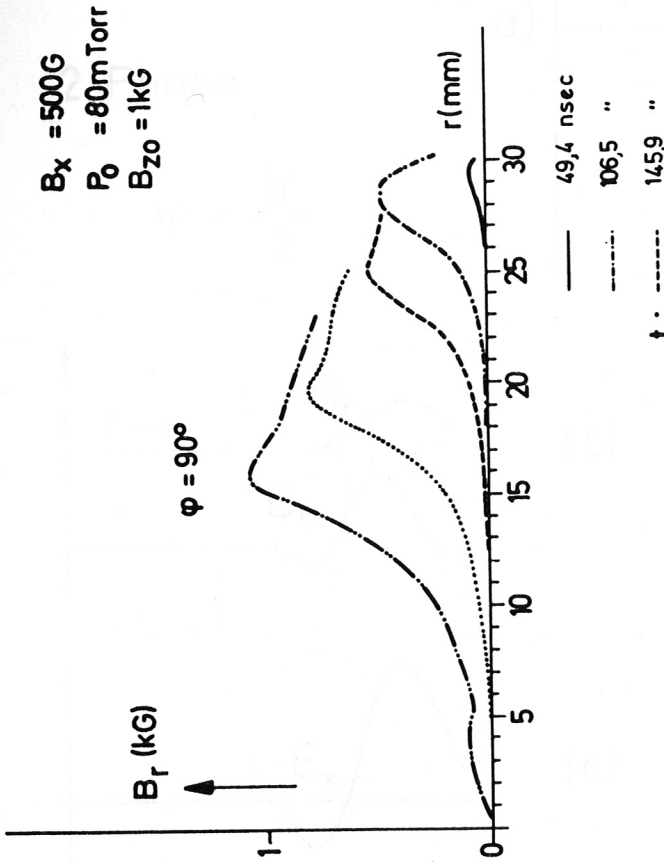
das B_r abschätzen, das sich während des ersten Zeitraums entwickelt hat. Dazu wird wiederum die schwache Winkelabhängigkeit von j_φ , u_r und n ausser Betracht gelassen und das Anfangsquerveld in Gl. (18) eingesetzt:

$$E_z = \frac{1}{c} u_r B_x \sin \varphi - \frac{1}{n \cdot e \cdot c} j_\varphi B_x \cos \varphi,$$

woraus

$$\dot{B}_r \approx -\frac{1}{r} (u_r B_x \cos \varphi + \frac{1}{n \cdot e} j_\varphi B_x \sin \varphi)$$

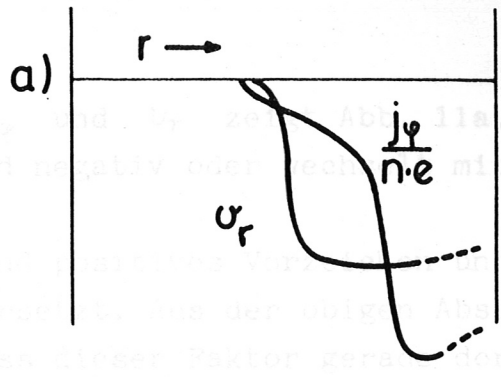
folgt. Bei $\varphi = \frac{\pi}{2}$ fällt der erste Summand weg und, da $j_\varphi < 0$ ist, wird $B_r \approx \dot{B}_r \cdot \Delta t$ positiv (s. auch Abb. 10). B_φ hatte sich in der ersten Phase in diesem Winkelbereich kaum geändert, wie man auf dieselbe Weise wie unter a) leicht abschätzen oder aus Abb. 10 sehen



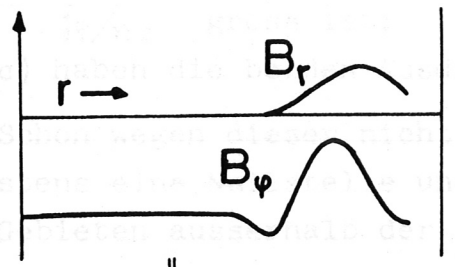
Zeitlicher Verlauf der Magnetfeldkomponenten für zwei Winkel

2. Phase

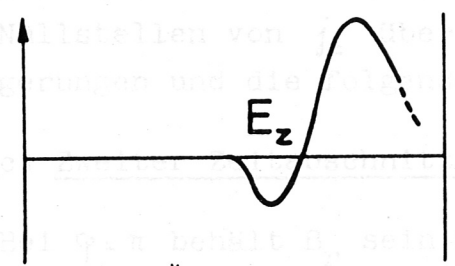
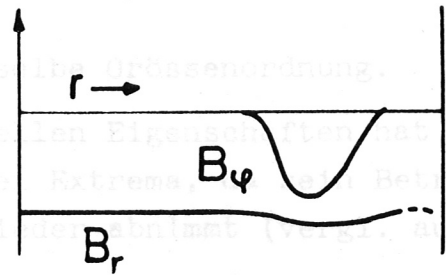
$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$



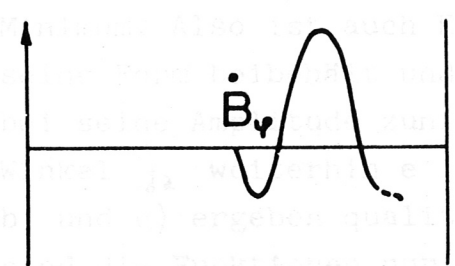
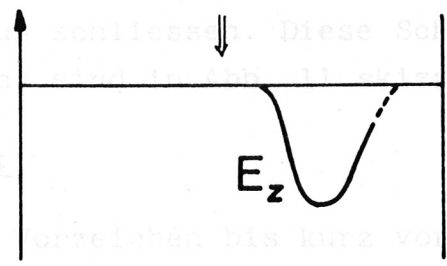
$$\varphi = \pi$$



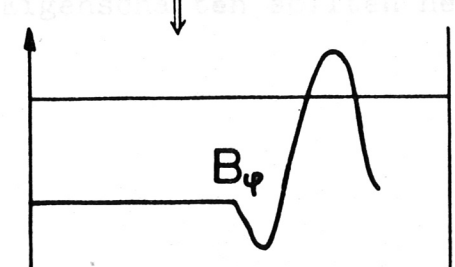
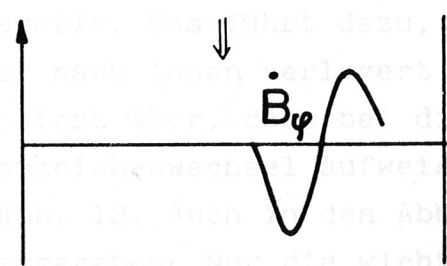
(b)



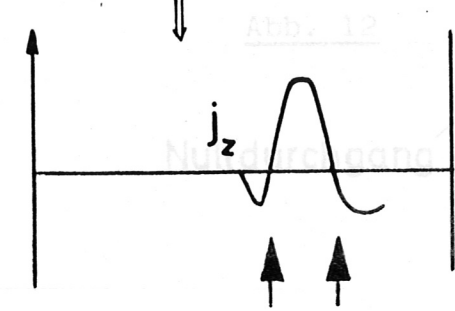
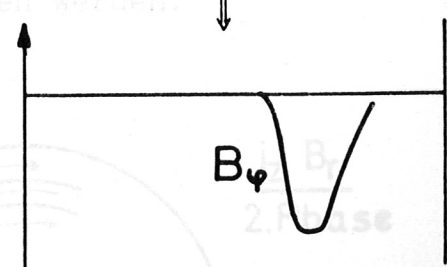
(c)



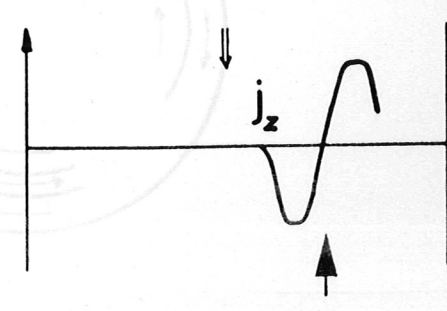
(d)



(e)



(f)



Vorzeichenwechsel in \dot{j}_z

kann. Die Profile von j_φ und u_r zeigt Abb. 11a. In Formel (18)

- a) ist der erste Summand negativ oder wechselt mit B_φ längs r das Vorzeichen;
- b) hat der zweite Summand positives Vorzeichen und sein Anstieg ist etwas nach aussen versetzt. Aus der obigen Abschätzung für B_r geht auch hervor, dass dieser Faktor gerade dort positiv ist, wo $j_\varphi/n.c$ gross ist;
- c) haben die beiden Ausdrücke dieselbe Grössenordnung.

Schon wegen dieser nicht zu speziellen Eigenschaften hat E_z wenigstens eine Nullstelle und auch zwei Extrema, da sein Betrag in den Gebieten ausserhalb der Schicht wieder abnimmt (vergl. auch Abb. 6).

Daraus muss man nun auf zwei Extrema für B_φ und damit auf zwei Nullstellen von j_z über den Radius schliessen. Diese Schlussfolgerungen und die folgenden unter c) sind in Abb. 11 skizziert.

c) Zweiter Zeitabschnitt bei $\varphi = \pi$

Bei $\varphi = \pi$ behält B_r sein negatives Vorzeichen bis kurz vor der Kompression; B_φ ist ebenfalls negativ und hat (s. unter a)) ein Minimum. Also ist auch E_z stets negativ. Das führt dazu, dass B_φ seine Form beibehält und nur weiter nach innen verlagert wird, wobei seine Amplitude zunimmt. Das heisst aber, dass bei diesem Winkel j_z weiterhin e i n e n Vorzeichenwechsel aufweist.

b) und c) ergeben qualitativ die Abb. 12. Auch in den Abb. 9 und 11 sind die Funktionen nur grob wiedergegeben. Nur die wichtigsten Eigenschaften sollten hervorgehoben werden.

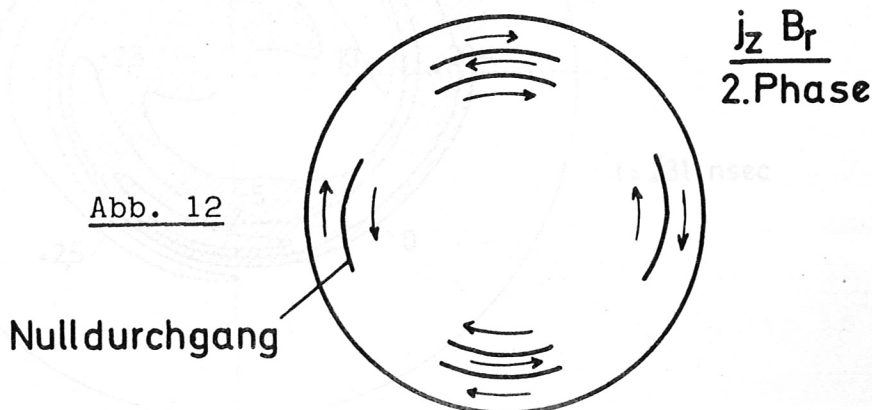


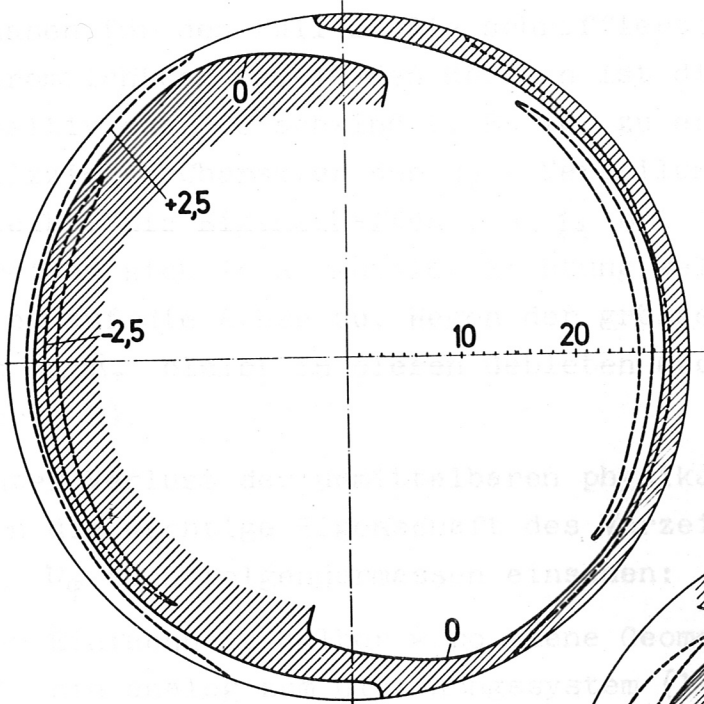
Abb. 12

Nulldurchgang

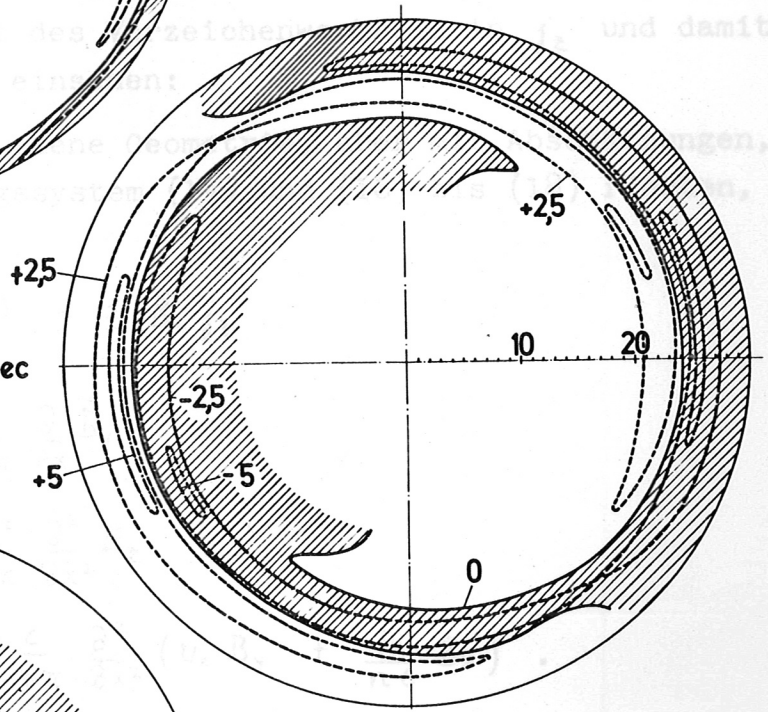
Bildserie 5

In den verschiedenen
Stromdichte j_z negative
 j_z (kA/cm²) entweder

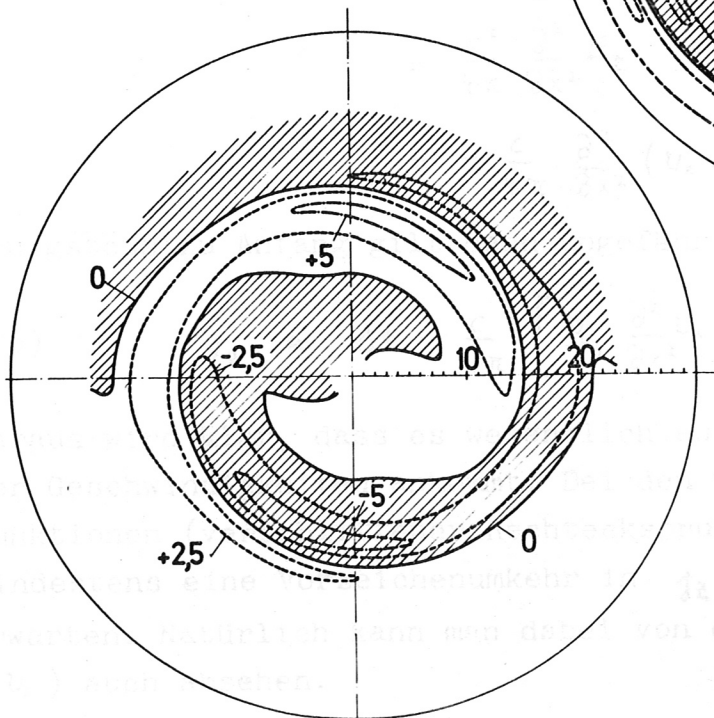
$t = 80$ nsec



$t = 132$ nsec



$t = 231$ nsec



Höhenlinien der Stromdichte j_z

9. Die Bildserie 5 zeigt Höhenlinien von j_z in den verschiedenen Phasen für den Fall 2. Die schraffierten Bezirke deuten negative Stromrichtung an, in den übrigen ist die Stromdichte entweder positiv oder verschwindet. Es ist zu erkennen, dass der auf Abb. 12 skizzierte Charakter der j_z - Verteilung bis zur Kompression erhalten bleibt. Die Eigenschaften von j_z bei $\pi/2$ (zwei Nulldurchgänge) breiten sich in azimuthaler Richtung weiter aus und das Ganze bewegt sich auf die Achse zu. Wegen der grösseren Anzahl der Nullstellen in $j_z B_r$ bleibt in diesen Gebieten auch v_φ kleiner (s. Bildserie 2).

Unter Verlust der unmittelbaren physikalischen Anschaulichkeit kann man die wichtige Eigenschaft des Vorzeichenwechsels in j_z und damit in v_φ auch folgendermassen einsehen:

Der Einfachheit halber wird ebene Geometrie, aber mit Abschätzungen, wie sie analog zum Gleichungssystem (14) und (16) bis (18) führten, angenommen. Dann ist

$$(19) \quad m_i \frac{D}{Dt} (n v_y) = \frac{1}{c} B_x j_z$$

und

$$\begin{aligned} \dot{j}_z &= \frac{c}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \dot{B}_y \\ &= \frac{c^2}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_z \\ &= - \frac{c}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v_x B_y + \frac{j_y}{n e} B_x) . \end{aligned}$$

Wenigstens zu Anfang gilt dann ungefähr

$$(20) \quad \dot{j}_z \approx \Delta t \cdot \frac{c}{4\pi} \cdot \left[B_y \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_x + B_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{j_y}{n e} \right) \right] .$$

Daraus wird klar, dass es wesentlich auf die zweiten Ableitungen der Geschwindigkeiten ankommt. Bei den üblichen Strukturen dieser Funktionen (verschliffener Rechtecksprung oder Extremum) ist mindestens eine Vorzeichenumkehr in j_z und damit in $j_z B_x$ zu erwarten. Natürlich kann man dabei von der Dynamik in x-Richtung (v_x) auch absehen.

9. Drehimpuls

Das Ergebnis, dass die Plasmarotation längs des Radius ihre Richtung wechselt, ist wichtig für die viel diskutierte Frage der Übertragung von Drehimpuls auf das Plasma. Die in der Literatur vorgeschlagenen Mechanismen werden durch das vorliegende Resultat nicht ausgeschlossen, doch sind sie auch nicht notwendig zur Erklärung der Rotation des Plasmas. Sehr deutlich sieht man das am Fall 9. Seine (rotations-symmetrischen) Anfangswertprofile wurden so gewählt, wie man sich ein Thetapinch-Plasma nach Abklingen der radialen Oszillationen vorstellt (Abb. 13).

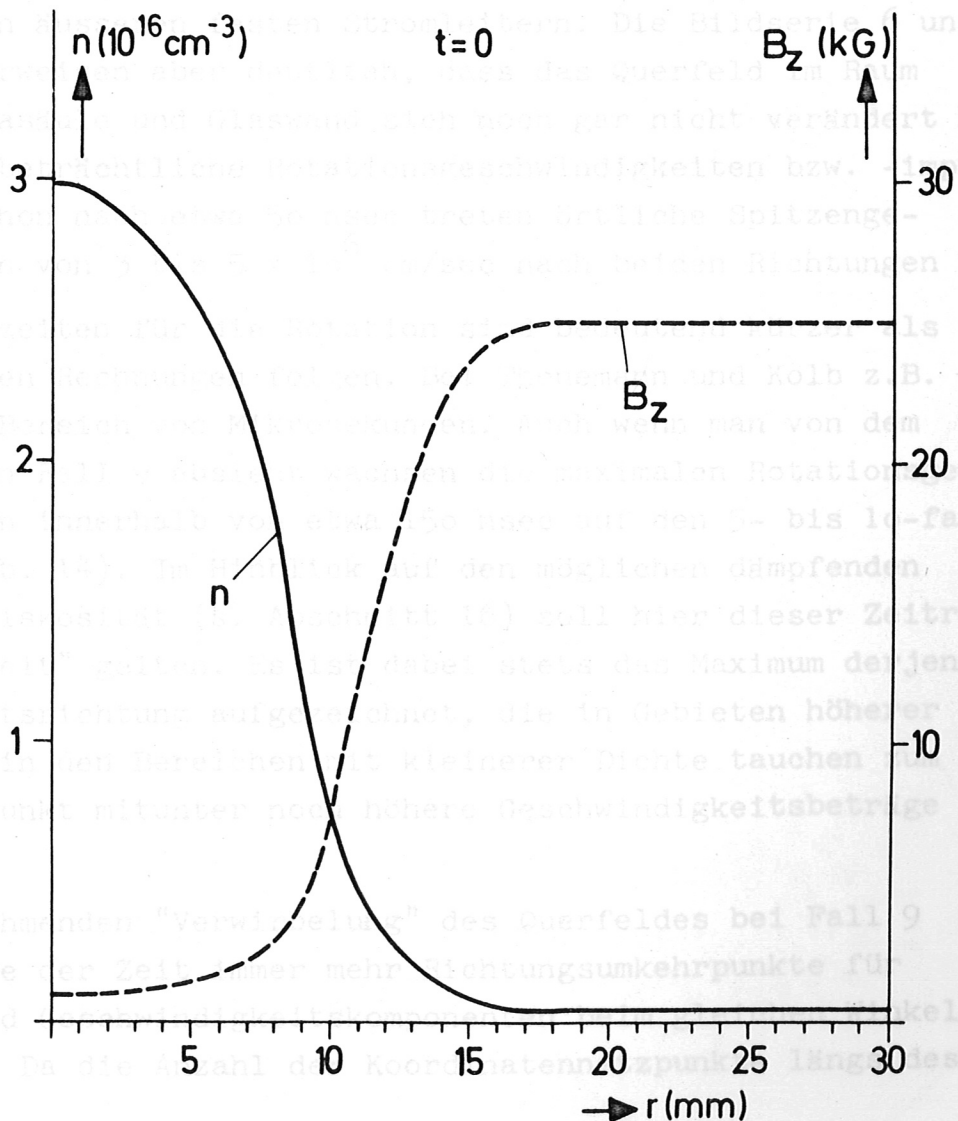


Abb. 13

Anfangsbedingungen für Fall 9

Die Temperaturen ($T_i = T_e$) für $t = 0$ sind aus der Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{B^2}{8\pi} + 2n kT = \text{const.}$$

gewonnen. Die Anfangsgeschwindigkeiten (u_r, u_φ) waren Null. Der zeitliche Anstieg des (äusseren) Magnetfeldes ist für das Folgende nicht wesentlich und wurde durch eine Kondensatorspannung von 25 kV (vgl. Tab. 1) festgelegt. Überlagert ist zum Zeitpunkt $t = 0$ ein ungestört homogenes Querfeld. Diese Annahme ist etwas unrealistisch; dennoch entspricht dieser Fall ungefähr den Bedingungen, wie sie den Rechnungen von Thonemann und Kolb [24] zugrunde liegen.

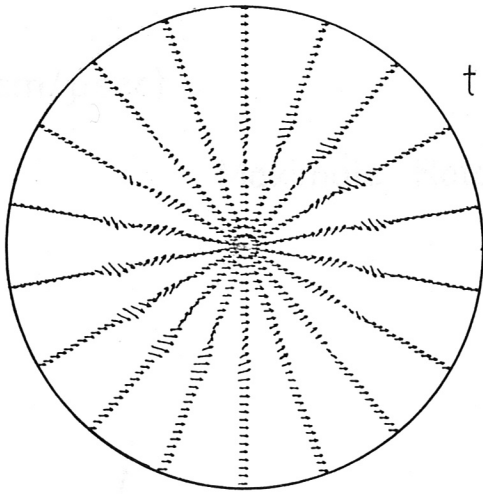
Eine Übertragung von Drehimpuls von aussen auf das Plasma ist hier (ohne Wandberührung) nur möglich durch elektromagnetische Wechselwirkung mit den äusseren festen Stromleitern. Die Bildserie 6 und die Rechnung erweisen aber deutlich, dass das Querfeld im Raum zwischen Plasmasäule und Glaswand sich noch gar nicht verändert hat, während schon beträchtliche Rotationsgeschwindigkeiten bzw. -impulse erscheinen. Schon nach etwa 50 nsec treten örtliche Spitzengeschwindigkeiten von 3 bis 5×10^6 cm/sec nach beiden Richtungen auf.

Diese Anstiegszeiten für die Rotation sind bedeutend kürzer als solche, die aus früheren Rechnungen folgen. Bei Thonemann und Kolb z.B. liegen sie im Bereich von Mikrosekunden. Auch wenn man von dem unrealistischen Fall 9 absieht wachsen die maximalen Rotationsgeschwindigkeiten innerhalb von etwa 150 nsec auf den 5- bis 10-fachen Wert an (s. Abb. 14). Im Hinblick auf den möglichen dämpfenden Einfluss der Viskosität (s. Abschnitt 16) soll hier dieser Zeitraum als "Anstiegszeit" gelten. Es ist dabei stets das Maximum derjenigen Geschwindigkeitsrichtung aufgezeichnet, die in Gebieten höherer Dichte liegt; in den Bereichen mit kleinerer Dichte tauchen zum gleichen Zeitpunkt mitunter noch höhere Geschwindigkeitsbeträge auf.

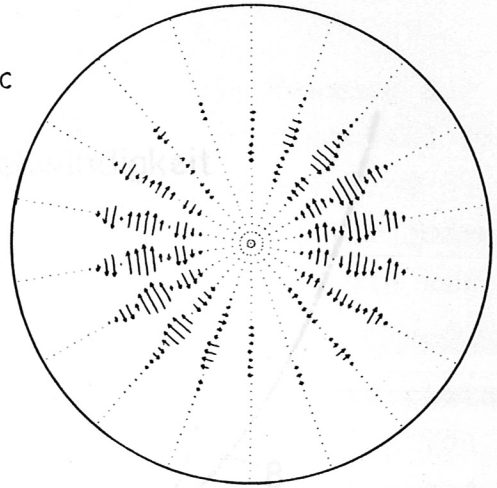
Wegen der zunehmenden "Verwirbelung" des Querfeldes bei Fall 9 kommen im Laufe der Zeit immer mehr Richtungsumkehrpunkte für Magnetfeld- und Geschwindigkeitskomponenten beim gleichen Winkel zum Vorschein. Da die Anzahl der Koordinatennetzpunkte längs des

QUERMAGNETFELD

ROTATION

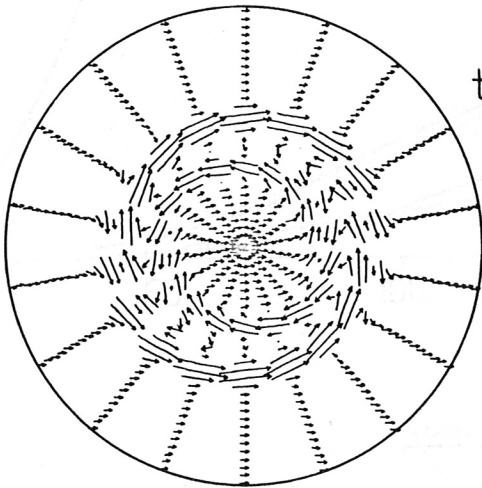


$t = 6 \text{ nsec}$

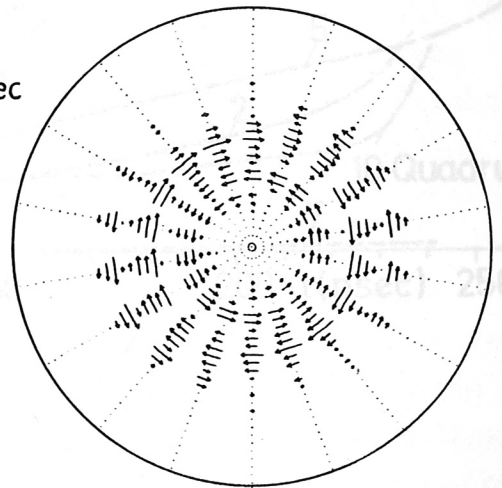


5 KG

0.05 E

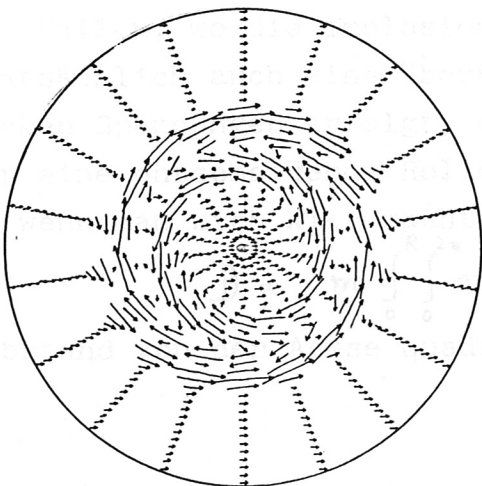


$t = 32 \text{ nsec}$

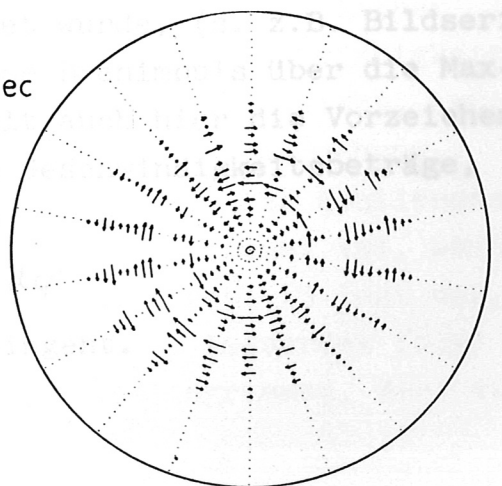


5 KG

0.5 E



$t = 47 \text{ nsec}$



5 KG

1 E

$n \cdot v_{\phi} = 1E = 10^{10} \text{ cm}^{-3} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^{-1}$

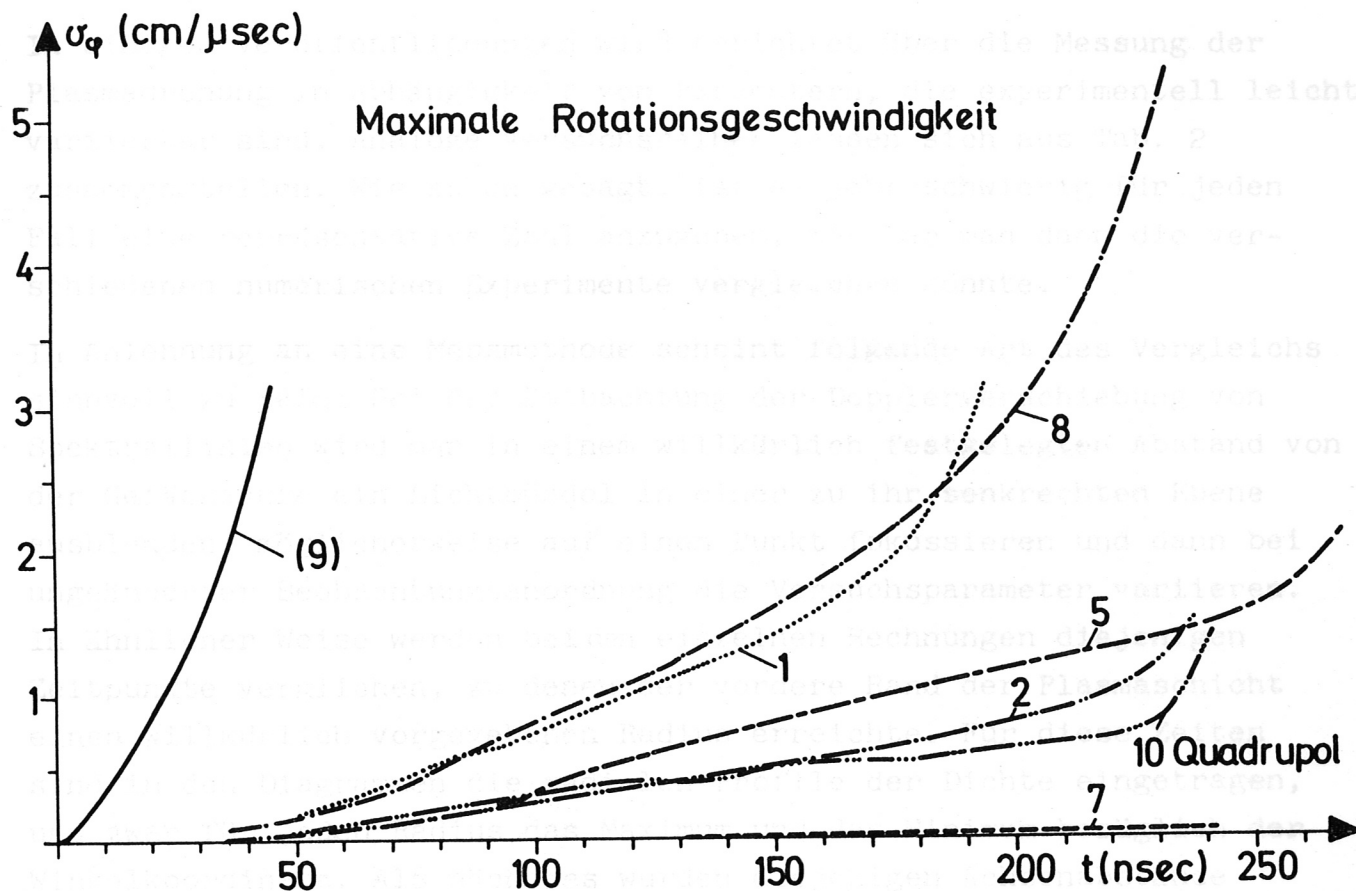


Abb. 14

Radius fest ist, stösst man dadurch rasch auf eine Grenze für die Dauer einer sinnvollen Rechnung.

In den Fällen, wo die Implosion berechnet wurde, (s. z.B. Bildserie 2) ist tatsächlich auch eine Übertragung von Drehimpuls über die Maxwell'schen Spannungen erfolgt; doch spielt auch hier die Vorzeichenumkehr eine entscheidende Rolle für die Geschwindigkeitsbeträge, zumal wenn man sich klar macht, dass in

$$D = m \int_0^R \int_0^{2\pi} n v_{\varphi} r^2 dr d\varphi$$

der Abstand von der Achse quadratisch eingeht.

Als interessantes Nebenergebnis aus den Diagrammen, dass die

Abb. 15

10. Abhängigkeit der Rotation von p_0 , B_{z0} und B_x

In einigen Veröffentlichungen wird berichtet über die Messung der Plasmadrehung in Abhängigkeit von Parametern, die experimentell leicht variierbar sind. Analoge Versuchsreihen lassen sich aus Tab. 2 zusammenstellen. Wie schon gesagt, ist es sehr schwierig für jeden Fall eine repräsentative Zahl anzugeben, mit der man dann die verschiedenen numerischen Experimente vergleichen könnte.

In Anlehnung an eine Messmethode scheint folgende Art des Vergleichs sinnvoll zu sein: Bei der Beobachtung der Dopplerverschiebung von Spektrallinien wird man in einem willkürlich festgelegten Abstand von der Gefässachse ein Lichtbündel in einer zu ihr senkrechten Ebene ausblenden, möglicherweise auf einen Punkt fokussieren und dann bei ungeänderter Beobachtungsanordnung die Versuchsparameter variieren. In ähnlicher Weise werden bei den einzelnen Rechnungen diejenigen Zeitpunkte verglichen, zu denen der vordere Rand der Plasmaschicht einen willkürlich vorgegebenen Radius erreichte. Für diese Zeiten sind in den Diagrammen die radialen Profile der Dichte eingetragen, und zwar für jeden Radius das Maximum und das Minimum bezüglich der Winkelkoordinate. Als nächstes wurden diejenigen Achsenabstände aufgesucht, wo v_φ seinen grössten positiven und grössten negativen Wert annahm. Für diese Radien schliesslich zeigen die Abbildungen v_φ als Funktion des Winkels. Wenn die grösste (negative) Geschwindigkeit bei sehr kleinen Dichten auftritt, so enthält die Zeichnung $v_\varphi(\varphi)$ an dem Radius, wo n bei etwa 10^{15} cm^{-3} liegt.

Die Fälle 1, 2 und 3 ($p_0 = 40, 80, 120 \text{ mTorr}$) liefern eine Versuchsreihe für die Abhängigkeit der Rotation vom Fülldruck. Zunächst fällt wieder die starke azimutale Änderung der Drehgeschwindigkeit auf. Da das Plasma also nicht wie ein starrer Körper rotiert, ist es auch nicht gleichgültig, bei welchem Winkel man die Drehung beobachtet. Aus Gleichung (14) ($q_\varphi = n v_\varphi!$) würde man schliessen, dass v_φ dem Fülldruck ungefähr umgekehrt proportional ist, wenn sich die Schichtdicken nicht zu stark verändern. Abb. 15 legt dar, dass diese Proportionalität leidlich erfüllt ist. Ausserdem folgt als interessantes Nebenergebnis aus den Dichtediagrammen, dass die

ÜBERLAGERTES HOMOGENES FELD (500Γ)

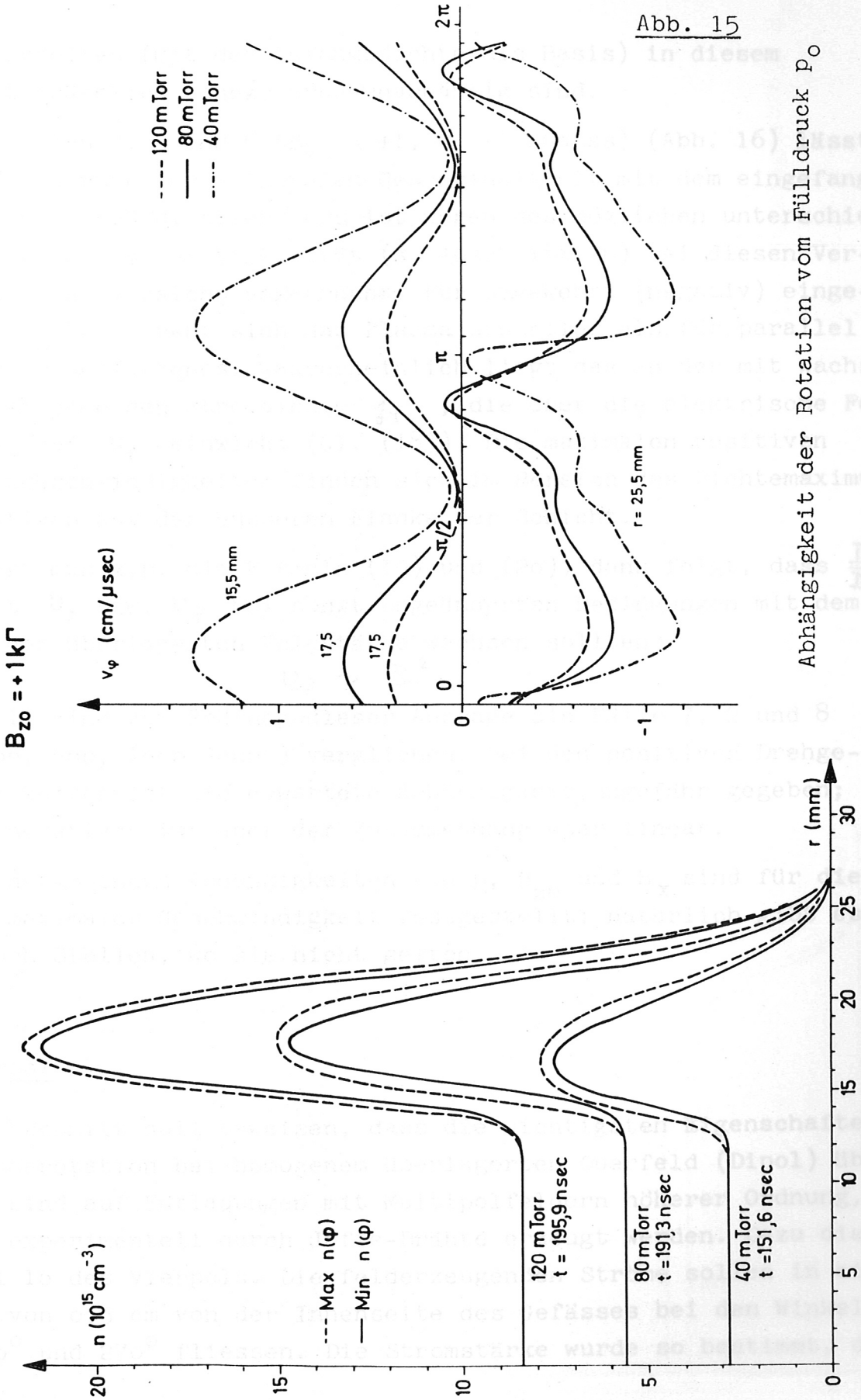


Abb. 15

Abhängigkeit der Rotation vom Fülldruck p_0

Halbwertsbreiten (mit der Anfangsdichte als Basis) in diesem Bereich tatsächlich nahezu druckunabhängig sind.

Aus den Fällen 2, 6 und 5 ($B_{z0} = +1, 0, -1$ kGauss) (Abb. 16) lässt sich die Änderung der azimuthalen Geschwindigkeit mit dem eingefangenen B_z -Feld untersuchen. Allerdings ist wegen des möglichen unterschiedlichen Einflusses der Viskosität (s. Abschnitt 16) bei diesen Vergleichen etwas Vorsicht angebracht. Für umgekehrt (negativ) eingefangenes B_z -Feld dreht sich das Plasma schneller als für parallel (positiv) eingefangenes. Wahrscheinlich liegt das an der mit wachsendem B_{z0} abnehmenden Stromdichte j_φ , die über die elektrische Feldstärke E_z auf v_φ einwirkt (Gl. (18)). Die maximalen positiven Rotationsgeschwindigkeiten finden sich im Bereich des Dichtemaximums, die negativen auf der äusseren Flanke der Schicht.

Kombiniert man z.B. die Formeln (19) und (20), dann folgt, dass $\frac{D}{Dt}(nv_y)$ und somit v_y bzw. v_φ bei sonst ungeänderten Bedingungen mit dem Quadrat der überlagerten Feldstärke wachsen sollten:

$$v_\varphi \sim B_x^2$$

In Abb. 17 sind zur Prüfung dieser Aussage die Fälle 7, 2 und 8 ($B_x = 100, 500, 1000$ Gauss) verglichen. Bei den positiven Drehgeschwindigkeiten ist die erwartete Abhängigkeit ungefähr gegeben; bei den negativen ist aber der Zusammenhang eher linear.

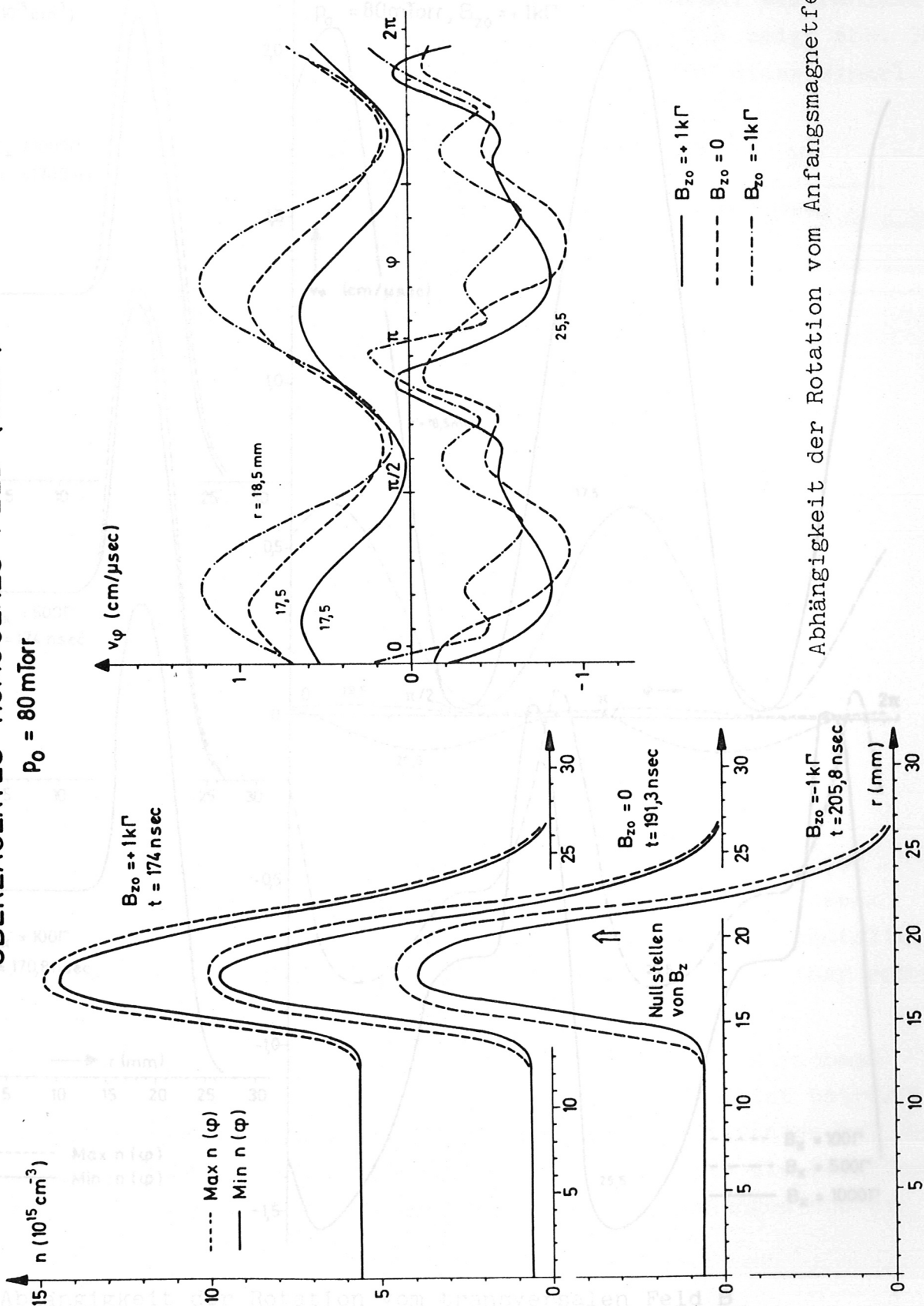
Alle vorhergehenden Abhängigkeiten von p , B_{z0} und B_x sind für die Gebiete maximaler Geschwindigkeit festgestellt; natürlich gibt es stets auch Stellen, wo sie nicht gelten.

11. Vierpol

Dieser Abschnitt soll beweisen, dass die wichtigsten Eigenschaften der Plasmarotation bei homogenem überlagerten Querfeld (Dipol) übertragbar sind auf Entladungen mit Multipolfeldern höherer Ordnung, wie sie experimentell durch Joffe-Drähte erzeugt werden. Dazu dient der Fall 10 des Vierpols. Die felderzeugenden Ströme sollen in einem Abstand von 0,5 cm von der Innenseite des Gefässes bei den Winkeln 0° , 90° , 180° und 270° fließen. Die Stromstärke wurde so bestimmt, dass

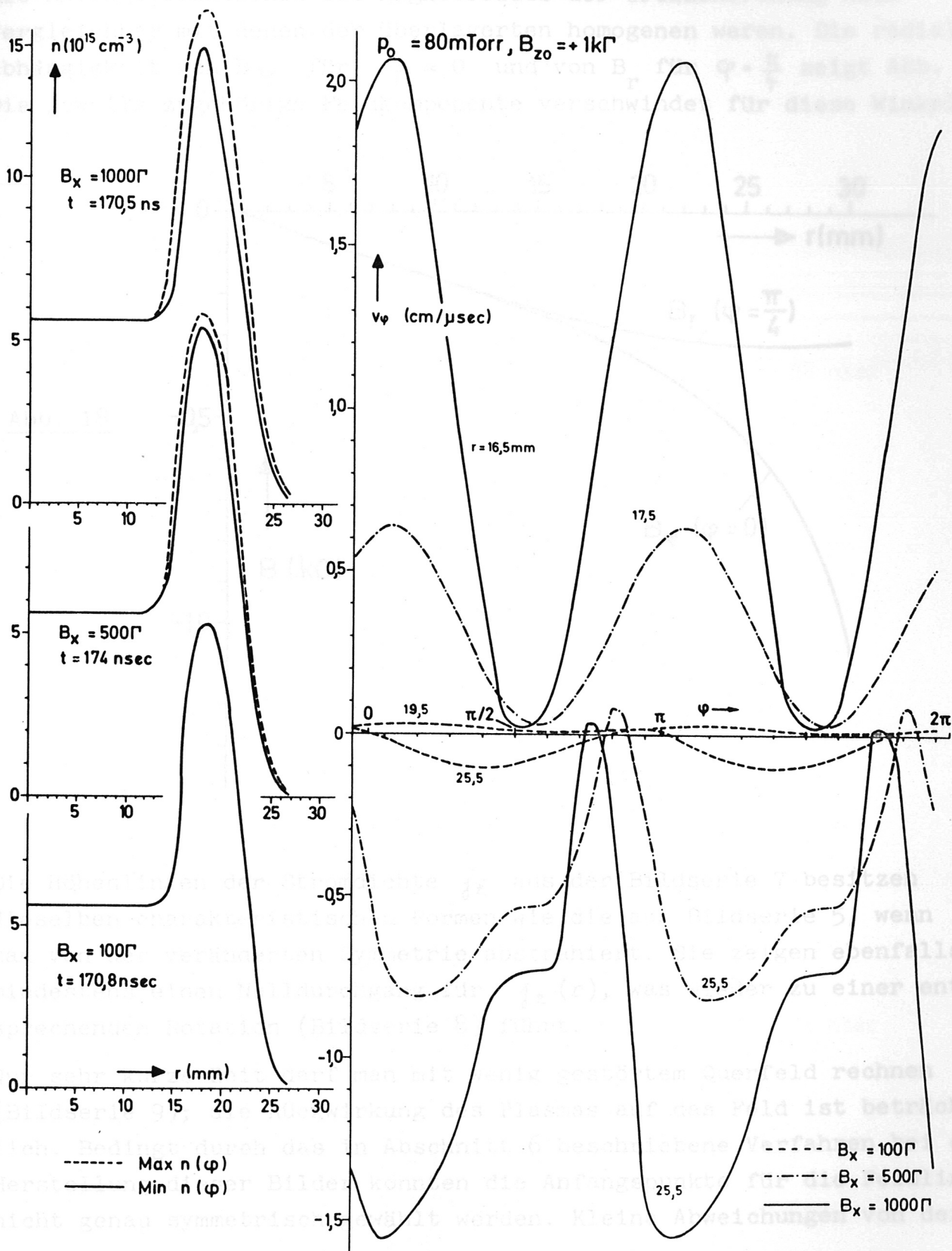
ÜBERLAGERTES HOMOGENES FELD (500Γ)

$P_0 = 80 \text{ mTorr}$



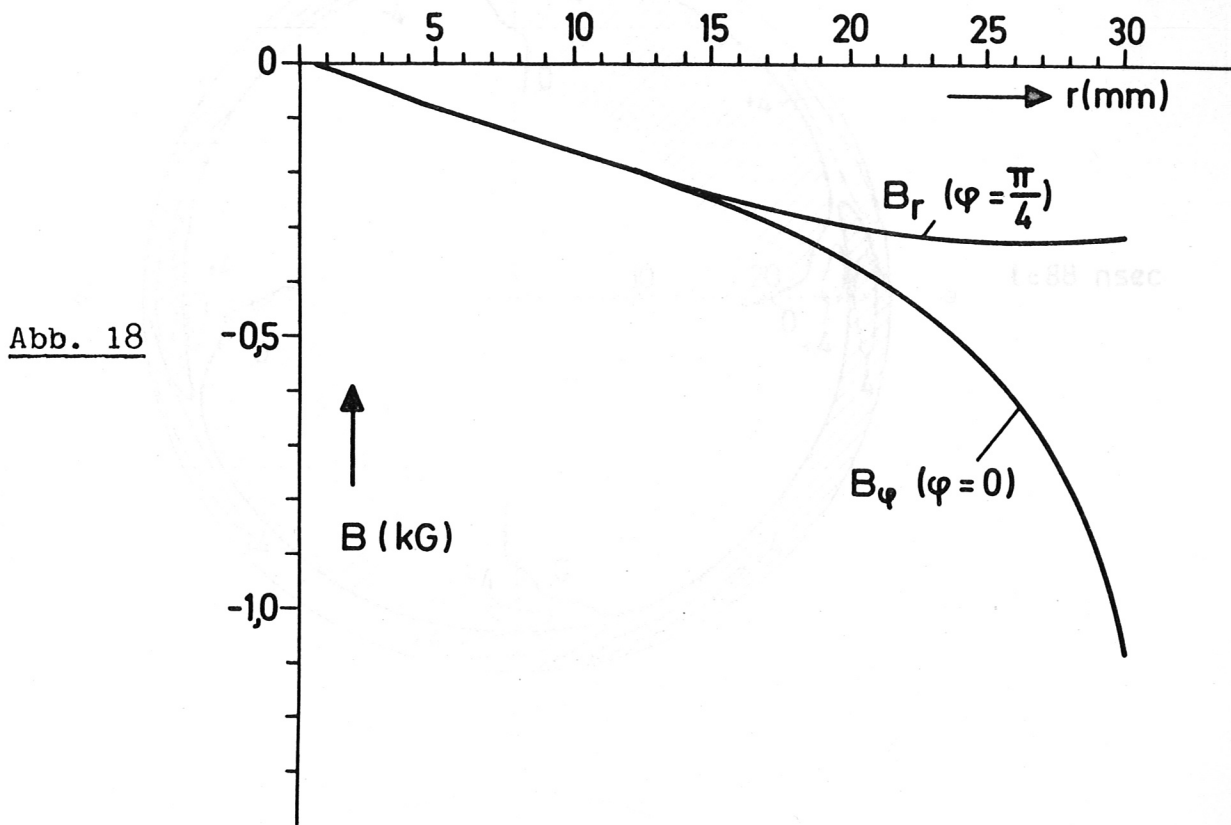
Abhängigkeit der Rotation vom Anfangsmagnetfeld B_{z0}

ÜBERLAGERTES HOMOGENES FELD



Abhängigkeit der Rotation vom transversalen Feld B_x

die Anfangsfeldstärken des Magnetfeldes der Grössenordnung nach vergleichbar mit denen der überlagerten homogenen waren. Die radiale Abhängigkeit von B_φ für $\varphi = 0$ und von B_r für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ zeigt Abb. 18. Die jeweils zugehörige Feldkomponente verschwindet für diese Winkel.



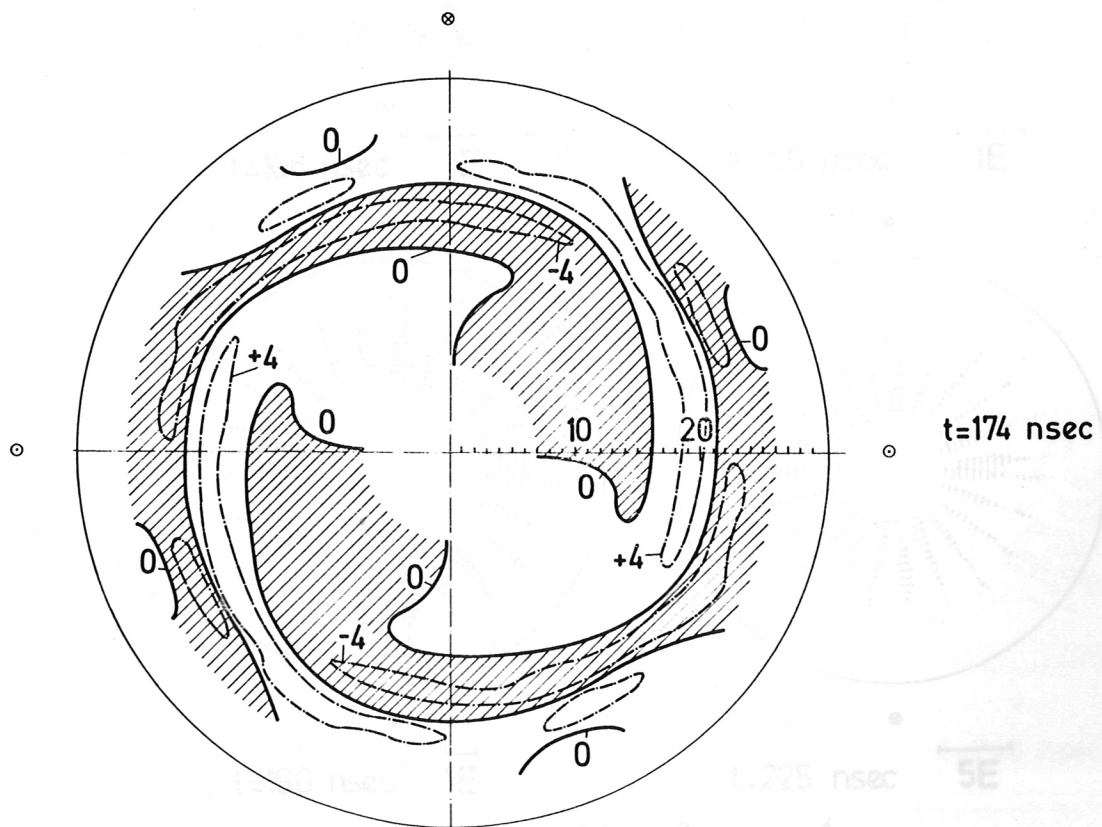
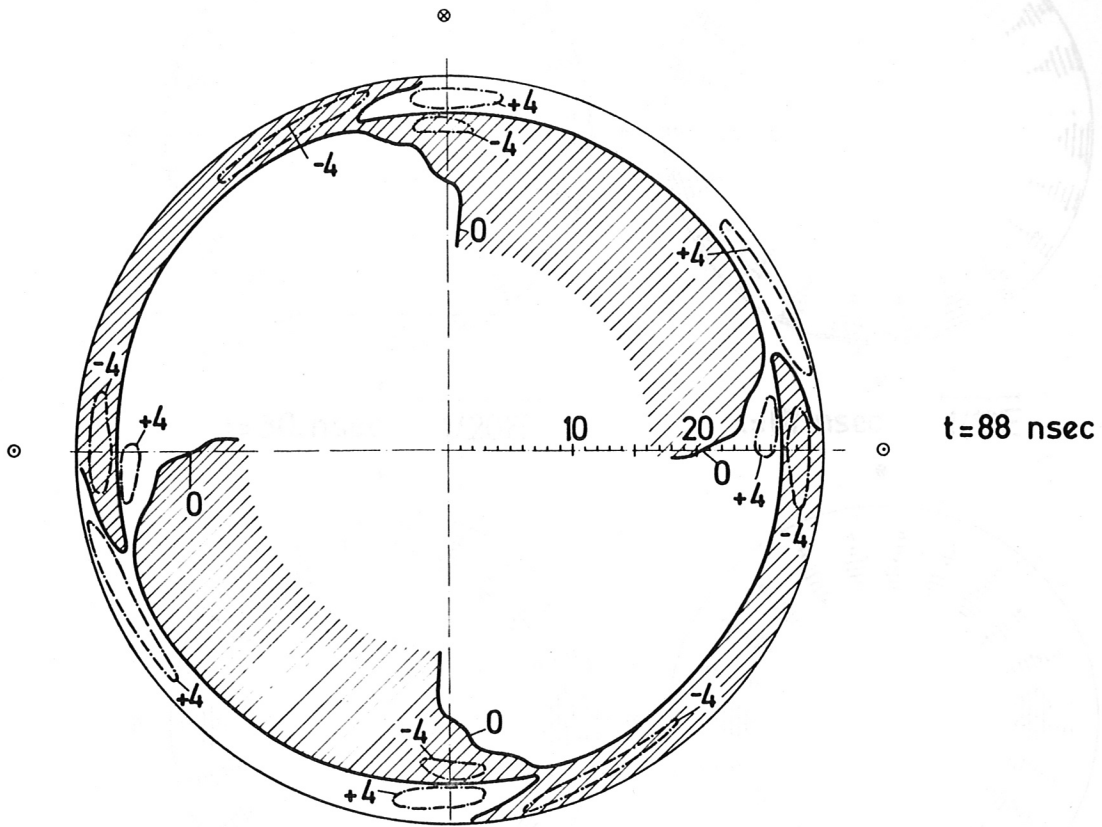
Die Höhenlinien der Stromdichte j_z aus der Bildserie 7 besitzen dieselben charakteristischen Formen wie die aus Bildserie 5, wenn man von der veränderten Symmetrie abstrahiert. Sie zeigen ebenfalls mindestens einen Nulldurchgang für $j_z(r)$, was wieder zu einer entsprechenden Rotation (Bildserie 8) führt.

Nur sehr kurze Zeit darf man mit wenig gestörtem Querfeld rechnen (Bildserie 9); die Rückwirkung des Plasmas auf das Feld ist beträchtlich. Bedingt durch das in Abschnitt 6 beschriebene Verfahren bei der Herstellung dieser Bilder konnten die Anfangspunkte für die Feldlinien nicht genau symmetrisch gewählt werden. Kleine Abweichungen von der

Stromdichte j_z (kA/cm²)

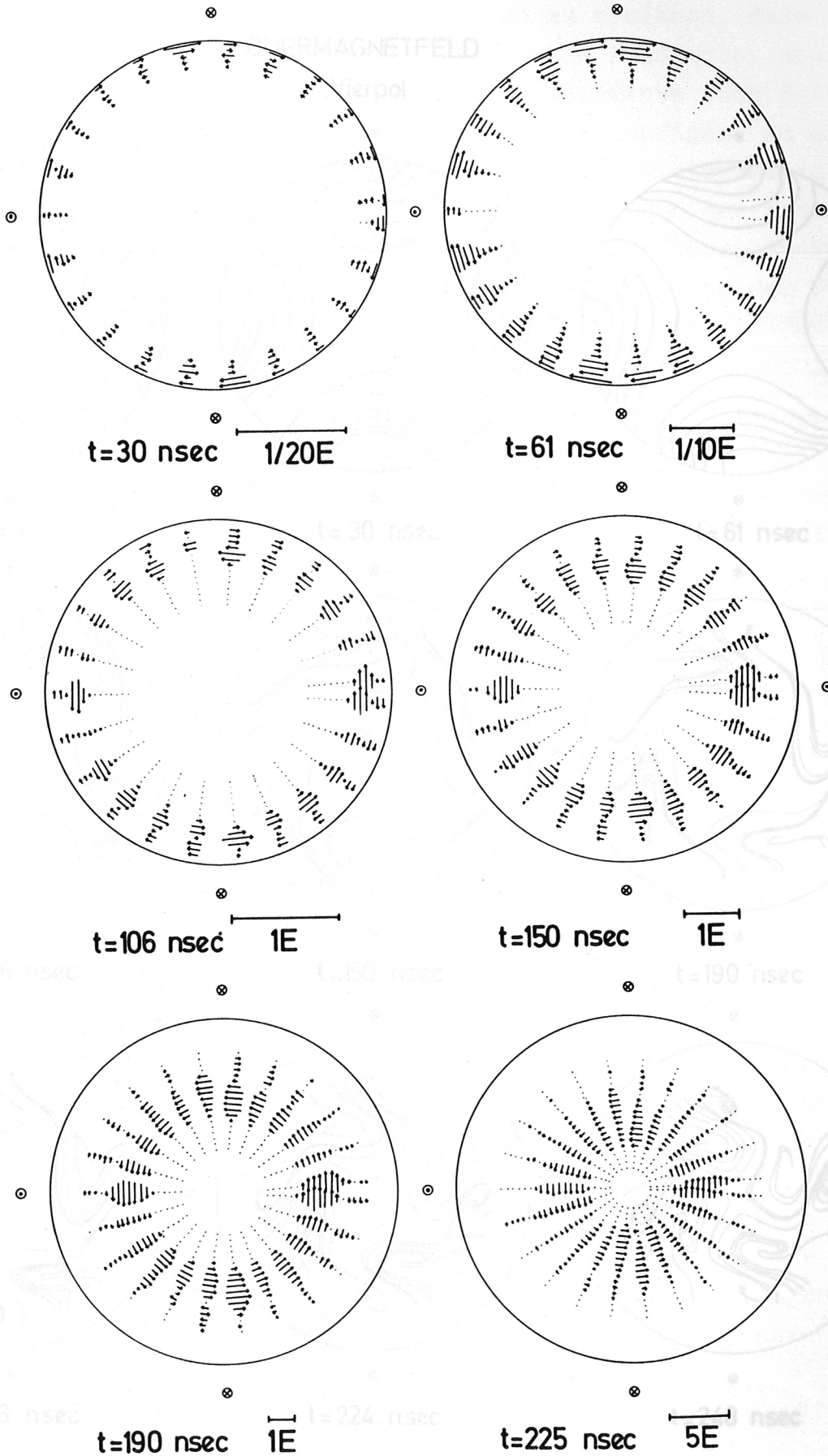
Bildserie 7

Vierpol



nsec 775 nsec SE
 10^{10} cm sec⁻¹
Vierpol

ROTATION

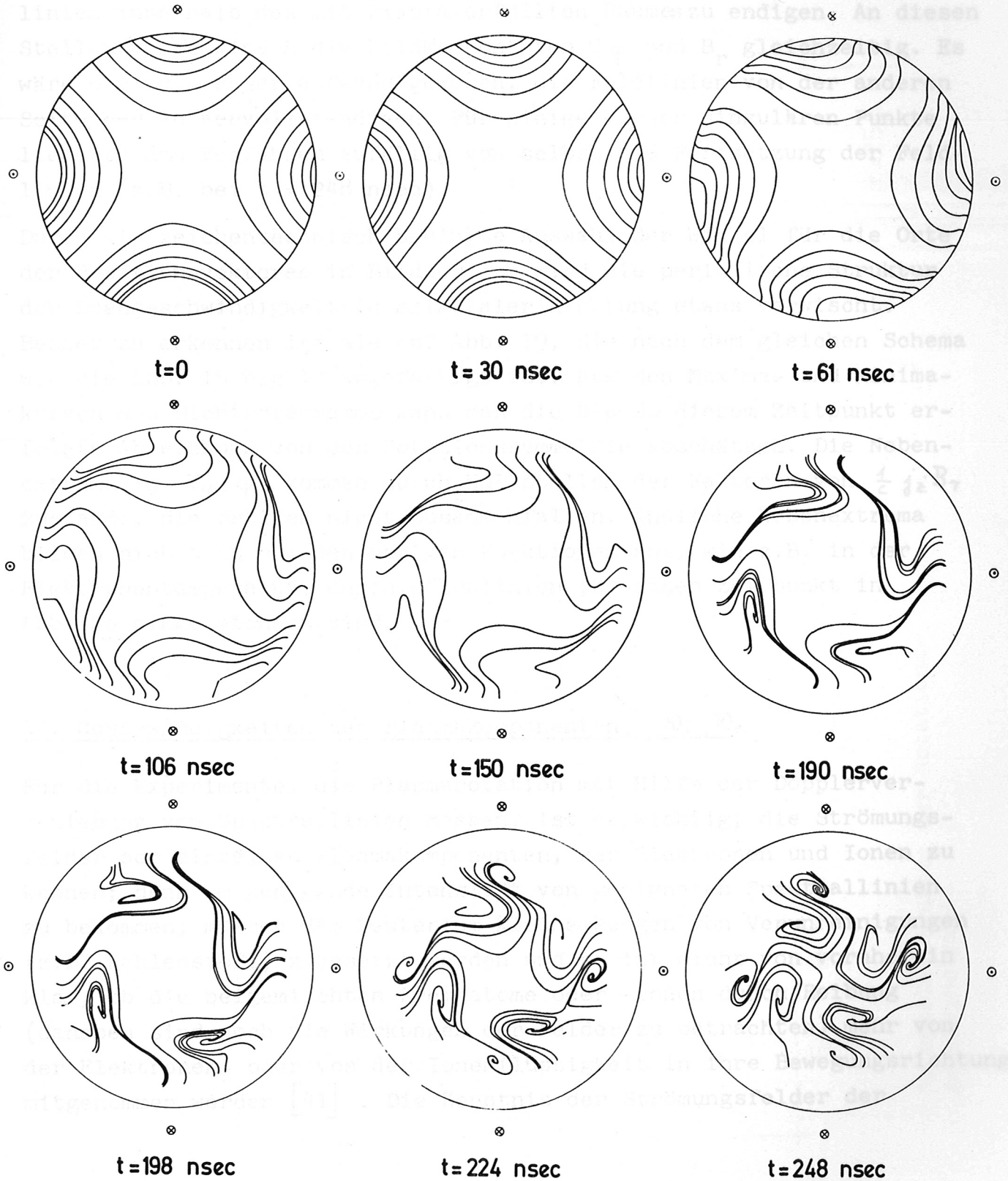


$$n\sigma_{\varphi}: 1E = 10^{10} \text{ cm}^{-3} \text{ cm sec}^{-1}$$

Rotationskomponente der Plasmaströmung (Vierpol)

QUERMAGNETFELD

Vierpol



Rückwirkung des Plasmas auf das transversale Vierpolfeld

Symmetrie im Erscheinungsbild sind deshalb so zu erklären, dass auf entsprechenden Seiten nicht die entsprechende Feldlinie, sondern eine daneben liegende gezeichnet ist. Manchmal scheinen auch Feldlinien innerhalb des mit Plasma erfüllten Raumes zu endigen. An diesen Stellen verschwinden die Feldkomponenten B_φ und B_r gleichzeitig. Es wäre ein zu grosser Aufwand gewesen, die Feldlinien von der anderen Seite her zu vervollständigen. Für einige dieser singulären Punkte lieferte das Verfahren zufällig von selbst die Fortsetzung der Feldlinien (z.B. bei $t = 248$ nsec).

Durch die zeichentechnisch bedingte Auswahl der Winkel für die Orte der Rotationsvektoren in Bildserie 8 wird die periodische Struktur der Drehgeschwindigkeit in azimuthaler Richtung etwas verwischt. Besser zu erkennen ist sie auf Abb. 19, die nach dem gleichen Schema wie die Abb. 15 bis 17 angefertigt ist. Aus den Maxima- und Minimakurven des Dichtediagramms kann man die bis zu diesem Zeitpunkt erfolgte Abweichung von der Rotationssymmetrie abschätzen. Die Nebenextrema in $v_\varphi(\varphi)$ kommen durch Nullstellen der Faktoren von $\frac{1}{c} j_z B_r$ zustande, die örtlich nicht zusammenfallen. Ähnliche Nebenextrema bilden sich auch bei den übrigen Funktionen aus, wie z.B. in der Elektronentemperatur, deren Höhenlinien für einen Zeitpunkt in Abb. 20 eingezeichnet sind.

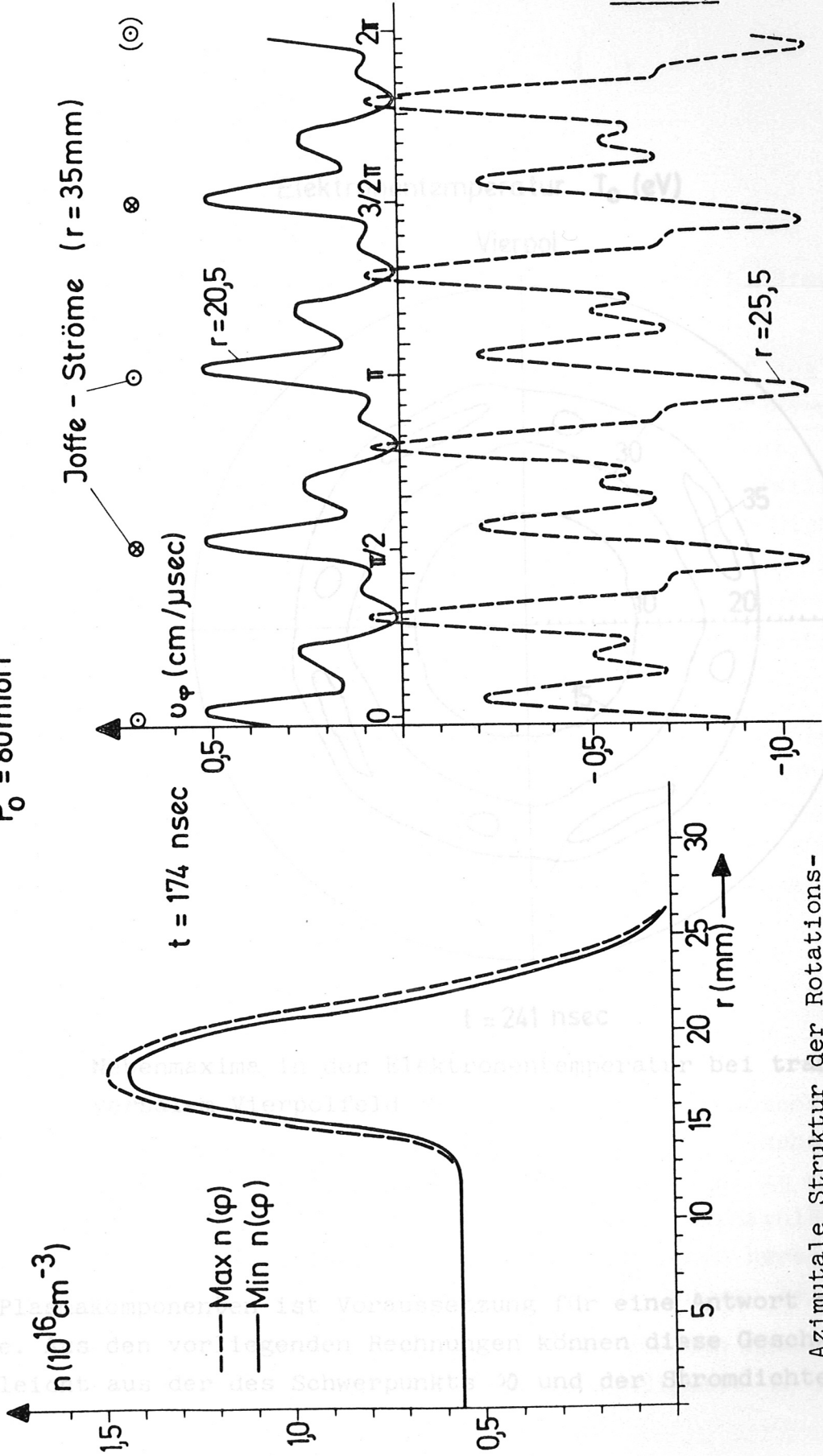
12. Geschwindigkeiten der Plasmakomponenten, ω_i, ω_e

Für die Experimente, die Plasmarotation mit Hilfe der Dopplerverschiebung von Spektrallinien messen, ist es wichtig, die Strömungsfelder der einzelnen Plasmakomponenten, der Elektronen und Ionen zu kennen; denn um genügende Intensität von geeigneten Spektrallinien zu bekommen, müssen dem Deuterium kleine Mengen von Verunreinigungen (z.B. Kohlenstoff) zugesetzt werden und es ist nicht von vornherein klar, ob die beigemischten Fremdatome oder -ionen durch Reibung (daneben sind noch die Wirkungen der Felder zu betrachten) mehr von der Elektronen- oder von der Ionenflüssigkeit in ihre Bewegungsrichtung mitgenommen werden [41]. Die Kenntnis der Strömungsfelder der

ÜBERLAGERTES VIERPOLFELD

$B_{z0} = 1 \text{ KG}$

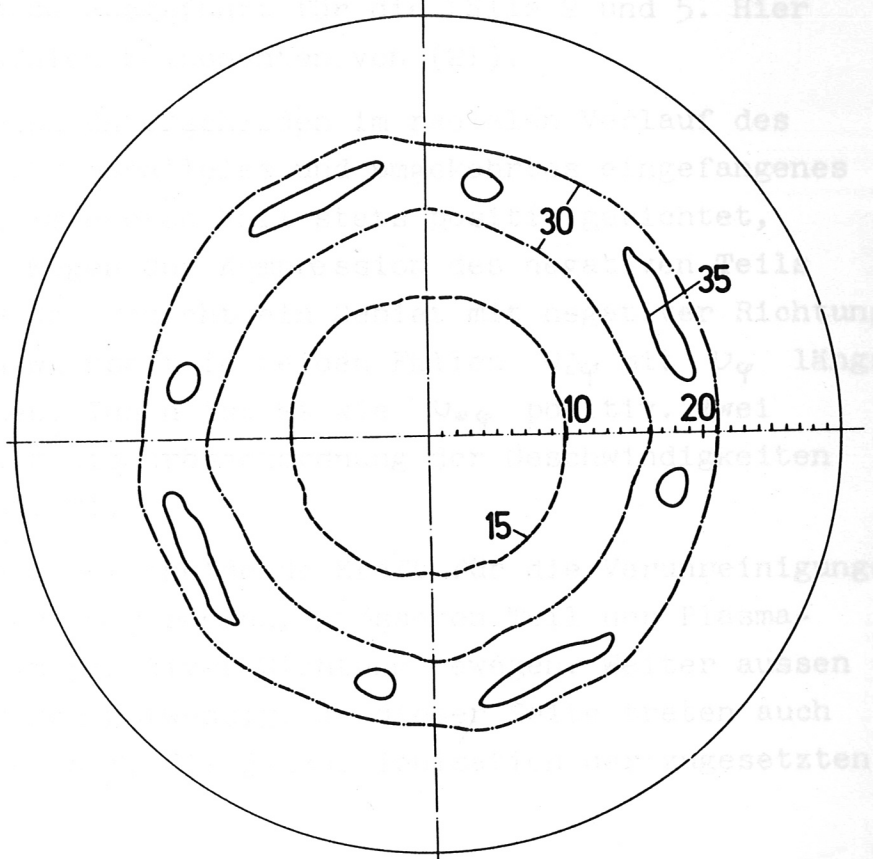
$P_0 = 80 \text{ mTorr}$



Azimutale Struktur der Rotationsgeschwindigkeit

Elektronentemperatur T_e (eV)

Vierpol



$t = 241 \text{ nsec}$

Nebenmaxima in der Elektronentemperatur bei transversalem Vierpolfeld

Abb. 20

einzelnen Plasmakomponenten ist Voraussetzung für eine Antwort auf diese Frage. Aus den vorliegenden Rechnungen können diese Geschwindigkeiten leicht aus der des Schwerpunkts ϖ und der Stromdichte j nach

$$\begin{aligned} \omega_e &= \omega - \frac{m_i}{m_i + m_e} \cdot \frac{1}{n \cdot e} j \\ (21) \quad \omega_i &= \omega + \frac{m_e}{m_i + m_e} \cdot \frac{1}{n \cdot e} j \end{aligned}$$

gewonnen werden. Das wurde ausgeführt für die Fälle 2 und 5. Hier interessieren die azimuthalen Komponenten von (21).

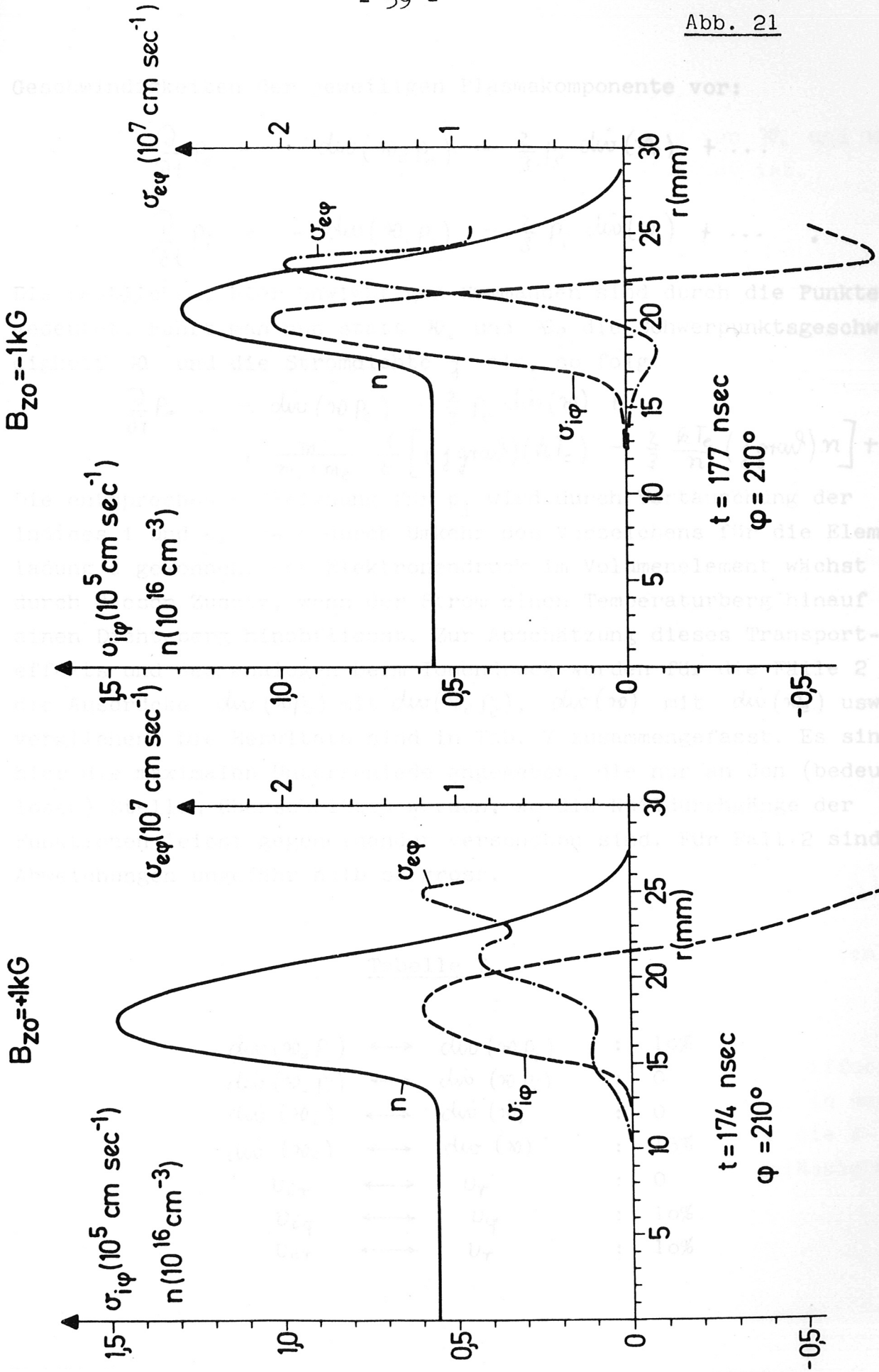
Entsprechend den typischen Unterschieden im radialen Verlauf des (Thetapinch-) B_z -Feldes für paralleles und umgekehrtes eingefangenes Anfangsfeld B_{z0} ist $v_{e\varphi}$ im ersten Fall stets positiv gerichtet, während es im letzteren wegen der Kompression des negativen Teils von B_z am vorderen Rand der Schicht ein Gebiet mit negativer Richtung aufweist. Bei den Ionen wechselt in beiden Fällen $v_{i\varphi}$ mit v_{φ} längs des Radius das Vorzeichen. Innen ist es wie $v_{e\varphi}$ positiv. Zwei Beispiele, aus denen auch die Grössenordnung der Geschwindigkeiten hervorgeht, gibt die Abb. 21.

Nimmt man die Reibung als entscheidende Kraft für die Verunreinigungen an, so müssten diese sich im vorderen, grösseren Teil der Plasmaschicht auf jeden Fall in positiver Richtung bewegen. Weiter aussen sind genauere Betrachtungen notwendig. An dieser Seite treten auch die höchsten Temperaturen auf, die ja zur Ionisation der zugesetzten Atome notwendig sind.

13. Verwendung von ω anstelle von ω_i oder ω_e

In den folgenden Abschnitten soll noch eine gewisse Fehlerabschätzung für die Ergebnisse gemacht werden. Neben den im Abschnitt 3 schon erwähnten Vereinfachungen führten Mangel an Rechenzeit u.ä. zu einigen weiteren Kürzungen in den Gleichungen (1) bis (7). Die vernachlässigten Terme wurden jedoch nachträglich mit den Lösungsfunktionen berechnet und ihr Grössenverhältnis zu den berücksichtigten Ausdrücken geprüft.

Bei exakter Herleitung der Gleichungen (3) und (4) für die Plasmatemperaturen kommen anstatt der Schwerpunktgeschwindigkeit ω die



Geschwindigkeit der Elektronen- und Ionenflussigkeit

Geschwindigkeiten der jeweiligen Plasmakomponente vor:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_e = - \operatorname{div}(\mathcal{N}_e p_e) - \frac{2}{3} p_e \operatorname{div}(\mathcal{N}_e) + \dots$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_i = - \operatorname{div}(\mathcal{N}_i p_i) - \frac{2}{3} p_i \operatorname{div}(\mathcal{N}_i) + \dots$$

Die restlichen, hier unwichtigen Summanden sind durch die Punkte angedeutet. Führt man nun statt \mathcal{N}_i und \mathcal{N}_e die Schwerpunkts-
geschwindigkeit \mathcal{N} und die Stromdichte j ein, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p_e = & - \operatorname{div}(\mathcal{N} p_e) - \frac{2}{3} p_e \operatorname{div}(\mathcal{N}) + \\ & + \frac{m_i}{m_i + m_e} \cdot \frac{1}{e} \left[(j \operatorname{grad})(k T_e) - \frac{2}{3} \frac{k T_e}{n} (j \operatorname{grad}) n \right] + \dots \end{aligned}$$

Die entsprechende Gleichung für p_i wird durch Vertauschung der Indices i und e , sowie durch Umkehr des Vorzeichens für die Elementarladung e gewonnen. Der Elektronendruck im Volumenelement wächst also durch diesen Zusatz, wenn der Strom einen Temperaturberg hinauf und einen Dichteberg hinabfließt. Zur Abschätzung dieses Transporteffekts und des analogen beim Ionendruck wurden für die Fälle 2 und 5 die Ausdrücke $\operatorname{div}(\mathcal{N} p_e)$ mit $\operatorname{div}(\mathcal{N}_e p_e)$, $\operatorname{div}(\mathcal{N})$ mit $\operatorname{div}(\mathcal{N}_e)$ usw. verglichen. Die Resultate sind in Tab. 7 zusammengefasst. Es sind hier die maximalen Unterschiede angegeben, die nur an den (bedeutungslosen) Stellen überschritten werden, wo die Nulldurchgänge der Funktionen leicht gegeneinander verschoben sind. Für Fall 2 sind die Abweichungen ungefähr halb so gross.

Tabelle 7

$\operatorname{div}(\mathcal{N}_e p_e)$	\longleftrightarrow	$\operatorname{div}(\mathcal{N} p_e)$:	10%
$\operatorname{div}(\mathcal{N}_i p_i)$	\longleftrightarrow	$\operatorname{div}(\mathcal{N} p_i)$:	0
$\operatorname{div}(\mathcal{N}_i)$	\longleftrightarrow	$\operatorname{div}(\mathcal{N})$:	0
$\operatorname{div}(\mathcal{N}_e)$	\longleftrightarrow	$\operatorname{div}(\mathcal{N})$:	15%
U_{ir}	\longleftrightarrow	U_r	:	0
$U_{i\varphi}$	\longleftrightarrow	U_φ	:	10%
U_{er}	\longleftrightarrow	U_r	:	10%

0 bedeutet einen Unterschied von weniger als 0,5%.

Insgesamt darf man schliessen, dass die Ersetzung von \mathcal{W}_i und \mathcal{W}_e durch \mathcal{W} in den Temperaturgleichungen gerechtfertigt ist.

14. Schleichende Diffusion

Die exakte Bewegungsgleichung würde zu den Trägheitsgliedern der Gleichung (2) noch den Ausdruck

$$\mathcal{V} = n (m_i + m_e) \cdot \frac{m_i m_e}{(m_e + m_i)^2 e^2 n} (\dot{j} \cdot \text{grad}) \left(\frac{j}{n} \right)$$

enthalten. Wenn man ihn streicht, so sollte die Ungleichung

$$|\mathcal{V}_\alpha| \ll \left| (m_i + m_e) \frac{\partial}{\partial t} (n \mathcal{W}_\alpha) \right|$$

in den Komponenten erfüllt sein. Für die Fälle 1 und 2 wurde das Verhältnis der beiden Terme an allen Koordinatenpunkten für $\alpha = r, \varphi$ berechnet und stets kleiner als 0,01 gefunden.

15. Stromträgheit

Alle Ausdrücke, welche die Trägheit des elektrischen Stromes beschreiben, sind im Ohmschen Gesetz (5) weggelassen. Sie lauten

$$\mathcal{I} = \frac{m_e}{e^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{j}{n} \right) + (\mathcal{W} \cdot \text{grad}) \left(\frac{j}{n} \right) + \left(\frac{j}{n} \cdot \text{grad} \right) \mathcal{W} - \left(\frac{j}{n e} \cdot \text{grad} \right) \left(\frac{j}{n} \right) \right\}$$

Soll das Modell konsistent sein, dann muss für alle Komponenten ($\alpha = r, \varphi, z$)

$$|\mathcal{I}_\alpha| \ll |\mathcal{E}_\alpha|$$

gelten. Für die gleichen Fälle wie bei der schleichenden Diffusion ergab die Prüfung, dass das Verhältnis dieser Feldstärken in der r- und φ -Komponente stets kleiner als 0,01 war und für die z-Richtung maximal 0,03 betrug, so dass auch diese Vernachlässigung zu Recht besteht.

16. Viskosität

Eine Vereinfachung, die nicht so harmlos ist wie die vorher beschriebenen, betrifft wieder die Bewegungsgleichung (2). Dort wurde der Gasdruck wie ein Skalar behandelt. Das ist aber nur dann richtig, wenn die innere Reibung keine grosse Rolle spielt. In dem hier behandelten Bereich von Fülldrücken dürfte die Viskosität aufgrund von Stössen dominieren. Setzt man den Drucktensor dann so an, wie er zur Ableitung der Navier-Stokesschen Gleichungen verwendet wird [42], dann bekommt man als Zusatz für die hier besonders interessierenden azimutalen Komponenten der Impulsgleichungen für Ionen (bzw. Elektronen)

$$\begin{aligned} Z_{i\varphi} = & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ 2\mu_i \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} v_{i\varphi} + \frac{v_{i\tau}}{r} \right) + \mu_i' \operatorname{div} w_i \right\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \mu_i \left(\frac{\partial v_{i\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{i\tau}}{\partial \varphi} - \frac{v_{i\varphi}}{r} \right) \right\} \\ & + \frac{2}{r} \left\{ \mu_i \left(\frac{\partial v_{i\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{i\tau}}{\partial \varphi} - \frac{v_{i\varphi}}{r} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Da der vierte Summand am wichtigsten ist, wurde in grober Näherung für μ_i die Zähigkeit senkrecht zu starkem Magnetfeld [43] eingesetzt und [42] $\mu_i' = -\frac{2}{3}\mu_i$ gewählt. Die Ergänzung für die Gleichung (13) heisst dann

$$Z_{\varphi} = Z_{i\varphi} + Z_{e\varphi}.$$

Für die Fälle 1,2,5,8 und 9 wurden mit den Lösungsfunktionen die Ausdrücke $Z_{e\varphi}$ und $Z_{i\varphi}$ berechnet. Dabei ergab sich, dass der Beitrag der Elektronenzähigkeit $Z_{e\varphi}$ unbedeutend ist, dass aber $Z_{i\varphi}$ manchmal in die Grössenordnung der Kräfte $\frac{1}{c}(j \times k)_{\varphi}$ kommt. Den Charakter (Vorzeichenumkehr) der oben beschriebenen Strömungsfelder wird die Viskosität jedoch kaum beeinflussen, da dieser durch die Kraftfelder $\frac{1}{c}(j \times k)$ vorgegeben wird und die Umkehrflächen für das Vorzeichen dieser Kräfte und das der Geschwindigkeit eng beieinander liegen.

Der Betrag der Geschwindigkeiten dürfte aber niedriger werden. Für die folgende grobe Dimensionsbetrachtung wird μ_i konstant gesetzt und nur der wichtigste Teil von $Z_{i\varphi}$ beibehalten. Die Gleichung

$$\frac{D}{Dt} s_\varphi = \left| \frac{1}{c} (j \times \mathcal{L})_\varphi \right| - \mu_i \left| \frac{\partial^2 s_\varphi}{\partial r^2} \right|$$

mit Viskosität wird verglichen mit

$$\frac{D}{Dt} s'_\varphi = \left| \frac{1}{c} (j \times \mathcal{L})_\varphi \right| := A$$

ohne innere Reibung. A kann in beiden Fällen als gleich angenommen werden, weil der Einfluss von s_φ bzw. u_φ auf die übrigen Zustandsfunktionen des Plasmas gering ist.

$$\left| \frac{\partial^2 s'_\varphi}{\partial r^2} \right| := B.$$

Ersetzt man die Ableitungen nach der Zeit durch $\frac{s_\varphi}{c}$ bzw. $\frac{s'_\varphi}{c}$ und die nach r durch $s_\varphi/(\Delta r)^2$ bzw. $s'_\varphi/(\Delta r)^2$, so gelangt man zu der Formel

$$s_\varphi = \frac{s'_\varphi}{1 + B/A}.$$

Bei gleicher Grössenordnung von A und B fällt danach der Geschwindigkeitsbetrag um die Hälfte.

Leider konnte aus rechentechnischen Gründen bis jetzt kein Fall mit Berücksichtigung der Viskosität behandelt werden, so dass auch die Güte dieser Dimensionsbetrachtung unbekannt ist.

17. Axiale Geschwindigkeit u_z

Aus denselben Gründen war es auch nicht möglich, alle Funktionen $n, u_r, u_\varphi, u_z, p_i, p_e, B_r, B_\varphi, B_z$ des Systems (1) bis (7) in das Programm aufzunehmen. n, u_r und B_z sind notwendig für die Theta-pinch-Dynamik; B_r, B_φ und u_φ sollten untersucht werden. Die Drücke sind stark verkoppelt mit den übrigen Grössen. Dagegen kommt u_z nur vor in (Gl. (5)):

$$(22) \quad E_r = - \frac{1}{c} (u_\varphi B_z - B_\varphi u_z) + \dots$$

und

$$(23) \quad E_\varphi = - \frac{1}{c} (u_z B_r - u_r B_z) + \dots$$

Ist hierin der Einfluss von v_z klein, dann kann man die Bewegungsgleichung

$$m_i \frac{\partial}{\partial t}(n v_z) = - m_i \left[n \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right) + v_z \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}(r n v_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(n v_\varphi) \right) \right] + \frac{1}{c} (j_r B_\varphi - j_\varphi B_r)$$

entkoppelt von dem übrigen System integrieren. Zur Entscheidung dieser Frage wurde v_z in den speziellen Fällen 2 und 4 mitberechnet. Eine knappe Übersicht aus dem erstgenannten Beispiel gibt die Bildserie 10. Das Plasma macht eine Art Scherbewegung. Dem Betrag nach ist v_z zwischen v_φ und v_r einzuordnen und liegt bei einigen 10^6 cm sec^{-1} . Im Fall 4 sind alle Geschwindigkeiten etwas höher.

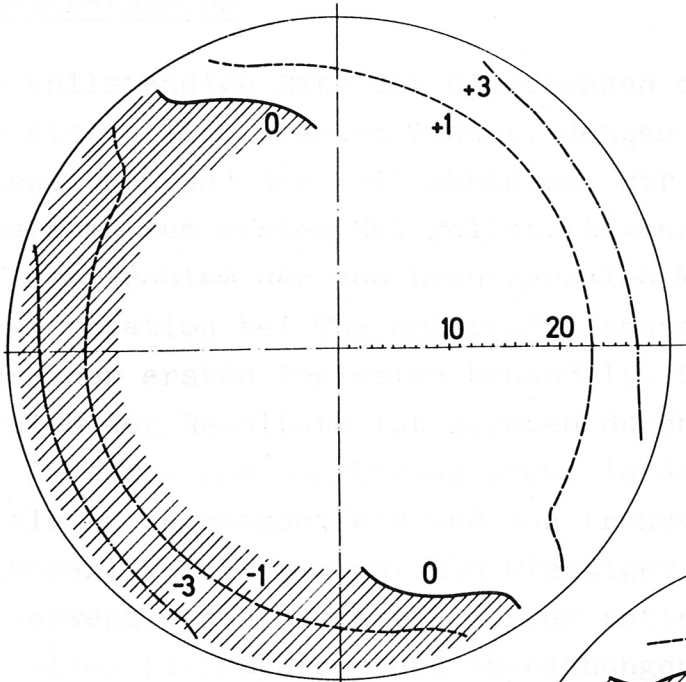
Der Vergleich von $|v_\varphi B_z|$ und $|B_\varphi v_z|$ in (22) ergab, dass diese Produkte von gleicher Grössenordnung sind; im Hinblick auf die Abschätzungen von Abschnitt 7 sind aber beide für die Berechnung von E_r nicht sonderlich wichtig. Das Verhältnis von $|v_z B_r|$ zu $|v_r B_z|$ in (23) lag bei 0,05; damit hat für E_φ nach Tab. 4 $\frac{1}{c} v_z B_r$ ungefähr so wenig Gewicht wie die azimutale Hallfeldstärke.

Bildserie 10

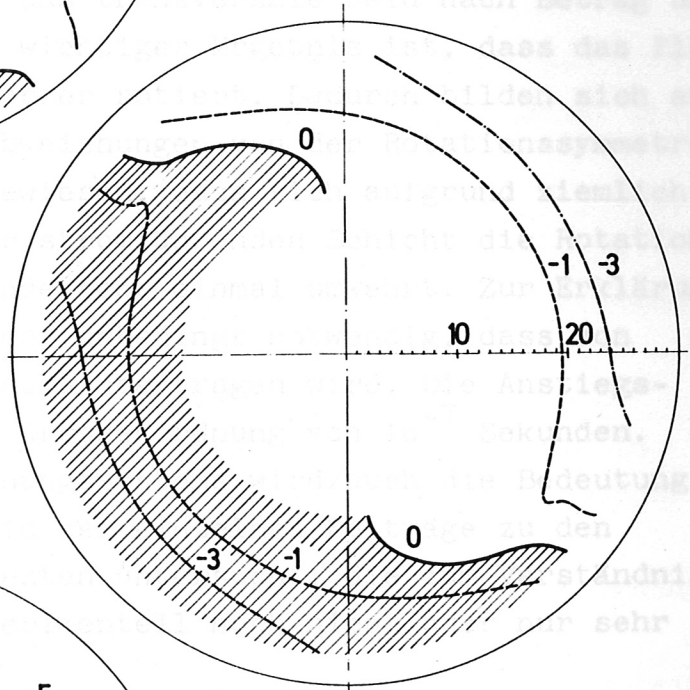
Axiale Geschwindigkeit

v_z (cm/ μ sec)

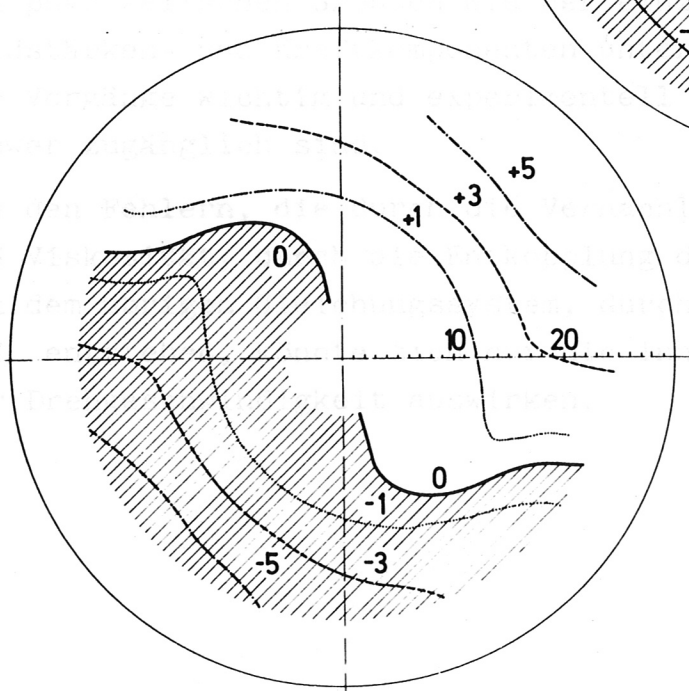
$t = 129$ nsec



$t = 164$ nsec



$t = 228$ nsec



Zusammenfassung

Der vollständige Satz der Gleichungen des Zweiflüssigkeitsmodells für ein vollionisiertes Plasma, dessen Parameter von zwei räumlichen Dimensionen und der Zeit abhängen, wird mit Hilfe eines Rechenprogramms zum ersten Mal gelöst. Anwendung findet dieses Programm auf das Problem der von transversalen Multipolfeldern erzeugten Plasmarotation bei Thetapinch-Entladungen. Hauptsächlich ist die Phase der ersten Implosion behandelt. Der minimale Gültigkeitsbereich der Resultate ist gegeben durch die 10 berechneten Sätze von Anfangs- und Randbedingungen, in denen der Fülldruck, das axiale Anfangsmagnetfeld und das transversale Feld nach Betrag und Polanzahl variiert sind. Ein wichtiges Ergebnis ist, dass das Plasma keineswegs wie ein starrer Körper rotiert. Dadurch bilden sich auch bei allen Plasmaparametern Abweichungen von der Rotationssymmetrie aus. Es wird ausserdem nachgewiesen, dass sich aufgrund ziemlich allgemeiner Eigenschaften der stromführenden Schicht die Rotationsrichtung längs des Radius mindestens einmal umkehrt. Zur Erklärung der Rotation ist es daher nicht unbedingt notwendig, dass von aussen Drehimpuls auf das Plasma übertragen wird. Die Anstiegszeiten für U_{φ} liegen in der Grössenordnung von 10^{-7} Sekunden. Neben den Lösungen des Gleichungssystems wird auch die Bedeutung von physikalischen Grössen wie der einzelnen Beiträge zu den Feldstärken- und Kraftkomponenten untersucht, die zum Verständnis der Vorgänge wichtig und experimentell noch nicht oder nur sehr schwer zugänglich sind.

Von den Fehlern, die durch die Vernachlässigung von Stromträgheit und Viskosität, durch die Entkopplung der axialen Geschwindigkeit von dem übrigen Gleichungssystem, durch schleichende Diffusion u.ä. entstehen, könnte sich nur die innere Reibung auf den Betrag der Drehgeschwindigkeit auswirken.

Y. Takahashi, *Phys. Fluids*, **7**, 153 (1964).

Y. Takahashi, *J. Phys. Soc. Japan*, **19**, 2237 (1964).

Y. Takahashi, *J. Phys. Soc. Japan*, **19**, 411 (1964).

Literaturverzeichnis

- [1] J.D. Lawson, Some Criteria for a Power Producing Thermonuclear Reactor, Proc. Phys. Soc. (London), B 70, (1957), 6
- [2] K. Boyer, W.C. Elmore, E.M. Little, W.E. Quinn, J.L. Tuck, Studies of Plasma Heated in a Fast-Rising Axial Magnetic Field (Scylla), Phys. Rev. 119, (1960), 831.
- [3] W. Rostoker, A.C. Kolb, Fission of a Hot Plasma, Phys. Rev. 124, (1961), 965.
- [4] H.R. Griem, A.C. Kolb, W.H. Lupton, D.T. Phillips, Measurements of Electron Densities and Temperatures and Other Plasma Parameters in Magnetic Compression Experiments, Nucl. Fusion, Suppl. Pt. 2 (1962), 543.
- [5] E.M. Little, W.E. Quinn, F.L. Ribe, G.A. Sawyer, Studies of Stability and Heating in the Scylla Magnetic Compression Experiment, Nucl. Fusion, Suppl. Pt. 2 (1962), 497.
- [6] H.A.B. Bodin, T.S. Green, G.B.F. Niblett, N.J. Peacock, J.M.P. Quinn, J.A. Reynolds, The Influence of Trapped Field on the Characteristics of a Magnetically Compressed Plasma (Thetatron), Nucl. Fusion, Suppl. Pt. 2 (1962), 521.
- [7] I.F. Kvartskhava, K.N. Kervalidze, G.G. Zukakishvili, Yu.S. Gvaladze, Experiment of the Use of an Auxiliary Discharge to Investigate Plasma Properties in a Theta Pinch with a Trapped Reverse Magnetic Field, Nucl. Fusion 3, (1963), 285.
- [8] H.A.B. Bodin, A.A. Newton, Rotational Instability in the Theta Pinch, Phys. Fluids 6 (1963), 1338.
- [9] E.H. Beckner, J.R. Banister, Observation of Early Plasma Rotation in a Slow Theta Pinch, Phys. Letters 10 (1964), 56.
- [10] E.M. Little, W.E. Quinn, Effects of Added Hexapole Magnetic Fields and Preionization in Theta Pinch Experiments, Phys. Fluids 6 (1963), 875.
- [11] E. Hintz, A.C. Kolb, W.H. Lupton, H.R. Griem, Drift of a Theta Pinch in a Joffe Multipole Field, Phys. Fluids 7 (1964), 153.
- [12] T. Miyamoto, H. Ohnishi, Instabilities in the Slow Theta Pinch by Magnetic Field Asymmetry, J. Phys. Soc. Japan 19 (1964), 2237.
- [13] Y. Takeda, T. Miyamoto, H. Ohnishi, M. Yokota, On the Relationship between the Deformation of Theta Pinched Plasma and the Inhomogeneity of Magnetic Field, J. Phys. Soc. Japan 19 (1964), 411.

- [14] A.C. Kolb, P.C. Thonemann, E. Hintz, Transverse Fields, Hall Currents, and Electron Drift velocities in a Theta Pinch, Phys. Fluids 8 (1965), 1005.
- [15] E. Hintz, A.C. Kolb, Influence of Small Transverse Fields and Impurities on Theta Pinch Stability and Confinement, Phys. Fluids 8 (1965), 1347.
- [16] L.M. Goldman, H. Hurwitz, Jr., Motion of Theta Pinch Plasma in Asymmetric Fields, Phys. Fluids 8 (1965), 1399.
- [17] M. Keilhacker, H. Herold, J. Cooper, D.E. Roberts, Doppler Shift Measurements to Investigate Plasma Rotation in the Theta Pinch, Proc. of Conf. on Plasmaphysics and Controlled Nuclear Fusion Research, Culham (1965), paper CN-21/54.
- [18] M.N. Rosenbluth, N.A. Krall, N. Rostoker, Finite Larmor Radius Stabilization of "Weakly" Unstable Confined Plasmas, Nucl. Fusion Suppl. Pt. 1 (1962), 143.
- [19] J.B. Taylor, Rotation and Instability of Plasma in Fast B_z Compression Experiments, Plasma Physics (J.Nucl.Energy, Pt. C) 4 (1962), 401.
- [20] M.G. Haines, On the Origin of Rotation in Magnetically Confined Plasmas, Advances in Physics 14 (1965), 167.
- [21] K.V. Roberts in 5
- [22] W.H. Bostick, D.R. Wells, Azimuthal Magnetic Field in the Conical Theta Pinch, Phys. Fluids 6 (1963), 1325.
- [23] M.G. Haines, Hall Rotation in Theta Pinches, Phys. Letters 6 (1963), 313.
- [24] P.C. Thonemann, A.C. Kolb, Plasma Rotation and Instability in the Theta Pinch due to Transverse Magnetic Fields, Phys. Fluids 7 (1964), 1455.
- [25] E.P. Velikhov, A Note on Plasma Rotation, Atomnaya Energiya 14' (1963), 573; engl. Übersetzung in J.Nucl.Energy, Pt. C, 6 (1964) 203.
- Der Vollständigkeit halber seien noch erwähnt [26] - [29] :
- [26] J.W. Dungey, Torque on a Plasma in Terms of Magnetic Stress, Nucl. Fusion 1 (1961), 312.

- [27] W.I. Linlor, Angular Momentum Relations for Plasmas in Magnetic Fields, Nucl. Fusion 1 (1961), 309.
- [28] G. Schmidt, Rotation of Plasmas in Theta Pinches, Phys. Fluids 5 (1962), 636.
- [29] N. Rostoker, A.C. Kolb, Rotation of Plasmas in Theta Pinches, Phys. Fluids 5 (1962), 741.
- [30] A. Schlüter, Dynamik des Plasmas I, II, Z.Naturf. 5a (1950), 72; Z.Naturf. 6a (1951), 73.
- [31] S. Chapman, T.G. Cowling, The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, Cambridge Univ. Press 1958, Chapter 18.
- [32] R. Chodura, Zum Zündmechanismus einer Theta-Pinch Entladung, Z.Naturf. 19a (1964), 679.
- [33] D. Düchs, H.R. Griem, Computer Study of the Dynamic Phase of a Small Theta Pinch, Phys. Fluids 9 (1966), 1099.
- [34] D. Düchs, Three-fluid Model for a Partially Ionized Plasma in Theta Pinch Discharges, Proc. of the VI Intern. Conf. Ioniz. Phen. Gas., Paris 1963, Vol. II, p. 567.
- [35] K.V. Roberts, F. Hertweck, S.J. Roberts, Thetatron, a two-Dimensional Magnetohydrodynamic Computer Programme, Part 1, General Discussion, Report CLM-R29 (1963)
- [36] W. Schneider, F. Hertweck, Institut f. Plasmaphysik, Garching, private Mitteilung
- [37] H. Fisser, Institut f. Plasmaphysik, Garching, private Mitteilung
- [38] K. Uo, Adiabatic Compression of Plasma by a Cylindrical Multipolar Cusp Magnetic Field, Phys. Fluids 6 (1963), 596.
- [39] L.A. Arzimovich, Controlled Thermonuclear Reactions, Gordon and Breach, New York (1964), p. 54.
- [40] A. Schlüter, Institut f. Plasmaphysik, Garching, private Mitteilung.
- [41] A.A. Ware, J.A. Wesson, The Ohmic Heating of Positive Ions in an Impure Plasma, Proc. Phys. Soc, 77 (1961), 801.
- [42] A. Budó, Theoretische Mechanik, DVW Berlin (1963), §90.
- [43] L. Spitzer, Physics of Fully Ionized Gases, Interscience Publishers, Second Revised Edition, p. 146.
- [44] H. Herold, Institut für Plasmaphysik, Garching, private Mitteilung.

Herrn Prof. Dr. E. Fünfer und Herrn Prof. Dr. A. Schlüter
bin ich für die Förderung dieser Arbeit zu Dank verpflichtet.

Ich bedanke mich auch herzlich bei den Herren Dr. R. Chodura,
H. Fisser, Dr. H. Herold, Dr. M. Keilhacker und Dr. G. Lehner,
die mich durch Diskussionen und wertvolle Ratschläge unter-
stützten.