

Einfluss der Elektrodengeometrie auf Ströme  
und Spannungen bei MHD-Generatoren

The Effect of the Electrode Geometry on the  
Currents and Potentials in MHD Generators

M. Salvat

IPP 3/68

Februar 1968

**I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K**  
**G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N**

# INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Einfluss der Elektrodengeometrie auf Ströme  
und Spannungen bei MHD-Generatoren

The Effect of the Electrode Geometry on the  
Currents and Potentials in MHD Generators

M. Salvat

IPP 3/68

Februar 1968

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

IPP 3/68 M. Salvat

The Effect of the Electrode  
Geometry on the Currents and  
Potentials in MHD Generators

February 1968 (in German)

Abstract

The effect of the electrode segmentation on the performance characteristics of MHD generators can be found by means of simple physical considerations.

Simple expressions are derived which give the efficiency of an MHD generator as a function of the geometry and the Hall parameter.

## Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist es, den Einfluss der Elektrodengeometrie auf die Strom- und Spannungsverteilung in MHD-Generatoren zu untersuchen und dabei Qualitätsfaktoren zu erhalten.

Obwohl exakte Ergebnisse schon vorliegen, z.B. solche, die man mit Hilfe von Rechenmaschinen erhalten hat /1/, so kann es doch von Nutzen sein, Formeln zur Verfügung zu haben, die aus physikalischen Betrachtungen gewonnen wurden, da diese Formeln explizit direkt den Einfluss der physikalisch interessanten Grössen zeigen. Diese Grössen sind  $\beta = \omega \tau = \frac{e B}{n_e v_e}$  und das Verhältnis  $\frac{s}{H}$  vom Elektrodenabstand zur Höhe des Kanals.

Die Rechnungen für Faraday-Generatoren legen die einfache Annahme zugrunde, dass ein Teil der Äquipotentiallinien durch die Elektroden kurzgeschlossen ist und keinen Beitrag zum Potentialabfall liefert. Infolgedessen ist die Lösung des Problems in zwei Teile zerlegt:

- 1.) Bestimmung der Richtung der Äquipotentiallinien.
- 2.) Abschätzung der Zahl der Äquipotentiallinien, die kurzgeschlossen sind.

Bei Hall-Generatoren vereinfachen sich die Betrachtungen, da hier die Äquipotentiallinien in Richtung der Hall-Spannung nicht kurzgeschlossen sind.

### 1. Die Potentialverteilung bei Faraday-Generatoren

#### 1.1. Der Verlauf der Äquipotentiallinien bei einem idealen Faraday-Generator

Wir betrachten zunächst einen idealen Generator, d.h. einen Generator mit feiner Segmentierung der Elektroden. Die Geometrie ist in Bild 1 angegeben. Die Strömung erfolgt in x-Richtung und das Magnetfeld steht senkrecht auf der x-y-Ebene.

Mit dieser Geometrie erhält man für die verschiedenen physikalischen Grössen die Anordnung, wie sie in Bild 2 gezeigt ist. Sie soll im

Folgendes kurz erläutert werden:

Da die Elektroden durch einen Widerstand verbunden sind, fließt im Generator ein Strom in Richtung der  $[\omega \times \mathcal{L}]$ -EMK. Infolgedessen wird das  $E_y$ -Feld vermindert, so dass der absolute Wert  $< vB$  ist. Die Hall-EMK  $= \frac{1}{n_e e} [j \times \mathcal{L}]$ , die dadurch entsteht, dass ein Strom  $j$  fließt, wird durch ein  $E_x$ -Feld kompensiert. Mit diesen Voraussetzungen kann man den Winkel  $\epsilon$  berechnen.

Es ist

$$\text{tg } \epsilon = \frac{|E_x|}{|E_y|} \tag{1}$$

wobei

$$|E_x| = \frac{jB}{n_e e} \tag{2}$$

ist (hierbei sind  $j, B$  positive Grössen), während  $|E_y|$  mit  $j$  durch  $j = \sigma (vB - |E_y|)$  verbunden ist. Deshalb ist

$$|E_y| = vB - \frac{j}{\sigma}, \tag{3}$$

so dass dann

$$\text{tg } \epsilon = \frac{\frac{jB}{n_e e}}{vB - \frac{j}{\sigma}} = \frac{j \sigma B}{\sigma vB - j} = \beta \frac{j}{\sigma vB - j}$$

und mit

$$j' = \frac{j}{\sigma vB} \tag{4}$$

ist

$$\text{tg } \epsilon = \beta \frac{j'}{1 - j'} \tag{5}$$

Der Winkel  $\delta$  zwischen dem Strom  $j$  und den Äquipotentiallinien  $\psi$  ist somit

$$\text{tg } \delta = \frac{1 - j'}{\beta j'} \tag{6}$$

wobei

Bei kleinen Strömen ist  $j'$  klein und deshalb  $\text{tg } \delta$  gross, d.h.  $\delta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ . Die Äquipotentiallinien verlaufen senkrecht zum Strom.

Bei grossen Strömen ist  $j' \sim 1$ , d.h.  $\delta \rightarrow 0$ . Die Äquipotentiallinien verlaufen fast parallel zum Strom.

Mit zunehmendem  $\beta$  verkleinert sich der Winkel  $\delta$ .

Eine interessante Grösse ist der Potentialabfall  $\Delta\varphi$  zwischen gegenüberliegenden Elektroden, den man im Idealfall als  $\Delta\varphi_1$  bezeichnen kann.

$$\Delta\varphi_1 = |E_y| \cdot H \quad (6)$$

(H = Höhe des Kanals)

oder, mit Gl.(3):

$$\Delta\varphi_1 = vBH - \frac{jH}{\sigma} = vBH (1 - j') \quad (j' = \frac{j}{\sigma vB})$$

$\Delta\varphi'_1 = \frac{\Delta\varphi_1}{vBH}$  ist eine dimensionslose Grösse. Für den idealen Faraday-Generator gilt also:

$$\Delta\varphi'_1 = 1 - j'$$

(7)

### 1.2. Äquipotentiallinien bei endlicher Segmentierung

Wenn die Elektroden eine bestimmte Breite haben, können die Äquipotentiallinien in der Nähe dieser Elektroden nicht  $\parallel$  bleiben. (Anders ausgedrückt: Die Äquipotentiallinien können nicht auf den Elektroden enden.) Sie haben den in Bild 3 gezeigten Verlauf.

Die Äquipotentiallinien sind zwischen A und B kurzgeschlossen und es verbleibt als effektives Potential  $\Delta\varphi_r$  nur das Potential zwischen B und C. Es ist dann:

$$\Delta\varphi'_r = \frac{BC}{AC} \Delta\varphi'_1 = \frac{H-h}{H} \Delta\varphi'_1 = (1 - \frac{h}{H}) \Delta\varphi'_1 = (1 - \frac{h}{H}) (1 - j') \quad (8)$$

wobei

$$\Delta\varphi'_r = \frac{\Delta\varphi_r}{vBH} \quad \text{ist.}$$

Da aber  $h = \frac{c}{tg \delta}$  ist, erhält man mit Gl.(6)

$$h = \frac{c \beta j'}{1 - j'}$$

Dieser Wert wird in Gl.(8) angesetzt, so dass

$$\Delta \varphi'_r = \left(1 - \frac{c}{H} \frac{\beta j'}{1 - j'}\right) (1 - j') = 1 - j' - \beta \frac{c}{H} j' = \Delta \varphi'_1 - \beta \frac{c}{H} j' \quad (9)$$

Wenn  $c$  im Vergleich zu  $s$  nicht zu klein ist, d.h. wenn

$$\frac{1}{2} s < c < 1 \quad \text{ist,}$$

dann kann man folgende Abschätzung benutzen:

$$\Delta \varphi'_r = \Delta \varphi'_1 - \beta \frac{s}{H} j' \quad (10)$$

### 1.3. Qualitätsfaktoren

Mit Hilfe der Gl.(10) kann man den Wirkungsgrad von MHD-Generatoren in erster Näherung berechnen. Wenn man einen idealen mit einem reellen Generator (hier mit einem Generator, dessen Elektroden eine endliche Breite  $c$  haben und deren Periodizität  $s$  ist) vergleichen will, kann dieser Vergleich von verschiedenen Gesichtspunkten aus durchgeführt werden und man kann dabei, so wie es L.L.Lengyel /2/ getan hat, Qualitätsfaktoren definieren.

#### a) Vergleich von Spannungen bei gleicher Stromstärke

Unter der Voraussetzung, dass Strom gleicher Stärke im idealen und im reellen Fall fließen würde, soll die Frage untersucht werden, wie sich die Spannungen in beiden Fällen unterscheiden.

Es gilt:

$$\Delta \varphi'_1 = 1 - j'_1 \quad (11)$$

$$\Delta \varphi'_r = (1 - j'_r) \left(1 - \beta \frac{s}{H} \frac{j'_r}{1 - j'_r}\right) \quad (12)$$

Unsere Voraussetzung lautet:

$$j'_i = j'_r = j' ,$$

so dass dann für den Qualitätsfaktor  $Q_{F1}$  folgt:

$$Q_{F1} = \left( \frac{\Delta\varphi'_r}{\Delta\varphi'_i} \right) = 1 - \beta \frac{S}{H} \frac{j'}{1 - j'} \quad (13)$$

b) Vergleich von Stromstärken bei gleichen Spannungen

Wir setzen nun voraus

$$\Delta\varphi'_i = \Delta\varphi'_r = \Delta\varphi'$$

so dass

$$1 - j'_i = (1 - j'_r) \left( 1 - \beta \frac{S}{H} \frac{j'_r}{1 - j'_r} \right)$$

ist und erhalten dann den Qualitätsfaktor

$$Q_{F2} = \left( \frac{j'_r}{j'_i} \right) = \frac{1}{1 + \beta \frac{S}{H}} \quad (14)$$

c) Vergleich von Stromstärke und Spannungen bei gleichem Belastungs-  
widerstand

Es gelten dann folgende Beziehungen

$$R_a = \frac{\Delta\varphi_i}{j_i sT} = \frac{\Delta\varphi_r}{j_r sT} \quad (15)$$

wobei  $j_sT$  den Strom angibt, der durch einen Querschnitt der Fläche  $sT$  ( $T =$  Tiefe) fließt und  $R_a$  den entsprechenden äusseren Belastungswiderstand, so dass

$$\frac{\Delta\varphi_i}{j_i} = \frac{\Delta\varphi_r}{j_r}$$

und nach Gl.(11) und (12) ist

$$\frac{1 - j'_i}{j'_i} = \frac{1 - j'_r - \beta \frac{S}{H} j'_r}{j'_r}$$



Es kann nun ein Qualitätsfaktor  $Q_{F3}$  wie folgt definiert werden:

$$Q_{F3} = \frac{j'_r}{j'_1} = 1 - \beta \frac{S}{H} j'_r \quad (16)$$

Und wegen Gl.(15)

$$Q_{F3} = \frac{\Delta \varphi_r}{\Delta \varphi_1} = 1 - \beta \frac{S}{H} j'_r \quad (17)$$

Es ist jetzt möglich, ebenfalls einen Qualitätsfaktor  $Q_{F4}$  zu definieren, der die extrahierte Energie bei gleichen Belastungswiderständen charakterisiert:

$$Q_{F4} = \left( \frac{j'_r}{j'_1} \right)^2 = 1 - 2 \beta \frac{S}{H} j'_r \quad (18)$$

#### 1.4. Bemerkung

In den vorausgegangenen Betrachtungen wurde angenommen, dass der Strom  $\parallel$  zur y-Achse fließt. Da aber bei angelegtem Quermagnetfeld der Strom schräg fließt, wie in Bild 4 gezeigt ist, müsste man den Winkel  $\alpha$  zwischen Stromrichtung und y-Achse in den Gleichungen einführen. Die sich dadurch ergebenden Änderungen sind jedoch sehr gering. Es würden dann nur Terme 2. Ordnung in  $\frac{c}{H}$  auftreten.

## 2. Die Potentialverteilung bei Hall-Generatoren

### 2.1. Richtung der Äquipotentiallinien

Während wir bei Faraday-Generatoren die Richtung der Stromlinien (|| zur y-Achse) festgelegt und damit dann die Richtung der Äquipotentiallinien bestimmt hatten, ist hier die Richtung der Äquipotentiallinien bestimmend.

Da bei Hall-Generatoren die gegenüberliegenden Elektroden kurzgeschlossen sind, mussten zwei gegenüberliegende Elektroden durch eine Äquipotentiallinie verbunden sein. Diese Äquipotentiallinie verläuft schräg, wie in Bild 5 gezeigt wird. Die Richtung der Äquipotentiallinien wird durch den Winkel  $\gamma$  festgelegt, wobei  $\text{tg } \gamma = \frac{c}{H}$  ist. Man erhält für die Äquipotentiallinien eine Verteilung, wie sie in Bild 6 gezeigt ist.

Wenn der Hall-Generator genügend lang ist (x-Richtung), dann kann man die Endeffekte vernachlässigen.

In der Mitte des Kanals sind die Äquipotentiallinien || und man kann die Gleichungen für den Idealfall benutzen. Es stellt sich die Frage, inwieweit die Anschmürung der Äquipotentiallinien zwischen zwei Elektroden den idealen Fall stört.

Es ist jetzt offensichtlich, dass die Äquipotentiallinien in x-Richtung nicht kurzgeschlossen sind und, obwohl die Linien zwischen zwei Elektroden nicht mehr || laufen, wird die Potentialdifferenz nicht reduziert (im Vergleich zur Mitte des Kanals). In erster Näherung kann man die Äquipotentiallinien als überall || betrachten und die x-Komponente des Ohmschen Gesetzes

$$j_x = \frac{\sigma}{1 + \beta^2} \left\{ E_x - \beta (E_y - vB) \right\} \quad (19)$$

mit der zusätzlichen Beziehung

$$E_y = - E_x \text{tg } \gamma \quad \text{benutzen.} \quad (20)$$

In den Gln.(19) und (20) sind  $j_x$ ,  $E_x$ ,  $E_y$  algebraische Grössen. Im reellen Fall (Hall-Generator mit Elektroden von endlicher Länge) gilt also:

$$j_{xr} = \frac{\sigma}{1 + \beta^2} \left\{ E_x + \beta (E_x \operatorname{tg} \gamma + vB) \right\} \quad (21)$$

## 2.2. Qualitätsfaktoren

Aus Gl.(21) kann die entsprechende Gleichung für den idealen Fall ( $\operatorname{tg} \gamma = 0$ ) gewonnen werden:

$$j_{xi} = \frac{\sigma}{1 + \beta^2} (E_{xi} + \beta vB) \quad (22)$$

Es ist somit dann möglich, Qualitätsfaktoren für Hall-Generatoren zu definieren:

### a) Vergleich von Spannungen bei gleichen Hall-Strömen

Es wird vorausgesetzt, dass

$$j_{xi} = j_{xr}$$

ist, so dass Gl.(21) und (22) unmittelbar liefern:

$$E_{xi} + \beta vB = E_{xr} + \beta \operatorname{tg} \gamma E_{xr} + \beta vB$$

Es kann dann ein Qualitätsfaktor  $Q_{H1}$  wie folgt angegeben werden:

$$Q_{H1} = \left( \frac{\Delta \varphi_r}{\Delta \varphi_i} \right)_{j_x} = \frac{E_{xr}}{E_{xi}} = \frac{1}{1 + \beta \operatorname{tg} \gamma} = \frac{1}{1 + \beta \frac{c}{H}}$$

Statt  $\frac{c}{H}$  führen wir nun die Periodizität  $\frac{s}{H}$  ein und erhalten

$$Q_{H1} = \frac{\Delta \varphi_r}{\Delta \varphi_i} = \frac{1}{1 + \beta \frac{s}{H}} \quad (23)$$

b) Vergleich von Hall-Strömen bei gleichen Hall-Spannungen

Wir setzen jetzt voraus, dass

$$E_{xi} = E_{xr} = E_x$$

ist und erhalten dann durch Division von Gl.(21) durch Gl.(22):

$$\frac{j_{xr}}{j_{xi}} = \frac{E_x (1 + \beta \operatorname{tg} \gamma)}{E_x + \beta vB} = 1 + \frac{E_x \beta \operatorname{tg} \gamma}{E_x + \beta vB} = 1 + \frac{\beta \frac{c}{H} E_x}{\beta vB + E_x} \quad .$$

Wir setzen wieder  $\frac{s}{H}$  in der Gleichung ein und erhalten

$$Q_{H2} = \left( \frac{j_{xr}}{j_{xi}} \right) \frac{E_x}{E_x} = 1 + \beta \frac{s}{H} \frac{E_x}{\beta vB + E_x} \quad (24)$$

wobei  $E_x$  (nach Bild 1 und 2) als relative Grösse zu betrachten ist.

c) Vergleich von Hall-Strömen und Hall-Spannungen bei gleichem Belastungswiderstand

Unter der Voraussetzung, dass der Strom und die Spannung homogen sind, gilt:

$$- E_x l = R_a I_x \quad ,$$

wobei  $l$  die Länge des Kanals in  $x$ -Richtung ist und  $R_a$  der Lastwiderstand für den Hall-Strom  $I_x$ .

Es gilt dann für den idealen und reellen Generator:

$$- E_{xi} l = R_a \text{ HT } j_{xi} = R_a \text{ HT } \frac{\sigma}{1 + \beta^2} (E_{xi} + \beta vB)$$

$$- E_{xr} l = R_a \text{ HT } j_{xr} = R_a \text{ HT } \frac{\sigma}{1 + \beta^2} \left\{ E_{xr} (1 + \beta \operatorname{tg} \gamma) + \beta vB \right\} \quad ,$$

wobei HT der Querschnitt ist, durch den der Hall-Strom fliesst.

Durch Division der zwei oberen Gleichungen erhält man

$$Q_{H3} = \left( \frac{\Delta \varphi_r}{\Delta \varphi_i} \right)_{R_a} = \frac{E_{xr}}{E_{xi}} = \frac{E_{xr} + E_{xr} \operatorname{tg} \gamma + \beta vB}{E_{xi} + \beta vB} = \frac{E_{xr} \beta \operatorname{tg} \gamma + \beta vB}{\beta vB}$$

$$= 1 + \frac{E_{xr}}{vB} \operatorname{tg} \gamma = 1 + \frac{E_{xr}}{vB} \frac{c}{H} \cdot$$

Wir führen wieder die Periodizität  $\frac{s}{H}$  in diese Gl. ein und es ergibt sich somit:

$$Q_{H3} = 1 + \frac{E_{xr}}{vB} \frac{s}{H} \quad (25)$$

Es gilt offensichtlich

$$\left( \frac{\Delta I_r}{\Delta I_i} \right)_{R_a} = \left( \frac{\Delta \varphi_r}{\Delta \varphi_i} \right)_{R_a} = 1 + \frac{E_{xr}}{vB} \frac{s}{H} \cdot$$

Damit kann man sofort einen Qualitätsfaktor  $Q_{H4}$  für die Energiegewinnung definieren:

$$Q_{H4} = \frac{R_a I_r^2}{R_a I_i^2} = \left( 1 + \frac{E_{xr}}{vB} \frac{s}{H} \right)^2 \approx 1 + 2 \frac{E_{xr}}{vB} \frac{s}{H} \quad (26)$$

wobei  $E_{xr}$  eine negative Grösse ist.

Es ist interessant, die beiden Qualitätsfaktoren  $Q_{F4}$  und  $Q_{H4}$  zu vergleichen:

$$Q_{F4} \approx \left( 1 - \beta \frac{s}{H} j'_r \right)^2 \quad j = \frac{j}{vB} \quad (27)$$

$$Q_{H4} \approx \left( 1 - \frac{s}{H} \frac{|E_{xr}|}{vB} \right)^2 = \left( 1 - \beta \frac{s}{H} \frac{|E_{xr}|}{\beta vB} \right)^2 \quad (28)$$

#### 4. Numerische Ergebnisse

Die gewonnenen Formeln sind deswegen interessant, weil sie auch gültig bleiben, wenn  $\beta$  und  $\sigma$  Funktionen von  $j$  sind. Sie ermöglichen dann einen genauen Vergleich zwischen idealen und reellen Generatoren, da man nicht nur den Einfluss der Segmentierung sondern auch den Einfluss der Stromstärke (bzw. Elektronentemperatur) auf  $\beta$  und  $\sigma$  berücksichtigt.

Auf der folgenden Seite ist eine Tabelle von  $\beta$  und  $\sigma$  (Funktionen der Stromdichte) gezeigt, die bei folgenden Bedingungen berechnet wurde:

$$T_{\text{Argon}} = 2000 \text{ } ^\circ\text{K}$$

$$p_{\text{Argon}} = 1 \text{ atm}$$

Konzentration des Kaliums: 0,002.

Diese numerischen Werte von  $j$ ,  $\beta$  und  $\sigma$  in die Formel (27) eingesetzt, mit dem willkürlichen Wert von  $vB = 10 \text{ V/cm}$ , ermöglichen es, Kurven für den Qualitätsfaktor  $Q_{F4}$  zu erhalten, wobei  $\frac{S}{H}$  als Parameter erscheint (Bild 7). Für die angenommenen Bedingungen geben die Kurven (abgesehen von Randphänomenen wie Kathodenfälle oder Volumenphänomene wie elektrothermische Wellen) ein exaktes Bild von dem Unterschied zwischen reellen und idealen (fein segmentierten) Generatoren.

---

#### Literatur

- /1/ L.L. LENGYEL: On the current and voltage losses caused by finite electrode segmentation in Faraday and Hall type MHD generators, IPP 3/49 (Dec. 1966)
- /2/ L.L. LENGYEL: Current and potential distributions in MHD generators, IPP 3/50 (1966)

$T_e$ $^{\circ}K$	2000	2100	2200	2300	2400	2500	2600	2700	2800	2900	3000	3100	3200
$j$ Amp/cm <sup>2</sup>	0	$3,3 \cdot 10^{-2}$	$8,1 \cdot 10^{-2}$	$1,69 \cdot 10^{-1}$	$3,18 \cdot 10^{-1}$	$5,59 \cdot 10^{-1}$	$9,28 \cdot 10^{-1}$	1,473	2,26	3,36	4,85	6,83	9,43
$\sigma$ mho/cm	$6,8 \cdot 10^{-2}$	0,12	0,19	0,29	0,42	0,58	0,76	0,98	1,18	1,42	1,66	1,90	2,16
$\nu_e$	$1,76 \cdot 10^{10}$	$1,92 \cdot 10^{10}$	2,11-	2,35-	2,66-	3,04-	3,50-	4,08	5,58	5,58	6,53	7,64	8,9
$\beta_e$	10	9,15	8,34	7,5	6,62	5,8	5,03	4,3	3,7	3,15	2,7	2,31	1,98

Tabelle

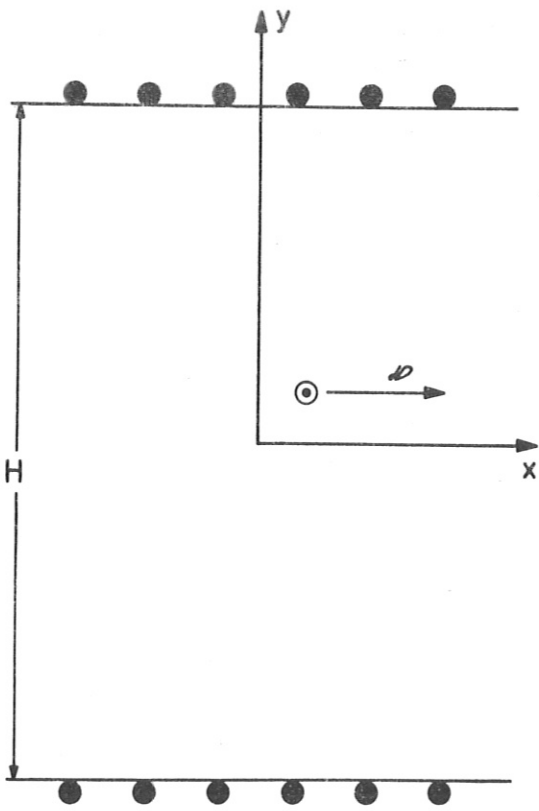


Bild 1

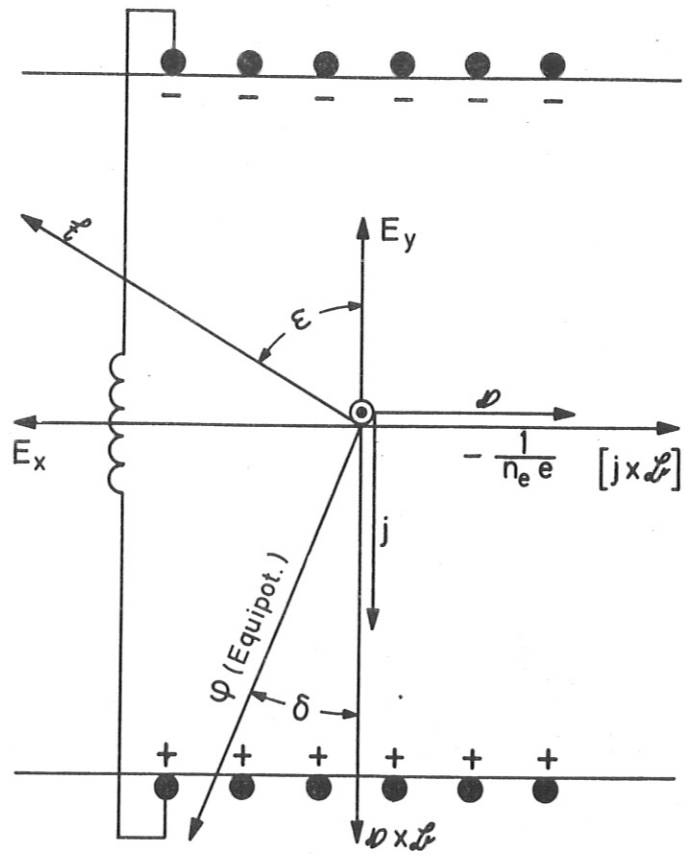


Bild 2

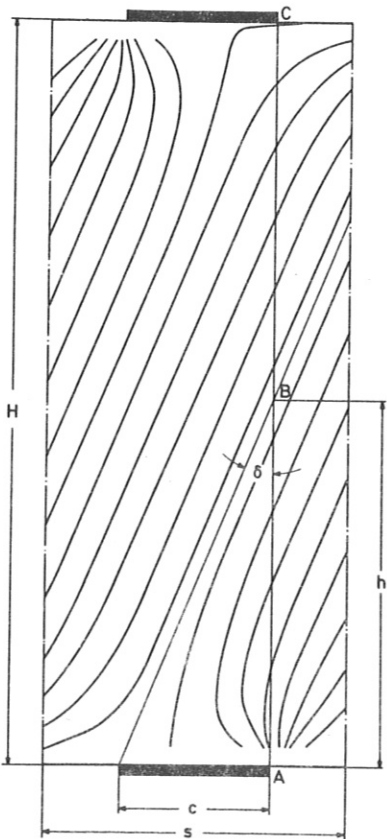


Bild 3  
Nach L.L. Lengyel JPP 3/50

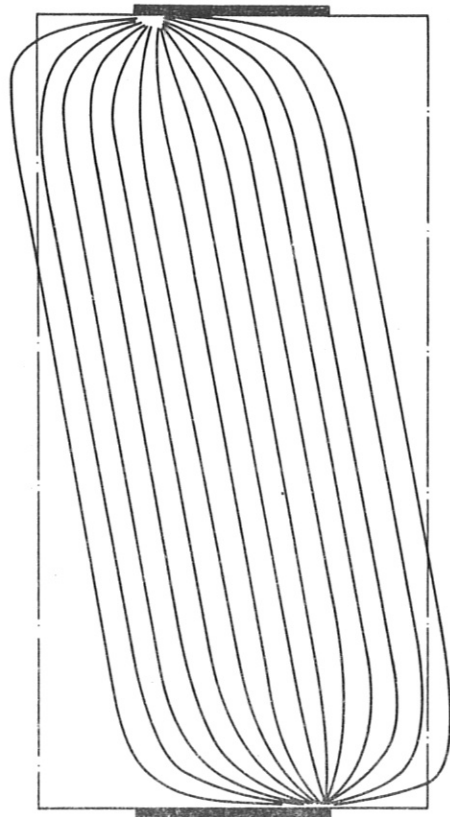


Bild 4



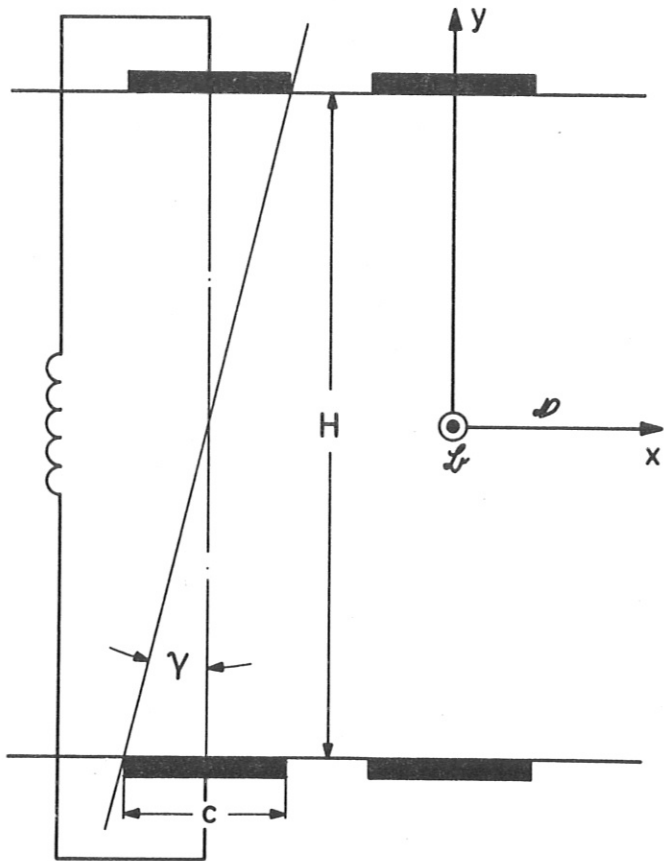


Bild 5

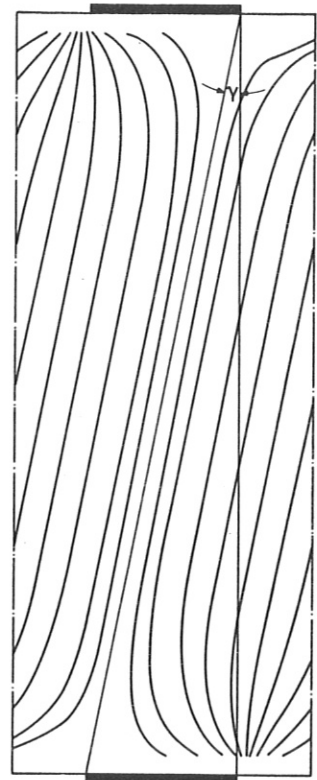


Bild 6  
Nach L.L. Lengyel JPP 3/50

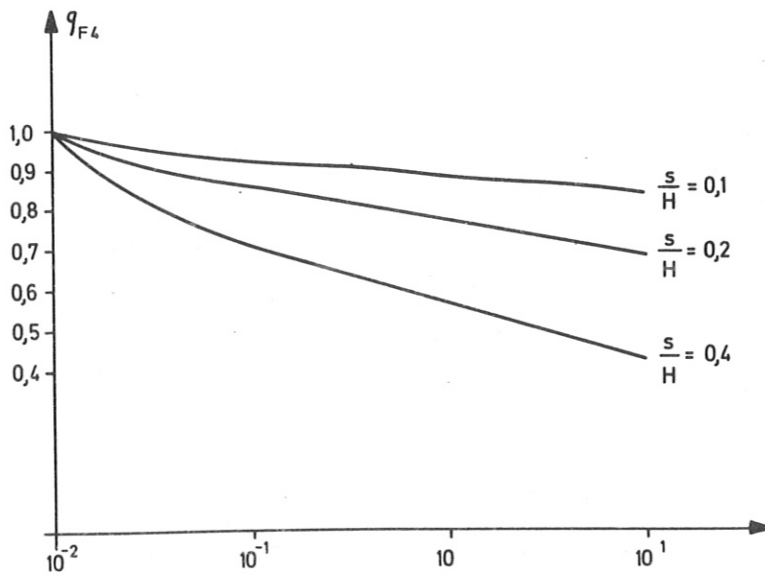


Bild 7