

Einfluss von Relaxationserscheinungen auf die  
spektroskopische Temperaturmessung eines sta-  
tionären Wasserstofflichtbogens im Magnetfeld

The Influence of Relaxation Effects on  
Spectroscopic Temperature Measurements  
of a Stationary Hydrogen Arc in an Ax-  
ial Magnetic Field

K. Tichmann

IPP 3/77

Juli 1968

**I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K**  
**G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N**



# INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Einfluss von Relaxationserscheinungen auf die  
spektroskopische Temperaturmessung eines sta-  
tionären Wasserstofflichtbogens im Magnetfeld

The Influence of Relaxation Effects on  
Spectroscopic Temperature Measurements  
of a Stationary Hydrogen Arc in an Ax-  
ial Magnetic Field

K. Tichmann

IPP 3/77

Juli 1968

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

Abstract

The radial temperature distribution in a 2400 Amp hydrogen arc in a 35 kG axial magnetic field was measured spectroscopically. Temperatures in the range 20 000 °K to 60 000 °K were determined from the ratio of the intensity of the Balmer  $H_{\beta}$  line to the neighbouring continuum. For measuring temperatures above 40 000 °K a small quantity of helium was added to the hydrogen. The temperature was then determined from the intensity ratio of a He II to a He I line using the corona equation as the ionization equation between  $He^{++}$  and  $He^{+}$ . At temperatures at which the two measuring methods could be used simultaneously there were strong deviations between the results. These deviations were attributed to radial flow of helium ions. If, for example, the  $He^{++}$  ions stream outwards into colder regions as a result of ambipolar diffusion or mass flow, they produce an additional contribution to the  $He^{++}$  particle density at a certain location because of their finite recombination time. Therefore, the number of  $He^{++}$  particles actually present there is larger than that calculated from the static ionization formula (corona formula). The momentum equations for a four-component plasma (hydrogen ions, electrons,  $He^{++}$  ions, and  $He^{+}$  ions) in a magnetic field were used to calculate the radial velocities of the helium particles for small helium admixtures. The expressions obtained for the velocities were substituted in the ionization rate equation for the  $He^{++}$  particles. It was thus found that the corona equation is not applicable under the conditions present in the arc investigated (electron density about  $2 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ , temperature gradient about  $10^5 \text{ °K/cm}$ , magnetic field 35 kG). It is concluded that temperature can be satisfactorily determined from measurements of the line intensity ratio He II/He I using the corona formula only at magnetic fields above 120 kG, at the arc axis.

<u>1. Einleitung</u> .....	1
<u>2. Experimentelle Anordnung</u> .....	1
<u>3. Spektroskopische Meßmethoden</u> .....	3
a) Temperaturmessungen .....	3
$\alpha$ ) Bestimmung der Temperatur aus He II/He I- und CIV/CIII - Intensitätsverhältnissen .....	3
$\beta$ ) Temperaturbestimmung aus dem Verhältnis Balmerlinie zu Kontinuum .....	9
$\gamma$ ) Praktische Durchführung der Messungen .....	11
b) Elektronendichtemessung .....	13
<u>4. Meßergebnisse</u> .....	14
<u>5. Diskussion der Meßergebnisse</u> .....	20
a) Berücksichtigung von Photoabsorptionsprozessen .....	20
b) Unsymmetrisch rotierender Bogen .....	20
c) Relaxationseffekte bei strömenden Teilchen .....	20
<u>6. Radiale Teilchenströmungen</u> .....	21
a) Schwerpunktsströmung .....	22
b) Teilchenströmungen durch ambipolare Diffusion von Helium allein .....	24
$\alpha$ ) Diffusionsgeschwindigkeiten ohne äußeres Magnetfeld .....	24
$\beta$ ) Diffusionsgeschwindigkeiten mit äußerem Magnetfeld .....	27
c) Berechnung von radialen Teilchengeschwindigkeiten aus Meßwerten der Teilchendichten .....	31
<u>7. Gültigkeit der spektroskopischen Temperaturmessung</u> .....	32
<u>8. Zusammenfassung</u> .....	37
<u>Literaturverzeichnis</u> .....	38
<u>Anhang</u> .....	39
a) Herleitung der Koronagleichung, Abschätzung ihres Fehlers .....	39
b) Fehlerberechnung bei der Lösung der Abel'schen Integralgleichung .....	43
c) Herleitung des Ausdrucks für die Relaxationszeit bei Wasserstoff .....	47
<u>Tabellen</u> .....	49 - 51



## 1. Einleitung

In einem Wasserstofflichtbogen mit überlagertem axialen Magnetfeld, wie er von Mahn, Ringler und Zankl beschrieben worden ist (1), findet man Achsentemperaturen in der Größenordnung von  $100\ 000^{\circ}\text{K}$ . Da Wasserstoff in diesem Temperaturbereich praktisch vollständig ionisiert ist und daher keine Linienstrahlung emittiert, wird dem Wasserstoff ein geringer Anteil von Helium oder Kohlenstoff beigemischt, um die Temperaturverteilung spektroskopisch zu messen. Aus dem Verhältnis der Intensitäten der Spektrallinien zweier benachbarter Ionisationsstufen eines Elements läßt sich dann die Temperatur bestimmen. Voraussetzung zur Anwendung dieses Verfahrens ist, daß das Ionisationsgleichgewicht bekannt ist, d.h. daß das Verhältnis der Teilchenzahlen in den verschiedenen Ionisationsstufen eine bekannte Funktion der Temperatur und evtl. der Elektronendichte ist. Je nach der Teilchendichte der Beimischung und der Elektronendichte wird das Ionisationsgleichgewicht in einem Plasma durch die Sahagleichung, die Koronaformel oder eine Ionisationsformel, die das Übergangsgebiet zwischen diesen beiden Grenzformeln beschreibt, gegeben sein (z. B. Mahn (2)).

In einem Plasma mit starken Temperaturgradienten - wie es für das vorliegende Wasserstoffplasma zutrifft - treten auch große Gradienten der Teilchendichten in den verschiedenen Ionisationsstufen auf, die eine weitere Schwierigkeit bei der spektroskopischen Temperaturmessung zur Folge haben. So können zum Beispiel  $\text{He}^{++}$ -Ionen aufgrund von ambipolarer Diffusion oder Schwerpunktsströmung aus den heißen Zonen des Bogens radial nach außen strömen. Ist nun die Rekombinationszeit der  $\text{He}^{++}$ -Teilchen groß gegenüber Zeiten, in denen die Teilchen Gebiete stark abfallender Temperatur durchlaufen, so wird dadurch der Anteil von  $\text{He}^{++}$ -Teilchen in kälteren Zonen vergrößert gegenüber dem Anteil, der sich an dieser Stelle aufgrund der lokalen Temperatur und Elektronendichte ergeben würde. Das gleiche gilt für die durch ambipolare Diffusion nach innen strömenden  $\text{He}^{+}$ -Teilchen, die sich erst nach einer endlichen Ionisationszeit auf das Ionisationsverhältnis eingestellt haben, wie es den lokalen Werten von Temperatur und Elektronendichte in einem homogenen Plasma entsprechen würde (statische Ionisation).

Diese Abweichungen von der statischen Ionisation können nun auf folgende Art untersucht werden: Im Temperaturbereich von  $20\ 000 - 50\ 000^{\circ}\text{K}$  läßt sich eine von den bisher beschriebenen Verfahren unabhängige Temperaturmessung aus dem Intensitätsverhältnis der Balmer Linie  $\text{H}\beta$  zum benachbarten Kontinuum durchführen. In diesem Temperaturbereich sind die entsprechenden Relaxationszeiten für Wasserstoff um 2 bis 3 Größenordnungen kleiner als für Helium, wodurch hier der Einfluß von Teilchenströmungen auf die Temperaturmessung vernachlässigbar ist. Durch den Vergleich der Ergebnisse der beiden Temperatur-Meßmethoden soll dann festgestellt werden, inwieweit sich der Einfluß von Teilchenströmungen auf die Temperaturmessung aus Linienintensitäten der beigemischten Elemente auswirkt und welche Voraussetzungen für ein Plasma mit Temperaturgradienten erfüllt sein müssen, um eine spektroskopische Temperaturmessung durchführen zu können.

## 2. Experimentelle Anordnung

Die Untersuchungen wurden am Plasma eines stationären Wasserstofflichtbogens ausgeführt, dem ein axiales Magnetfeld überlagert war. Abb. 1 zeigt eine Skizze des experimentellen Aufbaus.

Das evakuierbare Entladungsgefäß war aus mehreren zylindrischen Glaskesseln von  $20\ \text{cm}\ \varnothing$  und  $30\ \text{cm}$  Länge zusammengesetzt. Zwischen den einzelnen Glaskesseln befanden sich V2A-Stahlringe, an denen Kupferdüsen befestigt waren, die dazu dienten, den Durchmesser des Bogens zu begrenzen. Beide Enden des Entladungskessels waren durch einen V2A-Flansch abgeschlossen. Als Anode wurde eine Kupferdüse verwendet. Die Kathode bestand aus einer Wolframelektrode von  $20\ \text{mm}\ \varnothing$ , die von einer Kupferdüse umgeben war. Sowohl der V2A-Flansch wie auch die Anode, Kathode und alle Kupferdüsen waren wassergekühlt. Während des Betriebs wurde ringförmig entlang der Wolframelektrode Gas zugeführt und durch eine Bohrung von  $10\ \text{cm}\ \varnothing$  in der Mitte des Anodenabschlußflansches

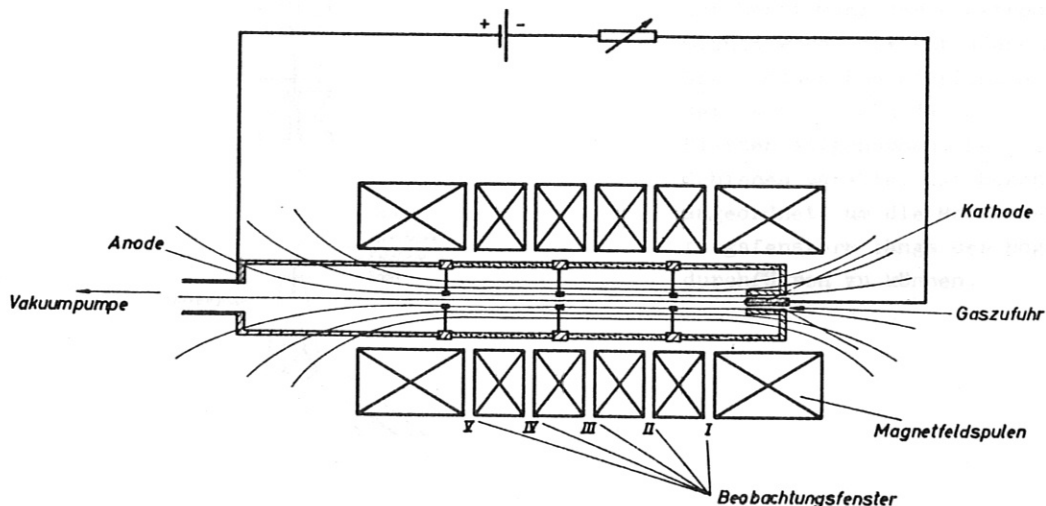


Abb. 1 Skizze des experimentellen Aufbaus

abgepumpt. Dadurch konnten Verunreinigungen des Bogens weitgehend reduziert werden. Das Magnetfeld wurde mit 24 wassergekühlten Spulen vom Typ SP300/12 erzeugt. Die Spulen lagen dicht aneinander, es waren nur im Abstand von je 20 cm schmale Beobachtungsfenster von je 3 cm Breite eingelassen. Die damit verbundenen Schwankungen des Magnetfelds längs der Spule waren bis 20 cm vor den Enden des gesamten Spulenpakets kleiner als 5 %. Den Spulenstrom lieferte eine Quecksilbergleichrichteranlage, die von einem Stoßgenerator gespeist wurde.

Die Entladung zündete im Magnetfeld durch Anlegen einer Spannung von 1 kV an die Elektroden bei einem Druck von etwa 0,4 Torr. Nach dem Zünden wurde die Gaszufuhr an der Kathode über ein elektrisch betätigtes Ventil eingeschaltet. Wir regelten die einströmende Gasmenge dabei so ein, daß sich ein Druck von ca. 6 Torr im Entladungskessel ergab. Der Strom unmittelbar nach dem Einsetzen der Entladung betrug 600 A und wurde für 5/10 sec auf diesem Wert belassen. Anschließend "pulsten" wir den Strom für 2/10 sec auf einen vorher festgelegten Wert hoch. Das Magnetfeld hatte während des gesamten Versuchsablaufs den konstanten Wert von 35 kGauss. Die Betriebsdauer des Experiments mußte der begrenzten Kapazität des Stoßgenerators wegen auf diese kurzen Zeiten begrenzt werden.

Um nachzuprüfen, ob sich die Emission der Spektrallinien während der Pulsdauer bereits auf einen konstanten Wert eingestellt hatte, wurde ein Querschnitt des Bogens auf den Spalt eines Monochromators abgebildet und die Strahlung des Bogens im Licht verschiedener Spektrallinien mit einem Photomultiplier registriert. Es erwies sich dabei, daß bei dem oben angegebenen kurzen Versuchsablauf die Emission von Spektrallinien bereits nach 0,05 sec stationäre Verhältnisse erreichte. Bei den Messungen wurde der maximale Bogenstrom zwischen 1800 und 2400 A variiert. Weiter konnten wir die Stromstärke für die Messungen nicht erhöhen, da der Bogen bei höheren Strömen an der die Kathode umgebende Cu-Düse ansetzte.



3. Spektroskopische Meßmethoden

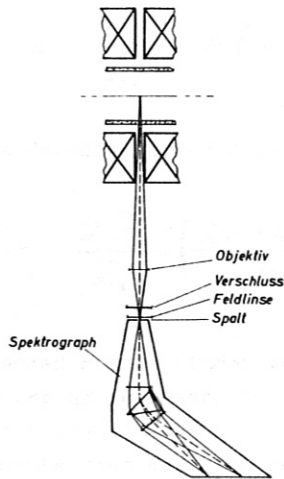


Abb. 2

Zur Bestimmung der Elektronentemperatur- und Dichte wurde die Entladung side-on auf den Spalt eines Foersterling Spektrographen abgebildet (Abb. 2) und das Spektrum auf Ilford HPS-Platten aufgenommen. Der Spektrograph war auf Schienen parallel zur Bogenachse verschiebbar angeordnet, um die Messungen an allen Beobachtungsfenstern längs des Bogens ohne Neujustierung durchführen zu können.

a) Temperaturmessungen

α) Bestimmung der Temperatur aus He II/He I- und C IV/C III- Intensitätsverhältnissen

Bei einem Strahlungsübergang vom Niveau m nach n strahlt ein Plasma pro Volumeneinheit, Raumwinkeleinheit und Sekunde die Energie

$$i_{mn} = \frac{1}{4\pi} A_{mn} \frac{hc}{\lambda_m} n_m \quad [\text{erg cm}^{-3} \text{ Sterad}^{-1} \text{ s}^{-1}]$$

$A_{mn}$  = Übergangswahrscheinlichkeit  
 $\lambda_m$  = Wellenlänge  
 $n_m$  = Besetzung des oberen Niveaus der Linie

ab.

Enthält das Plasma ein Element mit mehreren Ionisationsstufen, so ergibt sich für das Verhältnis der emittierten Energien  $i_{mn}/i_{pq}$  zweier Spektrallinien des (z-1)- bzw. (z-2)-fach geladenen Ions:

$$\frac{i_{mn}}{i_{pq}} = \frac{\frac{1}{4\pi} A_{mn} \frac{hc}{\lambda_m} n_m^{(z-1)}}{\frac{1}{4\pi} A_{pq} \frac{hc}{\lambda_p} n_p^{(z-2)}} = \frac{A_{mn} \lambda_p n_m^{(z-1)}}{A_{pq} \lambda_m n_p^{(z-2)}} \quad (1)$$

Da das Verhältnis  $n_m^{(z-1)}/n_p^{(z-2)}$  eine Funktion der Elektronentemperatur ist, kann aus dem gemessenen Intensitätsverhältnis die Elektronentemperatur ermittelt werden, wenn die Temperaturabhängigkeit des Besetzungszahlverhältnisses bekannt ist. Bei Wasserstoff kann diese Methode der Temperaturbestimmung nicht zur Anwendung kommen, da Wasserstoff nur als neutrales Atom Spektrallinien emittieren kann. Um uns dieser Methode bei der Messung der Bogentemperaturen bedienen zu können, wurde daher dem Wasserstoff ein geringer Prozentsatz Helium- bzw. Kohlenstoff in Form von Methan beigemischt.

Im Falle des lokalen thermodynamischen Gleichgewichts (abgekürzt LTE), d.h. wenn sämtliche Anregungs- und Ionisationsprozesse (Stoß- und Strahlungsprozesse) mit ihren Umkehrprozessen im Gleichgewicht stehen, sind die Energieniveaus der Atome nach einer Boltzmann-Verteilung

besetzt und das Ionisationsgleichgewicht wird durch die Saha-Gleichung beschrieben. Dann gilt für das Verhältnis der Besetzung eines Energieniveaus zur Besetzung des Grundzustandes

$$\frac{n_p}{n_o} = \frac{g_p}{g_o} \exp\left(-\frac{E_p - E_o}{kT}\right) \quad \begin{array}{l} g_o, g_p = \text{statistische Gewichte} \\ E_o, E_p = \text{Anregungsenergien} \end{array}$$

und für das Verhältnis der Zahl der Atome in zwei verschiedenen Ionisationsstufen

$$\frac{n_z n_e}{n_{z-1}} = \frac{2 Z_z}{Z_{z-1}} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_z - E_{z-1}}{kT}\right) \quad \begin{array}{l} Z_z, Z_{z-1} = \text{Zustandssummen} \\ E_z, E_{z-1} = \text{Ionisierungsenergien} \end{array}$$

Im vorliegenden Plasma findet wegen der geringen Helium- bzw. Kohlenstoffteilchendichte eine wesentlich geringere Anzahl von Photoabsorptionsprozessen und Dreierstoßrekombinationen als bei lokalem thermodynamischen Gleichgewicht statt. Darum weicht das Ionisationsgleichgewicht dieser Elemente hier auch von dem durch die Saha-Gleichung bestimmten ab, und die Besetzung eines Energieniveaus kann nicht mehr durch die Boltzmann-Gleichung zur Besetzung des Grundzustandes in Beziehung gesetzt werden. Nicht alle Besetzungen der Energieniveaus weichen jedoch von den LTE-Besetzungen ab. Stoßprozesse zwischen den Niveaus werden mit zunehmender Hauptquantenzahl und abnehmender Energiedifferenz zwischen den Niveaus immer wahrscheinlicher, während für Strahlungsprozesse gerade der umgekehrte Verlauf richtig ist. Ein Fehlen der Photoabsorptionsprozesse kann darum wohl einen Einfluß auf die Besetzung im Termschema niedrig stehender Niveaus haben, hochliegende Niveaus jedoch, bei denen Strahlungs- gegen Stoßprozesse vernachlässigbar sind, zeigen keine Abweichung von der Besetzung im LTE. Sie sind, wie man sagt, "stoßbestimmt" und "thermisch besetzt" bezüglich des Grundzustandes der nächsthöheren Ionisationsstufe.

Sind die oberen Niveaus zweier Spektrallinien verschiedener Ionen des gleichen Elements thermisch besetzt, so lassen sich ihre Besetzungen mit der Saha-Boltzmann-Gleichung an die Besetzung des Grundzustandes der nächsthöheren Ionisationsstufe anschließen. Im folgenden ist stets angenommen, daß die Ladung der Ionen, deren Linien wir betrachten, sich nur um eine Ladungseinheit unterscheidet. Bezeichnen wir mit

$$\begin{array}{l} n_m^{z-1}, g_m^{z-1}, E_m^{z-1} \\ n_p^{z-2}, g_p^{z-2}, E_p^{z-2} \end{array}$$

Besetzungszahl, statistisches Gewicht und Anregungsenergie des oberen Niveaus der Linie des (z-1) bzw. (z-2)-fach geladenen Ions, mit

$$Z_z, E_i^z, Z_{z-1}, E_i^{z-1}$$

Zustandssummen und Ionisierungsenergien des (z-1) bzw. (z-2)-fach geladenen Ions,

so lautet die Saha-Boltzmann-Gleichung für die Besetzung des m-ten Niveaus eines (z-1)-fach geladenen Ions

$$\frac{n_e n_z}{n_m^{z-1}} = \frac{2 Z_z}{g_m^{z-1}} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_i^z - E_m^{z-1}}{kT}\right) \quad (2)$$

und für das Niveau p eines (z-2)-fach geladenen Ions

$$\frac{n_e n_{z-1}}{n_p^{z-2}} = \frac{2 Z_{z-1}}{g_p^{z-2}} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_i^{z-1} - E_p^{z-2}}{kT}\right) \quad (3)$$



Dividieren wir Gleichung (2) durch Gleichung (3) so erhält man

$$\frac{n_m^{(z-1)}}{n_p^{(z-2)}} = \frac{Z_{z-1}}{Z_{z-2}} \frac{g_m^{z-1}}{g_p^{z-2}} \exp\left(\frac{-E_i^{z-1} + E_p^{z-2} + E_i^z - E_m^{z-1}}{kT}\right) \frac{n_z}{n_{z-1}} = f(T) \frac{n_z}{n_{z-1}}$$

Dies können wir nun in Gleichung (1) für das Intensitätsverhältnis zweier Spektrallinien einsetzen. Wir erhalten

$$\frac{i_{mn}}{i_{pq}} = \frac{A_{mn}}{A_{pq}} \frac{\lambda_p}{\lambda_m} f(T) \frac{n_z}{n_{z-1}} \quad (4)$$

Man erkennt aus dieser Gleichung: die Temperatur kann aus dem Linienintensitätsverhältnis berechnet werden, wenn das Ionisationsgleichgewicht der Ionen mit der nächsthöheren Ladungszahl bekannt ist. Um dieses zu bestimmen, müssen sämtliche möglichen Übergänge zwischen den Energieniveaus des (z-1)-fach geladenen Ions berücksichtigt werden. Dazu betrachten wir zunächst ein Energieniveau p, für das man die folgende Gleichung aufstellen kann

$$\underbrace{n_e \sum_{q=p_0}^{p-1} n_q C_{qp}^\uparrow + n_e \sum_{q=p+1}^{\bar{p}} n_q C_{qp}^\downarrow + n_e^2 n_z C_p^{\bar{p}+1} + \sum_{q=p+1}^{\bar{p}} n_q R_{qp}^\downarrow + n_e n_z R_p^{\bar{p}+1}}_{\text{Bevölkerungsprozesse}} - \underbrace{- n_e \sum_{q=p_0}^{p-1} n_p C_{pq}^\downarrow - \sum_{q=p_0}^{p-1} n_p R_{pq}^\downarrow - n_e \sum_{q=p+1}^{\bar{p}} n_p C_{pq}^\uparrow - n_e n_p R_p^{\bar{p}+1}}_{\text{Entvölkerungsprozesse}} = 0 \quad (5)$$

Der Reihe nach beschreiben die einzelnen Summanden

- Bevölkerung durch Stoßanregung von Niveaus mit Quantenzahl  $q < p$
- Bevölkerung durch Stoßabregung von Niveaus mit Quantenzahl  $q > p$
- Bevölkerung durch Dreierstoßrekombination
- Bevölkerung durch Strahlungsabregung von Niveaus mit Quantenzahl  $q > p$
- Bevölkerung durch Strahlungsrekombination
- Entvölkerung durch Stoßabregung in Niveaus mit Quantenzahl  $q < p$
- Entvölkerung durch Strahlungsabregung in Niveaus mit Quantenzahl  $q < p$
- Entvölkerung durch Stoßanregung in Niveaus mit Quantenzahl  $q > p$
- Entvölkerung durch Stoßionisation

Dabei bedeuten

- $C_{pq}^\uparrow, C_{pq}^\downarrow$  Stoßanregungs- bzw. Abregungskoeffizienten
- $R_{pq}^\downarrow$  Strahlungsabregungskoeffizienten
- $p_0$  Hauptquantenzahl des Grundzustands des (z-1)-fach geladenen Ions
- $n_z$  Teilchendichte der 2-fach geladenen Ionen
- $\bar{p}^+ C_p^\uparrow, \bar{p}^+ C_p^\downarrow, \bar{p}^+ R_p^\downarrow$  frei-gebunden Koeffizienten für Stoß bzw. Strahlung
- $\bar{p}$  Hauptquantenzahl des höchsten berücksichtigten Niveaus

Bei der Aufstellung der Gleichung wurden Strahlungsanregungsprozesse vernachlässigt, das Plasma wird als optisch dünn angesehen. Diese Annahme wird durch das Experiment bestätigt.

Eigentlich müßten bei den Bevölkerungs- und Entvölkerungsprozessen unendlich viele Niveaus berücksichtigt werden und Gleichung (5) müßte für ebensoviele Niveaus aufgestellt werden. Der Erniedrigung der Ionisierungsenergie durch die Mikrofeldstärken im Plasma zufolge sind aber nur eine endliche Anzahl von Niveaus als gebunden anzusehen. Oberhalb einer bestimmten Hauptquantenzahl, die durch die Mikrofeldstärken im Plasma bestimmt wird, sind alle weiteren Niveaus nicht mehr von den freien Energiezuständen der Elektronen zu unterscheiden. Es ist sogar ausreichend, nur so viele Niveaus in die Rechnung einzubeziehen, wie es nichtthermisch besetzte Niveaus gibt. Um dabei die gebunden-gebunden Prozesse zwischen den Niveaus oberhalb und unterhalb  $\bar{p}$  (:letztes berücksichtigtes Niveau) nicht bei der Teilchenbilanz wegzulassen, wird die Ionisationsgrenze auf das Niveau  $\bar{p} + 1$  "heruntergezogen". Die Koeffizienten für die

Stoß- und Strahlungsprozesse müssen dann so beschaffen sein, daß die Zahl der gebunden-gebunden Prozesse zwischen Niveaus oberhalb p und unterhalb p genau gleich ist den frei-gebunden Prozessen zwischen Niveaus unterhalb p und dem nun zum Kontinuum zählenden Gebiet zwischen p+1 und  $\infty$ .

Die Gesamtheit der  $p - p_0 + 1$  Gleichungen bildet ein lineares Gleichungssystem für die  $p - p_0 + 1$  unbekannt Besetzungen der Energieniveaus. Wir können daraus allgemein das Verhältnis  $n_z/n_p$  berechnen und damit speziell das uns interessierende Verhältnis  $n_z/n_{p_0}$ , das das Ionisationsgleichgewicht beschreibt, da  $n_{z-1} \approx n_{p_0}$ . Der Anzahl der Gleichungen wegen ist allerdings ein numerisches Lösungsverfahren zweckmäßig.

Aus dem System der Gleichungen (5) kann man unter der Voraussetzung, daß Dreierstoßrekombination gegen Strahlungsrekombination vernachlässigbar ist, eine Ionisationsgleichung herleiten, die in der Literatur unter dem Namen "Koronaformel" bekannt ist. Herleitung und Abschätzung der Güte der Näherung sind im Anhang 1 durchgeführt. Die Gleichung für das Koronagleichgewicht lautet:

$$\frac{n_z}{n_{z-1}} = \frac{1}{2\pi\alpha^3} \frac{kT}{z^4 E_i^2} \exp\left(-\frac{E_i z}{kT}\right) \quad (6)$$

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc}$$

Die Voraussetzungen für die Anwendung der Koronagleichung sind bei Elektronendichten unterhalb  $10^{16}$  ( $\text{cm}^{-3}$ ) erfüllt (Anhang 1).

Wir setzen nun Gleichung (6) in Gleichung (4) ein und erhalten damit für das Intensitätsverhältnis der Spektrallinien der z-fach und (z-1)-fach geladenen Ionen den Ausdruck:

$$\frac{I_{mn}}{I_{pq}} = \frac{g_m^{z-1}}{g_n^{z-2}} \frac{A_{mn}}{A_{pq}} \frac{\lambda_p}{\lambda_m} \frac{\tilde{Z}_{z-1}}{\tilde{Z}_{z-2}} \frac{kT}{2\pi\alpha^3 z^4 E_i^2} \exp\left(\frac{-E_i^{z-1} + E_p^{z-2} - E_m^{z-1}}{kT}\right) \quad (7)$$

Bei gegebenem Intensitätsverhältnis läßt sich dann aus dieser Gleichung die Temperatur bestimmen.

#### Auswahl der Linien

Bei der Auswahl der Linien wurde an erster Stelle darauf geachtet, daß das obere Niveau der Linien thermisch besetzt war. Nur in diesem Fall ist ja ein Anschluß an den Grundzustand der nächsthöheren Ionisationsstufe mittels Saha-Boltzmann-Gleichung möglich. Nach Rechnungen von Mahn (2) ist das bei Elektronendichten zwischen  $10^{15}$  und  $10^{16}$  ( $\text{cm}^{-3}$ ) bei Kohlenstoff von der Quantenzahl  $p = 5$  ab, bei Helium von  $p = 4$  ab der Fall. Da das Entladungsgefäß aus Glas bestand, mußten die Linien zudem im sichtbaren Spektralbereich liegen. Diese Forderungen und die praktische Notwendigkeit, Linien genügender Intensität zu benutzen, ließen die Wahl auf folgende Linien fallen:

	Übergang	Wellenlänge (Å)
C IV	(6 <sup>3</sup> H - 5 <sup>3</sup> G) (6 <sup>3</sup> G - 5 <sup>3</sup> F)	4658
C III	5 <sup>1</sup> G - 4 <sup>3</sup> F	4187
He II	4 - 3	4686
He I	4 <sup>3</sup> D - 2 <sup>3</sup> P	4471

Die Temperaturabhängigkeit der Funktionen  $I_{\text{HeII } 4686}/I_{\text{HeI } 4471}$  und  $I_{\text{CIV } 4658}/I_{\text{CIII } 4187}$  nach Koronagleichung ist in den Abb. 3 und 4 aufgetragen.



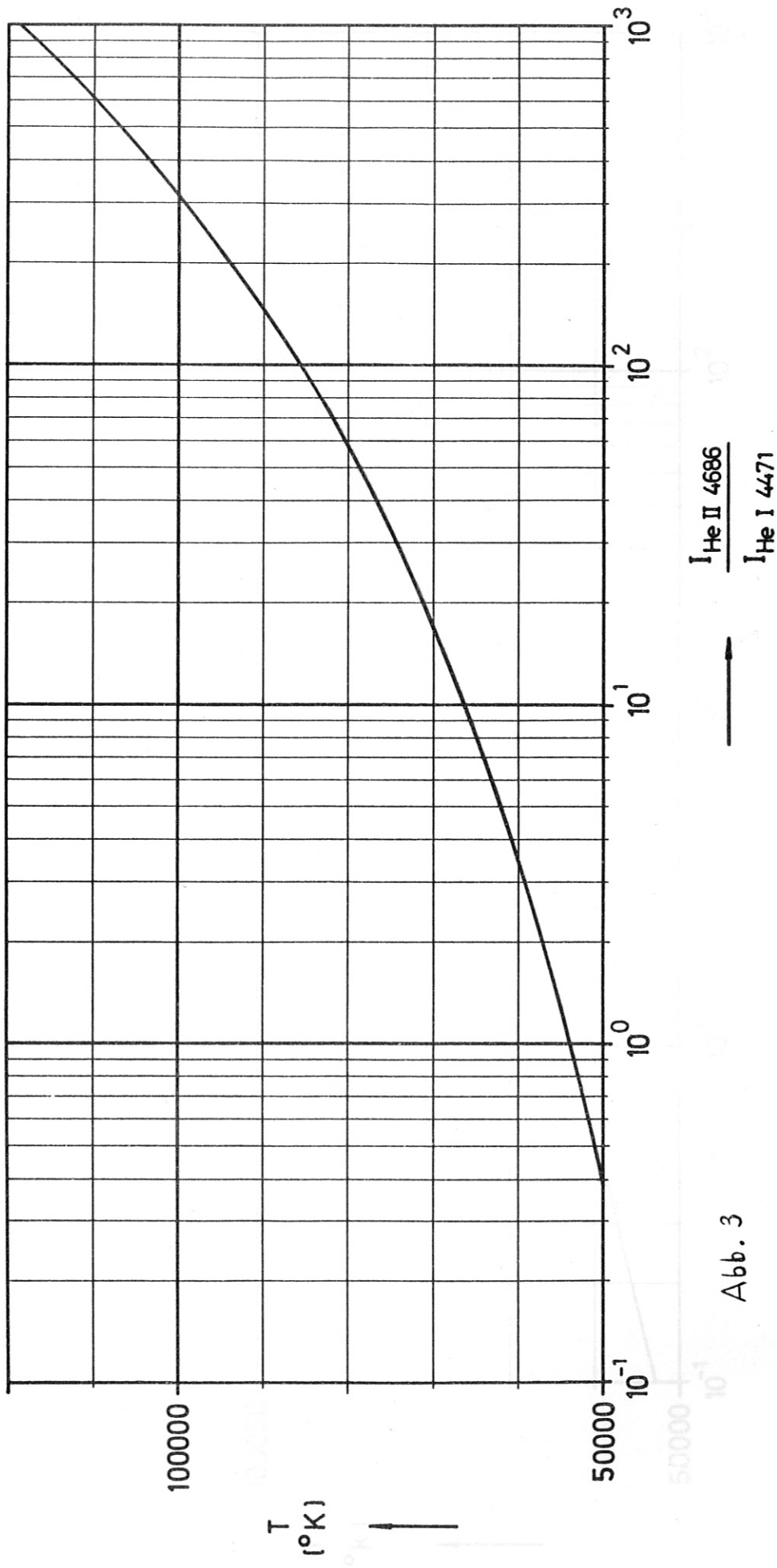


Abb. 3

Abb. 4

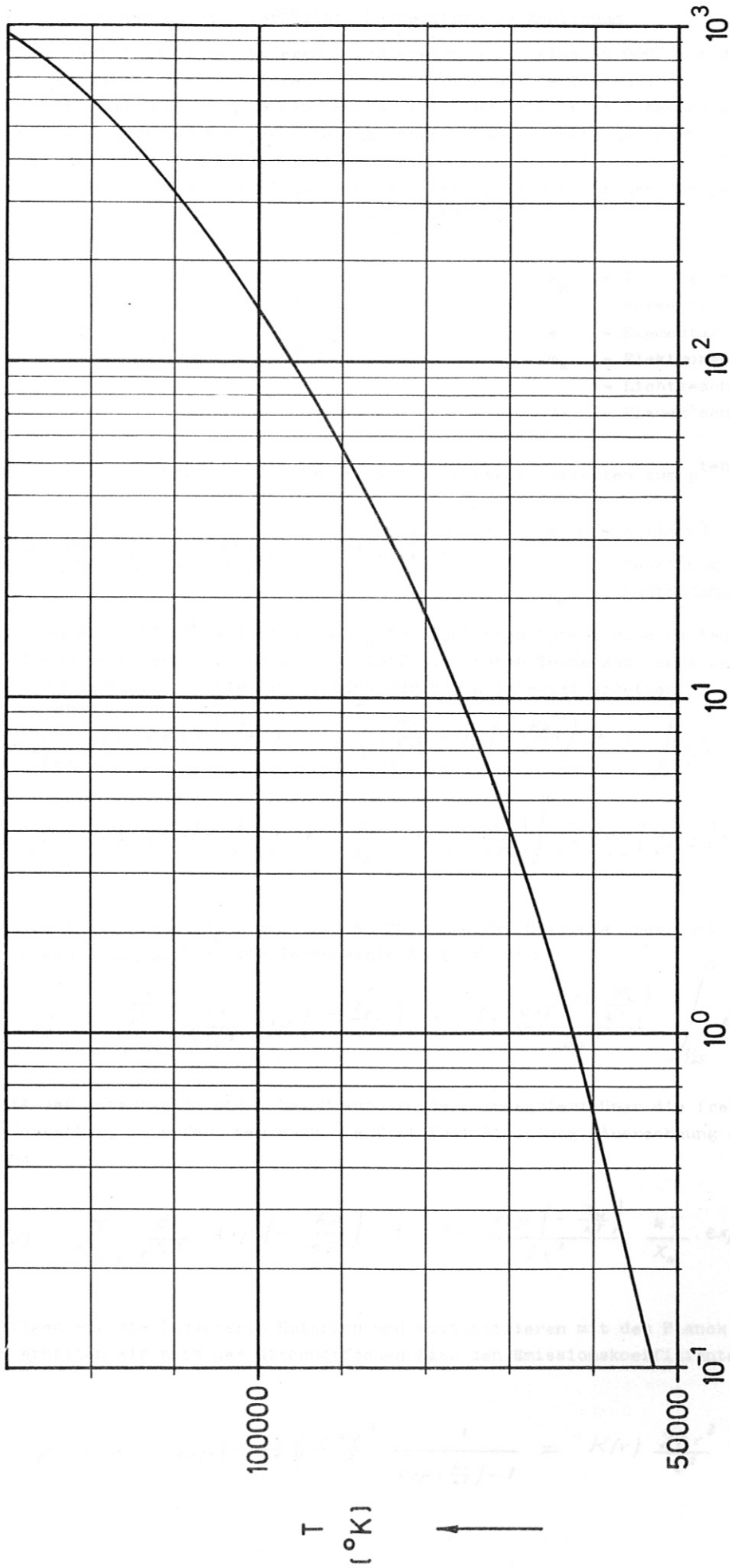


Abb. 4

β) Temperaturbestimmung aus dem Verhältnis Balmerlinie zu Kontinuum

Die Temperatur läßt sich in den äußeren Bogenbereichen bis etwa 40 000° aus dem Verhältnis der Intensität einer Balmerlinie zur Intensität des Kontinuums bestimmen.

Das Kontinuum an einer Stelle zwischen den Balmerlinien setzt sich zusammen aus Bremsstrahlung, den Seriengrenzkontinua der Paschenserie und höherer Serien sowie der frei-frei- und frei-gebundenen Strahlung des negativen Wasserstoffions.

Zur Berechnung der Kontinuumsstrahlung gehen wir von der Kramers'schen Gleichung für den Absorptionsquerschnitt pro Atom im p<sup>ten</sup> Quantenzustand aus

$$a_p(\nu) = \frac{2^4 e^2 \chi_H^2}{3^{3/2} m_e h^2 c} \frac{1}{\rho^5 \nu^3}$$

- X<sub>H</sub> = Ionisierungsenergie des Wasserstoffs
- e = Elementarladung
- m<sub>e</sub> = Elektronenmasse
- c = Lichtgeschwindigkeit
- h = Planck'sches Wirkungsquantum

mit der Boltzmannformel ergibt sich für den Absorptionskoeffizienten zum p<sup>ten</sup> Quantenzustand

$$\alpha_p(\nu) = \frac{2^5 e^2 \chi_H^2}{3^{3/2} m_e h^2 c} \left( \frac{n_0}{Z_0} \right) \frac{1}{\rho^3 \nu^3} \exp\left(-\frac{E_p}{kT}\right) \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} E_p = X_H \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \\ n_0 = \text{Besetzung Grundzustand} \\ Z_0 = \text{Zustandssumme} \end{array}$$

Um die gesamten Absorptionskoeffizienten K<sub>f<sub>g</sub></sub> im sichtbaren Gebiet zu erhalten, müssen wir über alle Niveaus summieren. Da bei Wasserstoff die oberen Terme sehr nahe beieinanderliegen, kann man die Summe über die Glieder mit p > 4 durch ein Integral ersetzen

$$\begin{aligned} K_{fg} &= \sum_{p=3}^{\infty} \frac{c_1}{\rho^3 \nu^3} \exp\left(-\frac{E_p}{kT}\right) \approx \sum_{p=3}^4 \frac{c_1}{\nu^3 \rho^3} \exp\left(-\frac{E_p}{kT}\right) + c_1 \int_5^{\infty} \frac{1}{\rho^3 \nu^3} \exp\left(-\frac{E_p}{kT}\right) d\rho = \\ &= \sum_{p=3}^4 \frac{c_1}{\nu^3 \rho^3} \exp\left(-\frac{E_p}{kT}\right) + \frac{c_1}{\nu^3} \exp\left(-\frac{\chi_H}{kT}\right) \int_5^{\infty} \frac{1}{\rho^3} \exp\left(\frac{\chi_H}{\rho^2 kT}\right) d\rho \end{aligned}$$

Durch die Substitution E = -1/ρ<sup>2</sup> ersetzt man das Integral über die "verschmierten" Quantenzahlen durch ein Integral über die Termenergie E. Es folgt:

$$K_{fg}(\nu) = \sum_{p=3}^4 \frac{c_1}{\rho^3 \nu^3} \exp\left(-\frac{E_p}{kT}\right) + c_1 \frac{\exp\left(-\frac{\chi_H}{kT}\right)}{2\nu^3} \int_{-1/25}^0 \exp\left(\frac{-\chi_H E}{kT}\right) dE$$

Hört man mit der Integration nicht bei 0 auf, sondern integriert über die freien Energiezustände bis ∞ weiter, so erfaßt man auch die frei-frei Strahlung. Ausrechnung des Integrals ergibt dann:

$$K(\nu) = \sum_{p=3}^4 \frac{c_1}{\rho^3 \nu^3} \exp\left(-\frac{E_p}{kT}\right) + c_1 \frac{\exp\left(-\frac{\chi_H}{kT}\right)}{2\nu^3} \frac{kT}{\chi_H} \exp\left(\frac{\chi_H}{25kT}\right)$$

Berücksichtigen wir die induzierte Emission und multiplizieren mit dem Planck'schen Strahlungsgesetz, so erhalten wir nach dem Kirchhoffschen Satz den Emissionskoeffizienten:

$$\epsilon(\nu) = K(\nu) \left(1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\right) \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} = K(\nu) \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$$



Damit erhalten wir für die im Wellenlängenintervall  $\Delta\lambda$  emittierte Kontinuumsintensität

$$\mathcal{E}(\lambda)\Delta\lambda = \frac{2^6 e^2 \chi_H^2}{3^{3/2} m_e h c^2 \lambda^2} \left( \frac{n_0}{Z_0} \right) \exp\left(-\frac{hc}{\lambda kT} - \frac{\chi_H}{kT}\right) \left( \sum_{\rho=3}^4 \frac{1}{\rho^3} \exp\left(\frac{\chi_H}{\rho^2 kT}\right) + \frac{kT}{2\chi_H} \exp\left(\frac{\chi_H}{25kT}\right) \right) \Delta\lambda \quad (8)$$

Bei Temperaturen oberhalb  $10\,000^\circ$  kann die Intensität der Kontinuumsstrahlung des negativen Wasserstoffions gegen die eben berechnete Kontinuumsintensität vernachlässigt werden (Griem (2)).

Die Gesamtintensität einer Balmerlinie mit oberer Hauptquantenzahl  $L$  ist gegeben durch

$$i_L = \frac{1}{4\pi} A_L \frac{hc}{\lambda_L} \left( \frac{n_0}{Z_0} \right) g_L \exp\left(-\frac{E_L}{kT}\right) \quad (9)$$

Dividieren wir Gleichung (9) durch Gleichung (8), so erhält man

$$\frac{i_L}{i_{kont}} = \frac{3^{3/2} A_L h^2 c^3}{2^8 \pi \lambda_L} g_L \exp\left(-\frac{E_L}{kT}\right) \frac{m_e \lambda^2 \exp\left(-\frac{E_L}{kT} + \frac{hc}{\lambda kT} + \frac{\chi_H}{kT}\right)}{\left( \sum_{\rho=3}^4 \frac{1}{\rho^3} \exp\left(\frac{\chi_H}{\rho^2 kT}\right) + \frac{kT}{2\chi_H} \exp\left(\frac{\chi_H}{25kT}\right) \right) \Delta\lambda} \quad (10)$$

Damit haben wir den Ausdruck für das Verhältnis der Intensität einer Balmerlinie zur Intensität des Kontinuums an einer Stelle zwischen den Balmerlinien erhalten. Er ist von der Elektrodichte und der Besetzung des Grundzustandes des Wasserstoffs unabhängig. Zur Auswertung wurde die Balmerlinie  $H\beta$  benutzt, da diese günstig im benutzten Spektralbereich lag. Das Kontinuum wurde bei  $4750 \text{ \AA}$  gemessen, da hier eine weitgehend von Helium-, Kohlenstoff- und sonstigen Verunreinigungslinien freie Zone vorlag. Das Verhältnis  $I_{H\beta}(\tau) / I_{kont}(\tau)$  ist in Abb. 5 aufgetragen.

#### γ) Praktische Durchführung der Messungen

Das Spektrum der Entladung wurde auf Platten aufgenommen. Wir wollen die Abhängigkeit der auf die Flächeneinheit in der Bildebene des Spektrographen fallenden Energie vom Emissionskoeffizienten herleiten. Von Beugungserscheinungen sehen wir ab.

$1 \text{ cm}^3$  Plasma emittiert pro Sekunde und Raumwinkeleinheit im Wellenlängenintervall  $d\lambda$  (bei optisch dünner Strahlung) die Energie  $\mathcal{E}(\lambda) d\lambda$ . Von diesem Volumenelement fällt dann auf die Spaltebene des Spektrographen im Wellenlängenintervall  $d\lambda$  pro Zeiteinheit und Flächeneinheit die Energie:

$$dB = \Omega \mathcal{E}(\lambda) \mu'(\lambda) d\lambda \quad [\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1}]$$

$\Omega$  = Raumwinkel

$\mathcal{E}(\lambda)$  = Emissionskoeffizient

$\mu'(\lambda)$  = Durchlässigkeit der optischen Anordnung für  $\lambda$

Durch eine unendlich schmale Zone des Spektrographenspaltes tritt dann in der Zeit  $t$  im Wellenlängenintervall  $d\lambda$  die Energie

$$dE_0 = dB h dy t = \Omega \mathcal{E}(\lambda) \mu'(\lambda) d\lambda \cdot h dy t \quad [\text{erg}]$$

Ist die Abbildung ein vollständiger Strahlengang, so fällt diese Energie in der Aufnahmeebene des Spektrographen auf ein Gebiet  $dx \cdot h'$ , wobei  $dx$  durch die Dispersion des Spektrographen bestimmt ist. Dann ist der Beitrag der Strahlung durch das Spaltelement  $dy$  zur Energiedichte auf der Platte

$$dE = \frac{dE_0}{h' dx} = \frac{\Omega \mathcal{E}(\lambda) \mu(\lambda) d\lambda h dy t}{h' dx} \quad [\text{erg/cm}^2] \quad \mu(\lambda) = \text{Durchlässigkeit der optischen Anordnung einschl. Spektrographenoptik für die Wellenlänge } \lambda$$

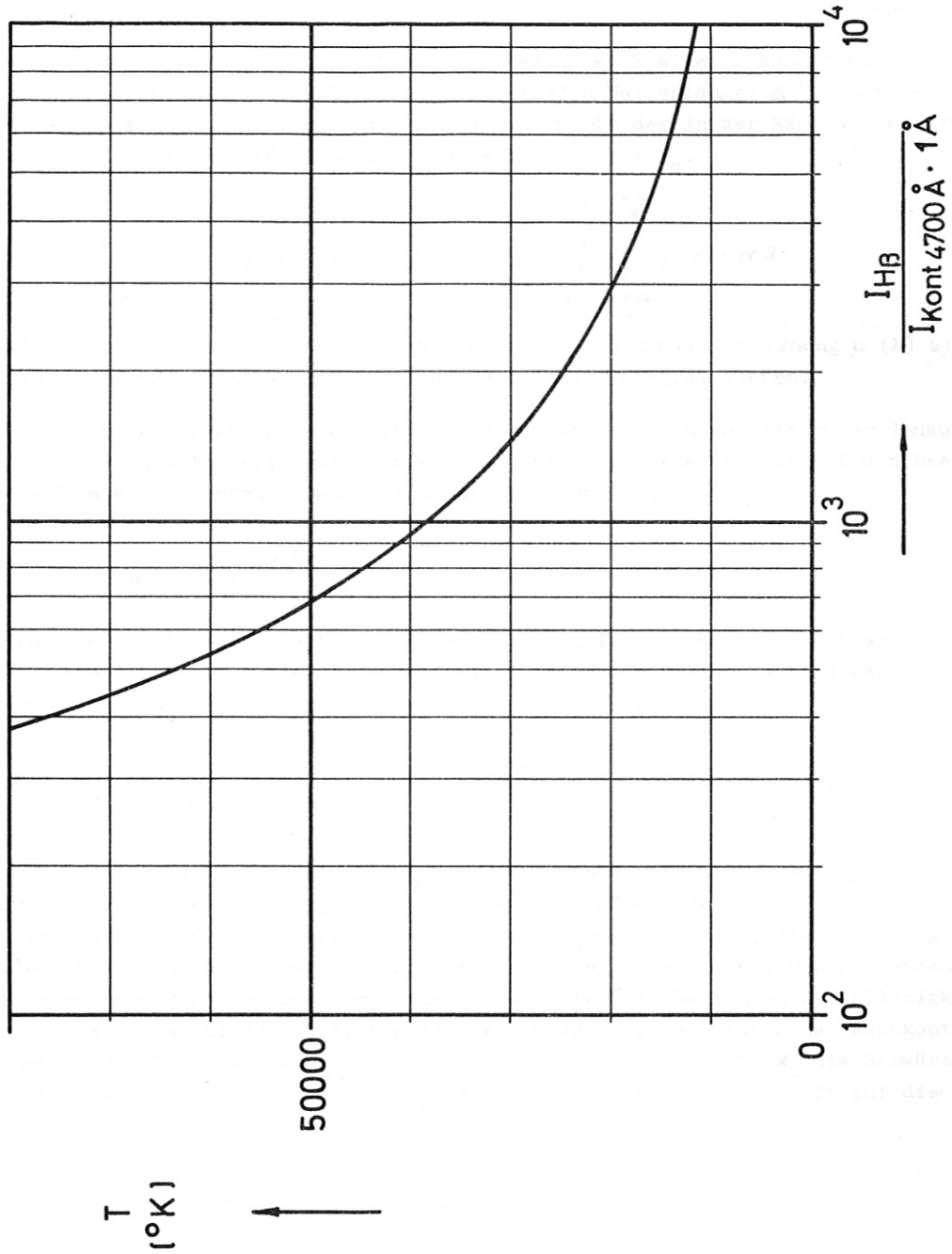


Abb. 5

Raumwinkel, Belichtungszeit, Filterfaktor bei Aufnahme der Linie  
Raumwinkel, Belichtungszeit, Filterfaktor, Spaltbreite bei Aufnahme des Normalstrahlenkontinuums  
Emissionskoeffizient Normalstrahlenkontinuum bei  $\lambda$

$h'/h = v$  ist die Vergrößerung und  $d\lambda/dx = \alpha$  die Dispersion des Spektrographen für die Wellenlänge  $\lambda$ . Um die Gesamtenergiedichte auf der Platte bei der Wellenlänge  $\lambda$  zu erhalten, müssen wir über die Beiträge aller Spaltelemente  $dy$  integrieren

$$E = \int_{-b/2}^{b/2} dE = \int_{-b/2}^{b/2} \Omega \varepsilon(\lambda) \mu(\lambda) \alpha \cdot v \cdot t \, dy$$

b = Spaltbreite

Die Integration in der Spaltebene über die Breite des Spaltes b können wir durch eine Integration in der Aufnahmeebene über das Spaltbild in Wellenlängen  $\Delta \lambda = b \cdot v \cdot \alpha$  ersetzen. Mathematisch bedeutet das eine Variablentransformation mit der in der Nähe der Wellenlänge  $\lambda_0$  gültigen Gleichung für die Dispersionskurve  $\lambda = v \cdot \alpha \cdot y + \lambda_0$ .

Damit erhalten wir

$$E = \int_{\lambda_0 - \frac{b v \alpha}{2}}^{\lambda_0 + \frac{b v \alpha}{2}} \Omega t \mu(\lambda) \varepsilon(\lambda) \frac{d\lambda}{v^2} = \frac{\Omega t}{v^2} \int_{\lambda_0 - \frac{b v \alpha}{2}}^{\lambda_0 + \frac{b v \alpha}{2}} \mu(\lambda) \varepsilon(\lambda) d\lambda \quad (11)$$

Wir können in unserem Fall die Durchlässigkeit der optischen Anordnung  $\mu(\lambda)$  als konstant im Integrationsbereich ansehen und vor das Integral ziehen.

Nimmt man mit dem Spektrographen ein Kontinuum auf, so kann man mit guter Genauigkeit auch  $\varepsilon(\lambda)$  als konstant im Integrationsbereich ansehen, da dieser selbst bei den breitesten Spalten nicht mehr als 30 Å umfaßt. Dann folgt aus Gleichung (11)

$$E_{\text{kont}} = \frac{\Omega t \mu}{v^2} \varepsilon(\lambda) b v \alpha \quad (12)$$

Wird die Linie mit breitem Spalt aufgenommen, d.h. ist der Wellenlängenbereich, über den integriert wurde, größer als die Linienbreite, so folgt aus Gleichung (11) wenn man die Strahlung des Kontinuums in der Umgebung der Linie außer acht läßt

$$E_{\text{Linie}} = \frac{\Omega t \mu}{v^2} \int_{\lambda_0 - \frac{b v \alpha}{2}}^{\lambda_0 + \frac{b v \alpha}{2}} \varepsilon(\lambda) d\lambda = \frac{\Omega t \mu}{v^2} \int_{\lambda_{\text{Linie}}} \varepsilon(\lambda) d\lambda = \frac{\Omega t \mu}{v^2} \varepsilon'_{\text{Linie}} \quad (13)$$

Damit haben wir die Ausdrücke für die Energiedichte der Kontinuums- bzw. Linienstrahlung in der Aufnahmeebene des Spektrographen erhalten. Wir können jedoch nur die auf der Photoplatte hervorgerufene Schwärzung direkt messen. Es ist darum notwendig, die Zuordnung Schwärzung - Energiedichte durch Aufnahme einer Schwärzungskurve zu bestimmen. Hierzu nehmen wir das Kontinuum einer Wolframbandlampe durch ein Stufenfilter mit bekannten Durchlässigkeiten auf. Durch Vergleich der Linienschwärzung mit der Schwärzung der Stufen des Eichkontinuums sind wir dann in der Lage zu sagen, bei welcher Filterdurchlässigkeit  $\kappa_L$  die Schwärzung durch das Kontinuum gleich der Schwärzung durch die Linie ist. Daraus können wir auf die Energiedichten schließen

$$E_{\text{Linie}} = \kappa_L E_N \quad (14)$$

Nun setzen wir die Ausdrücke (12) und (13) in Gleichung (14) ein und erhalten

$$\frac{\Omega_L t_L \mu_L}{v^2} \varepsilon'_{\text{Linie}} = \kappa_L \frac{\Omega_N t_N \mu_N}{v^2} \varepsilon_N(\lambda) b_N v \alpha(\lambda) ; \quad \begin{array}{l} \Omega_L, t_L, \mu_L \quad \text{Raumwinkel, Belichtungszeit, Filterfaktor bei Aufnahme der Linie} \\ \Omega_N, t_N, \mu_N, b_N \quad \text{Raumwinkel, Belichtungszeit, Filterfaktor, Spaltbreite bei Aufnahme des Normalstrahlenkontinuums} \\ \varepsilon_N(\lambda) \quad \text{Emissionskoeffizient Normalstrahlerkontinuum bei } \lambda \end{array}$$

Wir können nach dem Gesamtemissionskoeffizienten der Linie auflösen und erhalten



$$i_{Lmic} = \alpha_L \frac{t_N}{t_L} \frac{\Omega_N}{\Omega_L} \frac{\mu_N}{\mu_L} \epsilon_N(\lambda) b_N v \alpha(\lambda) \quad +) \quad (15)$$

Wollen wir nicht den Emissionskoeffizienten einer Linie, sondern den eines Kontinuums messen, so ergibt sich ganz analog

$$(16)$$

$$i_k = \Delta\lambda \epsilon_{cont}(\lambda) = \alpha_k \frac{t_N}{t_k} \frac{\Omega_N}{\Omega_k} \frac{\mu_N}{\mu_k} \epsilon_N(\lambda) \frac{b_N}{b_k} \Delta\lambda \quad ; \quad \Omega_k, t_k, \mu_k, b_k \text{ Raumwinkel, Belichtungszeit, Filterfaktor, Spaltbreite bei Aufnahme des Kontinuums}$$

$$\Delta\lambda = v \cdot b_k \cdot \alpha$$

Die Ausdrücke (15) und (16) ermöglichen die Berechnung der Emissionskoeffizienten aus den Schwärzungen auf der Photoplatte. Da wir zur Temperaturberechnung nur Verhältnisse von Emissionskoeffizienten benutzen, kommt es auf die Absolutintensität des Eichkontinuums nicht an, da sich diese beim Dividieren heraushebt.

Bei der im Experiment benutzten "side-on" Abbildung mißt man eine Querverteilung der Strahlungsenergie. Setzt man die Rotationssymmetrie voraus, so ist die gemessene "side-on" Verteilung der Strahlungsenergie mit der radialen Verteilung der pro  $cm^2$  emittierten Energie über die Abel'sche Integralgleichung verknüpft (siehe Anhang (2)):

$$I(x) = 2 \int_x^R \frac{i(r) r dr}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad R = \text{Gesamtbogenradius}$$

Die Auflösung nach  $i(r)$  erfolgt numerisch nach dem im Anhang 2 beschriebenen Verfahren.

Zur Auswertung der gemessenen "side-on" Schwärzungen wurde ein Rechenprogramm für die IBM 7090 konstruiert, das außer der Umrechnung auf radiale Intensitäten die Berechnung der Temperatur und Elektronendichte nach den unter a) und b) beschriebenen Verfahren durchführte. Für die Auswertung eines kompletten Datensatzes ( $H\beta$ /Kontinuum, He II/He I, C IV/C III) einschl. Fehlerrechnung war eine Rechenzeit von ca. 60 Sekunden notwendig.

### b) Elektronendichtemessung

Die Elektronendichte kann bei bekannter Temperatur aus der Absolutintensität des Kontinuums berechnet werden.

Wir gehen von der Sahagleichung für Wasserstoff aus

$$\frac{n_i n_e}{n_0} = \frac{2}{Z_0} \left( \frac{2\pi m_e k T}{h^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\chi_H}{k T}\right) \quad (17)$$

In der Quasineutralitätsbeziehung

$$n_i - n_e + \sum_v z n_{2v} = 0 \quad \sum_v z n_{2v} = \text{Summe der Ionenladungen der Beimischungsgase}$$

kann man der geringen Konzentration des Beimischungsgases zufolge die Summe gegen  $n_1$  vernachlässigen.

+ Der Schwarzschildeffekt wurde außer acht gelassen, da stets mit gleichen Zeiten belichtet wurde.

Es ergibt sich dann

$$n_i = n_e$$

Wir setzen dies in Gleichung (17) ein und lösen nach  $n_0/Z_0$  auf

$$\frac{n_c}{Z_0} = \frac{n_e^2}{2} \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{\chi_H}{kT}\right)$$

Mit diesem Ausdruck gehen wir in Gleichung (8) für die Kontinuumsintensität im Wellenlängenintervall  $\Delta\lambda$  ein

$$\xi(\lambda)\Delta\lambda = \frac{2^6 e^2 \chi_H^2 n_e^2}{3^{3/2} m_e h c^2 \lambda^2} \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{hc}{\lambda kT}\right) \left[ \sum_{p=3}^{\infty} \frac{1}{p^3} \exp\left(\frac{\chi_H}{p^2 kT}\right) + \frac{kT}{2\chi_H} \exp\left(\frac{\chi_H}{25kT}\right) \right] \Delta\lambda$$

Wir lösen nun nach  $n_e$  auf

$$n_e = \left[ \frac{3^{3/2} \xi(\lambda) m_e h c^2 \lambda^2}{2^5 e^2 \chi_H^2} \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) \left[ \sum_{p=3}^{\infty} \frac{1}{p^3} \exp\left(\frac{\chi_H}{p^2 kT}\right) + \frac{kT}{2\chi_H} \exp\left(\frac{\chi_H}{25kT}\right) \right] \right]^{1/2} \quad (18)$$

Dieser Ausdruck erlaubt es, bei gegebener Intensität des Kontinuums und gegebener Temperatur die Elektronendichte zu berechnen. Die Elektronendichte wird dabei zuerst mit der gemessenen relativen Intensität berechnet und anschließend mit dem an einem Punkt nach einer anderen Methode bestimmten Elektronendichtewert geeicht. Dieser Elektronendichtewert wurde aus der Stark-Verbreiterung der Balmer Linie  $H\beta$  ermittelt.

Die Abhängigkeit der Starkverbreiterung der Wasserstofflinien von der Elektronendichte liegt fertig tabelliert vor (Griem (3)).

Infolge des steilen Temperaturanstiegs in den Flanken des Lichtbogens wird die Hauptintensität der Wasserstofflinien nur aus einer schmalen Zone emittiert. Es ist darum möglich, durch einfache Ausmessung des "side-on" Spektrums auf die Halbwertsbreite der Linie zu schließen, ohne Umrechnung auf radiale Intensitäten.

#### 4. Meßergebnisse

Die gemessenen Temperatur- und Elektronendichteprofile sind in den Abb. 6 - 25 aufgetragen. Die Messungen am Bogen mit Methanbeimischung konnten nur für 2400 A Bogenstromstärke an Fenster II und III ausgewertet werden, da an den anderen Fenstern und bei 1800 A an allen Fenstern die Intensität der C IV-Linie für eine Auswertung nicht ausreichte. Die Elektronendichte (Abb. 16 - 25) zeigt in Kathodennähe ein ausgeprägtes Minimum auf der Bogenachse, steigt nach außen bis auf einen Maximalwert zwischen  $2 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  und  $5.5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  an, um dann zum Rand hin wieder stark abzufallen. Das Minimum auf der Bogenachse ist von der Kathode zur Anode hin immer weniger ausgeprägt. Bei Fenster IV und V kann die Elektronendichte über den Bogenquerschnitt als konstant angesehen werden.

Bei der Betrachtung der Temperaturprofile in den Diagrammen 6-15 fällt sofort die krasse Diskrepanz zwischen den aus " $H\beta$  /Kontinuums-" und aus Linienintensitätsverhältnissen bestimmten Temperaturen auf. Die aus "He II/He I" bzw. "C IV/C III" bestimmten Temperaturen liegen in den Außenbereichen des Bogens um einen Faktor 2-4 höher als die sich aus dem Verhältnis  $H\beta$  /Kontinuum ergebenden Temperaturen. Die Diskrepanz liegt dabei weit außerhalb der Fehlergrenzen, die hier nur etwa 5 % betragen, da die Abel-Umkehr in den Außenbereichen der Entladung am genauesten ist (Anhang 2). Die aus Linienintensitätsverhältnissen gewonnenen Temperaturprofile sind dabei äußerst flach und zeigen nur in Kathodennähe ein ausgeprägtes Maximum auf der Bogenachse. Die Differenz der aus "He II/He I" bzw. "C IV/C III" und " $H\beta$  /Kontinuum" bestimmten Temperaturen überschreitet auch bei weitem den durch die Unsicherheit der Stoß-Strahlungskoeffizienten bedingten Fehler. Es soll nun untersucht werden, wodurch dieser Effekt verursacht werden kann.

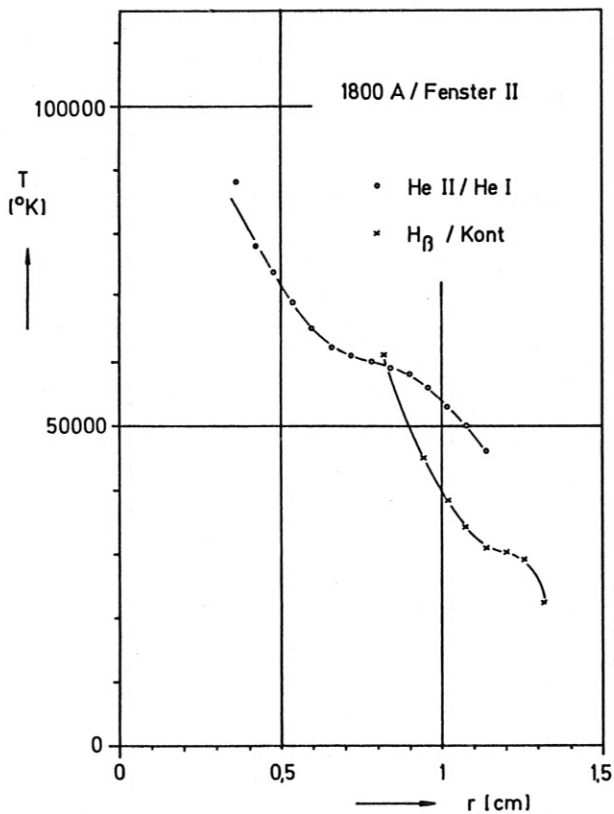


Abb. 6

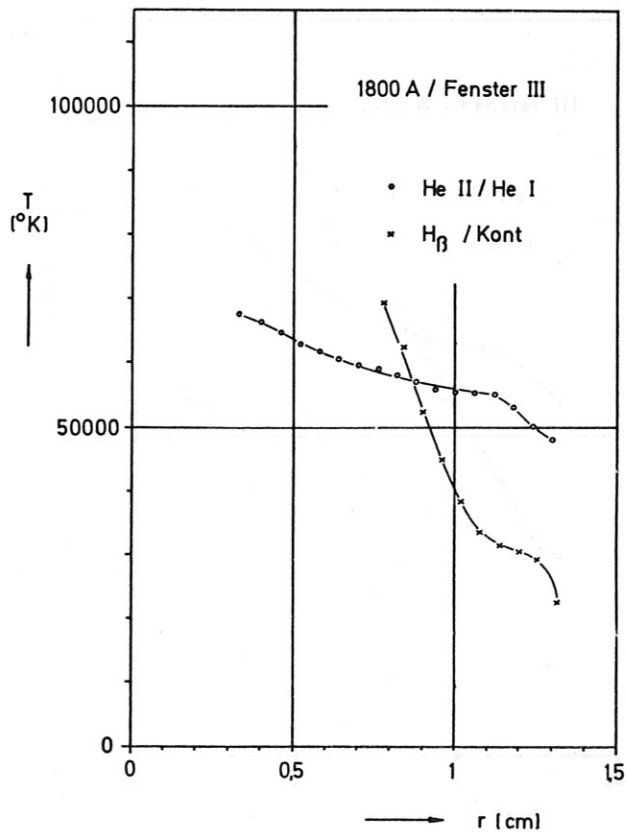


Abb. 7

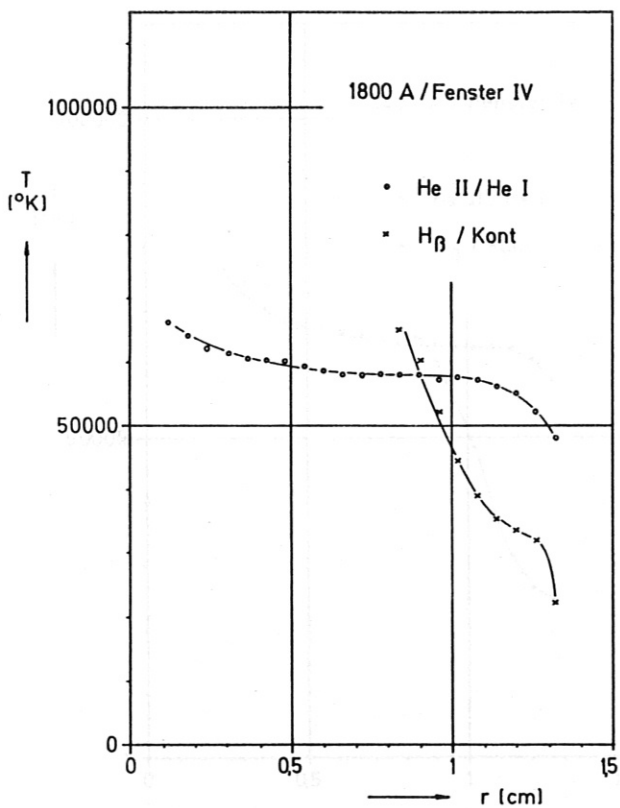


Abb. 8

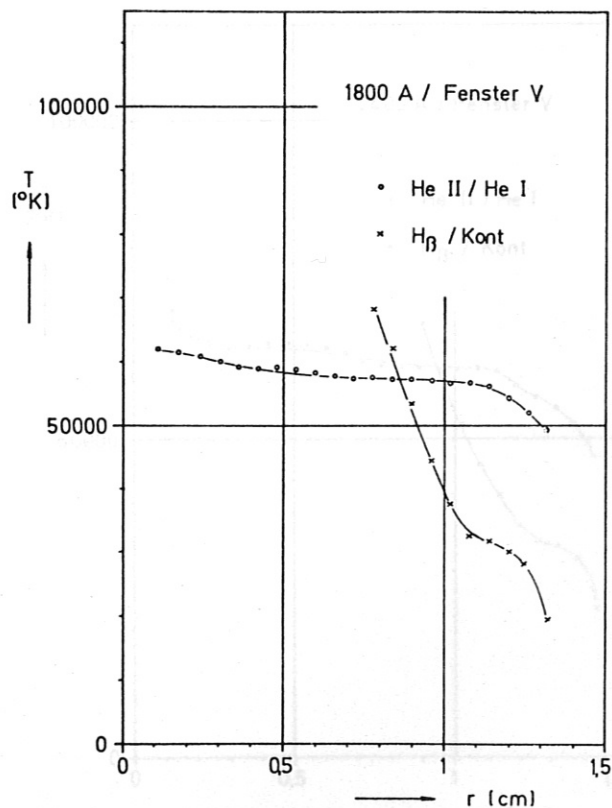


Abb. 9



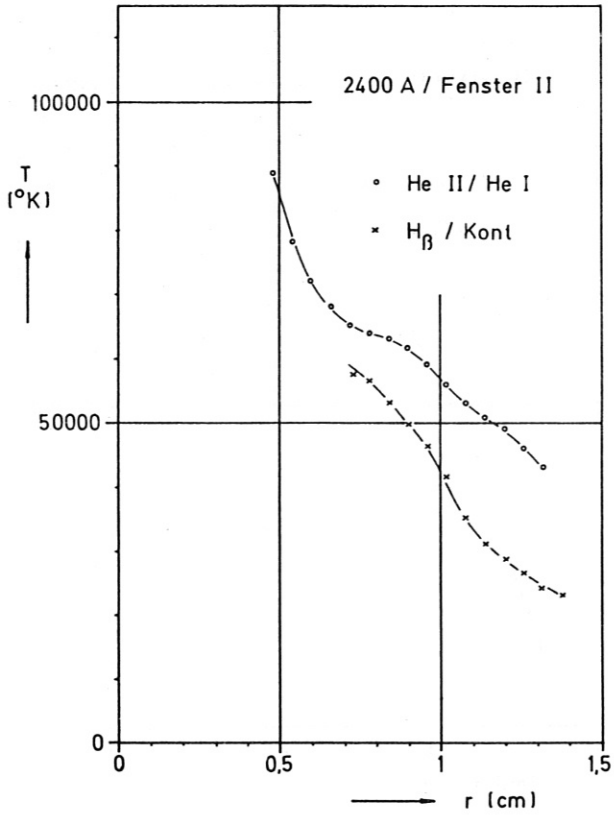


Abb. 10

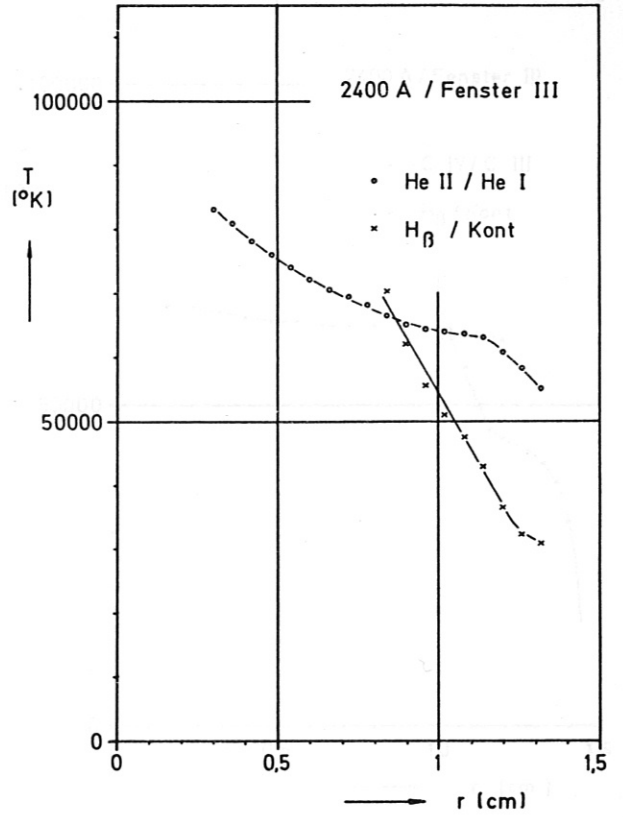


Abb. 11

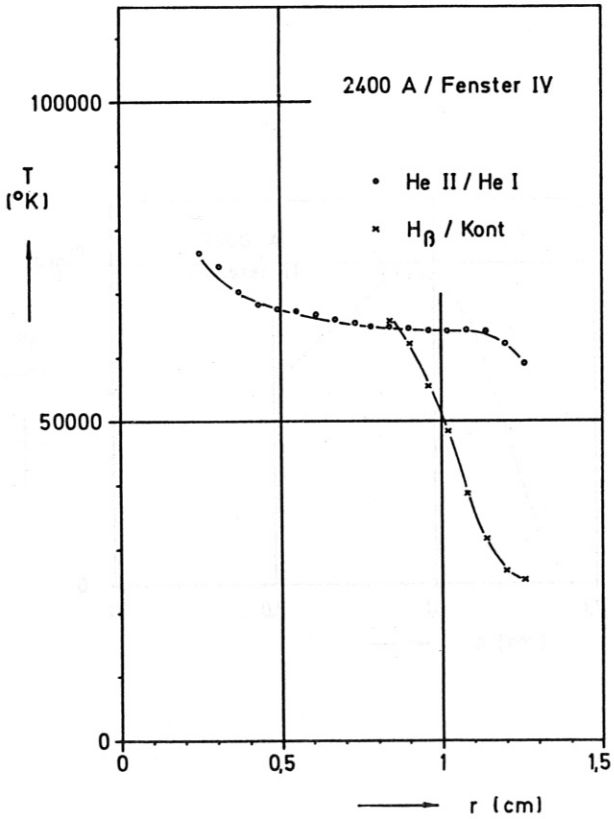


Abb. 12

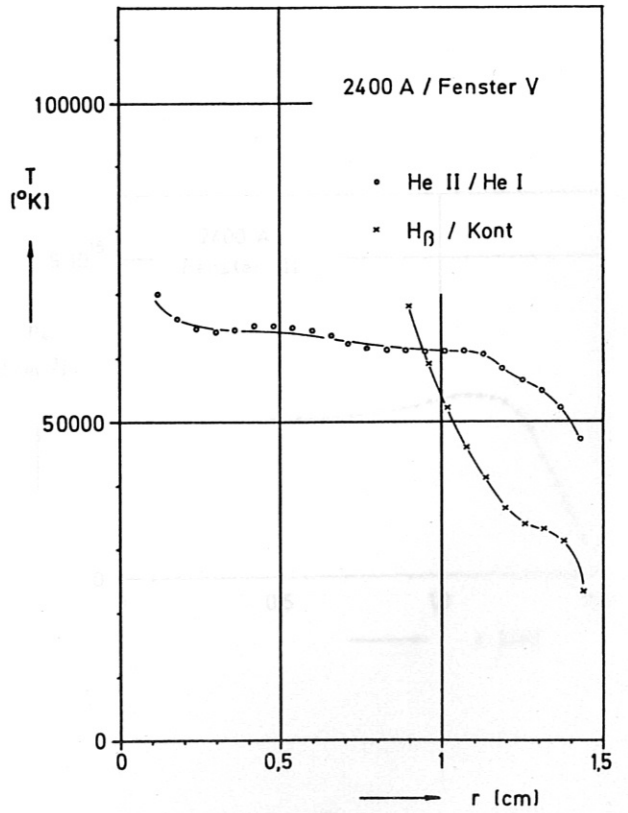


Abb. 13

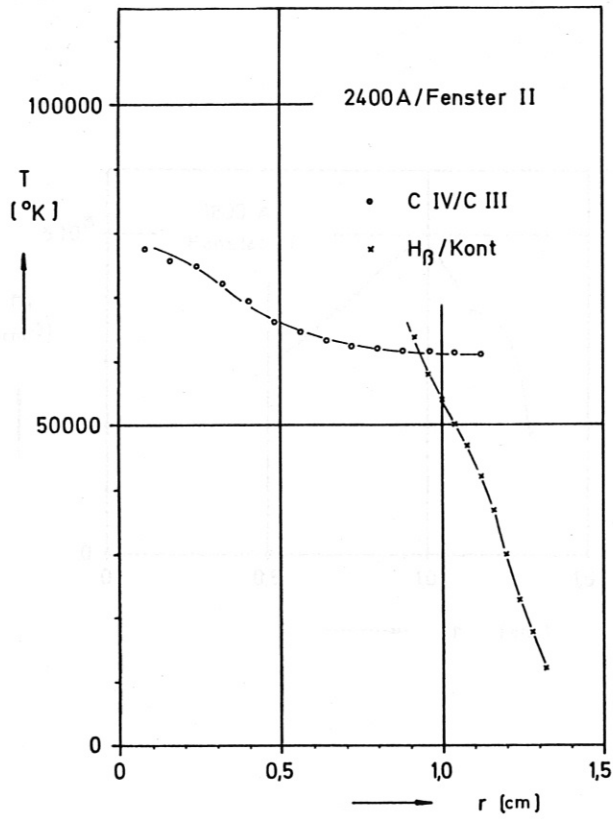


Abb. 14

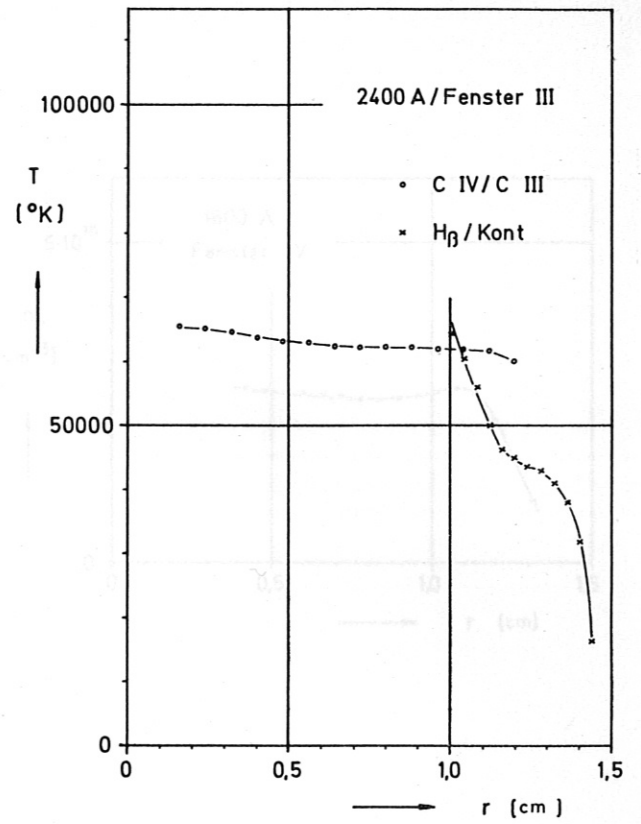


Abb. 15

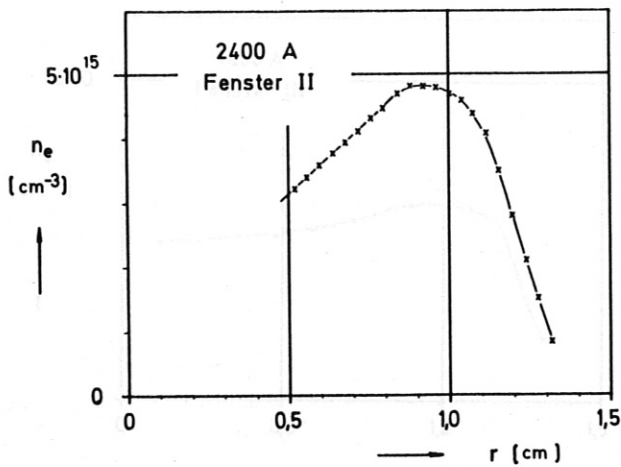


Abb. 16

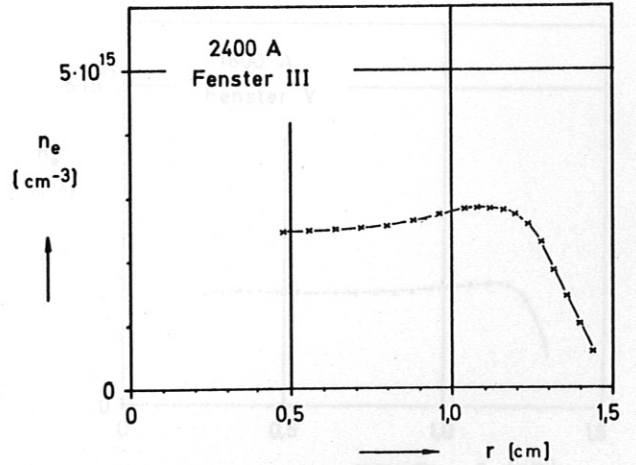


Abb. 17

Bogen mit CH<sub>4</sub> - Beimischung

Bogen mit Ne<sub>2</sub> - Beimischung

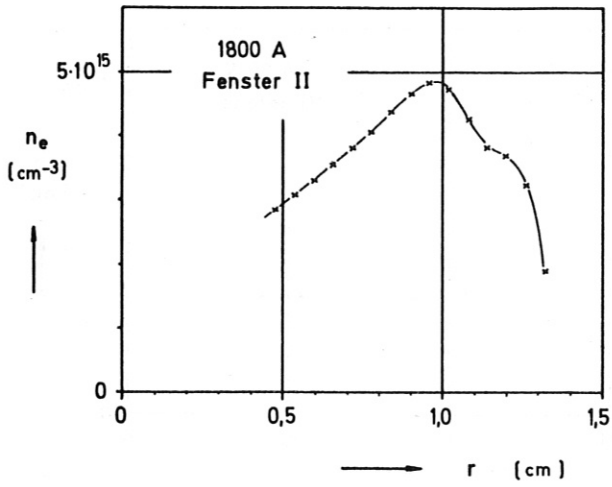


Abb. 18

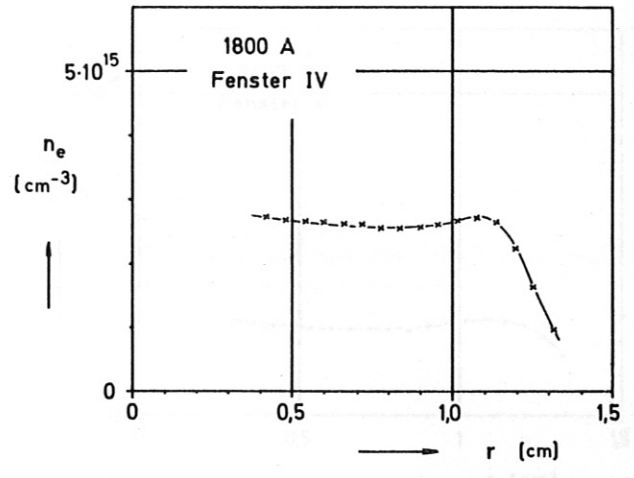


Abb. 19

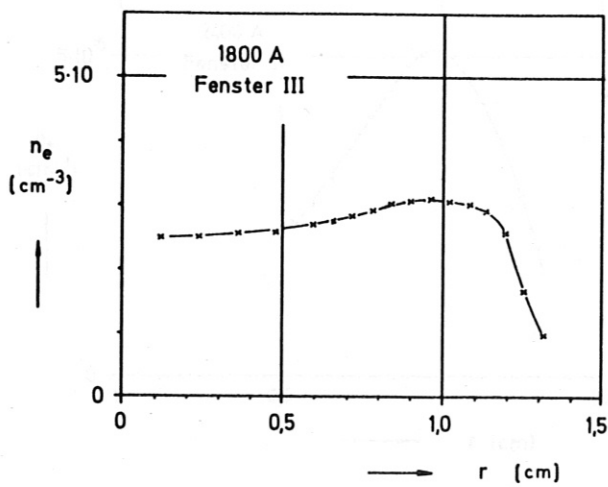


Abb. 20

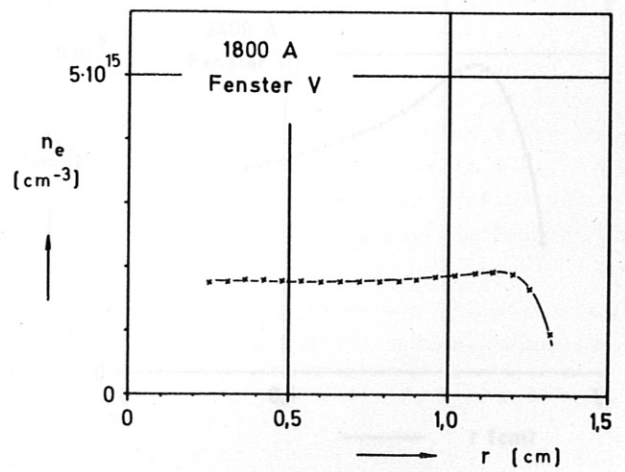


Abb. 21



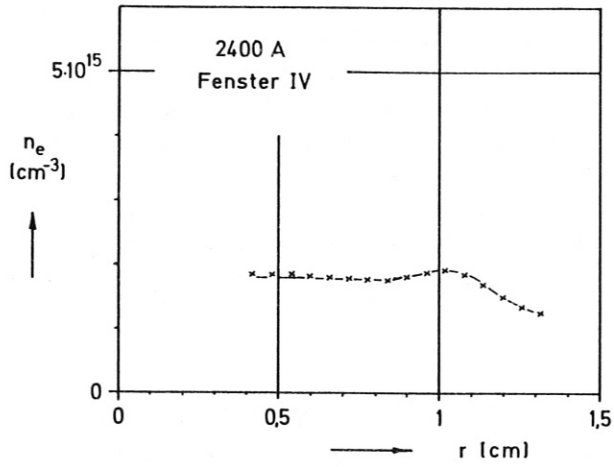


Abb. 22

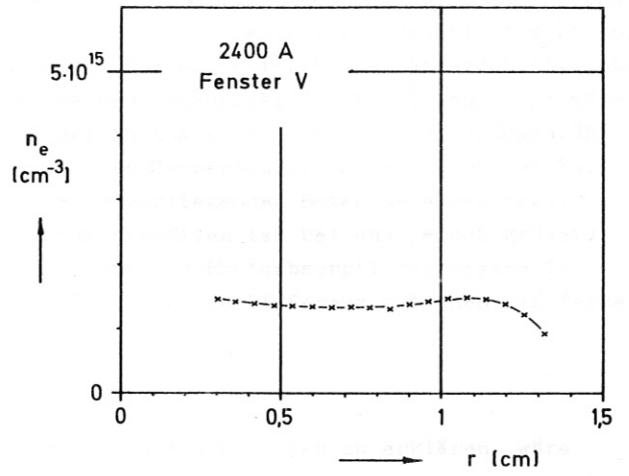


Abb. 23

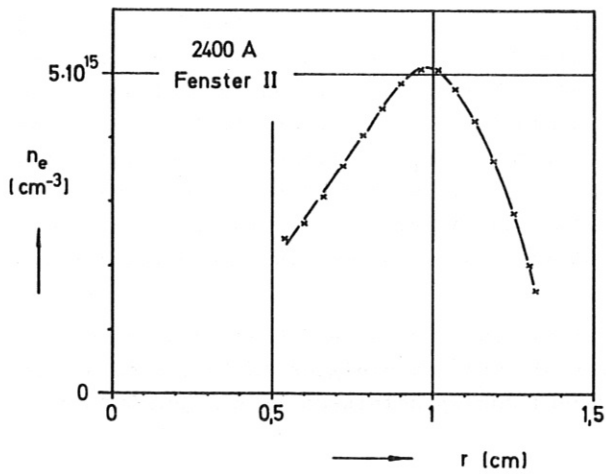


Abb. 24

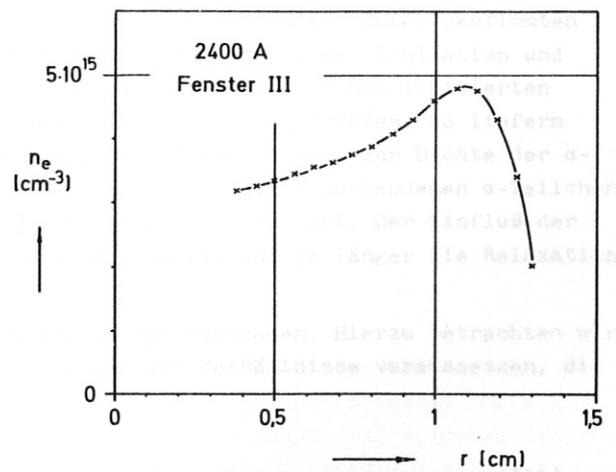


Abb. 25

5. Diskussion der Meßergebnisse

a) Berücksichtigung von Photoabsorptionsprozessen

Ähnliche Abweichungen wie in diesem Fall zwischen den nach verschiedenen Methoden bestimmten Temperaturen wurden bereits an einem anderen Lichtbogen festgestellt (Mahn, Ringler, Zankl (1)). In dieser Arbeit werden sie dadurch erklärt, daß das Ionisationsgleichgewicht durch die Koronaformel in den Außenbereichen des Bogens nicht mehr richtig beschrieben wird. Man nimmt dort an, daß die Vernachlässigung der Photoabsorptionsprozesse in diesem Gebiet nicht mehr zulässig ist. Wenn aber die Abweichung zwischen den Temperaturen aus den Intensitätsverhältnissen H<sub>β</sub> / Kontinuum und He II/He I allein auf die Vernachlässigung der Photoabsorptionsprozesse zurückzuführen wäre, dann müßten die Abweichungen zwischen den beiden Temperaturprofilen in unserem Fall kleiner sein als bei (1), da die Heliumteilchendichte im vorliegenden Bogen um einen Faktor 2-5 geringer ist. Der Unterschied zwischen den Temperaturprofilen ist bei uns jedoch größer; daraus können wir schließen, daß die Nichtberücksichtigung der Photoabsorptionsprozesse im Ionisationsgleichgewicht keinesfalls der Hauptgrund für die große Differenz zwischen den Temperaturprofilen sein kann.

b) Unsymmetrisch rotierender Bogen

Eine weitere Möglichkeit, die Abweichung zwischen den Temperaturprofilen zu erklären, wäre eine exzentrische Rotation des Bogens. Wir betrachten den Fall, daß der Bogen ein unsymmetrisches Temperaturprofil besitzt, das rotiert und damit auf der Photoplatte, die über mehrere Bogenumdrehungen belichtet wird, ein symmetrisches Temperaturprofil vortäuscht. Aus einer einfachen Abschätzung folgt, daß dann die Temperaturschwankungen auf einem Radius um die Rotationsachse des Bogens mindestens von der Größenordnung der gemessenen Temperaturdifferenzen sein würden. Die Intensität der Helium II-Linie müßte dann bei einer Rotation des Bogens Schwankungen bis zu 100 % zeigen. Um das nachzuprüfen, wurde der Bogen auf den Eintrittsspalt eines Monochromators abgebildet und der zeitliche Verlauf der Intensität der He II-Linie mit einem Multiplier gemessen. Die beobachteten Intensitätsschwankungen waren jedoch bei einem Bogenradius von 1,2 cm stets kleiner als 10 %, so daß auch dieser Effekt zur Erklärung der Diskrepanz zwischen den Temperaturmessungen nicht in Frage kommt.

c) Relaxationseffekte bei strömenden Teilchen

Eine dritte Möglichkeit, die Differenz zwischen den nach verschiedenen Verfahren bestimmten Temperaturen zu erklären, ist das Auftreten von Relaxationseffekten bei der Ionisation und Rekombination der He- und C<sup>+</sup>-Teilchen. Nehmen wir z. B. an, daß die zweifach ionisierten Helium (α<sup>+</sup>)-Teilchen in radialer Richtung nach außen in kältere Zonen strömen, so liefern sie aufgrund ihrer endlichen Rekombinationszeit einen zusätzlichen Beitrag zur Dichte der α<sup>+</sup>-Teilchen an einem bestimmten Ort, wodurch die Zahl der dort tatsächlich vorhandenen α<sup>+</sup>-Teilchen dann höher ist, als es der statischen Ionisations-(Korona-)Formel entspricht. Der Einfluß der Strömung wird umso größer sein, je schneller die Teilchen strömen und je länger die Relaxationszeit ist.

Wir wollen nun die Größe der zu erwartenden Relaxationszeiten berechnen. Hierzu betrachten wir die Teilchenzahl-Bilanzgleichung für die α<sup>+</sup>-Teilchen, wobei wir Verhältnisse voraussetzen, die ohne Strömung zum Koronagleichgewicht führen

$$\frac{\partial n_3}{\partial t} = - n_3 n_e R_f + n_2 n_e C_f$$

- $n_3$  = Teilchendichte der zweifach ionisierten Heliumionen
- $n_2$  = Teilchendichte der einfach ionisierten Heliumionen
- $n_e$  = Elektronendichte
- $R_f$  = Strahlungsrekombinationskoeffizient
- $C_f$  = Koeffizient für Stoßionisation

(19)

Für Temperaturen über 40 000° ist die Annahme gerechtfertigt, daß

$$n_3 + n_2 = n_{He} \approx \text{const}$$

ist.

Dann folgt

$$\frac{\partial n_3}{\partial t} = -n_3 n_e (R + C) + n_e n_{He} C$$

Die Lösung der Differentialgleichung lautet

$$n_3 = K_1 + K_2 \exp(-n_e (R + C)t) \quad (K_1, K_2 = \text{zeitunabhängige Größen})$$

Als Relaxationszeit  $\tau$  bezeichnet man den Ausdruck

$$\tau = \frac{1}{n_e (R + C)} \quad (20)$$

Setzt man die Ausdrücke für  $C$  und  $R$  aus Tabelle 1 ein, so ergeben sich für Elektronendichten von  $5 \cdot 10^{15} \text{ (cm}^{-3}\text{)}$  die folgenden Relaxationszeiten

T = 30 000°	$\tau = 0,42 \cdot 10^{-3} \text{ [s]}$
T = 60 000°	$\tau = 0,58 \cdot 10^{-3} \text{ [s]}$
T = 90 000°	$\tau = 0,19 \cdot 10^{-3} \text{ [s]}$

Aus der Größe der Relaxationszeiten kann man schließen, daß bereits geringe Strömungsgeschwindigkeiten von  $10^3 \text{ (cm/s)}$  einen beträchtlichen Einfluß auf das Ionisationsgleichgewicht haben können.

Die "H $\beta$ /Kontinuum-Temperaturbestimmung" wird in dem Gebiet, wo sie hier angewendet wurde, durch Relaxationserscheinungen nur sehr wenig beeinflusst. Wir können nämlich für die Relaxationszeit bei Wasserstoff im Bereich hoher Ionisation den folgenden Ausdruck angeben (siehe Anhang 3)

$$\tau = \frac{1}{n_e C}$$

Rechnen wir mit dem Ausdruck für  $C$  aus Tabelle 1 und  $n_e = 4 \cdot 10^{15} \text{ (cm}^{-3}\text{)}$ , so ergeben sich die folgenden Relaxationszeiten

T = 15 000° (°K)	$\tau = 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ [s]}$
T = 20 000°	$0,6 \cdot 10^{-4}$
T = 25 000°	$1,3 \cdot 10^{-5}$
T = 30 000°	$4,5 \cdot 10^{-6}$
T = 35 000°	$2,4 \cdot 10^{-6}$

Bei Temperaturen oberhalb 25 000°K und Geschwindigkeiten von  $10^3 \text{ (cm/s)}$  wird sich darum das Ionisationsgleichgewicht des Wasserstoffs vom Sahagleichgewicht kaum unterscheiden und die Temperaturbestimmung aus "H $\beta$ /Kontinuum" die richtige Temperatur liefern. Bei tieferen Temperaturen kann man jedoch den Einfluß von Strömungen auf das Ionisationsgleichgewicht nicht mehr vernachlässigen und es ist damit zu rechnen, daß die H $\beta$ /Kontinuum-Temperaturbestimmung von der wirklichen Temperatur abweichende Ergebnisse liefert.

## 6. Radiale Teilchenströmungen

Für das Auftreten von radialen Strömungen können zwei Effekte verantwortlich sein

- a) Schwerpunktsströmung des Gesamtplasmas
- b) Strömungen der einzelnen Teilchensorten (z.B. ambipolare Diffusion)

Wir wollen im folgenden die Größe dieser Strömungen abschätzen.

a) Schwerpunktsströmung

Hierzu gehen wir vom Ohm'schen Gesetz (22) und der Bewegungsgleichung des Gesamtplasmas (23) aus.

$$\underline{E} + [\underline{v} \times \underline{B}] = \frac{1}{en_e} [\underline{j} \times \underline{B}] - \frac{1}{en_e} \nabla(n_e kT) + \frac{3}{2} \frac{k}{e \omega_e \tau_e} \frac{[\nabla T \times \underline{B}]}{|\underline{B}|} + \frac{j_{||}}{\sigma_{||}} + \frac{j_{\perp}}{\sigma_{\perp}} \quad (22)$$

$$\varrho \frac{d\underline{v}}{dt} = [\underline{j} \times \underline{B}] - \nabla p \quad (23)$$

mit  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla)$

Es gelten dabei folgende Bezeichnungen

- |   |   |
|---|---|
| $n_e$ = Elektronendichte                          | $m_e$ = Elektronenmasse   |
| $e$ = Elementarladung                             | $\varrho$ = Gesamtteilchendichte  |
| $\omega_e$ = Gyrofrequenz der Elektronen          | $k$ = Boltzmannkonstante  |
| $\tau_e$ = Mittlere freie Flugzeit der Elektronen | $\rho$ = Gesamtdruck $\approx 2 n_e kT$ für vollionisierten Wasserstoff |
| $\sigma$ = Elektrische Leitfähigkeit              |   |
| $c$ = Lichtgeschwindigkeit                        |   |

Berücksichtigen wir die Rotationssymmetrie des Bogens und setzen voraus, daß kein elektrischer Strom in radialer Richtung fließt, dann lauten die Komponenten der einzelnen Vektoren

$$\underline{B} (0, 0, B_z) \quad \underline{v} (v_r, v_{\varphi}, v_z)$$

$$\underline{j} (0, j_{\varphi}, j_z) \quad \underline{E} (E_r, 0, E_z)$$

Wir bilden nun die  $\varphi$ -Komponente des Ohm'schen Gesetzes (22) und die r-Komponente der Bewegungsgleichung des Gesamtplasmas (23), wobei wir Stationarität voraussetzen ( $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ )

$$-v_r B_z = -\frac{3}{2} \frac{k}{e \omega_e \tau_e} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{m_e}{e^2 n_e \tau_e} j_{\varphi} \quad (24)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + j_{\varphi} B_z = \varrho [(\underline{v} \cdot \nabla) v]_r = \varrho \left( v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_{\varphi}^2}{r} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \quad (25)$$

Wir bezeichnen im folgenden die Trägheitsterme mit TR

$$TR = \varrho \left( v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_{\varphi}^2}{r} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)$$

Aus (25) folgt durch Auflösen nach  $j_{\varphi}$

$$j_{\varphi} = \frac{1}{B_z} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{TR}{B_z}$$

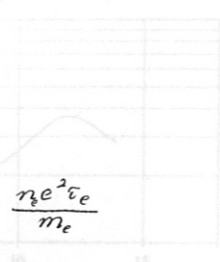
Wir setzen diesen Ausdruck in (24) ein. Dann ergibt sich mit  $\sigma_{\perp} = \frac{n_e e^2 \tau_e}{m_e}$

$$-v_r B_z = -\frac{3}{2} \frac{k}{e \omega_e \tau_e} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{m_e}{e n_e \tau_e e B_z} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{m_e TR}{e n_e \tau_e e B_z}$$

Mit  $\omega_e = \frac{e B_z}{m_e}$ ,  $\rho = 2 n_e kT$  und  $\frac{\partial p}{\partial r} = 2 kT \frac{\partial n_e}{\partial r} + 2 n_e k \frac{\partial T}{\partial r}$  folgt

$$-v_r B_z = \frac{k}{2 e \omega_e \tau_e} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2 k T}{e \omega_e \tau_e n_e} \frac{\partial n_e}{\partial r} + \frac{1}{e n_e \omega_e \tau_e} TR$$

und hieraus





$$v_r = - \frac{k}{2 e \omega_e \tau_e B_z} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2 k T}{e \omega_e \tau_e n_e B_z} \frac{\partial n_e}{\partial r} - \frac{1}{e n_e \omega_e \tau_e B_z} \quad (26)$$

Setzen wir den Ausdruck für den Trägheitsterm TR ein und lösen nach  $v_r$  auf, so erhalten wir

$$v_r = \frac{1}{1 + \frac{g}{e n_e \omega_e \tau_e B_z} \frac{\partial v_r}{\partial r}} \left[ - \frac{k}{2 e \omega_e \tau_e B_z} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2 k T}{e \omega_e \tau_e n_e B_z} \frac{\partial n_e}{\partial r} + \frac{g v_\varphi^2}{r e n_e \omega_e \tau_e B_z} - \frac{g v_z}{e n_e \omega_e \tau_e B_z} \frac{\partial v_r}{\partial z} \right]$$

Wir formen die Gleichung noch etwas um, dann ergibt sich

$$v_r = \frac{1}{e n_e \omega_e \tau_e B_z \left( 1 + \frac{g}{e n_e \omega_e \tau_e B_z} \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)} \left[ - n_e k T \frac{\partial}{\partial r} \left( \ln (T^{1/2} n_e^2) \right) + \frac{g v_\varphi^2}{r} - g v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right]$$

Nehmen wir für  $v_z, v_\varphi, \frac{\partial v_r}{\partial z}$  und  $\frac{\partial v_r}{\partial r}$  folgende Werte an, die durch das Experiment nahegelegt werden (siehe auch Ringler (1))

$$v_z = 10^5 \text{ [cm s}^{-1}\text{]}; \quad v_\varphi \approx 10^5 \text{ [cm s}^{-1}\text{]}; \quad \frac{\partial v_r}{\partial z} \approx 10^4 \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

$$B_z = 35 \cdot 10^3 \text{ [G]}; \quad \omega_e \tau_e \approx 50; \quad \frac{\partial v_r}{\partial r} \approx 10^4 \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

Schätzen wir mit diesen Werten die Größe der einzelnen Glieder in der Gleichung für  $v_r$  ab, so erkennen wir, daß der zweite Summand im Nenner die Größenordnung  $10^{-6}$  hat und damit in jedem Fall gegen 1 vernachlässigt werden kann. Der dritte Summand im Zähler ist gegenüber dem Term  $\frac{g v_\varphi^2}{r}$  zu vernachlässigen, da er mindestens um den Faktor 100 kleiner ist als dieser Ausdruck. Dann vereinfacht sich die Gleichung für  $v_r$  zu

$$v_r = - \frac{k T}{e \omega_e \tau_e B_z} \frac{\partial}{\partial r} \left( \ln (T^{1/2} n_e^2) \right) + \frac{M v_\varphi^2}{m_e \omega_e^2 \tau_e r} \quad (27)$$

$g = n_e M$   
 $M = \text{Ionenmasse}$

Bei einer Winkelgeschwindigkeit des Bogens bis  $10^5 \text{ (s}^{-1}\text{)}$  kann auch noch der zweite Summand gegen den ersten vernachlässigt werden. Wir berechnen nun mit Gleichung (27), dem Temperaturprofil von Abb. 26 und dem Elektronendichteprofil von Abb. 23 das Profil der radialen Schwerpunkts- geschwindigkeit. Das Resultat ist in Abb. 27 aufgetragen. Wir erkennen: die Schwerpunkts- geschwindigkeit erreicht Werte der Größenordnung  $10^2$  bis  $10^3 \text{ cm/s}$ , bei denen mit dem Auftreten von Relaxationserscheinungen gerechnet werden kann.

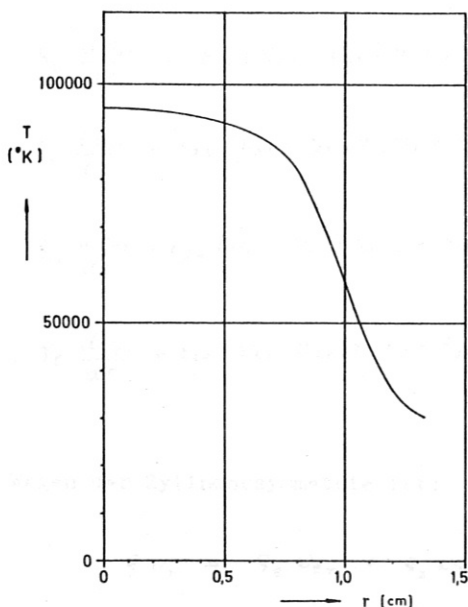


Abb. 26

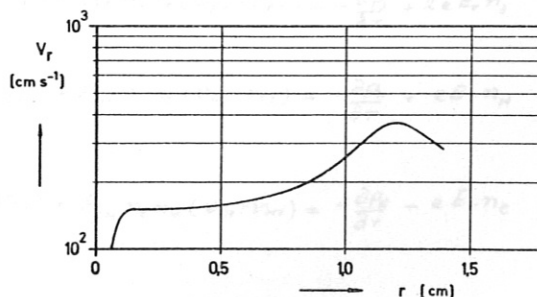


Abb. 27

b) Teilchenströmungen durch ambipolare Diffusion von Helium allein

Da dem Wasserstoff ein geringer Prozentsatz Helium (oder Kohlenstoff) beigemischt ist, wird es im betrachteten Temperaturbereich zu ambipolaren Diffusionserscheinungen des Heliums kommen, das in verschiedenen Ionisationsstufen vorkommt. Der Wasserstoff dagegen ist vollständig ionisiert, so daß er selbst in dem untersuchten Gebiet keine ambipolare Diffusionsmöglichkeit hat. Die Größe der radialen Strömungsgeschwindigkeit infolge ambipolarer Diffusion wollen wir berechnen. Dazu gehen wir von den Impulserhaltungsgleichungen für die einzelnen Teilchenarten in der von Schlüter (4) angegebenen Form aus:

$$g_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} + \sum_i \epsilon_{ik} n_i n_k (\vec{v}_e - \vec{v}_i) = - \nabla p_k + q_k e \vec{E} + q_k e [\vec{v}_k \times \vec{B}] \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{ik} &= \text{Reibungskoeffizient} = 4/3 \sqrt{8/\pi} kT \frac{m_i m_k}{m_i + m_k} \cdot Q_{ik} \\ Q_{ik} &= \text{Coulombquerschnitt} = \frac{q_i^2 q_k^2 e^4 \ln \Lambda}{(kT)^2} \end{aligned}$$

- $g_k$  = Teilchendichte
  - $\vec{E}$  = Elektrische Feldstärke
  - $e$  = Elementarladung
  - $q_k$  = Ladungszahl =
- $\vec{v}_i, \vec{v}_k$  = Geschwindigkeit der einzelnen Teilchensorten
  - $n_i, n_k$  = Teilchendichten
- $$= \begin{cases} 1 \text{ für He}^+ \text{ - Ionen, H}^+ \text{ - Ionen} \\ 2 \text{ für He}^{++} \text{ - Ionen} \\ -1 \text{ für Elektronen} \end{cases}$$

Die Diffusionsgeschwindigkeiten sollen nun zuerst für den Fall berechnet werden, bei dem kein äußeres Magnetfeld vorhanden ist.

α) Diffusionsgeschwindigkeiten ohne äußeres Magnetfeld

Um die radiale Diffusionsgeschwindigkeit der Helium-Ionen für diesen ("Muster")-Fall auszurechnen, gehen wir bei Annahme von Zylindersymmetrie und Stationarität ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ) von den r-Komponenten der Impulserhaltungsgleichungen (28) aus. Unser Plasma besteht aus Wasserstoffionen, einfach und doppelt geladenen Helium-Ionen und Elektronen (Teilchendichten  $n_H, n_2, n_3$  und  $n_e$  ( $\text{cm}^{-3}$ )):

$$g_2 \frac{dv_{2r}}{dt} + \epsilon_{23} (v_{2r} - v_{3r}) n_2 n_3 + \epsilon_{2H} n_2 n_H (v_{2r} - v_{Hr}) + \epsilon_{2e} n_2 n_e (v_{2r} - v_{er}) = - \frac{\partial p_2}{\partial r} + e E_r n_2 \quad (29,1)$$

$$g_3 \frac{dv_{3r}}{dt} + \epsilon_{23} (v_{3r} - v_{2r}) n_3 n_2 + \epsilon_{3H} n_3 n_H (v_{3r} - v_{Hr}) + \epsilon_{3e} n_3 n_e (v_{3r} - v_{er}) = - \frac{\partial p_3}{\partial r} + 2e E_r n_3 \quad (29,2)$$

$$g_H \frac{dv_{Hr}}{dt} + \epsilon_{2H} (v_{Hr} - v_{2r}) n_H n_2 + \epsilon_{3H} n_H n_3 (v_{Hr} - v_{3r}) + \epsilon_{eH} n_H n_e (v_{Hr} - v_{er}) = - \frac{\partial p_H}{\partial r} + e E_r n_H \quad (29,3)$$

$$g_e \frac{dv_{er}}{dt} + \epsilon_{2e} (v_{er} - v_{2r}) n_e n_2 + \epsilon_{3e} n_e n_3 (v_{er} - v_{3r}) + \epsilon_{eH} n_e n_H (v_{er} - v_{Hr}) = - \frac{\partial p_e}{\partial r} - e E_r n_e \quad (29,4)$$

Wegen der Zylindersymmetrie ist:

$$g v_r = g_e v_{er} + g_2 v_{2r} + g_3 v_{3r} + g_H v_{Hr} = 0 \quad (30)$$

$$\dot{j}_r = e (2 n_3 v_{3r} + n_2 v_{2r} + n_H v_{Hr} - n_e v_{er}) = 0 \quad (31)$$

Durch Addition der Gleichungen (29,1) bis (29,4) erhält man mit

$$\xi_e \frac{dv_{er}}{dt} + \xi_2 \frac{dv_{2r}}{dt} + \xi_3 \frac{dv_{3r}}{dt} + \xi_H \frac{dv_{Hr}}{dt} \approx \xi \frac{dV_r}{dt} = 0 \quad (36,1)$$

die Beziehung:

$$\xi \frac{dV_r}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial r} + (2 n_3 + n_2 + n_H - n_e) e E_r = 0 \quad (V_r = 0) \quad (32)$$

Mit der Gültigkeit der Quasineutralitätsbeziehung

$$n_e = 2 n_3 + n_2 + n_H \quad (33)$$

wird aus (32)

$$\frac{dp}{dr} = 0 \quad \text{oder} \quad p = \text{const.} \quad (34)$$

Da die Annahme zugrunde liegt, daß der Wasserstoff vollständig ionisiert ist und deshalb an der ambipolaren Diffusion nicht direkt teilnimmt, ist es physikalisch begründet, daß auch  $v_{Hr} = 0$  gesetzt wird. Dies heißt andererseits nicht, daß für die Wasserstoffionen kein Gradient des Partialdruckes auftritt. Die stets radial nach außen diffundierenden  $\text{He}^{++}$ -Teilchen üben auf die  $\text{H}^+$ -Ionen größere "Reibungskräfte" aus als die nach innen diffundierenden  $\text{H}^+$ -Ionen. Dadurch kommt es zu einer "Mitnahme" des Wasserstoffs nach außen, wodurch eine Entmischung beider Gase stattfindet: Helium reichert sich in der Achsenumgebung an, während der Wasserstoff etwas nach außen gedrängt wird. Der entstehende Gradient im Partialdruck des Wasserstoffs wird durch Reibungskräfte aufrecht erhalten.

Nimmt man für das Verhältnis von  $\text{He}^{++}$  - zu  $\text{He}^+$ -Teilchen noch eine "Ionisationsformel" oder die Ionisationsbilanzgleichung zu Hilfe, so hat man für die auftretenden unbekannt GröÙen  $n_e$ ,  $n_H$ ,  $n_2$ ,  $n_3$ ,  $v_{er}$ ,  $v_{2r}$ ,  $v_{3r}$  und  $E_r$  genügend Gleichungen, um sie als Funktionen von T bei vorgegebenem Gesamtdruck  $p = \text{const.}$  berechnen zu können. Um die Berechnung der Diffusionsgeschwindigkeiten zu vereinfachen, sollen zunächst die in den Impulserhaltungsgleichungen auftretenden Reibungskoeffizienten näher diskutiert werden.

Bei Vernachlässigung von  $m_e$  gegen  $m_H$  und  $m_{He}$  kann man die Koeffizienten in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} \xi_{e2} &= \xi_{eH} = a \sqrt{m_e} \\ \xi_{e3} &= 4a \sqrt{m_e} \\ \xi_{2H} &= a \sqrt{\frac{5}{4} m_H} \\ \xi_{3H} &= 4a \sqrt{\frac{5}{4} m_H} \\ \xi_{23} &= 4a \sqrt{2 m_H} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\text{mit} \quad a = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{kT}{(kT)^2} \frac{e^4}{en \Lambda} \quad (36,3)$$

Man sieht sofort, daß man die Reibungskoeffizienten der Elektronen mit irgendeiner anderen Komponente (in der Summe) stets gegen den Koeffizienten einer anderen Teilchenart mit eben dieser Komponente vernachlässigen kann (z. B.  $\xi_{e2} \ll \xi_{2H}$ ).

Unter der hier sicher gerechtfertigten Vernachlässigung der Trägheitsglieder in den Impulsgleichungen und unter Berücksichtigung aller Voraussetzungen erhält man folgendes Gleichungssystem, daß nach den Diffusionsgeschwindigkeiten aufgelöst werden soll. (Da es sich nur um Geschwindigkeiten in der r-Richtung handelt, sind die Indices r fortgelassen).

$$n_2 n_3 \epsilon_{23} (v_2 - v_3) + n_2 n_e \epsilon_{2e} (v_2 - v_e) + n_2 n_H \epsilon_{2H} v_2 = - \frac{\partial p_2}{\partial r} + n_2 e E_r \quad (36,1)$$

$$n_2 n_3 \epsilon_{23} (v_3 - v_2) + n_3 n_e \epsilon_{3e} (v_3 - v_e) + n_3 n_H \epsilon_{3H} v_3 = - \frac{\partial p_3}{\partial r} + 2 n_3 e E_r \quad (36,2)$$

$$- n_H n_2 \epsilon_{2H} v_2 - n_H n_3 \epsilon_{3H} v_3 - n_H n_e \epsilon_{eH} v_e = - \frac{\partial p_H}{\partial r} + n_H e E_r \quad (36,3)$$

$$n_e \frac{m_e}{m_H} v_{er} + n_2 v_2 + n_3 v_3 = 0 \quad (v_r = 0) \quad (36,4)$$

$$2 n_3 v_3 + n_2 v_2 = n_e v_e \quad (j_r = 0) \quad (36,5)$$

$$n_e = 2 n_3 + n_2 + n_H \quad (\text{Quasineutralität}) \quad (36,6)$$

$$\rho = \text{const.} \quad (36,7)$$

Addition und Subtraktion der Gleichungen (36,4) und (36,5) führt zu

$$n_3 v_3 = n_e v_e$$

$$n_2 v_2 = - n_3 v_3$$

Setzt man dieses Resultat in die Gleichungen (36,1), (36,2) und (36,3) ein, so erhält man:

$$- n_3 v_3 (n_3 \epsilon_{23} + n_e \epsilon_{2e} + n_H \epsilon_{2H} + n_2 \epsilon_{23} + n_2 \epsilon_{2e}) = - \frac{\partial p_2}{\partial r} + n_2 e E_r \quad (37,1)$$

$$n_3 v_3 (n_2 \epsilon_{23} + n_e \epsilon_{3e} + n_H \epsilon_{3H} + n_3 \epsilon_{23} - n_3 \epsilon_{3e}) = - \frac{\partial p_3}{\partial r} + 2 n_3 e E_r \quad (37,2)$$

$$- n_3 v_3 (n_H \epsilon_{3H} - n_H \epsilon_{2H} + n_H \epsilon_{eH}) = - \frac{\partial p_H}{\partial r} + n_H e E_r \quad (37,3)$$

mit (36,6) und unter Vernachlässigung "kleiner" Reibungsterme wird daraus (siehe (37)):

$$- n_3 v_3 (n_2 \epsilon_{23} + n_H \epsilon_{2H} + n_2 \epsilon_{23}) = - \frac{\partial p_2}{\partial r} + n_2 e E_r \quad (38,1)$$

$$n_3 v_3 (n_2 \epsilon_{23} + n_3 \epsilon_{23} + n_H \epsilon_{3H}) = - \frac{\partial p_3}{\partial r} + 2 n_3 e E_r \quad (38,2)$$

$$- n_3 v_3 (\epsilon_{3H} - \epsilon_{2H}) n_H = - \frac{\partial p_H}{\partial r} + n_H e E_r \quad (38,3)$$

Addition der Gleichungen (38,1) bis (38,3) führt zu

$$\frac{E_r}{e} = - \frac{\partial p_e}{\partial r} \frac{1}{e n_e} = \frac{\frac{\partial}{\partial r} (p_2 + p_3 + p_H)}{(n_2 + n_H + 2 n_3) e} \quad (39)$$



Mit Hilfe der Gleichungen (36,6) und (36,7) kann man schreiben:

$$\frac{\partial p_e}{\partial r} = 2 \frac{\partial p_3}{\partial r} + \frac{\partial p_2}{\partial r} + \frac{\partial p_H}{\partial r}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p_3}{\partial r} + \frac{\partial p_2}{\partial r} + \frac{\partial p_H}{\partial r} + \frac{\partial p_e}{\partial r}$$

Daraus folgt:

$$\frac{3}{2} \frac{\partial p_3}{\partial r} + \frac{\partial p_H}{\partial r} = - \frac{\partial p_2}{\partial r} \quad (40)$$

Aus Gleichung (38,3) erhält man durch Einsetzen von (39) und (40)

$$v_3 = - \frac{1}{n_3} \frac{\partial p_3}{\partial r} \frac{3 n_3 + n_2 + n_H}{2 n_3 + n_2 + n_H} \frac{1}{(n_2 + n_3) \epsilon_{23} + n_H \epsilon_{3H}}$$

$$v_3 = - \frac{1}{n_3} \frac{\partial p_3}{\partial r} \frac{n_3 + n_e}{n_e} \frac{1}{(n_2 + n_3) \epsilon_{23} + n_H \epsilon_{3H}}$$

$$v_3 = - \frac{\partial p_3}{\partial r} \left( \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_e} \right) \frac{1}{(n_2 + n_3) \epsilon_{23} + n_H \epsilon_{3H}}$$

Für den Fall, daß  $(n_2 + n_3) \ll n_H$  folgt mit  $(n_H \approx n_e)$

$$v_{3r} = - \frac{1}{n_3 n_H \epsilon_{3H}} \frac{\partial p_3}{\partial r} = - \frac{kT}{n_H \epsilon_{3H}} \frac{\partial}{\partial r} (\ln p_3) = - \frac{kT}{n_H \epsilon_{3H}} \frac{\partial}{\partial r} (\ln(n_3 kT)) \quad (41)$$

Setzt man dieses Ergebnis in Gleichung (38,3) ein, so erhält man für den durch den Entmischungseffekt erzeugten Gradienten des Partialdrucks der Protonen:

$$\frac{\partial p_H}{\partial r} = - \frac{n_H}{2 n_e} \frac{\partial p_3}{\partial r} \frac{2 (3 n_3 + n_2 + n_H) (\epsilon_{3H} - \epsilon_{2H}) + (n_2 + n_3) \epsilon_{3H} + n_H \epsilon_{3H}}{(n_2 + n_3) \epsilon_{23} + n_H \epsilon_{3H}}$$

Macht man wieder die Vernachlässigung, daß  $n_2 + n_3 \ll n_H$  ist, so ergibt sich mit  $n_H \approx n_e$  und  $\epsilon_{3H} = 4 \cdot \epsilon_{2H}$  im Grenzfall kleiner Beimischungen

$$\frac{\partial p_H}{\partial r} = - \frac{1}{2} \frac{\partial p_3}{\partial r} \frac{3 \epsilon_{3H} - 2 \epsilon_{2H}}{\epsilon_{3H}} = - \frac{5}{4} \frac{\partial p_3}{\partial r} \quad (42)$$

Der Betrag des Partialdruckgradienten ist ungefähr so groß wie der der  $\text{He}^{++}$ -Ionen und hat, wie erwartet, ein anderes Vorzeichen.

Da die Reibungskoeffizienten umgekehrt proportional  $T^{3/2}$  sind, hängen die Diffusionsgeschwindigkeiten von  $T^{5/2}$  ab. Man wird also erwarten, daß im Fall ohne Magnetfeld die Beeinflussung des Ionisationsgleichgewichts durch Diffusionsströmungen mit wachsender Elektronendichte und fallender Temperatur abnimmt. Setzt man die Meßwerte am vorliegendem Bogen in Gleichungen (41) ein, so erhält man Werte, die zwischen  $10^5$  und  $10^6$  cm/s liegen. Bei unserem Experiment liegen die Werte jedoch sicher niedriger, da ein Magnetfeld quer zur Diffusionsrichtung der Teilchen deren Strömung behindert.

### β) Diffusionsgeschwindigkeiten mit äußerem Magnetfeld

Wir gehen von den folgenden Voraussetzungen aus:

1. Rotationssymmetrie
2.  $B_r = 0$
3.  $B_\varphi = 0$
4. Trägheitsterme können vernachlässigt werden

Voraussetzung 4) wird am Schluß fallengelassen, 2) und 3) werden am Schluß diskutiert.

Das Problem der Diffusionsgeschwindigkeiten ist bei Anwesenheit eines äußeren Magnetfeldes wesentlich schwieriger zu behandeln. Dies ist darauf zurückzuführen, daß dann in den Impulserhaltungsgleichungen für die radiale Richtung durch  $v \times B$  - Kräfte noch zusätzlich Glieder auftreten, die von den azimuthalen Geschwindigkeiten der einzelnen Teilchensorten abhängen. Man ist deshalb gezwungen, auch die Impulserhaltungsgleichungen für die azimuthale Richtung zu lösen. Wir fordern außerdem noch, daß die Schwerpunkts- geschwindigkeit in azimuthaler Richtung einen bestimmten vorgegebenen, nur von  $r$  und  $z$  abhängigen Wert haben soll.

Die Impulserhaltungsgleichungen in radialer und azimuthaler Richtung für die Elektronen, Wasserstoffionen, einfach und doppelt geladenen Helium-Ionen und die Gleichung für die Schwerpunkts- geschwindigkeit in azimuthaler Richtung bilden zusammen ein Gleichungssystem mit 9 Gleichungen für die 9 unbekanntenen Größen  $v_{3r}, v_{2r}, v_{Hr}, v_{er}, v_{3\varphi}, v_{2\varphi}, v_{H\varphi}, v_{e\varphi}, E_r$  :

$$n_2 v_{2r} (n_3 \epsilon_{23} + n_H \epsilon_{2H} + n_e \epsilon_{2e}) - n_2 n_3 \epsilon_{23} v_{3r} - n_2 n_H \epsilon_{2H} v_{Hr} - n_2 n_e \epsilon_{2e} v_{er} - e B n_2 v_{2\varphi} - e n_2 E_r = - \frac{\partial P_2}{\partial r} \quad (43,1)$$

$$- n_3 n_2 \epsilon_{23} v_{2r} + n_3 v_{3r} (n_2 \epsilon_{23} + n_H \epsilon_{3H} + n_e \epsilon_{3e}) - n_3 n_H \epsilon_{3H} v_{Hr} - n_3 n_e \epsilon_{3e} v_{er} - 2e B n_3 v_{3\varphi} - 2e n_3 E_r = - \frac{\partial P_3}{\partial r} \quad (43,2)$$

$$- n_H n_2 \epsilon_{2H} v_{2r} - n_H n_3 \epsilon_{3H} v_{3r} + n_H v_{Hr} (n_2 \epsilon_{2H} + n_3 \epsilon_{3H} + n_e \epsilon_{3e}) - n_e v_{er} n_H \epsilon_{eH} - e B n_H v_{H\varphi} - e n_H E_r = - \frac{\partial P_H}{\partial r} \quad (43,3)$$

$$- n_e n_2 v_{2r} \epsilon_{2e} - n_e n_3 v_{3r} \epsilon_{3e} - n_H n_e v_{Hr} \epsilon_{He} + n_e v_{er} (n_2 \epsilon_{e2} + n_3 \epsilon_{e3} + n_H \epsilon_{eH}) + e B n_e v_{e\varphi} + e n_e E_r = - \frac{\partial P_e}{\partial r} \quad (43,4)$$

$$n_2 v_{2\varphi} (n_3 \epsilon_{23} + n_H \epsilon_{2H} + n_e \epsilon_{2e}) - n_2 n_3 \epsilon_{23} v_{3\varphi} - n_2 n_H \epsilon_{2H} v_{H\varphi} - n_2 n_e \epsilon_{2e} v_{e\varphi} + e B n_2 v_{2r} = 0 \quad (43,5)$$

$$- n_3 n_2 \epsilon_{23} v_{2\varphi} + n_3 v_{3\varphi} (n_2 \epsilon_{23} + n_H \epsilon_{3H} + n_e \epsilon_{3e}) - n_3 n_H \epsilon_{3H} v_{H\varphi} - n_3 n_e \epsilon_{3e} v_{e\varphi} + 2e B n_3 v_{3r} = 0 \quad (43,6)$$

$$- n_H n_2 \epsilon_{2H} v_{2\varphi} - n_H n_3 \epsilon_{3H} v_{3\varphi} + n_H v_{H\varphi} (n_2 \epsilon_{2H} + n_3 \epsilon_{3H} + n_e \epsilon_{3e}) - n_e v_{e\varphi} n_H \epsilon_{eH} + e B n_H v_{Hr} = - \frac{3}{2} \frac{n_e k}{\omega_e \tau_e} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (43,7)$$

$$- n_e n_2 v_{2\varphi} \epsilon_{2e} - n_e n_3 v_{3\varphi} \epsilon_{3e} - n_H n_e v_{H\varphi} \epsilon_{He} + n_e v_{e\varphi} (n_2 \epsilon_{e2} + n_3 \epsilon_{e3} + n_H \epsilon_{eH}) - e B n_e v_{er} = \frac{3}{2} \frac{n_e k}{\omega_e \tau_e} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (43,8)$$

$$n_e m_e v_{e\varphi} + n_2 m_2 v_{2\varphi} + n_3 m_3 v_{3\varphi} + n_H m_H v_{H\varphi} = (n_e m_e + n_2 m_2 + n_3 m_3 + n_H m_H) V_{rot} \quad (43,9)$$

Eine analytische Auflösung des Gleichungssystems (43) ist zwar theoretisch möglich, praktisch jedoch nicht mehr mit vernünftigem Aufwand realisierbar. Wir haben darum zuerst eine Näherungs- lösung für die radiale Geschwindigkeit der  $He^{++}$  - Teilchen bestimmt und die Güte der Näherung durch Vergleich mit dem exakten Ergebnis der numerischen Lösung des Gleichungssystems festge- stellt.

Um uns die Näherungslösung zu beschaffen, gehen wir von den folgenden vereinfachenden Voraussetzungen aus:

- 1) Zylindersymmetrie
- 2)  $n_2, n_3 \ll n_H$
- 3) Für die Bewegung der Helium<sup>++</sup>-Teilchen kann die Reibung mit He<sup>+</sup>-Teilchen und Elektronen vernachlässigt werden, nur die Reibung mit den Wasserstoffionen soll von Bedeutung sein. ( $n_H \gg n_2, n_3!$ ;  $m_H \gg m_e!$ )
- 4)  $E_r \approx -V_\varphi B_z$
- 5)  $V_\varphi \approx v_H \varphi$

Wie im Fall ohne Magnetfeld können wir aus 1) sofort  $v_{Hr} = 0$  folgern.

Gehen wir mit diesen Voraussetzungen in das Gleichungssystem (43) ein, so brauchen wir zur Berechnung von  $v_{3r}$  nur die Gleichungen (43,2) und (43,6) zu berücksichtigen. Diese lauten dann:

$$n_3 v_{3r} n_H \epsilon_{3H} - 2eB n_3 v_{3\varphi} = 2n_3 e E_r - \frac{\partial p_3}{\partial r}$$

$$n_3 v_{3\varphi} n_H \epsilon_{3H} + 2eB n_3 v_{3r} = n_3 n_H \epsilon_{3H} v_{H\varphi}$$

Wir dividieren beide Gleichungen durch  $n_3$  und lösen nach  $v_{3r}$  auf:

$$v_{3r} = \frac{\left(2eE_r - \frac{1}{n_3} \frac{\partial p_3}{\partial r}\right) n_H \epsilon_{3H} + 2eB n_H \epsilon_{3H} v_{H\varphi}}{n_H^2 \epsilon_{3H}^2 + 4e^2 B^2}$$

Mit den Voraussetzungen 4) und 5), d.h. den Annahmen, daß die radiale Feldstärke  $E_r$  im wesentlichen auf  $-V_\varphi B_z$  zurückzuführen ist, und die azimutale Schwerpunktsgeschwindigkeit näherungsweise der azimutalen Geschwindigkeit der Wasserstoffionen gleich ist, folgt:

$$v_{3r} = - \frac{1}{n_3} \frac{\partial p_3}{\partial r} \frac{n_H \epsilon_{3H}}{n_H^2 \epsilon_{3H}^2 + 4e^2 B^2} \quad (44)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck für  $v_{3r}$  mit dem Ergebnis der Berechnung ohne Magnetfeld, so sieht man, daß nur  $\frac{4e^2 B^2}{n_H \epsilon_{3H}}$  im Nenner zu addieren ist. Dies bedeutet, wie es zu erwarten war, daß  $v_{3r}$  gegenüber dem Wert ohne Magnetfeld reduziert ist, wenn  $4e^2 B^2 \geq n_H^2 \epsilon_{3H}^2$ .

Andererseits wurde das vollständige System der Gleichungen (43) numerisch auf der IBM 360/50 des Instituts gelöst. Die mit der Näherungsformel (44) berechneten Geschwindigkeiten wurden in dem Bereich

$$15 \text{ k}\Gamma \leq B \leq 60 \text{ k}\Gamma$$

$$2,5 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K} \leq T \leq 1 \cdot 10^5 \text{ }^\circ\text{K}$$

$$1 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3} \leq n_e \leq 1 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$$

$$0,001 \leq \frac{n_{He}}{n_H} \leq 0,1$$

mit dem Ergebnis der numerischen Auflösung des Gleichungssystems (43) verglichen. Die maximale Abweichung zwischen den beiden Resultaten betrug dabei 20 %. Der Ausdruck (44) wird darum im folgenden auch bei Gültigkeit der allgemeineren Voraussetzungen am Beginn dieses Abschnitts innerhalb des nachgeprüften Bereich als richtig angesehen.

Wir wollen nun den Einfluß der am Anfang gemachten Vernachlässigungen auf das Ergebnis untersuchen. Trägheitsterme können bis zu Geschwindigkeiten von  $5 \cdot 10^5$  vernachlässigt werden, wie wir bereits weiter oben berechnet haben. Messungen von Ringler (1) zeigen jedoch, daß diese Geschwindigkeiten manchmal überschritten werden und Rotationsgeschwindigkeiten bis  $3 \cdot 10^6$  cm/s gemessen werden. Die numerische Lösung des Gleichungssystems (43) zeigt, daß bei diesen hohen Rotationsgeschwindigkeiten die azimutalen Geschwindigkeiten der einzelnen Teilchensorten von der Schwerpunktsgeschwindigkeit praktisch nicht mehr abweichen. Dies ändert sich auch nicht, wenn man auf der rechten Seite des Gleichungssystems noch zusätzliche Glieder von der Größe der Trägheitsterme annimmt. Wir können darum in guter Näherung  $v_{3\varphi} = v_{\varphi}$  setzen. Wie schon oben bei der Ausrechnung der Schwerpunktsgeschwindigkeit festgestellt wurde, ist bei den Trägheitstermen in unserem Fall nur das Glied  $v_{\varphi}^2/r$  von Bedeutung. Dieses Glied kommt dann auf der rechten Seite der Impulsgleichungen für die radiale Richtung zu den Druckgradienten hinzu. Das Ergebnis für die radiale Geschwindigkeit der zweifach ionisierten Heliumteilchen lautet dann bei Berücksichtigung der Trägheitsterme:

$$v_{3r} = \frac{n_H \epsilon_{3H}}{n_3 (n_H^2 \epsilon_{3H}^2 + 4 e^2 B^2)} \left( - \frac{\partial p_3}{\partial r} + \varrho \frac{v_{\varphi}^2}{r} \right) \quad (45)$$

Bei geringeren Rotationsgeschwindigkeiten ist die Annahme einer einheitlichen Rotationsgeschwindigkeit nicht mehr richtig. In diesem Fall ist jedoch der zusätzliche Summand in Gleichung (45) ohne Bedeutung und kann gegen  $-\partial p_3/\partial r$  vernachlässigt werden. Wir können darum Gleichung (45) als allgemein richtig für den angegebenen Definitionsbereich unabhängig von der Rotationsgeschwindigkeit des Bogens ansehen.

Welchen Einfluß können die Vernachlässigungen  $B_r = 0$  und  $B_{\varphi} = 0$  in Gleichung (45) haben? Man weiß, daß im Experiment sowohl  $B_r$  wie  $B_{\varphi}$  etwa 1 % des Wertes von  $B_z$  betragen. Bei Annahme einer axialen Geschwindigkeit  $v_{3z} = 10^5$  cm/s ergibt sich dann:

$$e v_z B_{\varphi} \approx e v_z B_r = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^3 \cdot 0,01 B = 1,6 \cdot 10^{-18} B$$

Dieser Wert muß mit dem Ausdruck  $-\frac{1}{n_3} \frac{\partial p_3}{\partial r}$  verglichen werden. Einsetzen der Werte:

$$n_3 = 0,16 \cdot 10^{19} [m^{-3}]; \quad \frac{\partial T}{\partial r} = -1,5 \cdot 10^7 [^{\circ}K/m]; \quad \frac{\partial n_3}{\partial r} = -0,14 \cdot 10^{22} [m^{-4}]; \quad T = 5 \cdot 10^4 [^{\circ}K]$$

ergibt

$$-\frac{1}{n_3} \frac{\partial p_3}{\partial r} = 0,9 \cdot 10^{-15} [Joule]$$

Das Glied  $e v_z B_r$  geht in den Ausdruck für  $v_{3r}$  mit dem gleichen Gewicht wie  $e v_z B_{\varphi}$  und  $-\frac{1}{n_3} \frac{\partial p_3}{\partial r}$  ein. Wir können darum  $e v_z B_{\varphi}$ ,  $e v_z B_r$  und  $\frac{1}{n_3} \frac{\partial p_3}{\partial r}$  direkt miteinander vergleichen. Es ergibt sich dann:

$$\text{für } B = 35 [k\Gamma] = 3,5 [Tesla]$$

$$e v_z B_{\varphi} = e v_z B_r = 1,6 \cdot 10^{-18} B = 5,6 \cdot 10^{-19} [Newton]$$

$$\frac{1}{n_3} \frac{\partial p_3}{\partial r} \approx -0,9 \cdot 10^{-15} [Joule]$$

Die Vernachlässigungen  $B_r = 0$  und  $B_{\varphi} = 0$  sind in unserem Fall also zulässig.



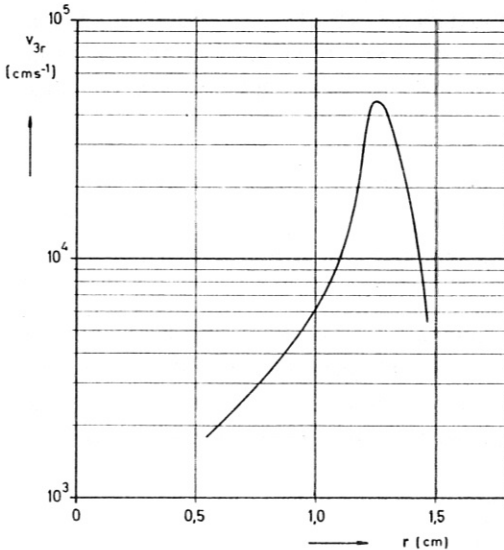


Abb. 28

Wir berechnen nun mit Hilfe der Gleichung (44) für das radiale Dichteprofil von Abb. 23 und das Temperaturprofil von Abb. 26 das radiale Profil der Geschwindigkeiten  $v_{3r}$ . Das Ergebnis ist in Abb. 28 aufgetragen. Wir erkennen, daß auch diese Geschwindigkeiten Werte erreichen, bei denen Relaxationserscheinungen auftreten können. Wir können also sagen: sowohl die aus den Impulserhaltungsgleichungen folgenden Diffusionsgeschwindigkeiten der Heliumteilchen wie die Schwerpunktgeschwindigkeit des Gesamtplasmas in radialer Richtung erreichten Werte, die Veränderungen des Ionisationsgleichgewichts von  $\text{He}^{++}$  und  $\text{He}^+$  durch Relaxationserscheinungen hervorrufen können.

c) Berechnung von radialen Teilchengeschwindigkeiten aus Meßwerten der Teilchendichten

Ist die Temperatur eines Lichtbogens in jedem Gebiet genau bekannt, so kann aus den gemessenen Teilchendichten  $n_3$  und  $n_2$  der zweifach bzw. einfach ionisierten Heliumteilchen die radiale Teilchengeschwindigkeit berechnet werden. Dazu gehen wir von der Teilchenzahlbilanzgleichung mit Strömungsterm aus, wobei Dreierstoßrekombination und Strahlungsionisation vernachlässigt sind (siehe auch Anhang):

$$\frac{\partial n_3}{\partial t} = -n_e n_3 R + n_e n_2 C - \text{div}(n_3 v_3) \quad (46)$$

Es gelten folgende Voraussetzungen:

1) Stationarität  $\frac{\partial n_3}{\partial t} = 0$  (50)

2) Konstanter Massenstrom in z-Richtung  $\frac{\partial}{\partial z} (n_3 v_3) = 0$

Damit lautet die Gleichung

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n_3 v_{3r}) = n_e n_2 C - n_e n_3 R \quad (51)$$

Durch Integration mit  $v_{3r}(0) = 0$  folgt hieraus

$$v_{3r}(r) = \frac{1}{r n_3(r)} \int_0^r n_2 (n_2 C - R + n_3) r dr \quad (47)$$

Gleichung (47) erlaubt es, die radialen Geschwindigkeiten der  $\alpha$ -Teilchen zu bestimmen, wenn die Temperatur und die Teilchendichten bekannt sind. In unserem Fall konnte die Geschwindigkeit aus Gleichung (47) nicht berechnet werden, da die Temperatur nur im Außenbereich bekannt ist, wo sie aus "H<sub>p</sub>/Kontinuum" bestimmt werden kann.

### 7. Gültigkeit der spektroskopischen Temperaturmessung

Es soll nun versucht werden, anhand der gegebenen Gleichungen (41) bzw. (44) ein allgemeines Kriterium für die Gültigkeit der spektroskopischen Temperaturmessung zu geben.

Wir gehen von der Teilchenzahlbilanzgleichung für die ionisierten Heliumteilchen aus (46), die wir unter Annahme von Zylindersymmetrie in der Form

$$\frac{n_3}{n_2} = \frac{C \uparrow}{R \downarrow} - \frac{\frac{\partial}{\partial r} (\tau n_3 v_{3r})}{\tau n_2 n_e R \downarrow} = \frac{C \uparrow}{R \downarrow} (1 + \eta) \quad (48)$$

schreiben können.

Wenn  $\eta \ll 1$  ist, dann ergibt Gleichung (48) die bekannte Koronaformel für die Ionisation. Es besteht Gleichgewicht zwischen Strahlungsrekombination und Stoßionisation.  $\eta$  gibt also die relative Abweichung von der Koronaformel an. Durch Einsetzen des Ausdrucks (44) für  $v_{3r}$  erhält man:

$$\eta = - \frac{\frac{\partial}{\partial r} (\tau n_3 v_{3r})}{\tau n_2 n_e C \uparrow} = \frac{\frac{\partial}{\partial r} \left( \tau n_3 \frac{1}{n_3} \frac{\partial p_3}{\partial r} \frac{n_H \epsilon_{3H}}{(n_H^2 \epsilon_{3H}^2 + 4e^2 B^2)} \right)}{\tau n_2 n_e C \uparrow} \quad (49)$$

Gleichung (47) ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung für  $n_3$  und  $n_2$ , die zusammen mit der Differentialgleichung

$$4 \frac{\partial p_2}{\partial r} + \frac{\partial p_3}{\partial r} = 0 \quad (50)$$

ein Differentialgleichungssystem ergibt, dessen Lösung  $n_3(r)$  und  $n_2(r)$  liefert. Gleichung (50) kann im Fall ohne externes Magnetfeld aus den Gleichungen (40) und (42) durch Eliminieren von  $\frac{\partial p_H}{\partial r}$  gewonnen werden. Im Fall mit Magnetfeld kann man sie erhalten, wenn man den analog zu Gleichung (44) hergeleiteten Ausdruck für  $v_{2r}$

$$v_{2r} = - \frac{1}{n_2} \frac{\partial p_2}{\partial r} \frac{\epsilon_{2H} n_H}{(\epsilon_{2H}^2 n_H^2 + e^2 B^2)} \quad (51)$$

und Gleichung (44) für  $v_{3r}$  in die Beziehung

$$n_3 v_{3r} + n_2 v_{2r} = 0$$

(Heliumschwerpunktsgeschwindigkeit = 0)

einsetzt.

Wir wollen nun das Ionisationsgleichgewicht in zwei Fällen näher untersuchen:

a)  $\frac{n_H^2 \epsilon_{3H}^2}{4e^2 B^2} \gg 1$

Dieser Fall liegt vor:

- 1) Bei Abwesenheit eines externen Magnetfeldes
- 2) Mit äußerem Magnetfeld bei hohen Teilchendichten und niedrigen Temperaturen

Gleichung (49) vereinfacht sich in diesem Fall zu:

$$\eta = \frac{\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\tau}{n_H \epsilon_{3H}} \frac{\partial p_3}{\partial r} \right)}{r n_2 n_e C t} \quad (52)$$

Um einen Überblick über den Einfluß der verschiedenen Größen auf das Ionisationsgleichgewicht zu gewinnen, setzen wir in Gleichung (52) die Werte ein, die sich bei ungestörtem Koronagleichgewicht ergeben würden. Mit  $n_2 + n_3 = n_{He}$  findet man:

$$n_3 = \frac{C t}{R t + C t} n_{He} \quad ; \quad n_2 = \frac{R t}{R t + C t} n_{He}$$

Wir nehmen nun folgende Vereinfachungen vor, die im Außenbereich des Lichtbogens ( $T \leq 40\,000 \text{ }^\circ\text{K}$ ,  $n_3 \ll n_2$ ) recht gut erfüllt sind:

$$C t \ll R t$$

1.  $\frac{C t}{R t + C t} \approx \frac{C t}{R t}$

2.  $\frac{R t}{R t + C t} \approx 1$

3.  $n_{He}(r) = \text{const.}$  (keine Entmischung)

4.  $n_H(r) = n_e(r) = \text{const.}$  (d.h.  $n_{He} \ll n_H$ )

5.  $\left| \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right| \ll \frac{1}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 \frac{E_i}{kT}$  ( $E_i$  = Ionisierungsenergie von He II)  
 (Die Temperatur soll annähernd linear vom Radius abhängen)

6.  $\left| \frac{\partial T}{\partial r} \right| \gg \frac{T}{r} \frac{kT}{E_i}$  ( $\frac{kT}{E_i}$  ist im betrachteten T-Bereich  $\sim 0,1$ )

Wir gehen nun mit diesen Vereinfachungen in Gleichung (52) ein:

$$\eta = \frac{\frac{\partial}{\partial r} \left( \tau \frac{1}{n_H \epsilon_{3H}} \frac{\partial (n_3 kT)}{\partial r} \right)}{r n_2 n_e C t}$$

Setzen wir für  $R t$  und  $C t$  die Ausdrücke aus Tabelle 1 (s. Anhang) ein und benutzen die oben angegebenen Voraussetzungen, so erhalten wir:

$$\eta = \frac{E_i^2}{R + n_H^2 \epsilon_{3H} (kT)^3} \left( \frac{\partial (kT)}{\partial r} \right)^2 \approx 10^{27} \frac{1}{T^{1/2} n_H^2} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)^2$$

Bei einem Temperaturgradienten von  $10^5$  ( $^{\circ}\text{K}/\text{cm}$ ) und Elektronendichten zwischen  $10^{15}$  und  $10^{16} \text{ cm}^{-3}$  ist dieser Ausdruck in jedem Fall sehr viel größer als 1 (500 - 50 000). Das bedeutet dann, daß unter den oben angegebenen Voraussetzungen das Ionisationsgleichgewicht praktisch nur durch die Teilchenströmungen bestimmt wird, die Koronaformel also keine gute Näherung mehr ist. Aus dem Vorzeichen von  $\eta$  ist zu erkennen, daß in diesem Bogenbereich  $n_3/n_2$  stets größer ist, als aus der Koronagleichung folgt. Man kann aus diesem Ergebnis schließen, daß im Fall  $\epsilon_{3H}^2 n_H^2 \gg 4e^2 B^2$  bei Temperaturgradienten von  $10^5$  ( $^{\circ}\text{K}/\text{cm}$ ) und Elektronendichten von  $10^{15}$  ( $\text{cm}^{-3}$ ) die Koronagleichung nicht mehr anwendbar ist. Um diese Behauptung für den gesamten Temperaturbereich nachzuprüfen, haben wir das Differentialgleichungssystem der Gleichungen (48) und (50) mit dem Ausdruck (52) für  $\eta$  bei einer Elektronendichte von  $10^{15}$  ( $\text{cm}^{-3}$ ) numerisch gelöst, wobei wir ein Temperaturprofil nach Abb. 29 (gestrichelt) angenommen haben. Das Mischungsverhältnis Helium/Wasserstoff wurde im Außenbereich = 0,05 gesetzt. Die Dichten der  $\text{He}^+$  und  $\text{He}^{++}$ -Teilchen stellen sich dann so ein, daß die Berechnung der Temperatur aus diesen Dichten nach Koronaformel das Temperaturprofil von Abb. 29 (durchgezogen) ergibt.

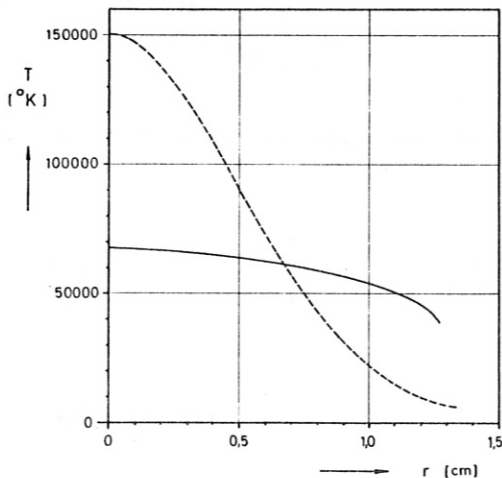


Abb. 29

b)  $n_H^2 \epsilon_{3H}^2 \ll 4e^2 B^2$

Bei einer Magnetfeldstärke von 35 kG und einer Elektronendichte von  $2 \cdot 10^{15} (\text{cm}^{-3})$  ist diese Voraussetzung für  $T \geq 40\,000^{\circ}\text{K}$  erfüllt, kann also bei den vorliegenden Versuchsbedingungen als zutreffend angesehen werden. Der Ausdruck für  $\eta$  lautet dann:

$$\eta = \frac{\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{n_H \epsilon_{3H}}{4e^2 B^2} \frac{\partial (n_3 kT)}{\partial r} \right)}{r n_2 n_e C \dagger} \quad (53)$$

Setzen wir wieder für  $n_3$  und  $n_2$  die Werte ein, die sich bei ungestörtem Koronagleichgewicht ergeben würden und verwenden die Voraussetzungen von Fall a), so erhalten wir den Ausdruck:

$$\eta = \frac{E_i^2 \epsilon_{3H}}{4e^2 B^2 R \dagger (kT)^3} \left( \frac{\partial (kT)}{\partial r} \right)^2 \approx 2,8 \cdot 10^{18} \frac{1}{B^2 T^{7/2}} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)^2$$

Man erkennt ganz klar, daß eine Temperaturmessung aus dem Intensitätsverhältnis "He II/He I" unter Anwendung der Koronagleichung über den gesamten Bogenbereich von der wirklichen Temperatur abweichende Ergebnisse liefert, so wie sie von uns gemessen wurden (Abb. 6 - 15). Eine quantitative Übereinstimmung mit den Meßergebnissen am vorliegenden Bogen kann jedoch nicht erwartet werden, da bei dieser Rechnung der Einfluß des Magnetfeldes als klein angenommen war.



Setzen wir Zahlenwerte ein, wie sie dem behandelten Lichtbogen in den Außenzonen entsprechen, ( $B = 35 \text{ kG}$ ,  $T \approx 40\,000 \text{ }^\circ\text{K}$ ,  $T' \approx -10^5 \text{ }^\circ\text{K/cm}$ ) so erhalten wir Werte für  $\eta$ , die wieder viel größer als 1 sind. Selbst bei einer Magnetfeldstärke von 120 kG hat  $\eta$  noch einen Wert von über 100. Dies bedeutet, daß die Koronaformel selbst bei extrem hohen Magnetfeldstärken in den Außenzonen des Bogens eine schlechte Näherung darstellt. Die starke Abhängigkeit von der Temperatur läßt jedoch vermuten, daß der Einfluß der Strömungen auf das Ionisationsgleichgewicht in den achsennahen Zonen des Bogens geringer ist. Wir wollen darum für diesen Bereich eine Näherungsformel herleiten.

Wir gehen von den folgenden Voraussetzungen aus:

1.  $T \gg 80\,000 \text{ }^\circ\text{K}$
2.  $B \gg 30 \text{ kG}$
3.  $n_e \approx n_H = \text{const.}$  ( $n_{\text{He}} \ll n_H$ )
4.  $\frac{T}{r} \gg \left| \frac{\partial T}{\partial r} \right|$  (Achsennähe)
5.  $\frac{1}{n_3} \left| \frac{\partial n_3}{\partial r} \right| \ll \frac{1}{T} \left| \frac{\partial T}{\partial r} \right|$  (näherungsweise vollständige doppelte Ionisierung des He)
6.  $\frac{1}{n_3} \left| \frac{\partial^2 n_3}{\partial r^2} \right| \ll \frac{1}{T} \left| \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right|$

Setzen wir diese Voraussetzungen in die Gleichung

$$\frac{n_3}{n_2} = \frac{C \uparrow}{R \downarrow} \left( 1 + \frac{1}{r n_2 C \uparrow n_e} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r n_H \epsilon_{3H}}{4 e^2 B^2} \frac{\partial}{\partial r} (n_3 k T) \right) \right)$$

ein, so erhalten wir

$$\frac{n_3}{n_2} = \frac{C \uparrow}{R \downarrow} \left( 1 + \frac{n_3 \epsilon_{3H}}{n_2 \cdot 4 e^2 B^2} \left( \frac{\partial^2 (k T)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial (k T)}{\partial r} \right) \right)$$

Wir lösen die Gleichung nach  $n_3/n_2$  auf:

$$\frac{n_3}{n_2} = \frac{\frac{C \uparrow}{R \downarrow}}{1 - \frac{\epsilon_{3H}}{4 e^2 B^2 R \downarrow} \left( \frac{\partial^2 (k T)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial (k T)}{\partial r} \right)} \quad (54)$$

Gleichung (54) läßt erkennen, daß  $n_3/n_2$  in diesem Gebiet stets kleiner ist, als nach der Koronagleichung folgt, da die Ableitungen in der Klammer des Nenners stets negativ sind. Setzen wir Werte ein, wie sie für die achsennahen Zonen des Bogens gelten

$$\begin{aligned} T &= 9 \cdot 10^4 \text{ [}^\circ\text{K]} & \frac{\partial T}{\partial r} &= -10^4 \text{ [}^\circ\text{K/cm]} \text{ für } r=0,1 \text{ (cm)} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} &= -2 \cdot 10^5 \text{ [}^\circ\text{K/cm}^2] & n_2 &= 2 \cdot 10^{15} \text{ [cm}^{-3}] \end{aligned}$$

dann folgt mit dem Ausdruck für  $R \downarrow$  aus Tabelle 1:

$$\frac{n_3}{n_2} = \frac{\frac{C \uparrow}{R \downarrow}}{1 + \frac{10^{10}}{B^2}}$$

Setzen wir  $B = 30$  kG ein, so erhalten wir

$$\frac{n_3}{n_2} \approx 0,1 \frac{C \uparrow}{R \downarrow}$$

und bei 120 kG:

$$\frac{n_3}{n_2} \approx 0,6 \frac{C \uparrow}{R \downarrow}$$

Man wird also bei den in unserem Bogen gegebenen Magnetfeldstärken auch in den achsennahen Zonen mit erheblichen Abweichungen vom Koronagleichgewicht rechnen müssen. Bei höheren Magnetfeldstärken nimmt der Einfluß der Strömungen auf das Ionisationsgleichgewicht jedoch stark ab. Die Fehler bei der Temperaturbestimmung aus "He II/He I" unter Benutzung der Koronagleichung dürften bei 120 kG Magnetfeldstärke gegen experimentelle Fehler und Unsicherheiten in den Stoß-Strahlungskoeffizienten keine Rolle mehr spielen.

## 8. Zusammenfassung

An einem stationären Wasserstofflichtbogen mit überlagertem axialem Magnetfeld wurde die Anwendbarkeit der Verfahren der spektroskopischen Temperaturmessung nachgeprüft. Man bestimmte dazu die Temperatur nach verschiedenen Verfahren:

1. Aus dem Intensitätsverhältnis  $H_{\beta}$  / Kontinuum.
2. Aus dem Intensitätsverhältnis von He II/He I- bzw. C IV/C II-Linien einer Helium- bzw. Kohlenstoffbeimischung, wobei für die Ionisation die Koronaformel angenommen wurde.

In den Bogenzonen, in denen beide Methoden zur Anwendung kamen, stellte man starke Abweichungen zwischen den Ergebnissen fest. Sie sind auf Relaxationserscheinungen der in radialer Richtung durch ambipolare Diffusion strömenden Helium- bzw. Kohlenstoffteilchen zurückzuführen. Aus den Relaxationszeiten für Wasserstoffionen folgt, daß die Temperaturmessung aus " $H_{\beta}$  / Kontinuum" bei Temperaturen über  $25\ 000^{\circ}$  durch Relaxationserscheinungen unbeeinflusst bleibt. Durch Ausströmung der höher geladenen Ionen ( $C^{++++}$ ,  $He^{++}$ ) und Einströmung der niedriger geladenen Ionen ( $He^{+}$ ,  $C^{+++}$ ) ergeben die Temperaturmessungen aus He II/He I- und C IV/C III-Verhältnissen unter Annahme der Koronaformel in den Außenbereichen des Bogens höhere, in den achsennahen Gebieten niedrigere Temperaturen, als wirklich vorhanden sind.

Ausgehend von der Teilchenzahlbilanzgleichung des zweifach ionisierten Heliums und den Ausdrücken für die radialen Geschwindigkeiten, wie sie aus den Impulserhaltungsgleichungen für die Komponenten des Plasmas folgen, bestimmten wir das Ionisationsgleichgewicht zwischen einfach und zweifach ionisiertem Helium. Es stellte sich heraus, daß bei Anwesenheit von Temperaturgradienten mit Abweichungen vom Ionisationsgleichgewicht im stationären Fall zu rechnen ist, die von einem Ausdruck der Form  $\alpha \cdot (\nabla T)^2 / B^2$  abhängen. Für das vorliegende Experiment ergaben sich dabei Abweichungen vom Koronagleichgewicht, die mit den experimentell gemessenen übereinstimmten. Aus dem Ergebnis läßt sich schließen, daß bei Verhältnissen, wie sie bei dem untersuchten Bogen vorliegen, die Temperaturmessung aus "He II/He I" unter Anwendung der Koronaformel erst bei magnetischen Feldstärken über 120 kG zu brauchbaren Ergebnissen führt.

Literaturverzeichnis

- (1) MAHN, C., RINGLER, H., ZANKL, G., Z. Naturforschg. 23a, 867 (1968)
- (2) MAHN, C., Z. Naturforschg. 22a, 1939 (1967)
- (3) GRIEM, H.R., Plasma Spectroscopy, McGraw-Hill Book Co. (1964)
- (4) SCHLÜTER, A., Z. Naturforschg. 5a, 72 (1950), 6a, 73 (1951)

Anhang

a) Herleitung der Koronagleichung, Abschätzung ihres Fehlers

Aus dem System der Gleichungen (5) kann man eine Näherungsformel für das Ionisationsgleichgewicht herleiten, wenn die Zahl der Dreierstoßrekombination gegen die der Strahlungsrekombinationen in den Grundzustand vernachlässigbar ist und Strahlungsanregung und -Ionisation gegen Stoßanregung und -Ionisation vernachlässigt wird.

Wir addieren zunächst die für alle Energieniveaus aufgestellten Gleichungen (5). Dann erhält man:

$$n_e^2 n_z \sum_{p_0}^{\bar{p}} \bar{p}^{+1} C_p \uparrow + n_e n_z \sum_{p_0}^{\bar{p}} \bar{p}^{+1} R_p \uparrow - n_e \sum_{p_0}^{\bar{p}} n_p \bar{p}^{+1} C_p \uparrow = 0 \quad (55)$$

Spalten wir in dieser Gleichung die Glieder ab, die Stoßprozesse mit dem Grundzustand beschreiben, so haben wir:

$$n_e^2 n_z \bar{p}_0^{+1} C_{p_0} \uparrow - n_e n_{p_0} \bar{p}_0^{+1} C_{p_0} \uparrow + n_e^2 n_z \sum_{p_0+1}^{\bar{p}} \bar{p}^{+1} C_p \uparrow + n_e n_z \sum_{p_0}^{\bar{p}} \bar{p}^{+1} R_p \uparrow - n_e \sum_{p_0+1}^{\bar{p}} n_p \bar{p}^{+1} C_p \uparrow = 0 \quad (56)$$

Nun sind die Koeffizienten für Dreierstoßrekombination  $\bar{p}^{+1} C_p \uparrow$  mit den Koeffizienten für Stoßionisation  $\bar{p}^{+1} C_p \uparrow$  über die Beziehung des detaillierten Gleichgewichts verknüpft, d.h. bei lokalem thermodynamischen Gleichgewicht gilt:

$$n_e n_p^{(E)} \bar{p}^{+1} C_p \uparrow = n_e^2 n_z \bar{p}^{+1} C_p \uparrow$$

oder

$$\frac{\bar{p}^{+1} C_p \uparrow}{\bar{p}^{+1} C_p \uparrow} = \frac{n_e n_z}{n_p^{(E)}}$$

wobei  $n_p^{(E)}$  = Besetzung des Niveaus p im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht (LTE).

Wir setzen diese Beziehung in Gleichung (56) ein und erhalten:

$$n_e n_{p_0}^{(E)} \bar{p}_0^{+1} C_{p_0} \uparrow - n_e n_{p_0} \bar{p}_0^{+1} C_{p_0} \uparrow + n_e \sum_{p_0+1}^{\bar{p}} n_p^{(E)} \bar{p}^{+1} C_p \uparrow + n_e n_z \sum_{p_0}^{\bar{p}} \bar{p}^{+1} R_p \uparrow - n_e \sum_{p_0+1}^{\bar{p}} n_p \bar{p}^{+1} C_p \uparrow = 0$$

$$(n_{p_0}^{(E)} - n_{p_0}) \bar{p}_0^{+1} C_{p_0} \uparrow + \sum_{p_0+1}^{\bar{p}} (n_p^{(E)} - n_p) \bar{p}^{+1} C_p \uparrow + n_z \sum_{p_0}^{\bar{p}} \bar{p}^{+1} R_p \uparrow = 0 \quad (57)$$



Der Arbeit von Mahn (1) entnimmt man, daß die Besetzung des Grundzustandes -  $n_{p_0}$  - bei Dichten bis zu  $10^{17} \text{ cm}^{-3}$  und Temperaturen bis 10 eV mindestens einen Faktor  $10^2$  größer ist als die Besetzung des Grundzustandes im LTE -  $n_{p_0}(\text{E})$  - .  $n_{p_0}(\text{E})$  kann also hier gegen  $n_{p_0}$  vernachlässigt werden.

Wir lösen Gleichung (57) nach  $n_z$  auf und dividieren durch  $n_{p_0}$ :

$$\frac{n_z}{n_{p_0}} = \frac{\bar{p}^{+1} C_{p_0} \uparrow}{\sum_{p_0}^{\bar{p}} \bar{p}^{+1} R_{p_0} \downarrow} + \frac{\sum_{p_0+1}^{\bar{p}} (n_p - n_p^{(\text{E})}) \bar{p}^{+1} C_p \uparrow}{n_{p_0} \sum_{p_0}^{\bar{p}} \bar{p}^{+1} R_p \downarrow} \quad (58)$$

Die Summe im Zähler des zweiten Summanden braucht nur über die nicht-thermisch besetzten Niveaus ausgedehnt zu werden, denn für thermisch besetzte Niveaus sind die Glieder der Summe Null ( $n_p = n_p^{(\text{E})}$ ).

Bezeichnen wir mit  $p^{\text{th}}$  die Hauptquantenzahl des letzten nicht-thermisch besetzten Niveaus und dividieren unter dem Summenzeichen durch  $n_{p_0}$ , so können wir schreiben:

$$\frac{n_z}{n_{p_0}} = \frac{\bar{p}^{+1} C_{p_0} \uparrow}{\sum_{p_0}^{\bar{p}} \bar{p}^{+1} R_{p_0} \downarrow} + \frac{\sum_{p_0+1}^{p^{\text{th}}} \left( \frac{n_p - n_p^{(\text{E})}}{n_{p_0}} \right) \bar{p}^{+1} C_p \uparrow}{\sum_{p_0}^{\bar{p}} \bar{p}^{+1} R_p \downarrow} \quad (59)$$

Bei dem betrachteten Bogenplasma ist die thermische Energie der Elektronen klein gegen die Anregungsenergie der verschiedenen Niveaus ( $kT \leq 10 \text{ eV}$ ). Daher befinden sich praktisch alle Ionen im Grundzustand und man kann  $\frac{n_z}{n_{p_0}} = \frac{n_z}{n_{z-1}}$  setzen.

Wir erhalten dann für Gleichung (59):

$$\frac{n_z}{n_{z-1}} = \frac{\bar{p}^{+1} C_{p_0} \uparrow}{\sum_{p_0}^{\bar{p}} \bar{p}^{+1} R_{p_0} \downarrow} \left( 1 + \sum_{p_0+1}^{p^{\text{th}}} \frac{n_p - n_p^{(\text{E})}}{n_{p_0}} \frac{\bar{p}^{+1} C_p \uparrow}{\bar{p}^{+1} C_{p_0} \uparrow} \right) = \frac{\bar{p}^{+1} C_{p_0} \uparrow}{\sum_{p_0}^{\bar{p}} \bar{p}^{+1} R_{p_0} \downarrow} (1 + \Delta_{\text{kor}}) \quad (60)$$

Man kann den Wert von  $\Delta_{\text{kor}}$  nur durch Vergleich mit der exakten Lösung des vollständigen Systems der Besetzungsgleichungen erhalten. Dieses Gleichungssystem wurde in der Arbeit von Mahn numerisch gelöst. In dieser Arbeit sind die Werte

$$S_p := \frac{n_p}{n_p^{(\text{E})}}$$

tabelliert.

Um die Güte unserer Näherung abzuschätzen müssen wir  $\Delta_{\text{kor}}$  auf diese Größen zurückführen. Dazu formen wir den Koeffizienten  $\frac{n_p - n_p^{(\text{E})}}{n_{p_0}}$  um:

$$\frac{n_p - n_p^{(\text{E})}}{n_{p_0}} = \frac{\frac{n_p}{n_p^{(\text{E})}} n_p^{(\text{E})} - n_p^{(\text{E})}}{\frac{n_{p_0}}{n_{p_0}^{(\text{E})}} n_{p_0}^{(\text{E})}} = \frac{(S_p - 1) n_p^{(\text{L})}}{S_{p_0} n_{p_0}^{(\text{L})}} = \left( \frac{S_p - 1}{S_{p_0}} \right) \frac{n_p^{(\text{E})}}{n_{p_0}^{(\text{E})}} \quad (61)$$

Der Faktor  $n_p^{(E)}/n_{p_0}^{(E)}$  wird durch die Boltzmann-Gleichung ausgedrückt:

$$\frac{n_p^{(E)}}{n_{p_0}^{(E)}} = \frac{g_p}{g_{p_0}} \exp\left(-\frac{E_p}{kT}\right) = \frac{P^2}{P_0^2} \exp\left(-\frac{E_p}{kT}\right) = \frac{P^2}{P_0^2} \exp\left(-\frac{z^2 \chi_H}{kT} \left(\frac{1}{P_0^2} - \frac{1}{P^2}\right)\right) = \quad (62)$$

$$= \exp\left(-\frac{z^2 \chi_H}{P_0^2 kT}\right) \cdot \frac{P^2}{P_0^2} \exp\left(\frac{z^2 \chi_H}{P^2 kT}\right)$$

Den Ausdruck  $\bar{P}^{+1} C_p \uparrow$  entnehmen wir Tabelle 1 für  $\bar{P} = \infty$ , wobei wir jedoch den Faktor  $G\left(\frac{z^2 \chi_H}{P^2 kT}\right)$ , der die Größenordnung 1 hat, weglassen:

$${}^\infty C_p \uparrow = 1,06 \cdot 10^{-8} \frac{P^3}{z^3} \exp\left(-\frac{z^2 \chi_H}{P^2 kT}\right) \quad (63)$$

Mit den Gleichungen (61), (62), (63) und der Abkürzung  $\gamma_p = \frac{S_p - 1}{S_{p_0}}$  ergibt sich für  $\Delta_{\text{Kor}}$ :

$$\Delta_{\text{Kor}} = \sum_{P_0+1}^{P^{\text{th}}} \frac{P^5}{P_0^5} \gamma_p \quad (64)$$

Die Werte von  $\gamma_p$  können wir mit den Werten für  $S_p$  aus den Tabellen von Mahn ausrechnen. Es ergibt sich für  $n_e \leq 5 \cdot 10^{15} \text{ (cm}^{-3}\text{)}$  und  $T \geq 30 \text{ 000}^\circ$

für Kohlenstoff

$$\gamma_3 \leq \frac{4,7 - 1}{697} = 5,3 \cdot 10^{-3}$$

$$\gamma_4 \leq \frac{1,4 - 1}{697} = 5,7 \cdot 10^{-4}$$

$$\gamma_5 \leq \frac{1,07 - 1}{697} = 1,0 \cdot 10^{-4}$$

$$\gamma_6 \leq \frac{1,02 - 1}{697} = 2,5 \cdot 10^{-5}$$

für Helium

$$\gamma_2 \leq \frac{2,7 - 1}{3429} = 5 \cdot 10^{-4}$$

$$\gamma_3 \leq \frac{1,1 - 1}{3429} = 2,9 \cdot 10^{-5}$$

$$\gamma_4 \leq \frac{1,02 - 1}{3429} = 4,4 \cdot 10^{-6}$$

Niveaus über  $p = 6$  bei Kohlenstoff bzw.  $p = 4$  bei Helium sind thermisch besetzt und brauchen nicht berücksichtigt zu werden.

Durch Einsetzen in Gleichung (64) erhält man:

$$\Delta_{kor} (\text{Helium}) \leq 2,7 \cdot 10^{-3} \approx 3 \text{‰}$$

$$\Delta_{kor} (\text{Kohlenstoff}) \leq 7,5 \cdot 10^{-2} \approx 8 \text{‰}$$

Vernachlässigen wir  $\Delta_{kor}$  gegen 1, so können wir schreiben:

$$\frac{n_z}{n_{z-1}} = \frac{C_{p_0 \uparrow}}{\sum_{p_0}^{\infty} R_{p_0 \downarrow}} \quad (65)$$

Das ist der Ausdruck für die Koronaverteilung. Er kann noch weiter vereinfacht werden. Das Gewicht der Strahlungsrekombinationen in die höheren Niveaus ist im wesentlichen proportional zu  $1/p^2$  ( $p$ : Hauptquantenzahl des betreffenden Niveaus), (s. Tabelle 1).

Das erste Glied, die Strahlungsrekombination auf den Grundzustand, liefert daher zur Summe im Nenner den größten Beitrag. Dann können wir schreiben:

$$\frac{n_z}{n_{z-1}} = \frac{C_{p_0 \uparrow}}{R_{p_0 \downarrow}}$$

Hieraus erhält man durch Einsetzen der Koeffizienten mit  $\bar{p} = \infty$

$$\frac{n_z}{n_{z-1}} = \frac{1}{2\pi \alpha^3} \frac{kT}{z^4 E_i^z} \exp\left(-\frac{E_i^z}{kT}\right) \quad \alpha = \frac{2\pi e^2}{hc}$$

$$E_i^z = z^2 \chi_H$$

Dies ist der Ausdruck für die Koronaformel ohne Berücksichtigung von Strahlungsrekombinationen in höhere Niveaus. Werden diese berücksichtigt, so ergibt das im Nenner einen Faktor zwischen 1,9 und 2.

Im Ausdruck für die Koronaverteilung treten Glieder, die Stoßprozesse mit höheren Niveaus beschreiben, nicht mehr auf. Daraus kann jedoch nicht geschlossen werden, daß Stoßprozesse mit höheren Niveaus einzeln gegenüber Strahlungsprozessen vernachlässigt werden können. Die Zahl der Stoßaufwärts- und Stoßabwärtsprozesse kompensiert sich nämlich bis auf einen Betrag, der klein gegen die Zahl der Strahlungsprozesse ist.

b) Fehlerberechnung bei der numerischen Lösung der Abel'schen Integralgleichung

α) Aufstellung der Abel'schen Integralgleichung, numerische Lösungsmethode

Bei side-on Beobachtung einer zylindersymmetrischen, optisch dünnen Entladung, setzt sich die gemessene Strahlungsintensität im Abstand  $x$  von der Bogenachse folgendermaßen aus der radialen Intensitätsverteilung zusammen (Abb. 30).

$$J(x) = 2 \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} i(\tau) dy \quad (y = \sqrt{r^2 - x^2}) = 2 \int_x^R \frac{r i(\tau) dr}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad (66)$$

$R = \text{Gesamtbogenradius}$

Die analytische Lösung dieser Integralgleichung lautet:

$$i(\tau) = -\frac{2}{\pi \tau} \frac{d}{d\tau} \int_{\tau}^R \frac{J(x) x dx}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} \quad (67)$$

Die Messung liefert uns die Werte  $I(x_v)$  für  $x_v = v \frac{R}{N} = v h$ ;  $v = 1, \dots, N$  ( $N := \text{Anzahl der Meßintervalle}$ )

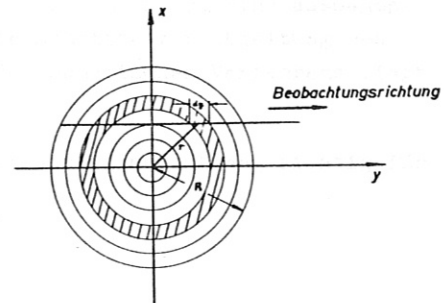


Abb. 30

Wir bestimmen die Werte  $i(x_{v-1} + \frac{h}{2})$ ; dazu gehen wir von der Gleichung (66) aus:

$$J_n := J(x_n) = \int_{x_n}^R \frac{i(\tau) r dr}{\sqrt{r^2 - x_n^2}} = \sum_{v=n}^N \int_{x_{v-1}}^{x_v} \frac{i(\tau) r dr}{\sqrt{r^2 - x_{n-1}^2}} \quad (68)$$

Nach dem 2. Mittelwertsatz der Integralrechnung können wir schreiben:

$$\int_{x_{v-1}}^{x_v} \frac{i(\tau) r dr}{\sqrt{r^2 - x_{n-1}^2}} = i(\xi_v) \int_{x_{v-1}}^{x_v} \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - x_{n-1}^2}} \quad (69)$$

mit  $x_{v-1} \leq \xi_v \leq x_v$

Systematische Meßfehler

Durch Einsetzen in Gleichung (68) ergibt sich mit  $i_v := i(\xi_v)$

$$J_n = \sum_{\nu=n}^N i_\nu \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \frac{r \, dr}{\sqrt{r^2 - x_{n-1}^2}} = \sum_{\nu=n}^N i_\nu \left( \sqrt{x_\nu^2 - x_{n-1}^2} - \sqrt{x_{\nu-1}^2 - x_{n-1}^2} \right) =$$

$$= \sum_{\nu=n}^N a_{n\nu} i_\nu \quad (70)$$

Stellen wir Gleichung (70) für alle  $I_\nu$ ,  $\nu = 1, \dots, N$  auf, so erhalten wir ein lineares Gleichungssystem mit  $N$ -Gleichungen für die  $N$ -Unbekannten  $i'(\beta_\nu)$ , das nach bekannten Verfahren gelöst werden kann. Wir nehmen für  $S_\nu$  den wahrscheinlichsten Wert an, also

$$S_\nu = x_{\nu-1} + \frac{h}{2} \quad (71)$$

und haben damit die gesuchten Werte  $i(x_{\nu-1} + \frac{h}{2})$  erhalten.

### β) Fehlerabschätzungen

#### 1) Fehler durch das numerische Verfahren

Die bei physikalischen Problemen vorkommenden Funktionen  $I(x)$  und  $i(r)$  sind ausnahmslos stetige Funktionen. Mit dieser Voraussetzung sind alle Schritte zur Ableitung des numerischen Verfahrens streng richtig. Die Unsicherheit des numerischen Verfahrens liegt bei Annahme (71).

Die aus der Lösung des Gleichungssystems gewonnenen  $i_\nu$ -Werte sind nur streng richtig für einen nicht genauer festgelegten Radius  $S_\nu$  mit

$$x_{\nu-1} \leq S_\nu \leq x_\nu$$

Die Genauigkeit des Verfahrens hängt damit stark von der Funktion  $i(r)$  ab. Es ist sehr genau in Bereichen, wo sich  $i(r)$  nur schwach ändert, weniger genau dort, wo steile Änderungen der Funktion  $i(r)$  vorliegen. Dort, wo sich  $i(r)$  monoton ändert, gilt:

$$i(x_{\nu-1}) < i(x_{\nu-1} + \frac{h}{2}) < i(x_\nu) \quad \text{für } i(r) \text{ monoton steigend} \quad (72)$$

$$i(x_{\nu-1}) > i(x_{\nu-1} + \frac{h}{2}) > i(x_\nu) \quad \text{für } i(r) \text{ monoton fallend}$$

Eine Vergrößerung der Zahl der Meßpunkte steigert die Genauigkeit des Verfahrens. Nähern wir  $i(r)$  im Bereich  $[x_{\nu-1}, x_\nu]$  durch eine Gerade an, so entnimmt man Gleichung (72)

$$\Delta = |i_\nu - i_{\nu-1}| \sim (x_{\nu+1} - x_\nu) = 2h \sim \frac{1}{N}$$

Die Genauigkeit des Verfahrens nimmt also proportional der Zahl der Meßpunkte zu.

#### 2) Systematische Meßfehler

2.1 Wir betrachten einen systematischen Fehler, der sich im gleichen Verhältnis auf alle Meßwerte  $J(\nu)$  auswirkt.



$$J_1(x) = J(x) (1 + \Delta)$$

mit  $(1 + \Delta) = \text{const.}$

Einsetzen in (67) liefert der Homogenität der Integralgleichung wegen

$$i_1(x) = (1 + \Delta) i(x)$$

Ein Fehler dieser Art wirkt sich auf alle Resultate  $i(x)$  gleich aus; da bei der Berechnung der Temperatur nur Relativwerte benutzt werden, kann sich dieser Fehler sogar herausheben.

2.2 Wir untersuchen den Einfluß eines systematischen Fehlers, bei dem jeder Meßwert um einen konstanten Wert verändert wird:

$$J_1 = J + \Delta$$

Man erhält durch Einsetzen in Gleichung (67)

$$i_1(r) = -\frac{2}{\pi r} \frac{d}{dr} \int_r^R \frac{(\bar{I} + \Delta) x dx}{\sqrt{x^2 - r^2}} = i(r) - \frac{2}{\pi r} \frac{d}{dr} \int_r^R \frac{\Delta x dx}{\sqrt{x^2 - r^2}} = i(r) + \frac{2\Delta}{\pi(R^2 - r^2)}$$

Dieser Fehler wirkt sich am meisten auf die Randpunkte, am wenigsten auf die achsennahen Punkte aus. Die Unstetigkeit bei  $r = R$  ist eine Folge der Unstetigkeit von  $I_1$  bei  $r = R$ . Das numerische Verfahren, das ja wegen (69) Unstetigkeiten nicht richtig verarbeitet, liefert in diesem Fall für  $i_N$

$$i_N = \frac{(\bar{I}_N + \Delta)N}{\sqrt{2N - 1}}$$

### 3) Statistischer Fehler

Bezeichnen wir mit  $\underline{J}$  den Vektor  $(J_1, J_2, \dots, J_N)$ , mit  $\underline{i}$  den Vektor  $(i_1, i_2, \dots, i_N)$  und mit  $\underline{A}$  die Matrix der  $a_{nv}$  von Gleichung (70).

Dann kann man das System der Gleichungen (70) schreiben:

$$\underline{A} \underline{i} = \underline{J}$$

Daraus folgt die Lösung

$$\underline{i} = \underline{B} \underline{J} \quad \text{mit } \underline{B} = \underline{A}^{-1}$$

Speziell ist

$$i_n = \sum_{v=1}^N b_{nv} J_v \quad (73)$$

Sind  $\sigma_v$  die Streuungen der  $J_v$ , so müssen wir die Streuung  $S_v$  der Summe (73) berechnen. Dazu benutzen wir aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung den Satz von der Additivität der Varianzen:

Voraussetzung:  $a_i, i = 1, \dots, \kappa$  unabhängige Zufallsgrößen

Satz:

$$\sigma \left( \sum_{i=1}^{\kappa} a_i \right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\kappa} [\sigma(a_i)]^2}$$

Setzen wir die Unkorreliertheit der  $I_\nu$ -Fehler voraus, so folgt mit diesem Satz in unserem Fall:

$$\text{Streuung von } i_n =: s_n = \sqrt{\sum_{\nu=n}^N (t_{n\nu} \sigma_\nu)^2} \tag{74}$$

Eine allgemeine Aussage über die sich so ergebende Streuung kann nicht gemacht werden. Sie muß für jeden einzelnen Fall berechnet werden. Allgemein können wir nur sagen, daß die Fehler zur Achse hin ( $n \rightarrow 1$ ) anwachsen, da alle  $b_{n\nu}$  von der gleichen Größenordnung sind.

Wir wollen nun den Einfluß der Anzahl der Meßpunkte auf die Streuung der  $i$ -Werte betrachten. Die Koeffizienten  $a_{n\nu}$  der Matrix A sind der Schrittweite  $h$  proportional, denn

$$\sqrt{x_\nu^2 - x_{n-1}^2} - \sqrt{x_{\nu-1}^2 - x_{n-1}^2} = h \left( \sqrt{\nu^2 - (n-1)^2} - \sqrt{(\nu-1)^2 - (n-1)^2} \right)$$

Daraus folgt: die Koeffizienten der inversen Matrix B sind  $\frac{1}{h}$  proportional. Man kann dann aus (74) abschätzen, daß

$$s_n \sim N \quad \text{ist.}$$

Hieraus schließen wir: es ist nicht sinnvoll, die Zahl der Meßpunkte beliebig zu steigern. Dabei verringert sich zwar der Verfahrensfehler, der Einfluß der statistischen Fehler wächst dabei jedoch stark an. Die günstigste Anzahl der Meßpunkte kann nur aus der numerischen Erfahrung gewonnen werden. Legten wir einen statistischen Fehler von 3% zugrunde, so stellten wir fest, daß sich die Resultatswerte  $i(r)$  in den Außenbereichen des Bogens nicht mehr änderten, wenn die Anzahl der Meßpunkte von 25 auf 50 erhöht würde. Da die Meßkurve vor der Rechnung geglättet wird, erscheint ein Fehler von 3% angemessen. Für die Rechnung wurden darum stets zwischen 25 und 50 Meßpunkte benutzt.

Mit den Werten der Streuung für die Intensität  $i(r)$  kann man dann direkt die Streuung des Verhältnisses  $i_1(r)/i_2(r)$  berechnen. Über den Ausdruck für die Temperaturabhängigkeit des Intensitätsverhältnisses erhält man dann die Streuung der Temperaturwerte.

c) Herleitung des Ausdruckes für die Relaxationszeit bei Wasserstoff

Wir gehen von der Teilchenzahlbilanzgleichung für ionisierten Wasserstoff aus:

$$- C \dagger n_e^2 n_i + C \dagger n_o n_e = \frac{\partial n_i}{\partial t}$$

$n_i :=$  Wasserstoffionendichte  
 $n_o :=$  Dichte der Wasserstoffatome  
 $n_e :=$  Elektronendichte

(75)

Dabei haben wir vorausgesetzt, daß die Strahlungsprozesse gegen Stoßionisation und Dreierstoßrekombination zu vernachlässigen sind. Mit  $n_i = n_e$  und  $n_o = N - n_i$  ( $N =$  Gesamtzahl der Wasserstoffteilchen) lautet Gleichung (75):

$$- C \dagger n_i^3 - C \dagger n_i^2 + C \dagger n_i N = \frac{\partial n_i}{\partial t}$$

Diese lineare homogene Differentialgleichung kann sofort integriert werden:

$$\int_{n_i}^{n_2} \frac{dn_i}{n_i (C \dagger N - C \dagger n_i - C \dagger n_i^2)} = - \int_{t_1}^{t_2} dt$$

(76)

Im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht ist die Dichte der Wasserstoffionen mit der Dichte der Wasserstoffatome über die Sahagleichung (77) verknüpft:

$$\frac{n_{is} n_e}{n_{os}} = \frac{C \dagger}{C \dagger}$$

(77)

Mit  $n_{os} = N - n_{is}$  und  $n_e = n_{is}$  folgt daraus die Beziehung

$$n_{is}^2 = \frac{C \dagger}{C \dagger} (N - n_{is})$$

Wir können mit diesem Ausdruck den Integranden auf der linken Seite von Gleichung (76) umformen

$$\frac{1}{n_i (C \dagger N - C \dagger n_i - C \dagger n_i^2)} = \frac{1}{n_i (C \dagger (N - n_{is}) + C \dagger n_{is} - C \dagger n_i - C \dagger n_i^2)} =$$

$$= \frac{1}{n_i (C \dagger n_{is}^2 + C \dagger n_{is} - C \dagger n_i - C \dagger n_i^2)}$$

Partialbruchzerlegung dieses Ausdruckes ergibt dann

$$\frac{1}{n_i (C \dagger n_{is}^2 + C \dagger n_{is} - C \dagger n_i - C \dagger n_i^2)} = \frac{1}{C \dagger N n_i} + \frac{1}{C \dagger N} \frac{n_{is} C \dagger + C \dagger}{2 n_{is} C \dagger + C \dagger} \frac{1}{n_{is} - n_i} -$$

$$- \frac{1}{C \dagger N} \cdot \frac{C \dagger^2 n_{is}}{2 C \dagger n_{is} + C \dagger} \frac{1}{C \dagger n_i + C \dagger n_{is} + C \dagger}$$

Die Integration ergibt

$$- \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{n_1}^{n_2} \left( \frac{1}{C+N} \ln n_i - \frac{C+n_{is}}{C+N(2C+n_{is}+Ct)} \ln (C+n_i+C+n_{is}+Ct) - \frac{1}{C+N} \frac{n_{is}Ct+Ct}{2n_{is}Ct+Ct} \ln |n_{is}-n_i| \right) \quad (78)$$

Gehen wir davon aus, daß der Wasserstoff fast vollständig ionisiert ist, dann gilt:

$$n_{is} Ct \ll Ct$$

$$\text{und } n_i Ct \ll Ct$$

Damit vereinfacht sich die Gleichung (78) zu:

$$- \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{n_1}^{n_2} \left( \frac{1}{C+N} \ln n_i - \frac{C+n_{is}}{C^2+N} \ln (Ct) - \frac{1}{C+N} \ln |n_{is}-n_i| \right) \quad (79)$$

Setzen wir nun für die Grenzen der Integrale die Werte 0 und t für  $t_1$  und  $t_2$  sowie  $n_{1A}$  und  $n_1$  für  $n_1$  und  $n_2$  ein, so folgt aus Gleichung (79) durch Exponentiation:

$$n_i |n_{is} - n_i| = n_{iA} |n_{iA} - n_{is}| \exp(-C+Nt) \quad (80)$$

$n_{iA}$  := Anfangsdichte

Bei kleinen Abweichungen  $n_1 \approx n_{is}$  gilt:

$$|n_{is} - n_i| = \frac{n_{iA}}{n_{is}} |n_{iA} - n_{is}| \exp(-C+Nt)$$

Wir erhalten also einen exponentiellen Abfall mit einer Relaxationszeit

$$\tau = \frac{1}{C+N}$$

$$R_{pq} \downarrow = z^4 {}^R F_{gg} \frac{1}{\rho^3} \frac{2}{q^3} \frac{\exp(-Spq)}{(1 - \frac{\rho^2}{q^2})} [\text{sec}^{-1}]$$

$$\bar{p}^{+1} R_p \downarrow = \frac{z^4}{\rho_0} \frac{1}{2} {}^R F_{gg} \frac{1}{s^{1/2}} \frac{1}{\rho^*} \frac{\exp(-S_p, \bar{p}^{+1})}{(1 - \rho^2 / (\bar{p}^{+1})^2)^{1/2}} G(S_p, \bar{p}^{+1}) [\text{sec}^{-1}]$$

$$R_{qp} \downarrow = z^4 {}^R F_{gg} \frac{1}{\rho} \frac{2}{q^5} \frac{1}{(1 - \frac{\rho^2}{q^2})} [\text{sec}^{-1}]$$

$$\bar{p}^{+1} R_p \downarrow = z \rho_0^2 \frac{1}{2} {}^R F_{fg} s \frac{1}{\rho^2} \frac{1}{(1 - \frac{\rho^2}{(\bar{p}^{+1})^2})^{1/2}} G(S_p, \bar{p}^{+1}) [\text{cm}^3 \text{sec}^{-1}]$$

$$C_{pq} \downarrow = 3 {}^C F_{gg} \frac{1}{z^3} \frac{\rho^5}{q^3} \frac{\exp(-Spq)}{(1 - \frac{\rho^2}{q^2})^{9/2}} G(S_{pq}) \left[ 1 + \frac{2 S_{pq}^{1/2}}{3 G(S_{pq})} \right] [\text{cm}^3 \text{sec}^{-1}]$$

$$\bar{p}^{+1} C_p \downarrow = \frac{1}{2} {}^C F_{gg} \frac{1}{z^3} \rho^3 \frac{\exp(-S_p, \bar{p}^{+1})}{(1 - \frac{\rho^2}{(\bar{p}^{+1})^2})^{7/2}} G(S_p, \bar{p}^{+1}) [\text{cm}^3 \text{sec}^{-1}]$$

$$C_{qp} \downarrow = 3 {}^C F_{gg} \frac{1}{z^3} \frac{\rho^7}{q^5} \frac{1}{(1 - \frac{\rho^2}{q^2})^{9/2}} G(S_{pq}) \left[ 1 + \frac{2 S_{pq}^{1/2}}{3 G(S_{pq})} \right] [\text{cm}^3 \text{sec}^{-1}]$$

$$\bar{p}^{+1} C_p \downarrow = \frac{1}{2} {}^C F_{fg} \frac{\rho_0^3}{z^6} s^{3/2} \rho^5 \frac{1}{[1 - \rho^2 / (\bar{p}^{+1})^2]^{7/2}} G(S_p, \bar{p}^{+1}) [\text{cm}^6 \text{sec}^{-1}]$$

Tabelle 1

Stoß- und Strahlungskoeffizienten nach Mann (2)



- $R_{pq} \uparrow$  Koeffizient für Strahlungsanregung
- $\bar{p}^{\uparrow} R_{p \uparrow}$  Koeffizient für Strahlungsionisation
- $R_{qp} \downarrow$  Koeffizient für Strahlungsabregung
- $\bar{p}^{\downarrow} R_{p \downarrow}$  Koeffizient für Strahlungsrekombination
- $C_{pq} \uparrow$  Koeffizient für Stoßanregung
- $\bar{p}^{\uparrow} C_{p \uparrow}$  Koeffizient für Stoßionisation
- $C_{qp} \downarrow$  Koeffizient für Stoßabregung
- $\bar{p}^{\downarrow} C_{p \downarrow}$  Koeffizient für Dreierstoßrekombination

$$C \downarrow \equiv {}^{\infty} C_{p_0} \downarrow$$

$$C \uparrow \equiv {}^{\infty} C_{p_0} \uparrow$$

$$R \downarrow \equiv {}^{\infty} R_{p_0} \downarrow$$

$p, q$  Hauptquantenzahlen der Energieniveaus, zwischen denen Stoß- und Strahlungsprozesse stattfinden

$p_0$  Hauptquantenzahl des Grundzustandes

$\bar{p}$  Hauptquantenzahl des letzten, bei der Rechnung berücksichtigten Niveaus

$Z$  Ladungszahl des Ions

$$S = \frac{Z^2 \chi_H}{p_0^2 kT} \quad ; \quad S_{pq} = S \frac{p_0^2}{p^2} \left( 1 - \frac{p^2}{q^2} \right)$$

$$G(x) = 2 x^{1/2} \exp(x) \int_x^{\infty} \frac{\exp(-y)}{y} dy$$

(siehe Tabelle 2)

$${}^c F_{f_2} = 4,23 \cdot 10^{-31} [cm^6 sec^{-1}]$$

$${}^c F_{g_2} = 2,13 \cdot 10^{-8} [cm^3 sec^{-1}]$$

$${}^R F_{g_2} = 0,789 \cdot 10^{10} [sec^{-1}]$$

$${}^R F_{f_2} = 0,542 \cdot 10^{-13} [cm^3 sec^{-1}] \quad *$$

$\chi_H$  = Ionisierungsenergie von Wasserstoff

\* Der in (2) angegebene Wert wurde korrigiert (Rechenfehler).

x	G(x)
1	1,193
2	1,022
3	0,908
4	0,825
5	0,762
6	0,712
7	0,670
8	0,635
9	0,605
10	0,579
11	0,556
12	0,536
13	0,517
14	0,501
15	0,486
16	0,472
17	0,459
18	0,448
19	0,437
20	0,427
21	0,417
22	0,409
23	0,400
24	0,393
25	0,385
26	0,378
27	0,372
28	0,365
29	0,359
30	0,354
31	0,348
32	0,343
33	0,338
34	0,333
35	0,329
36	0,325
37	0,320
38	0,316
39	0,312
40	0,309
41	0,305
42	0,302
43	0,298
44	0,295
45	0,292
46	0,289
47	0,286
48	0,283
49	0,280
50	0,277

Tabelle 2

Tabelle der Funktion  $G(x) = 2 \cdot \sqrt{x} \exp(x) E_1(x)$

Für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für stetige Förderung bei ihrer Durchführung möchte ich Herrn Prof. Dr. R. Wienecke sehr danken.

Herrn Dr. G. Zankl danke ich besonders für viele wertvolle Diskussionen und Ratschläge, Herrn C. Dorn für seine technische Unterstützung bei der Durchführung des Experiments und Frl. G. Wimmer für die sorgfältige Niederschrift der Arbeit.