

Untersuchungen an Ringhohlräumen

Studies on Resonant Ring Circuits

O. Gehre, M. Tutter

IPP 3/72

April 1968

**I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K**  
**G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N**

# INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Untersuchungen an Ringhohlräumen

Studies on Resonant Ring Circuits

O. Gehre, M. Tutter

IPP 3/72

April 1968

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

April 1968 (in German)

ABSTRACT

A resonant ring circuit is analyzed, lying A) in a transmission line with constant frequency, B) in the feedback line of a feedback-amplifier-oscillator. For experimental demonstration in case A) an X-band waveguide circuit was used, in case B) a coaxial line circuit in the 500 MHz-range.

INHALTSANGABE

Im Hinblick auf die Messung eines Vierpols, welcher in einen Ringhohlraum geschaltet ist, wird die Wirkungsweise eines Ringhohlraumes untersucht, der A) in einer Wellenleitung zwischen Generator und Detektor liegt und mit fester Frequenz betrieben wird, B) im Rückkopplungsweg eines als Oszillator arbeitenden rückgekoppelten Verstärkers liegt und so die Frequenz mitbestimmt. Zur experimentellen Demonstration wurde im Fall A) eine 3 cm-Hohlleiteranordnung und im Fall B) eine Koaxialleiteranordnung im 500 MHz-Bereich benutzt.

sein. Wenn die drei anderen Öffnungen reflexionsfrei abgeschlossen sind.

Das Symbol  $\Gamma$  hat aus Vereinfachungsgründen gelten dann die Gleichungen:

$$\Gamma_{11} = \Gamma_{21} + \Gamma_{31} \quad (1)$$

$$\Gamma_{21} = \Gamma_{11} + \Gamma_{31} \quad (2)$$

A) Mit fester Frequenz betriebener Ringhohlraum

Es wird die Wirkungsweise eines Ringhohlraums<sup>1)</sup> untersucht, welcher in der in Abb. 1 gezeigten Weise mittels eines Richtkopplers in die Leitung zwischen einem Generator und einem Detektor geschaltet ist.

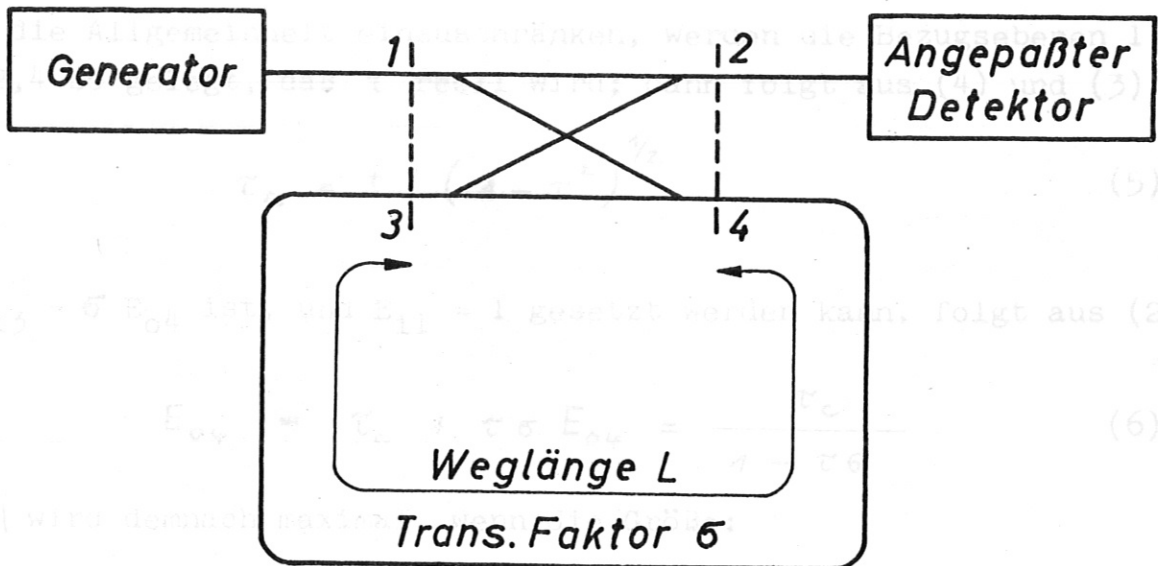


Abb. 1 Schaltungsprinzip des mit fester Frequenz betriebenen Ringhohlraums.

Die Feldstärken der in den Richtkoppler ein- bzw. auslaufenden Wellen werden mit  $E_1$  bzw.  $E_0$  bezeichnet.

Es wird idealer Aufbau des Richtkopplers angenommen, d.h. es soll jeweils an einer Öffnung ( $j$ )

Wird zu einem gewissen  $E_{0j}/E_{1j} = 0$  verschaltet, so ist die Leistung an einer der drei anderen Öffnungen nach der Zeit eines Umlaufes um den Faktor  $\sigma$  kleiner geworden, nach einer Periodendauer aber nur um den Faktor  $\sigma^2$  kleiner geworden.

Aus Symmetrie- und Reziprozitätsgründen gelten dann die Gleichungen:

$$E_{02} = \tau \cdot E_{11} + \tau_c E_{13} \quad (1)$$

$$E_{04} = \tau_c \cdot E_{11} + \tau \cdot E_{13} \quad (2)$$

wo  $|\tau_c| = 10^{-\frac{C [db]}{20}}$  ist (C = Kopplungsfaktor des Richtkopplers).  
Die Unitaritätsbedingung der Matrix fordert:

$$|\tau|^2 + |\tau_c|^2 = 1 \quad (3)$$

und  $\tau \tau_c^* + \tau_c \tau^* = 0$  oder  $\frac{\tau}{\tau^*} = -\frac{\tau_c}{\tau_c^*}$  (4)

Ohne die Allgemeinheit einzuschränken, werden die Bezugsebenen 1,3 und 2,4 so gelegt, daß  $\tau$  reell wird; dann folgt aus (4) und (3):

$$\tau_c = \pm i (1 - \tau^2)^{1/2} \quad (5)$$

Da  $E_{13} = \sigma E_{04}$  ist, und  $E_{11} = 1$  gesetzt werden kann, folgt aus (2):

$$E_{04} = \tau_c + \tau \sigma E_{04} = \frac{\tau_c}{1 - \tau \sigma} \quad (6)$$

$|E_{04}|$  wird demnach maximal, wenn die Größe:

$$\sigma = e^{-\alpha L} e^{-i k L} \quad (7)$$

positiv reell wird ( $\alpha$  = Dämpfungsfaktor,  $k (= \frac{2\pi}{\lambda})$  = Wellenzahl längs der Leitung L), d.h. bei

$$kL = n \cdot 2\pi$$

(Resonanz des Ringhohlraumes).

Der Gütefaktor Q des Ringhohlraumes berechnet sich folgendermaßen:

Wird zu einem gewissen Zeitpunkt  $E_{11}$  ausgeschaltet, so ist die Leistung an einem Ort des Hohlraumes nach der Zeit eines Umlaufes um den Faktor

$$\tau^2 e^{-2\alpha L}$$

kleiner geworden, nach einer Periodendauer aber nur um den Faktor

$$\left( \tau^2 e^{-2\alpha L} \right)^{\frac{L}{\lambda}}$$

demnach ist

$$Q = \frac{2\pi}{1 - (\tau^2 |\sigma|^2)^{\lambda/L}} \quad (8)$$

Die Feldstärke  $E_{02}$  der in den angepaßten Detektor laufenden Welle wird aus (1), (5) und (6) berechnet:

$$E_{02} = \tau + \tau_c \sigma E_{04} = \tau + \frac{\tau_c^2 \sigma}{1 - \tau \sigma} = \frac{\tau - \tau^2 \sigma - (1 - \tau^2) \sigma}{1 - \tau \sigma} = \frac{\tau - \sigma}{1 - \tau \sigma} \quad (9)$$

Ist die Dämpfung im Hohlraum sehr groß, so ist nach (9):  $E_{02} = \tau$ ; läßt man die Dämpfung kleiner werden, so "saugt der Hohlraum bei  $\sigma = \tau$  alle Leistung ab",  $E_{02} = 0$ ; bei verschwindender Dämpfung und Resonanz ( $\sigma = 1$ ) wird  $E_{02} = -1$ .

Wird durch ein Meßobjekt im Ringhohlraum der Exponent  $ikL$  in (7) um einen sehr kleinen Wert  $\delta$  geändert, wobei  $\delta$  komplex sein kann, so tritt an die Stelle von (7) für  $\sigma$  der Ausdruck:

$$\sigma = e^{-\alpha L} e^{-(ikL + \delta)} \approx e^{-\alpha L} e^{-ikL} (1 - \delta) = \sigma_0 (1 - \delta) \quad (10)$$

und es wird

$$E_{02} = \frac{\tau - \sigma_0 (1 - \delta)}{1 - \tau \sigma_0 (1 - \delta)} \approx \frac{\tau - \sigma_0}{1 - \tau \sigma_0} + \delta \frac{\sigma_0 (1 - \tau^2)}{(1 - \tau \sigma_0)^2} = (E_{02})_0 + \Delta(E_{02}) \quad (11)$$

Die Größe

$$\frac{\Delta(E_{02})}{\delta} = \frac{\sigma_0 (1 - \tau^2)}{(1 - \tau \sigma_0)^2} = \frac{-\sigma_0 \tau_c^2}{(1 - \sqrt{1 + \tau_c^2} \sigma_0)^2} = \sigma_0 |E_{04}|^2 \quad (12)$$

ist bei gegebenem  $\tau$  und  $|\sigma_0|$  maximal bei Resonanz, und bei gegebenem  $\sigma_0$  maximal bei  $\tau = \sigma_0$  (Null- und Wendepunkt der  $(E_{02})_0$ -Kurve). Ein in den Ringhohlraum geschaltetes Meßobjekt erzeugt also eine um den Faktor (12) größere Feldstärkenänderung der in den Detektor laufenden Welle als ein in die Hauptleitung geschaltetes Meßobjekt. Dies entspricht etwa den Verhältnissen in einem Fabry-Perot-Interferometer, wobei die Durchlässigkeit ( $\tau_d$ ) der Interferometerplatten mit der Kopplung ( $\tau_c$ ) des Richtkopplers in Parallele zu setzen ist. Der entscheidende Unterschied zwischen Ringhohlraum und Fabry-Perot-Interferometer tritt hervor, wenn das Meßobjekt nicht reziprok ist. Bei Vertauschung von Sender und Detektor kommt nämlich der vorher auf Resonanz abgestimmte Ringhohlraum außer Resonanz,

während an der Resonanz des Fabry-Perot-Interferometers nichts geändert wird. Es sei z.B. in der einen Richtung  $\delta = 0$ , in der anderen von Null verschieden, dann ist die bei Vertauschung von Sender und Detektor meßbare Feldstärkenänderung im Falle des Ringhohlraumes durch (12) gegeben, im Falle des Fabry-Perot-Interferometers durch:

$$\frac{\Delta E}{\delta} = \frac{-\sigma_0 \tau_\alpha^2}{1 - (1 + \tau_\alpha^2) \sigma_0^2} < \sigma_0 \quad (13)$$

wie sich leicht zeigen läßt.

In Abb. 2 sind die Größen  $(E_{02})_0$  und  $\Delta(E_{02})/\delta$  nach (11) und (12) in Abhängigkeit von der Dämpfung im Ringhohlraum für den Resonanzfall aufgetragen. Wie ersichtlich, muß diese Dämpfung genügend klein sein, damit eine Erhöhung der Größe  $\Delta(E_{02})/\delta$  über den Wert Eins möglich ist.

Die Abb. 3 zeigt die Feldstärke  $E_{02}$  in der komplexen Ebene, aufgenommen mit einem phasenempfindlichen Detektor im 10-GHz-Band, als Funktion des Phasenwinkels von  $\sigma$  (vgl. (9)), mit  $|\sigma|$  als Kurvenparameter. (Der Radius des Kreises ist

$$\text{bei } |\sigma| < \tau : \frac{|\sigma| (1 - \tau^2)}{1 - \tau^2 |\sigma|^2}$$

$$\text{bei } |\sigma| > \tau : \frac{\tau (1 - |\sigma|^2)}{1 - \tau^2 |\sigma|^2}$$

die Abszisse seines Mittelpunktes ist

$$\text{bei } |\sigma| < \tau : \frac{\tau (1 - |\sigma|^2)}{1 - \tau^2 |\sigma|^2}$$

$$\text{bei } |\sigma| > \tau : \frac{|\sigma| (1 - \tau^2)}{1 - \tau^2 |\sigma|^2} )$$

Bei den Aufnahmen wurde ein 8 db - Koppler verwendet. Die Dämpfung im Ringhohlraum war (von links nach rechts) 0,45, 0,75 und 1,2 db, die zugehörigen Q-Werte waren nach Gl. (8) (Leitungslänge  $L = 160$  cm):  $\approx 1050, 700$  und  $520$ .

für einige Kopplungsverhältnisse (nach Gl. (11)).

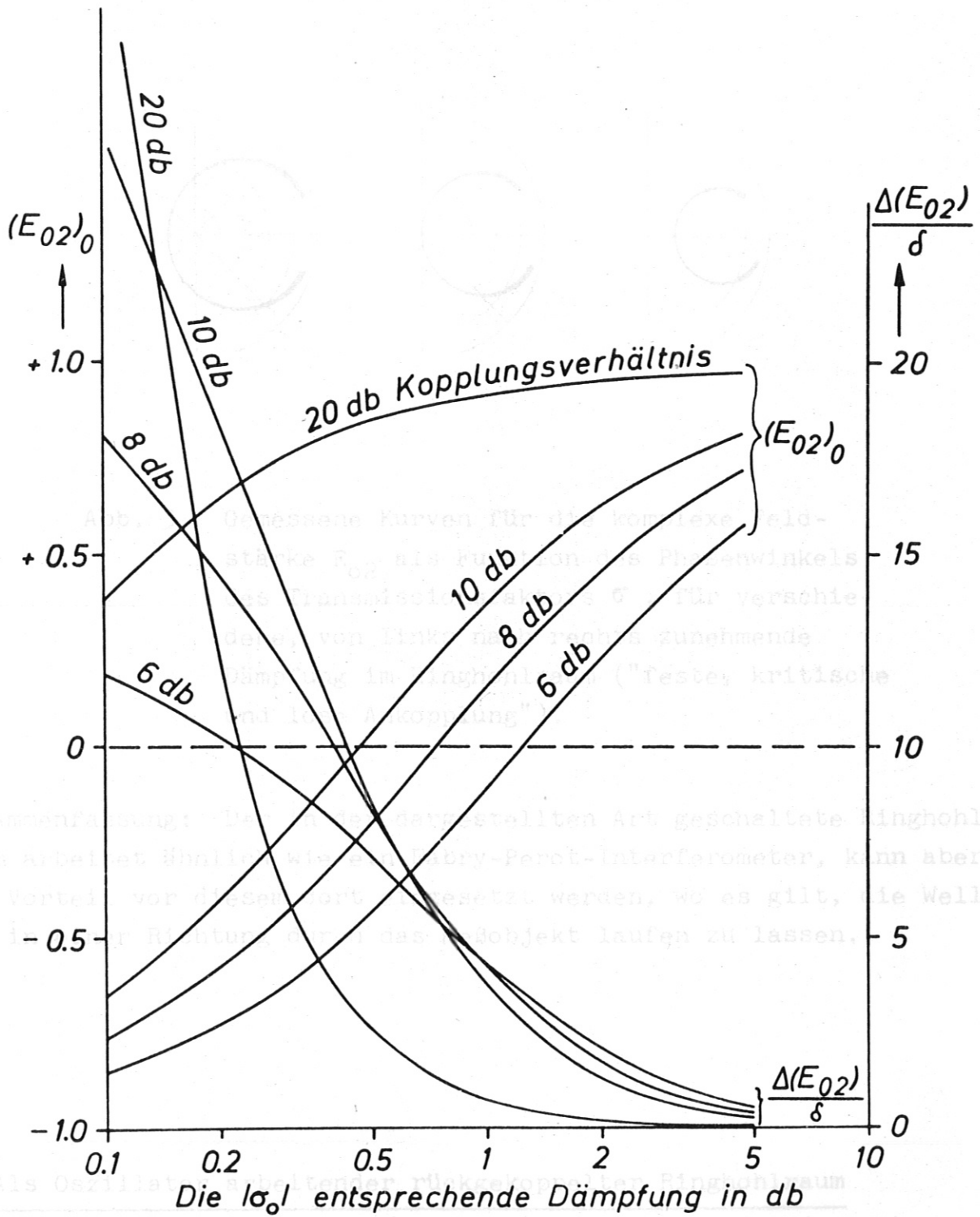


Abb. 2 Berechnete Kurven für  $(E_{O2})_0$  und  $\Delta(E_{O2})/\delta$  als Funktionen der Dämpfung im Ringhohlraum im Resonanzfall, für einige Kopplungsverhältnisse (nach Gl. (11)).



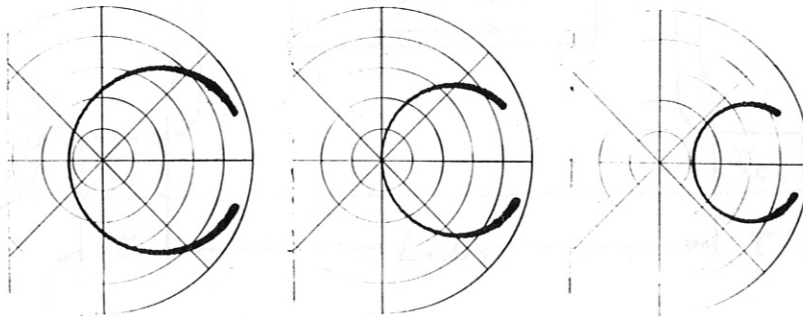


Abb. 3 Gemessene Kurven für die komplexe Feldstärke  $E_{02}$  als Funktion des Phasenwinkels des Transmissionsfaktors  $\sigma$ , für verschiedene, von links nach rechts zunehmende Dämpfung im Ringhohlraum ("feste, kritische und lose Ankopplung").

Zusammenfassung: Der in der dargestellten Art geschaltete Ringhohlraum arbeitet ähnlich wie ein Fabry-Perot-Interferometer, kann aber mit Vorteil vor diesem dort eingesetzt werden, wo es gilt, die Welle nur in einer Richtung durch das Meßobjekt laufen zu lassen.

B) Als Oszillator arbeitender rückgekoppelter Ringhohlraum

(15)

Es wird nun eine Ringhohlraumanordnung untersucht, bei der im Gegensatz zum vorhergehenden Abschnitt die Frequenz nicht vorgegeben ist, sondern sich erst einstellt.

$$A = -10_1 \sigma_2 / \tau \sin \alpha + 10_2 (1 - \tau^2) V \cos \beta \quad (17)$$

$$B = -10_1 \sigma_2 / \tau^2 \sin \alpha + 10_2 (1 - \tau^2) V \sin \beta \quad (18)$$

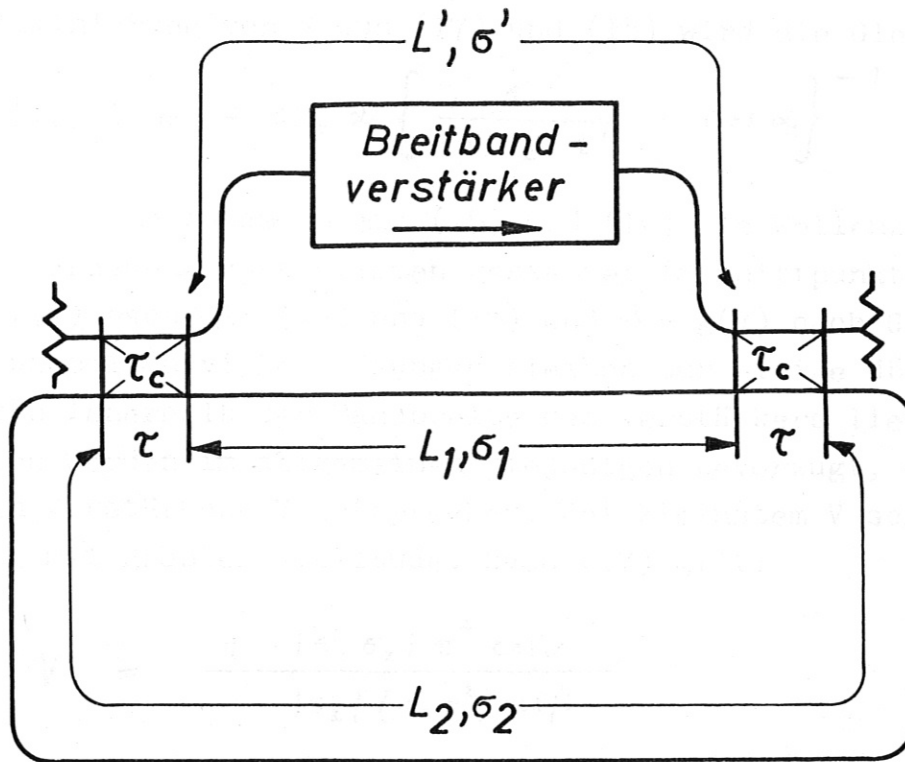


Abb. 4 Schaltungsprinzip des rückgekoppelten Ringhohlraums.

Für stationäres Arbeiten dieser Rückkopplungsschaltung ist erforderlich, daß folgende Gleichung erfüllt ist:

$$1 = \sigma_1 \sigma_2 \tau^2 + \sigma_2 \sigma' \tau_c^2 \quad (14)$$

Es ist  $\sigma_{1,2} = |\sigma_{1,2}| e^{-ikL_{1,2}}$ ,  $\sigma' = V e^{-ikL'}$ , wobei  $V$  (reell, positiv) die Verstärkung des Breitbandverstärkers bei der Wellenzahl  $k$  und  $L'$  die effektive Länge des Verstärkerzweiges bedeutet.

Mit den Abkürzungen:

$$k(L_1 + L_2) = \alpha \quad (15)$$

$$k(L' + L_2) = \beta \quad (16)$$

und  $\tau_c^2 = -(1 - \tau^2)$  (s. Gl. (5)) erhält man aus (14):

$$1 = |\sigma_1 \sigma_2| \tau^2 \cos \alpha - |\sigma_2| (1 - \tau^2) V \cos \beta \quad (17)$$

$$0 = -|\sigma_1 \sigma_2| \tau^2 \sin \alpha + |\sigma_2| (1 - \tau^2) V \sin \beta \quad (18)$$

Durch Eliminierung von  $V$  aus (17) und (18) wird die Gleichung:

$$\tan \beta = - \sin \alpha \left\{ \frac{1}{|\sigma_1 \sigma_2| \tau^2} - \cos \alpha \right\}^{-1} \quad (19)$$

gewonnen, welche zusammen mit (15) und (16) die Wellenzahl  $k$  und damit die Frequenz zu bestimmen gestattet (Schnittpunkte der Kurven  $\beta = f(\alpha)$  nach Gl. (15) und (16) und  $\beta = g(\alpha)$  nach Gl. (19)). Von den unendlich vielen Lösungen bleiben nur einige übrig, deren Frequenzen innerhalb der Bandbreite des Verstärkers liegen, und von diesen werden im allgemeinen diejenigen bevorzugt, die der kleinsten Verstärkung  $V$  entsprechen. Bei kleinstem  $V$  schwingt die Anordnung mit größter Amplitude. Nach (17) gilt:

$$V = \frac{1 - |\sigma_1 \sigma_2| \tau^2 \cos \alpha}{-|\sigma_2| (1 - \tau^2) \cos \beta} \quad (20)$$

$V$  hat demnach den kleinstmöglichen Wert, wenn  $\cos \alpha = 1$  und  $\cos \beta = -1$  ist, was im Prinzip durch Wahl der Längen  $L_1$  und  $L_2$  erreichbar ist.

Die Größen  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $V$  lassen sich experimentell folgendermaßen bestimmen: Bei Änderung einer der Leitungslängen um einen kleinen Betrag ändert sich die Frequenz  $f$  um einen meßbaren Betrag, die dadurch verursachten Änderungen von  $\alpha$  und  $\beta$  müssen der Gl. (19) genügen. Bei Variation von  $L_2$  gilt nach (15) und (16):

$$\delta \alpha = \delta k (L_1 + L_2) + k \delta L_2 \quad (21)$$

$$\delta \beta = \delta k \left( L' + k \frac{dL'}{dk} + L_2 \right) + k \delta L_2 \quad (22)$$

(da die effektive Länge  $L'$  frequenzabhängig angenommen werden muß),  
daraus:

$$\frac{1}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial L_2} = \frac{1 - \frac{d\alpha}{d\beta}}{\frac{d\alpha}{d\beta} \left( L' + k \frac{dL'}{dk} + L_2 \right) - (L_1 + L_2)} \quad (23)$$

Bei Variation von  $L'$  gilt:

$$\delta \alpha = \delta k (L_1 + L_2)$$

$$\delta \beta = \delta k \left( L' + k \frac{dL'}{dk} + L_2 \right) + k \delta L'$$

gemessen; die Frequenz war  $f = 10,6$  MHz. Gl. (23) und (24) liefern

und

$$\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial L'} = \frac{-\frac{d\alpha}{d\beta}}{\frac{d\alpha}{d\beta} (L' + k \frac{dL'}{dk} + L_2) - (L_1 + L_2)} \quad (24)$$

Aus (23) und (24) folgt:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial L_2}}{\frac{\partial f}{\partial L'}} = 1 - \frac{d\beta}{d\alpha} \quad (25)$$

Der Differentialquotient auf der rechten Seite muß gleich dem aus (19) abzuleitenden sein:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{1 - \frac{\cos \alpha}{|\sigma_1 \sigma_2| \tau^2}}{\left( \cos \alpha - \frac{1}{|\sigma_1 \sigma_2| \tau^2} \right)^2} \quad (26)$$

Bei gemessenen Differentialquotienten  $\partial f / \partial L_2$  und  $\partial f / \partial L'$  kann also aus (25) und (26) der Winkel  $\alpha$  errechnet werden, aus (19) sodann der Winkel  $\beta$  und aus (20) die Verstärkung  $V$ . Da  $L_1$  und  $L_2$  meßbar sind, kann aus (23) oder (24) auch  $L' + k \partial L' / \partial k$  errechnet werden.

Werden, etwa durch Änderung der Leitungslänge  $L_2$ , die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  in genügendem Maße geändert, so kann der Verstärker die zur Befriedigung der Gl. (20) nötige Verstärkung nicht mehr aufbringen und die Schwingung reißt ab. Dies kann zur Bestimmung der maximalen Verstärkung  $V_{\max}$  benutzt werden.

Für Versuche stand ein Breitband-Röhrenverstärker (Singer Mod. 2550 NK) zur Verfügung, dessen Bandbreite (250 - 500 MHz) durch ein seriengeschaltetes Bandpaßfilter auf 400 - 500 MHz eingeschränkt wurde. Die Kopplungsverhältnisse der verwendeten Richtkoppler waren 20,2 und 10,8 db, woraus ein mittlerer Wert  $\tau^2 = 0,97$  resultiert. Durch Variieren der Leitungslängen wurden die  $L_2$ - und  $L'$ -Bereiche gefunden, innerhalb deren ein Schwingen der Anordnung möglich war und diese Bereiche durch Serienschaltung von Dämpfungsgliedern zu dem Verstärker immer mehr eingeengt. Bei einem 6 db Dämpfungsglied war der Bereich  $\Delta L_2 = 2,8$  cm. Die Differentialquotienten auf den linken Seiten von (23) und (24) wurden (in der Mitte dieses Bereiches) mit einem Digital-Frequenzmesser (Hewlett-Packard) zu

$$\frac{\partial f}{\partial L_2} = -1053 \frac{\text{kHz}}{\text{cm}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial L'} = -90,4 \frac{\text{kHz}}{\text{cm}} \quad (28)$$

gemessen; die Frequenz war  $f = 450,6$  MHz. Gl. (23) und (24) liefern

mit diesen Werten und mit  $L_1 = 50 \text{ cm}$ ,  $L_2 = 230 \text{ cm}$ :

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -10,65 \quad \text{und} \quad L' + k \frac{dL'}{dk} = 17,8 \text{ m.}$$

Nach Gl. (21) und (22) entsprechen dem Abstand der Bereichsgrenzen von  $\Delta L_2$  von der Mitte von  $\Delta L_2$  die Winkel:

$$\Delta\alpha \approx \pm \frac{2\pi f}{c} \frac{\Delta L_2}{2} \left[ 1 + \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial L_2} (L_1 + L_2) \right] = \pm 3^\circ$$

$$\Delta\beta \approx \pm \frac{2\pi f}{c} \frac{\Delta L_2}{2} \left[ 1 + \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial L_2} \left( L' + k \frac{dL'}{dk} + L_2 \right) \right] = \pm 28^\circ$$

Da der Verlauf der Schwingungsamplitude innerhalb  $\Delta L_2$  nahezu symmetrisch zum Mittelpunkt von  $\Delta L_2$  war, folgt aus (20), daß an diesem Punkt  $\cos\beta = -1$  und daher nach (19)  $\cos\alpha = 1$  war. Aus (26) wird damit  $|\sigma_1 \sigma_2| = 0,94$  und nach Maßgabe des Längenverhältnisses  $L_2/L_1$   $|\sigma_2| = 0,95$  errechnet. Mit diesen Werten erhält man nach (20) für den Verstärkungsfaktor des Verstärkers (Berücksichtigung des erwähnten Dämpfungsgliedes) im Mittelpunkt des Schwingungsbereiches  $\Delta L_2$ : 15,8 db, und für den maximalen Verstärkungsfaktor: 17 db.

Das belastete Q des Ringhohlraumes wird in ähnlicher Weise wie in Abschnitt 1 berechnet; im Beispielfall ist:

$$Q = \frac{2\pi}{1 - (|\sigma_1 \sigma_2| \tau^2)^{\frac{2\lambda}{L_1 + L_2}}} = 290$$

Der Vorteil der beschriebenen Anordnung gegenüber einem gewöhnlichen rückgekoppelten Verstärker ( $|\sigma_1| = 0$  und daher nach (26)  $d\beta/d\alpha \equiv 0$ ) geht aus (23) und (24) hervor; nach ihnen gilt nämlich:

$$\frac{\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial L_2}}{\left( \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial L_2} \right)_{|\sigma_1|=0}} = \frac{1 - \frac{d\beta}{d\alpha}}{1 - \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \frac{L_1 + L_2}{L' + k \frac{dL'}{dk} + L_2}} \quad (27)$$

und

$$\frac{\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial L'}}{\left( \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial L'} \right)_{|\sigma_1|=0}} = \frac{1}{1 - \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \frac{L_1 + L_2}{L' + k \frac{dL'}{dk} + L_2}} \quad (28)$$

Die Messung von  $\partial f / \partial L' \equiv \partial f / \partial L_2$  beim gewöhnlichen rückgekoppelten Verstärker erbrachte für den ersten Quotienten den Wert 4,2 (mit den ermittelten Größen nach (27) berechnet : 4,7) und für den zweiten Quotienten den Wert 0,33 (mit den ermittelten Größen nach (28) berechnet : 0,4). Die Abweichung der gemessenen von den berechneten Werten kommt zum Teil daher, daß die Messung von  $\partial f / \partial L'$  beim gewöhnlichen rückgekoppelten Verstärker bei einer etwas anderen Frequenz erfolgte und daher die effektive Leitungslänge  $L'$  eine andere war.

Zusammenfassung: Die Einschaltung eines Ringhohlraumes in die Rückkopplungsleitung eines als Oszillator arbeitenden rückgekoppelten Verstärkers kann dessen Frequenzstabilität gegenüber statistischen Schwankungen der effektiven Leitungslänge erhöhen. Die Empfindlichkeit der Messung kleiner Phasenänderungen eines Vierpols kann erheblich größer sein, wenn dieser sich im Ringhohlraum befindet, als im Falle, daß er sich in der einfachen Rückkopplungsleitung befindet<sup>2)</sup>.

Wir danken Herrn F. Brandl für die Herstellung des 3 cm-Richtkopplers.

Literaturverzeichnis

- 1) GOLDE, H.: "Theory and Measurement of Q in Resonant Ring Circuits", IRE Trans. MTT 8 (1960) 560
  
- 2) SIMONEN, T.C.,  
TUTTER, M.: "Plasma Electron Density Measurement with a Feedback Oscillator". Zur Veröffentlichung eingesandt.