INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Elektrostatische Instabilitäten und die drei adiabatischen Invarianten geladener Teilchen

(Electrostatic instabilities and the three adiabatic invariants of charged particles)

Günther Otto Spies

IPP 6/66 Juni 1968

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

IPP 6/66 G. Spies

Electrostatic instabilities and the three adiabatic invariants of charged particles.

June, 1968 (in German).

ABSTRACT

The first part of this study develops the theory of adiabatic invariants of charged particles in general electromagnetic fields. The starting point is a theory of nearly periodic, autonomous, canonical systems derived by M. Kruskal (1962). His theory is generalized here so that it can be applied to the time-dependent problem of the motion of a charged particle in an electromagnetic field. By introducing suitable canonical variables, it is then a simple matter to obtain the well-known results and, what is more important, the conditions for the existence of adiabatic invariants of charged particles. It is proved that in a static magnetic field it is generally a necessary condition for constancy of the longitudinal invariant that the zeroth-order electric field vanish.

In the second part, the stability behaviour of general, singly connected equilibrium configurations of collisionless plasmas is investigated. Electromagnetic disturbances are considered which develop with time so slowly that all three adiabatic invariants of the particles can be regarded as constant. An energy principle in which the electrostatic disturbing potential is the only test function is derived. A sufficient stability criterion is given in the form of monotony conditions on the equilibrium distribution functions. This criterion is also sufficient for stability with respect to faster electrostatic disturbances which already violate the third adiabatic invariant.

Zusammenfassung

Im ersten Teil dieser Arbeit wird die Theorie der adiabatischen Invarianten geladener Teilchen in allgemeinen elektromagnetischen Feldern entwickelt. Ausgangspunkt ist eine Theorie der nahezu periodischen autonomen kanonischen Systeme von M.Kruskal (1962). Diese wird so verallgemeinert, daß sie auch auf das zeitabhängige Problem der Bewegung eines geladenen Teilchens in einem elektromagnetischen Feld angewendet werden kann. Durch die Einführung von angepaßten kanonischen Variablen gelangt man dann auf besonders einfache Weise zu den schon bekannten Ergebnissen und, worauf besonders Wert gelegt wird, zu den Bedingungen für die Existenz der adiabatischen Invarianten geladener Teilchen. Unter anderem wird bewiesen, daß in einem statischen Magnetfeld das Verschwinden des elektrischen Feldes nullter Ordnung i.A. eine notwendige Bedingung für die Konstanz der longitudinalen Invarianten ist.

Im zweiten Teil wird das Stabilitätsverhalten allgemeiner einfach zusammenhängender Gleichgewichtskonfigurationen stoßfreier Plasmen untersucht. Es werden elektrostatische Störungen betrachtet, die sich zeitlich so langsam entwickeln, daß alle drei adiabatischen Invarianten der Teilchen als konstant angesehen werden können. Für diese Störungen wird ein Energieprinzip hergeleitet, welches als einzige Testfunktion das elektrostatische Störpotential enthält. Ein hinreichendes Stabilitätskriterium wird in Form von Monotoniebedingungen an die Gleichgewichts-Verteilungsfunktionen angegeben. Dieses erweist sich als ebenfalls hinreichend für Stabilität gegenüber schnelleren elektrostatischen Störungen, die nur die ersten beiden adiabatischen Invarianten konstant lassen.

INHALT

Einleitung

Da eine exakte Lösung des mikroskopischen Stabilitätsproblems für stoßfreie Plasmen nur in sehr speziellen Fällen gelingt, bedient man sich bei der Untersuchung allgemeiner inhomogener Gleichgewichtskonfigurationen geeigneter Näherungsverfahren. Ein solches ist die Verwendung der adiabatischen Invarianten geladener Teilchen. Dies sind Größen, die bei einer hinreichend schwachen Orts- und Zeitabhängigkeit der Felder als Konstanten der Teilchenbewegung angesehen werden können und mit deren Hilfe man deshalb asymptotische Lösungen der Vlasov-Gleichungen konstruieren kann. Dementsprechend führt dieses Verfahren auf eine asymptotische Beschreibung langsamer Bewegungen von stoßfreien Plasmen in starken Magnetfeldern. Je nachdem, ob man nur die erste oder die ersten beiden oder alle drei adiabatischen Invarianten als konstant annimmt, hat man schwächere oder schärfere Einschränkungen an die Bewegungen zu beachten, die man sinnvoll beschreiben will.

Die bekannteste und einfachste dieser Invarianten ist das magnetische Moment M, welches in vielen Problemen der Plasmaphysik eine wichtige Rolle spielt und auch in zahlreichen Stabilitätsuntersuchungen verwendet wurde, von denen wir nur die neuesten und wichtigsten erwähnen [1 - 8] . Die Vorgänge, die man mit diesen Theorien beschreiben kann, spielen sich in Zeiträumen ab, die groß gegen die Gyrationszeiten der Teilchen sind. Dies ist keine starke Einschränkung. Die Bewegungsgleichungen sind denen der Magnetohydrodynamik sehr ähnlich, weil alle Teilchen, die sich am selben Ort befinden, mit fast der gleichen Geschwindigkeit quer zum Magnetfeld driften.

Die Bewegungen eines Plasmas, die auch die longitudinale Invariante J der Teilchen nicht verletzen, sind um noch eine Ordnung langsamer. Damit hängt es zusammen, daß die allen Teilchen gemeinsame Drift nullter Ordnung verschwindet und nur noch die rein mikroskopischen Effekte höherer Ordnung übrigbleiben. Infolgedessen geht der qualitative Zusammenhang mit der Magnetohydrodynamik hier völlig verloren. Wohl aus diesen Gründen haben diese Bewegungen bisher weniger Interesse gefunden. Das volle Stabilitätsproblem wurde hierfür noch nicht behandelt. Man beschränkte sich auf die relativ einfach zu behandelnden elektrostatischen Störungen, von denen man glaubt, daß sie für kleines β (niedrige Plasmadrücke) zu den einzig wichtigen Instabilitäten führen. Abgesehen von Untersuchungen, die entweder ein nicht konsistentes Einflüssigkeits-Modell benutzen [19] oder in denen J nicht als Konstante der Bewegung, sondern nur als Koordinate im Geschwindigkeitsraum fungiert [1,2,4] , wurde eine solche Stabilitätstheorie erst in jüngster Zeit in konsistenter Weise entwickelt [10,9] . Das Ergebnis von [10] ist ein Energieprinzip, sowie ein hinreichendes Stabilitätskriterium. Dieses Energieprinzip hat allerdings den Nachteil, daß mehrere Funktionen variiert werden müssen, die zusammen einer schwierig zu übersehenden Einschränkung unterliegen. Aus diesem Grunde ist es zur Herleitung notwendiger Stabilitätskriterien nicht sehr geeignet.

Daß die Flußinvariante ϕ bisher in keiner Stabilitätstheorie zur Anwendung kam, mag daran liegen, daß man sich erstens nicht viel von einer solchen Theorie versprach, weil in ihr nur extrem kleine Frequenzen auftreten dürfen und daß man zweitens die Schwierigkeiten überschätzte, die sich dadurch ergeben, daß diese Invariante nur in sehr impliziter Weise definiert ist.

In der vorliegenden Arbeit werden elektrostatische Störungen untersucht, die alle drei adiabatischen Invarianten der Teilchen konstant lassen. Hierbei wird ähnlich wie in [10] vorgegangen. Durch stärkere Ausnutzung der allgemeinen Eigenschaften der adiabatischen Invarianten werden die eben erwähnten Schwierigkeiten überwunden+). Dadurch, daß man die Vlasov-Gleichungen mit Hilfe aller drei adiabatischen Invarianten vollständig integrieren kann, kommt man einen Schritt weiter als in [10]. Man kann nämlich das Variationsprinzip auf ein solches mit einer einzigen Testfunktion reduzieren, die keiner besonderen Einschränkung mehr unterliegt. Ein sich daraus ergebendes hinreichendes Stabilitätskriterium erweist sich überraschenderweise als schräfer als das in [10] hergeleitete Kriterium, ist also auch hinreichend für Stabilität gegenüber schnelleren als den ursprünglich betrachteten Bewegungen.

In einem ersten Teil entwickeln wir die Theorie der adiabatischen Invarianten geladener Teilchen in voller Allgemeinheit, obwohl wir anschließend nur den elektrostatischen Fall betrachten werden. Wir tun dies, weil es unseres Wissens bisher keine in jeder Hinsicht zufriedenstellende umfassende Darstellung dieses Themas gibt. Frühere diesbezügliche Arbeiten behandeln entweder nur die erste oder die ersten beiden adiabatischen Invarianten oder beschränken sich auf Spezialfälle, wie z.B. verschwindende elektrische Felder oder Vakuum-Magnetfelder oder sie machen keinen Gebrauch von den universellen Eigenschaften der Wirkungs- und Winkelvariablen. Vor allem fehlte bisher eine sorgfältige Diskussion der B edingungen, die man an ein elektromagnetisches Feld zu stellen hat, damit die adiabatischen

+) Auch die in [10] entwickelte Theorie würde sich dadurch vereinfachen.

Invarianten eines sich darin bewegenden geladenen Teilchens überhaupt existieren. Ebensowenig wurde die Frage nach der Einführung eines dimensionslosen Galilei-invarianten Entwicklungsparameters beachtet. Meistens wurde einfach nach dem Verhältnis von Masse und Ladung des betrachteten Teilchens entwickelt. Diese Prozedur führt zwar zu richtigen Ergebnissen, läßt aber ohne weitere Überlegungen keine physikalischen Rückschlüsse zu.

Herrn Prof. Dr. A. Schlüter, der diese Arbeit anregte, bin ich für sein Interesse und seine fruchtbare Kritik sehr zu Dank verpflichtet. Den Herren Dr. K. U. von Hagenow, Dr. H. Tasso, Dr. H.K. Wimmel und H.P. Zehrfeld vom Institut für Plasmaphysik in Garching bei München danke ich für viele nützliche Diskussionen.

I. DAS EINZELTEILCHENBILD

§ 1) Die allgemeine Theorie der adiabatischen Invarianten [11].

Hier handelt es sich um eine i.A. nicht konvergierende, dafür aber säkularitätenfreie Störungsentwicklung gewisser kanonischer Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen+).
Sie ist durchführbar, wenn die Bewegung in verschiedenen Zeitskalen abläuft, und in der schnellsten dieser Skalen periodisch ist. Mit dieser periodischen Bewegung ist eine approximative Konstante, die "adiabatische Invariante" verknüpft, mit deren Hilfe man die schnelle Zeitskala eliminieren, und das Gleichungssystem um einen Freiheitsgrad reduzieren kann. In diesem Abschnitt zitieren wir die Tatsachen, die wir später verwenden werden, möglichst kurz und ohne Beweise.

Gegeben sei ein autonomes System von kanonischen Bewegungsgleichungen

$$\frac{dp}{dt} = -H_{/q} \quad , \quad \frac{dq}{dt} = H_{/p} \; . \qquad (1.1)$$

p und q sind n-Tupel. Die Hamilton-Funktion $H(p, q, \varepsilon)$ soll nach dem Parameter ε entwickelbar sein. Zugelassen sind auch formale Potenzreihen in ε , die nicht zu konvergieren brauchen. Im Folgenden wird dies für alle von ε abhängenden Funktionen stillschweigend erlaubt. Dementsprechend gelten die Ergebnisse i.A. nur in einem asymptotischen Sinn.

Die Voraussetzung für die Durchführbarkeit des Verfahrens ist die, daß es eine zeitunabhängige (i.A. aber von ε abhängende)

+) Das hier beschriebene Verfahren wurde in seinen ersten Ansätzen erstmals in [12] eingeführt. Dort wird es "Mittelungsverfahren" genannt.

Transformation

$$p, q \longleftrightarrow x \tag{1.2}$$

der dynamischen Variablen, und eine Skalentransformation

$$t \longleftrightarrow s = \varepsilon^m t \tag{1.3}$$

der unabhängigen Variablen gibt, die dem transformierten System

$$\frac{dx}{ds} = f(x, \varepsilon) \tag{1.4}$$

die folgenden beiden Eigenschaften verleihen:

1) f ist eine Potenzreihe in ε, beginnend mit einem Term nullter Ordnung $f_0(x)$.

2) Das System nullter Ordnung $\frac{dx}{ds} = f_0(x)$ hat nur periodische Lösungen.

Die periodischen Teilchenbahnen nullter Ordnung nennen wir "Schleifen"+). Die Bewegung längs der Schleifen ist schnell verglichen mit derjenigen quer zu den Schleifen. Das System (1.1) hat also zwei Zeitskalen, die sich um einen Faktor ε unterscheiden.

Die Störungsentwicklung des Gleichungssystems (1.1) besteht nun darin, eine weitere Transformation

$$x \longleftrightarrow z, \varphi \tag{1.5}$$

zu konstruieren, die die folgenden Eigenschaften hat:
1) φ ist eine auf Eins normierte Winkelvariable,

$$x(z, \varphi + 1, \varepsilon) = x(z, \varphi, \varepsilon) . \tag{1.6}$$

+) In Englisch: "loops".

Dementsprechend ist z ein ($2n-1$)-Tupel, da x ein $2n$-Tupel ist.

2) Die rechten Seiten der transformierten Gleichungen

$$\frac{dz}{ds} = \varepsilon h(z,\varepsilon) \tag{1.7}$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \omega(z,\varepsilon) \tag{1.8}$$

hängen nicht von φ ab. Die schnelle Bewegung der "Phase" wird also absepariert. Die Gleichung für z heißt "reduziertes System".
In [11] wurde bewiesen, daß solche Transformationen asymptotisch existieren, d.h. daß man die Transformationsgleichungen sukzessive als formale Potenzreihen in ε konstruieren kann, und daß sie alle im Weiteren benötigten Eigenschaften besitzen.

Der erste Schritt zur Bestimmung von z, φ, h und ω besteht darin, daß man ($2n-1$) zeitunabhängige Konstanten y der Bewegung nullter Ordnung, die man als Koordinaten der Schleifen auffassen kann, sowie eine auf Eins normierte Winkelvariable υ, die man als Koordinate längs der Schleifen auffasst, konstruiert.

$$x \longleftrightarrow y,\upsilon \tag{1.9}$$

ist dann eine Transformation des Phasenraums, und die Bewegungsgleichungen bekommen die Form

$$\frac{dy}{ds} = \varepsilon g(y,\upsilon,\varepsilon), \tag{1.10}$$

$$\frac{d\upsilon}{ds} = \psi(y,\upsilon,\varepsilon). \tag{1.11}$$

Ausgehend von den Funktionen g und ψ kann man die Transformation $y,\upsilon \longleftrightarrow z,\varphi$ und die Funktionen h und ω mit Hilfe von Rekursionsformeln, die wir hier nicht angeben wollen, simultan konstruieren. Man erhält so in niedrigster Ordnung

$$z(y,\upsilon,\varepsilon) = y + O(\varepsilon) \tag{1.12}$$

und

$$h(y,\varepsilon) = \frac{\int_0^1 d\upsilon\, g_0(y,\upsilon)/\psi_0(y,\upsilon)}{\int_0^1 d\upsilon/\psi_0(y,\upsilon)} + O(\varepsilon) \tag{1.13}$$

für das reduzierte System, und

$$\varphi(y,\upsilon,\varepsilon) = \frac{\int_0^\upsilon d\upsilon/\psi_0(y,\upsilon)}{\int_0^1 d\upsilon/\psi_0(y,\upsilon)} + O(\varepsilon)\,, \tag{1.14}$$

$$\omega(y,\varepsilon) \qquad \frac{1}{\int_0^1 d\upsilon/\psi_0(y,\upsilon)} + O(\varepsilon) \tag{1.15}$$

für die Phase φ. Der hier auftretende Operator

$$\langle \cdots \rangle := \frac{\int_0^1 d\upsilon \cdots /\psi_0(y,\upsilon)}{\int_0^1 d\upsilon/\psi_0(y,\upsilon)} \tag{1.16}$$

ist in niedrigster Ordnung eine Integration über die Phase

$$\langle \cdots \rangle = \int_0^1 d\varphi \cdots + O(\varepsilon)\,. \tag{1.17}$$

Gleichzeitig ist dies eine zeitliche Mittelung über die Bewegung längs der Schleifen. Das reduzierte System beschreibt in dieser Ordnung also gerade die über die schnellste Zeitskala gemittelte Bewegung. Die adiabatische Invariante $\mathcal{M}$ ist durch

$$\mathcal{M}(z,\varepsilon) := \oint_{z=\mathrm{const}} p\cdot dq = \int_0^1 d\varphi\, p(z,\varphi,\varepsilon)\cdot \frac{\partial q(z,\varphi,\varepsilon)}{\partial \varphi} \tag{1.18}$$

definiert. Sie ist eine kanonische Invariante und erfüllt die formale Beziehung

$$\frac{d\mathcal{M}}{ds} = 0 \; . \tag{1.19}$$

Drückt man $\mathcal{M}$ durch die ursprünglichen Koordinaten und Impulse als Potenzreihe in ε aus,

$$\mathcal{M}(p,q,\varepsilon) := \mathcal{M}(z(p,q,\varepsilon),\varepsilon) = \sum_{\nu\geq 0} \varepsilon^{\nu} \mathcal{M}_{\nu}(p,q) \, , \tag{1.20}$$

so ist (1.19) als

$$\frac{d}{dt} \sum_{\nu=0}^{k} \varepsilon^{\nu} \mathcal{M}_{\nu} = O(\varepsilon^{k+1+m}) \tag{1.21}$$

zu verstehen. In diesem Sinn ist $\mathcal{M}$ eine Konstante der Bewegung.

Es läßt sich nun weiter zeigen, daß man $\mathcal{M}$ dazu benutzen kann, das reduzierte System wieder in kanonische Form zu bringen. Genauer: Es gibt Funktionen $p_i'(z,\varepsilon), q_i'(z,\varepsilon)$, $i = 1,\dots,n-1$, mit denen die Transformation

$$p,q \longleftrightarrow p',q',\mathcal{M},\varphi \tag{1.22}$$

kanonisch. und M und φ ein Paar von kanonisch konjugierten Variablen ist. Da diese Transformation nicht von ϑ abhängt, ist die neue Hamilton-Funktion H' gleich der alten Hamilton-Funktion H, ausgedrückt durch die neuen Variablen. H' kann nicht von φ abhängen, weil M konstant ist. Es gilt also

$$H(p,q,\varepsilon) = H'(p'(p,q,\varepsilon), q'(p,q,\varepsilon), M(p,q,\varepsilon), \varepsilon), \qquad (1.23)$$

und das reduzierte System

$$\frac{dp'}{dt} = -H'_{|q'}, \quad \frac{dq'}{dt} = H'_{|p'}, \quad \frac{dM}{dt} = 0, \qquad (1.24)$$

hat einen Freiheitsgrad weniger als das ursprüngliche, da M nur noch als Parameter vorkommt. Die abseparierte Gleichung für die Phase ist

$$\frac{d\varphi}{dt} = H'_{|M}. \qquad (1.25)$$

Sie ist durch eine Quadratur lösbar, falls man das reduzierte System integriert hat.

Wenn das reduzierte System die entsprechenden Voraussetzungen erfüllt, läßt sich das Mittelungsverfahren erneut anwenden. Ist dies n mal der Fall, so hat man das Problem der Integration der Bewegungsgleichungen (1.1) auf Quadraturen zurückgeführt. Dieser Prozess erfordert jedoch eine beträchtliche Anzahl von komplizierten Transformationen, die wir hier der Übersichtlichkeit halber nochmals schematisch angeben:

$$\begin{aligned}
&p, q \longrightarrow x \longrightarrow y, v \longrightarrow z, \varphi_M \longrightarrow p', q', M, \varphi_M \\
&p', q' \longrightarrow x' \longrightarrow y', v' \longrightarrow z', \varphi_J \longrightarrow p'', q'', J, \varphi_J \\
&p'', q'' \longrightarrow x'' \longrightarrow y'', v'' \longrightarrow z'', \varphi_\Phi \longrightarrow p''', q''', \Phi, \varphi_\Phi
\end{aligned} \qquad (1.26)$$

$\cdots$

Nach jeder Reduktion bekommt man eine neue, langsamere Zeitskala. Die Transformationen der unabhängigen Variablen sind also

$$t \longrightarrow s = \varepsilon^{m} t \longrightarrow s' = \varepsilon s \longrightarrow s'' = \varepsilon s' \longrightarrow \cdots \qquad (1.27)$$

In konkreten Fällen wird man versuchen, das Problem von vornherein so zu formulieren, daß möglichst viele der Transformationen (1.26) überflüssig werden. In § 4) werden wir sehen, daß dies im Fall der Bewegung eines geladenen Teilchens in einem elektromagnetischen Feld in niedrigster Ordnung fast vollständig möglich ist.

§ 2) Zeitabhängige Systeme

Die Theorie von § 1) gilt nur für autonome Systeme. In diesem § wollen wir zeigen, wie man zeitabhängige Systeme des Typs, wie sie uns später begegnen werden, behandeln kann, und die allgemeine Theorie der adiabatischen Invarianten in niedrigster Ordnung darauf anwenden.

Wie wir später sehen werden, kann man die Bewegungsgleichung eines geladenen Teilchens auf die Form

$$\frac{dp_i}{dt} = -\varepsilon^{i-1}\overline{H}_{/q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \varepsilon^{i-1}\overline{H}_{/p_i}, \quad i = 1,2,3 \qquad (2.1)$$

bringen, wo die Hamilton-Funktion+) $\overline{H}(p_1, \cdots, q_3, t, \varepsilon)$ die folgenden beiden Eigenschaften hat:

1) Die auf den rechten Seiten von (2.1) vorkommenden Ableitungen von $\overline{H}$ bleiben alle endlich im Limes $\varepsilon \to 0$.
2) Die Projektionen der Hyperflächen $\overline{H} = \mathrm{const}$ in die (p_1, q_1) -Ebene sind in diesem Limes geschlossene Kurven.

Würde die Hamilton-Funktion nicht von der Zeit t abhängen, so wären also die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit des Mittelungsverfahrens erfüllt. Die spezielle Form der Gleichungen (2.1), nämlich die Tatsache, daß die Bewegungen der verschiedenen Freiheitsgrade in verschiedenen Zeitskalen ablaufen, würde dann auch die Art und Weise vorzeichnen, in der man die zweite und die dritte adiabatische Invariante zu konstruieren hätte. Aus diesem Grunde beschränken wir uns im Weiteren auf den Fall, daß die Zeitabhängigkeit von $\overline{H}$ nur eine kleine Störung ist, die die Struktur der weiteren Rechnungen nicht wesentlich ändert.
Wir nehmen also an, daß $\overline{H}$ nur über die Größe εt von t abhängt. Um möglichst allgemein zu bleiben, setzen wir

+) Wir nennen $\overline{H}$ eine Hamilton-Funktion, obwohl das System (2.1) streng genommen nicht kanonisch ist.

$$\bar{H}(p_1,\cdots,q_3,t,\varepsilon) = H(p_1,\cdots,q_3,\tau_1,\tau_2,\cdots,\varepsilon) \tag{2.2}$$

mit

$$\tau_i := \varepsilon^i t \tag{2.3}$$

und denken uns die Funktion H nach Potenzen von ε entwickelt+),

$$H(p_1,\cdots,q_3,\tau_1,\tau_2,\cdots,\varepsilon) = \sum_{\nu\geq 0} \varepsilon^\nu H_\nu(p_1,\cdots,q_3,\tau_1,\tau_2,\cdots)\,. \tag{2.4}$$

Die Bewegungsgleichungen

$$\frac{dp_i}{dt} = -\varepsilon^{i-1} H_{/q_i}\,,\quad \frac{dq_i}{dt} = \varepsilon^{i-1} H_{/p_i}\,,\quad \frac{d\tau_i}{dt} = \varepsilon^i \tag{2.5}$$

sind nun autonom. Um sie auch noch kanonisch zu machen, definieren wir

$$P := (p_1,p_2,p_3,\tau_1,\tau_2,\cdots)\,,\quad Q := (q_1,\tfrac{1}{\varepsilon}q_2,\tfrac{1}{\varepsilon^2}q_3,\tfrac{1}{\varepsilon}E_0,\tfrac{1}{\varepsilon}E_1,\cdots) \tag{2.6}$$

als kanonische Variablen, und

$$\begin{aligned} K(P,Q,\varepsilon) &:= H(p_1,\cdots,q_3,\tau_1,\tau_2,\cdots,\varepsilon) - \sum_{\nu\geq 0}\varepsilon^\nu E_\nu \\ &= \sum_{\nu\geq 0}\varepsilon^\nu (H_\nu - E_\nu) = \sum_{\nu\geq 0}\varepsilon^\nu K_\nu(P,Q) \end{aligned} \tag{2.7}$$

als Hamilton-Funktion. Wenn wir noch die Anfangsbedingungen

$$K_\nu = 0 \tag{2.8}$$

+) Durch die Einführung von Zeitskalen erreichen wir, daß auch die niedrigeren Ordnungen von Funktionen, deren Zeitableitungen von höherer Ordnung sind, zeitabhängig sein können.

hinzunehmen, so ist das durch (2.7) definierte autonome System den ursprünglichen Gleichungen äquivalent.

Nach diesen Vorbereitungen läßt sich das Mittelungsverfahren Schritt für Schritt auf besonders einfache Weise anwenden. Wir beschränken uns dabei auf die niedrigste Ordnung. In der Notation von § 1) setzen wir

$$x = (p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, q_3, \tau_1, E_0, \tau_2, E_1, \cdots), \quad s = t . \tag{2.9}$$

Die rechte Seite von (1.4) ist dann

$$f = (-H_{/q_1}, H_{/p_1}, -\varepsilon H_{/q_2}, \varepsilon H_{/p_2}, -\varepsilon^2 H_{/q_3}, \varepsilon^2 H_{/p_3}, \varepsilon, \varepsilon H_{/\tau_1}, \varepsilon^2, \varepsilon H_{/\tau_2}, \cdots). \tag{2.10}$$

Hieraus folgt, daß alle Komponenten von x, mit Ausnahme der ersten beiden, Konstanten der Bewegung nullter Ordnung sind. Eine weitere Konstante ist die Hamilton-Funktion K . Dementsprechend setzen wir

$$y = (K, p_2, q_2, \cdots) = z + O(\varepsilon) . \tag{2.11}$$

Die Schleifen liegen also ganz in der (p_1, q_1)-Ebene, weswegen nur der erste Term des Integranden in

$$M = \oint_{z=\mathrm{const}} \sum_i P_i \, dQ_i = \oint_{y_0=\mathrm{const}} \sum_i P_i \, dQ_i + O(\varepsilon) \tag{2.12}$$

übrigbleibt. Wir haben also

$$M_0 = \oint p_1(K_0, p_2, q_2, p_3, q_3, \tau_1, E_0, \tau_2, E_1, \cdots, q_1) \, dq_1 , \tag{2.13}$$

wo der Integrand aus den verschiedenen Zweigen der Umkehrfunktion von K_0 besteht, und die Integrationsgrenzen so zu wählen sind, daß das Integral einem Umlauf-Integral längs der Schleifen entspricht. Da p_1 nur über die Summe $K_0+E_0=H_0$ von den Größen K_0 und E_0 abhängt, und für $i\geq 1$ darüber hinaus unabhängig von E_i ist, kann man

$$
\begin{aligned}
&M_0(H_0, p_2, q_2, p_3, q_3, \tau_1, \tau_2, \dots) \\
&= \oint p_1(H_0, p_2, q_2, p_3, q_3, \tau_1, \tau_2, \dots, q_1)\, dq_1
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

schreiben. Der Integrand ist nun die Umkehrfunktion von H_0. Setzt man nach der Integration H_0 als Funktion seiner Argumente ein, so erhält man die adiabatische Invariante nullter Ordnung als Funktion der ursprünglichen dynamischen Variablen,

$$
M_0(p_1, \dots, q_3, \tau_1, \tau_2, \dots) = M_0(H_0(p_1, \dots, q_3, \tau_1, \dots), p_2, \dots, q_3, \tau_1, \dots). \tag{2.15}
$$

Die zu M gehörige Phase φ_M wird in dieser Arbeit nie explizit benutzt werden. Wir werden lediglich den Mittelungsoperator (1.16) benötigen. Dieser ist

$$
\langle \dots \rangle_M = \int_0^1 d\varphi_M \dots = \frac{\oint dq_1 \dots / H_{0/p_1}}{\oint dq_1 / H_{0/p_1}} \tag{2.16}
$$

wobei der Integrationsweg derselbe ist wie in (2.14).

Jetzt können wir alle vorhergehenden Manipulationen wieder vergessen, und es genügt, wenn wir uns folgendes merken: Hat man Bewegungsgleichungen des Typs (2.5) vorliegen, und besitzt die Funktion H die genannten Eigenschaften, so ist die durch (2.14) definierte Größe M_0 der erste Term einer adiabatischen

Invarianten. Wir bemerken noch, daß die Geschlossenheit der Kurven H_0 = const eine Bedingung dafür ist, daß die Größe M_0 definiert ist, während man $\partial H/\partial \tau_0 = 0$ fordern muß, damit M eine adiabatische Invariante ist. Ersteres nennen wir künftig die Bedingung für die Konstruierbarkeit, letzteres die Bedingung für die Konstanz der adiabatischen Invarianten.

Wir wenden uns nun dem reduzierten System zu. Hierzu betrachten wir die Funktion $H_0'(M, p_2, q_2, p_3, q_3, \tau_1, \tau_2, ---)$, die man durch Auflösen von (2.14) nach H_0 gewinnt, und für die natürlich die Identität

$$H_0'(M_0(p_1, \cdots, q_3, \tau_1, \cdots), p_2, \cdots, q_3, \tau_1, \cdots) = H_0(p_1, \cdots, q_3, \tau_1, \cdots) \qquad (2.17)$$

gilt. Wir wollen beweisen, daß für das reduzierte System wieder die Gln (2.5) (diesmal allerdings für i = 2,3) gelten, wobei nur H durch H' zu ersetzen ist, und H_0' die niedrigste Ordnung von H' ist. Wegen der Mittelungseigenschaft des reduzierten Systems genügt es zu zeigen, daß die Ableitungen von H_0' gleich den Mittelwerten der Ableitungen von H_0 sind. Dies geschieht wie folgt nach den Regeln der Differentiation von impliziten Funktionen:

$$H_{0/\alpha}' = -\frac{M_{0/\alpha}}{M_{0/H_0}} = -\frac{\oint dq_1\, p_{1/\alpha}}{\oint dq_1\, p_{1/H_0}} = -\frac{\oint dq_1\, H_{0/\alpha}/H_{0/p_1}}{\oint dq_1 / H_{0/p_1}} = \langle H_{0/\alpha}\rangle_M . \qquad (2.18)$$

α steht hier für irgendein Argument der Funktion H_0'.

Als Nebenprodukt erhalten wir eine Aussage über die zeitliche Änderung von M_0. Nach (1.21) gilt

$$\frac{d}{dt} M_0 = O(\varepsilon) . \qquad (2.19)$$

Aus den Gleichungen des reduzierten Systems folgt darüberhinaus, daß sich M_0 im Mittel um eine Ordnung langsamer ändert:

$$\left\langle \frac{dM_0}{dt} \right\rangle = \left\langle M_{0/q_2} \frac{dq_2}{dt} + M_{0/p_2} \frac{dp_2}{dt} + M_{0/H_0} \frac{dH_0}{dt} + M_{0/\tau_1} \frac{d\tau_1}{dt} + O(\varepsilon^2) \right\rangle$$

$$= M_{0/q_2} \left\langle \frac{dq_2}{dt} \right\rangle + M_{0/p_2} \left\langle \frac{dp_2}{dt} \right\rangle + \varepsilon\, M_{0/H_0} \left\langle H_{0/\tau_1} \right\rangle + \varepsilon\, M_{0/\tau_1} + O(\varepsilon^2)$$

$$= \varepsilon (H'_{0/M})^{-1} \left\{ H'_{0/q_2} \langle H_{0/p_2} \rangle - H'_{0/p_2} \langle H_{0/q_2} \rangle + \langle H_{0/\tau_1} \rangle - H'_{0/\tau_1} \right\} + O(\varepsilon^2).$$

Aus (2.18) folgt das Verschwinden der Klammer, und damit

$$\left\langle \frac{dM_0}{dt} \right\rangle = O(\varepsilon^2)\ . \tag{2.20}$$

Diese Eigenschaft der adiabatischen Invarianten niedrigster Ordnung, von der wir in dieser Arbeit keinen Gebrauch machen, wird in der älteren Literatur [13, 14] als "adiabatische Invarianz" bezeichnet.

Da das reduzierte System wiederum in der Form (2.5) vorliegt, geschieht die zweite bzw. die dritte Reduktion in analoger Weise. Die Voraussetzungen für die Konstruierbarkeit und die Konstanz der zweiten bzw. dritten adiabatischen Invarianten sind dann die Geschlossenheit der Kurven H'_0 = const bzw. H''_0 = const, und $H'_{/\tau_1} = 0$ bzw. $H''_{/\tau_2} = 0$. Bei der Anwendung auf die Bewegung eines geladenen Teilchens werden wir nur die sich in niedrigster Ordnung ergebenden Bedingungen

$$H_{0/\tau_0} = 0\ , \tag{2.21}$$

$$H'_{0/\tau_1} = \langle H_{0/\tau_1} \rangle_M = 0 \quad , \tag{2.22}$$

$$H''_{0/\tau_2} = \langle H'_{0/\tau_2} \rangle_\gamma = \langle \langle H_{0/\tau_2} \rangle_M \rangle_\gamma = 0 \tag{2.23}$$

verifizieren. Wir werden jedoch davon Gebrauch machen, daß aus

$$H_{/\tau_0} = H_{/\tau_1} = H_{/\tau_2} = 0 \tag{2.24}$$

die Konstanz aller drei adiabatischen Invarianten in allen Ordnungen folgt.

§ 3) Die dimensionslose Form der Bewegungsgleichungen eines geladenen Teilchens.

Die Gleichungen für die Bewegung eines geladenen Teilchens in einem vorgegebenen elektromagnetischen Feld sind

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{e}{m}\left(\mathfrak{E}(\mathfrak{r},t) + \mathfrak{v} \times \mathfrak{B}(\mathfrak{r},t)\right), \tag{3.1}$$

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \mathfrak{v} \quad . \tag{3.2}$$

Das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ und das Magnetfeld $\mathfrak{B}$ sind durch die Induktionsgleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = 0 \tag{3.3}$$

miteinander verknüpft, und das Magnetfeld genügt außerdem der Flußerhaltungsbedingung

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{B} = 0 \; . \tag{3.4}$$

Durch Einführung von charakteristischen Größen machen wir die Gleichungen (3.1 - 4) dimensionslos. Hierbei wird eine dimensionslose Kombination dieser charakteristischen Größen auftreten, die wir dann ε nennen. Da unsere Gleichungen Galilei-covariant sind, wird es nützlich sein, den Parameter ε Galilei-invariant zu machen. Dies geschieht am besten dadurch, daß wir von vornherein alle charakteristischen Größen so definieren, daß sie ebenfalls Galilei-invariant sind. Eine Galilei-Transformation ist der Übergang von einem Bezugssystem ($\mathfrak{r}$, t) zu einem dazu mit einer beliebigen konstanten

Geschwindigkeit $\bar{\mathfrak{u}}$ bewegten anderen Bezugssystem ($\mathfrak{r}'$, t'):

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} - \bar{\mathfrak{u}} t , \tag{3.5}$$

$$t' = t . \tag{3.6}$$

Geschwindigkeit und Felder transformieren sich hierbei nach den Regeln

$$\mathfrak{v}' = \mathfrak{v} - \bar{\mathfrak{u}} , \tag{3.7}$$

$$\mathfrak{b}'(\mathfrak{r}', t') = \mathfrak{b}(\mathfrak{r}, t) , \tag{3.8}$$

$$\mathfrak{e}'(\mathfrak{r}', t') = \mathfrak{e}(\mathfrak{r}, t) + \bar{\mathfrak{u}} \times \mathfrak{b}(\mathfrak{r}, t) . \tag{3.9}$$

Wir führen nun die folgenden charakteristischen Größen ein:

B_0 für den Betrag der magnetischen Feldstärke.
L für die Länge, über welche sich das Magnetfeld wesentlich ändert.
T für die Gyrationszeit.
v_0 für die Geschwindigkeit des Teilchens.
e_0 für die Elementarladung.
m_0 für die Masse eines Elektrons.

Von dem Magnetfeld nehmen wir an, daß es in einem endlichen raum-zeitlichen Gebiet vorgegeben sei, und dort keine Singularitäten und keine Nullstellen hat. Dann lassen sich die (trivialerweise Galilei-invarianten) Größen B_0 und L auf vernünftige Weise definieren. Der Einfachheit halber setzen wir noch voraus, daß das betrachtete Gebiet einfach zusammenhängt, daß seine räumlichen Abmessungen in allen Richtungen von der Größenordnung L sind, und daß die Feldlinien von $\mathfrak{B}$ sich weder schließen noch über eine Länge, die groß gegen L ist, im Gebiet bleiben. Außerdem nehmen wir an, daß wir es mit einem allgemeinen Magnetfeld zu tun haben. Damit meinen wir, daß es keine Symmetrien aufweist. Hierdurch beschränken wir uns auf die Fälle, in denen es keine exakten Konstanten der Teilchenbewegung gibt, und in denen deshalb die adiabatischen Invarianten besonders wichtig sind.

Für die charakteristische Gyrationszeit setzen wir

$$T = \frac{m_0}{e_0 B_0} \quad . \tag{3.10}$$

Dies ist die einzige charakteristische Zeit, die sich Galilei-invariant definieren läßt. Aus diesem Grunde vermeiden wir die Einführung von charakteristischen Zeiten für die Feldänderungen und machen dafür später gewisse Annahmen über die Abhängigkeit der dimensionslosen Felder von der mit Hilfe von T dimensionslos gemachten Zeit.

Um eine Galilei-invariante Definition von v_0 zu finden, benutzen wir das Geschwindigkeitsfeld

$$\mathfrak{w}_0(\mathfrak{r},t) = \frac{\mathfrak{E}\times\nabla B + (\mathfrak{b}\cdot\mathrm{rot}\,\mathfrak{E})\cdot\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}\cdot\nabla B} \quad . \tag{3.11}$$

B ist der Betrag von $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{b}$ der Einheitsvektor in Richtung von $\mathfrak{B}$. Man verifiziert leicht, daß sich $\mathfrak{w}_0$ wie eine Geschwindigkeit transformiert. Falls $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B}$ überall senkrecht zueinander sind, gilt $\mathfrak{E} + \mathfrak{w}_0 \times \mathfrak{B} = 0$. Dann kann also höchstens die zu $\mathfrak{b}$ parallele Komponente von $\mathfrak{v}_0$ singulär werden. Wir werden später, als Bedingung für die Konstanz der ersten adiabatischen Invarianten, fordern müssen, daß dieser Fall in niedrigster Ordnung vorliegt. Aus der Bedingung für die Konstanz der zweiten adiabatischen Invarianten wird dann folgen, daß auch die Parallelkomponente von $\mathfrak{v}_0$ regulär ist+). v_0 soll nun ein charakteristischer Wert des Betrages von $\mathfrak{v} - \mathfrak{v}_0$ sein. Hier im Einzelteilchenbild können wir uns diesen als Anfangswert vorstellen. Später, wenn wir ein Plasma behandeln werden, denken wir uns ihn als einen mit Hilfe der Verteilungsfunktionen gebildeten Mittelwert.

Für das elektrische Feld führen wir keine charakteristischen Werte ein, sondern machen es mit Hilfe der Größe $v_0 B_0$ dimensionslos, um dann hinterher Annahmen über seine Stärke, und seine Abhängigkeit von Ort und Zeit zu machen.

Gehen wir mit den dimensionslosen Größen

$$\bar{\mathfrak{r}} := \frac{1}{L}\mathfrak{r}, \quad \bar{t} := \frac{1}{T}t, \quad \bar{\mathfrak{v}} := \frac{1}{v_0}\mathfrak{v},$$

$$\bar{\mathfrak{b}}(\bar{\mathfrak{r}},\bar{t}) := \frac{1}{B_0}\mathfrak{b}(\mathfrak{r},t), \quad \bar{\mathfrak{E}}(\bar{\mathfrak{r}},\bar{t}) := \frac{1}{v_0 B_0}\mathfrak{E}(\mathfrak{r},t), \tag{3.12}$$

$$\bar{e} := \frac{1}{e_0}e, \quad \bar{m} = \frac{1}{m_0}m,$$

in die Gleichungen (3.1 - 4) ein, und lassen die Querstriche dann gleich wieder weg, so erhalten wir

---

+) Interessiert man sich nur für die erste adiabatische Invariante, so ist es nicht nötig, $\mathfrak{v}_0$ in der Form (3.11) zu definieren, sondern es genügt, nur seine Senkrechtkomponente als von Null verschieden, und mit (3.11) übereinstimmend anzunehmen.

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \tag{3.13}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \varepsilon \mathbf{v}, \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \varepsilon \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \tag{3.15}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \tag{3.16}$$

Der Parameter ε ist das Verhältnis von charakteristischem Gyrationsradius und charakteristischer Länge,

$$\varepsilon = \frac{m_0 v_0}{e_0 B_0 L}\,. \quad {}^{+)} \tag{3.17}$$

Obwohl wir die Felder hier als vorgegeben ansehen, nehmen wir an, daß sie von ε abhängen. In einem Plasma, wo die Felder von den Bewegungen der Teilchen beeinflußt werden, müssen wir dies sogar tun. Aus der Definition von B_0 und L folgt, daß das Magnetfeld und seine räumlichen Ableitungen von der Ordnung Eins sind. Zusätzlich setzen wir nun voraus, daß seine zeitliche Ableitung klein ist. Dementsprechend machen wir den allgemeinen Ansatz

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t, \varepsilon) = \sum_{\nu \geq 0} \varepsilon^{\nu} \mathbf{B}_{\nu}(\mathbf{r}, \tau_1, \tau_2, \ldots). \tag{3.18}$$

+) Die Größen e_0 und m_0 haben wir eingeführt, um einen einzigen, allen Teilchensorten gemeinsamen Entwicklungsparameter zu haben.

Über das elektrische Feld setzen wir voraus, daß es sich in derselben Form schreiben läßt:

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{r}, t, \varepsilon) = \sum_{\nu \geq 0} \varepsilon^{\nu} \mathfrak{E}_{\nu}(\mathfrak{r}, \tau_1, \tau_2, \cdots) . \tag{3.19}$$

Wie man aus der dimensionslosen Form

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} - \tilde{\mathfrak{u}} \tau_1 \tag{3.20}$$

der Galilei-Transformationen+) sieht, sind diese Ansätze in allen Inertialsystemen gleichzeitig erfüllbar.

Mit der Einführung verschiedener Zeitskalen haben wir sehr viel Freiheit eingeführt. Z.B. reicht die Induktionsgleichung nicht aus, die Abhängigkeit der einzelnen $\mathfrak{b}_{\nu}$ von den einzelnen τ_i festzulegen. Was das Magnetfeld betrifft, werden wir diese Willkür im nächsten § beseitigen. Was dagegen das elektrische Feld betrifft, so stellen wir uns vor, daß seine Abhängigkeit von den einzelnen Zeitskalen dadurch festgelegt werden kann, daß man von den selbstkonsistenten Feldern, die sich als Lösungen der Plasmagleichungen ergeben würden, Ordnung für Ordnung Säkularitätenfreiheit fordert.

Im Folgenden werden wir von jeder zeitabhängigen Funktion stillschweigend annehmen, daß sie in der Form (3.19 - 3.20) entwickelt vorliegt.

+) Da die Komponenten von $\tilde{\mathfrak{u}}$ beliebige, aber feste Größen sind, wäre es unsinnig, sie von ε abhängen zu lassen. Sie sind also von der Ordnung Eins.

§ 4) Die Transformation auf natürliche Koordinaten.

Wir schreiben die dimensionslosen Bewegungsgleichungen (3.17 - 18) zunächst in kanonischer Form. Hierzu drücken wir die Felder wie üblich gemäß

$$\mathfrak{B} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}, \tag{4.1}$$

$$\mathfrak{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \tag{4.2}$$

durch Potentiale aus. Die homogenen Maxwell-Gleichungen sind dann automatisch erfüllt, und

$$K(\vec{p}, \mathfrak{r}, t, \varepsilon) := \frac{1}{2}\left(\vec{p} - \frac{e}{m}\mathfrak{A}(\mathfrak{r}, t, \varepsilon)\right)^2 + \varepsilon\frac{e}{m}\varphi(\mathfrak{r}, t, \varepsilon) \tag{4.3}$$

ist eine adäquate Hamilton-Funktion. (3.14) ist jetzt als Definitionsgleichung für $\mathfrak{w}$ aufzufassen.

Ausgehend von der Hamilton-Funktion K führen wir eine kanonische Transformation

$$\vec{p}, \mathfrak{r} \longrightarrow P_i, Q_i \tag{4.4}$$

durch, die die Bewegungsgleichungen auf die gewünschte Form bringt. Als erzeugende Funktion wählen wir+)

$$F(\mathfrak{r}, \vec{P}, t, \varepsilon) = P_2\,\chi(\mathfrak{r}, t, \varepsilon) + P_3\,\beta(\mathfrak{r}, t, \varepsilon) + P_1\,\alpha(\mathfrak{r}, t, \varepsilon) - \frac{m}{e}P_1 P_3 \tag{4.5}$$

+) Eine Transformation dieser Art wurde erstmals in [15] eingeführt.

Die hier vorkommenden Hilfsfunktionen α , β und χ sind durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert: α und β sind sogenannte "Flußfunktionen", d.h. sie erfüllen die Beziehungen

$$\mathfrak{a} = \alpha \nabla \beta \,, \quad \mathfrak{b} = \nabla \alpha \times \nabla \beta \,. \tag{4.6}$$

Hieraus folgt, daß sie die Gleichungen

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \varepsilon \mathfrak{w} \cdot \nabla \alpha = 0 \,, \quad \frac{\partial \beta}{\partial t} + \varepsilon \mathfrak{w} \cdot \nabla \beta = 0 \tag{4.7}$$

befriedigen müssen+), wo $\mathfrak{w}$ irgendeine durch

$$\frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial t} = \varepsilon \operatorname{rot} (\mathfrak{w} \times \mathfrak{b}) \tag{4.8}$$

charakterisierte sog. "flußerhaltende" Geschwindigkeit [16] ist. Den Faktor ε haben wir eingeführt, damit $\mathfrak{w}$ von der Ordnung Eins ist. Die Freiheit in der Wahl der Parallelkomponente von $\mathfrak{w}$ nützen wir so aus, daß außerdem noch die Beziehung

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \varepsilon \mathfrak{w} \cdot \nabla B = 0 \tag{4.9}$$

erfüllt ist. Die anschauliche Bedeutung der beiden Forderungen an das Geschwindigkeitsfeld $\mathfrak{w}$ ist die, daß ein mitbewegter Beobachter keine zu $\mathfrak{b}$ senkrechte Komponente von $\mathfrak{E}$ und keine zeitliche Änderung von B bemerkt. Unter Zuhilfenahme der Induktionsgleichung findet man

$$\mathfrak{w} = \frac{(\mathfrak{E} + \nabla \varphi^*) \times \nabla B + (\mathfrak{b} \cdot \operatorname{rot} \mathfrak{E})\, \mathfrak{b}}{\mathfrak{b} \cdot \nabla B} \tag{4.10}$$

+) "$\partial/\partial t$" steht hier und im Folgenden als Abkürzung für "$\sum \varepsilon^i \partial/\partial t_i$".

als allgemeinste Lösung der Gleichungen (4.8 - 9), wo φ^* irgend eine Lösung der Gleichung

$$\mathfrak{b}\cdot(\mathfrak{e}+\nabla\varphi^*) = 0 \tag{4.11}$$

ist. Da die Funktion φ^* nur bis auf eine auf den Feldlinien konstante, sonst aber beliebige Funktion bestimmt ist, ist $\mathfrak{w}$, und damit die zeitliche Entwicklung der Flußfunktionen, nicht eindeutig festgelegt. Wir werden jedoch später sehen, daß φ^* von der Ordnung ε sein muß. Deshalb ist $\mathfrak{w}$ in nullter Ordnung eindeutig bestimmt, und gleich dem in § 3) eingeführten Bezugsgeschwindigkeitsfeld $\mathfrak{w}_0$. Da die Flußfunktionen längs der Feldlinien konstant sind, können sie als Koordinaten der sich mit der Geschwindigkeit $\varepsilon\mathfrak{w}$ bewegenden Feldlinien aufgefaßt werden. Die Freiheit, die wir in der Wahl der Anfangswerte haben, denken wir uns so ausgenützt, daß sie beide von der Ordnung Eins sind. Die Funktion χ wählen wir so, daß sie ebenfalls von der Ordnung Eins ist, und zusammen mit den Flußfunktionen ein sich lokal mit der Geschwindigkeit $\varepsilon\mathfrak{w}$ bewegendes+) krummliniges Koordinatensystem im Ortsraum bildet, d.h. wir fordern

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} + \varepsilon\mathfrak{w}\cdot\nabla\chi = 0 \tag{4.12}$$

für ihre Zeitabhängigkeit, und

$$D \neq 0 \tag{4.13}$$

für die Funktionaldeterminante

$$D := (\nabla\alpha \times \nabla\beta)\cdot\nabla\chi = \mathfrak{b}\cdot\nabla\chi\,. \tag{4.14}$$

+) Man beachte, daß die Feldliniengeschwindigkeit selbst dann, wenn das Magnetfeld statisch ist, i.A. nicht verschwindet. Notwendig und hinreichend hierfür ist vielmehr $\mathfrak{e}+\nabla\varphi^*=0$.

Da letztere die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \varepsilon\, \mathrm{div}(D\mathbb{D}) = 0 \tag{4.15}$$

erfüllt, ist (4.13) nur eine Anfangsbedingung. Aus der Potentialdarstellung des elektrischen Feldes und den bisher angegebenen Eigenschaften der Flußfunktionen und der Feldliniengeschwindigkeit folgt

$$\mathfrak{E} = -\nabla\varphi^* + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\beta}{\partial t}\nabla\alpha - \frac{\partial\alpha}{\partial t}\nabla\beta\right) \tag{4.16}$$

und

$$\varphi^* = \varphi + \frac{1}{\varepsilon}\alpha\frac{\partial\beta}{\partial t}. \tag{4.17}$$

Nun wollen wir noch die Abhängigkeit der Funktionen α , β und χ von den einzelnen Zeitskalen festlegen. Hierfür bietet sich als einfachste Möglichkeit

$$\frac{\partial\alpha_\nu}{\partial\tau_i} + \mathbb{D}_{i-1}\cdot\nabla\alpha_\nu = \frac{\partial\beta_\nu}{\partial\tau_i} + \mathbb{D}_{i-1}\cdot\nabla\beta_\nu = \frac{\partial\chi_\nu}{\partial\tau_i} + \mathbb{D}_{i-1}\cdot\nabla\chi_\nu = 0. \tag{4.18}$$

Die Forderungen (4.7) und (4.12) sind dann erfüllt, und für das Magnetfeld folgt

$$\frac{\partial\mathfrak{B}_\nu}{\partial\tau_i} = \mathrm{rot}(\mathbb{D}_{i-1}\times\mathfrak{B}_\nu). \tag{4.19}$$

Die einzige Willkür liegt somit in der Wahl der Anfangswerte der verschiedenen Ordnungen der Funktionen α , β und χ .

Die kanonische Transformation (4.4) ist durch

$$p_i = F_{/x_i}\,, \quad Q_i = F_{/P_i} \tag{4.20}$$

definiert. Wir wollen die Rechnungen hier nicht im Einzelnen durchführen, sondern einfach das Resultat hinschreiben, welches sich ergibt, wenn man die drei Transformationen

$$\mathfrak{r},\mathfrak{v} \longrightarrow \mathfrak{r},\vec{P} \longrightarrow P_i,Q_i \longrightarrow p_i,q_i\,, \tag{4.21}$$

deren letzte die einfache Skalentransformation

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{\varepsilon}P_1\,, \qquad p_2 = \frac{1}{\varepsilon}P_2\,, \quad p_3 = \frac{m}{e}P_3\,, \\ q_1 &= \frac{1}{\varepsilon}\frac{e}{m}Q_1\,, \quad q_2 = Q_2\,, \quad q_3 = Q_3 \end{aligned} \tag{4.22}$$

ist, hintereinander ausführt. Das Ergebnis ist

$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{(\mathfrak{v}\times\nabla\chi)\cdot\nabla\beta}{D}\,, \qquad q_1 = -\frac{(\mathfrak{v}\times\nabla\chi)\cdot\nabla\alpha}{D}\,, \\ p_2 &= \frac{\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{b}}{D}\,, \qquad q_2 = \chi\,, \\ p_3 &= \alpha + \varepsilon\frac{m}{e}\frac{(\mathfrak{v}\times\nabla\chi)\cdot\nabla\alpha}{D}\,, \quad q_3 = \beta + \varepsilon\frac{m}{e}\frac{(\mathfrak{v}\times\nabla\chi)\cdot\nabla\beta}{D}\,. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Aufgelöst nach $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{v}$ ist dies

$$\begin{aligned} \mathfrak{r} &= R\left(p_3 + \varepsilon\frac{m}{e}q_1,\, q_3 + \varepsilon\frac{m}{e}p_1,\, q_2,\, t,\, \varepsilon\right), \\ \mathfrak{v} &= p_1\nabla\alpha(R,t,\varepsilon) - q_1\nabla\beta(R,t,\varepsilon) + p_2\nabla\chi(R,t,\varepsilon)\,. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Die Funktion $\mathcal{R}$ ist durch

$$\mathcal{R}(\alpha(\mathfrak{r},t,\varepsilon),\beta(\mathfrak{r},t,\varepsilon),\chi(\mathfrak{r},t,\varepsilon),t,\varepsilon)=\mathfrak{r} \tag{4.25}$$

als Umkehrung der räumlichen Transformation $\mathfrak{r}\longrightarrow\alpha,\beta,\chi$ definiert. Da die Funktionaldeterminanten der Transformationen (4.21) der Reihe nach identisch gleich ε^3 bzw. 1 bzw. ε^{-3} sind, ist die Determinante der Transformation (4.23 - 24) identisch Eins. Die Transformationsgleichungen sind alle von der Ordnung Eins.

Die Hamiltonfunktion $\overline{K}$ für die Bewegung in den kanonischen Variablen (P_i , Q_i) ist

$$\overline{K}=K+\frac{\partial F}{\partial t} \tag{4.26}$$

Definieren wir die Funktion H durch

$$H(p_1,\cdots,q_3,t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^2}\overline{K}(P_1,\cdots,Q_3,t,\varepsilon), \tag{4.27}$$

so gelten für die Variablen (p_1,q_1,p_2,q_2,p_3,q_3) die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{dp_1}{dt}&=-\frac{e}{m}H_{/q_1},\quad \frac{dp_2}{dt}=-\varepsilon H_{/q_2},\quad \frac{dp_3}{dt}=-\varepsilon^2\frac{m}{e}H_{/q_3},\\ \frac{dq_1}{dt}&=\frac{e}{m}H_{/p_1},\quad \frac{dq_2}{dt}=\varepsilon H_{/p_2},\quad \frac{dq_3}{dt}=\varepsilon^2\frac{m}{e}H_{/p_3}.\end{aligned} \tag{4.28}$$

Dies sind, bis auf triviale Faktoren, die Gleichungen (2.1). Deshalb nennen wir die Größen (p_1,q_1,p_2,q_2,p_3,q_3) "natürliche Koordinaten". Für die Funktion H findet man

$$H=\frac{1}{2}\mathfrak{w}^2-\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{D}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{e}{m}\varphi^*. \tag{4.29}$$

Dies ist mit Hilfe der Transformationsgleichungen (4.24) als Funktion der natürlichen Koordinaten zu schreiben.

Damit H und alle seine Ableitungen von der Ordnung Eins sind, muß φ^* von der Ordnung ε sein,

$$\varphi^*(\mathfrak{r}, t, \varepsilon) = \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu \varphi^*_\nu(\mathfrak{r}, \tau_1, \tau_2, \cdots) . \tag{4.30}$$

Hieraus folgt

$$\mathfrak{t}_0 \cdot \mathfrak{b}_0 = 0 . \tag{4.31}$$

Die anschauliche Bedeutung der natürlichen Variablen ist die folgende: p_1 und q_1 sind im wesentlichen zwei Komponenten der Teilchengeschwindigkeit quer zum Magnetfeld. p_2 und q_2 sind Geschwindigkeit und Ort längs der Feldlinien. p_3 und q_3 sind in nullter bzw. erster Ordnung die Koordinaten der Feldlinie, auf der sich das Teilchen bzw. sein Gyrationszentrum befindet. Der erste Freiheitsgrad beschreibt also die schnelle Gyration des Teilchens um die Feldlinien, der zweite die langsamere Bewegung entlang den sich bewegenden Feldlinien, der dritte schließlich die ganz langsame Drift des Gyrationszentrums.

Die Hamiltonfunktion (4.29) ist (als Funktion ihrer Argumente) nicht Galilei-invariant. Dieser Schönheitsfehler hat zur Folge, daß die Bedingungen für die Konstanz der adiabatischen Invarianten nur in einem ausgezeichneten Inertialsystem erfüllt sein müssen. Dies spricht dafür, daß man diese Theorie mit anderen Variablen noch eleganter formulieren kann.

§ 5) Die drei adiabatischen Invarianten eines geladenen Teilchens

In diesem § wenden wir die Ergebnisse von § 2) auf die Hamiltonfunktion (4.29) an. Die Konstruktion der adiabatischen Invarianten niedrigster Ordnung ist jetzt trivial, und das Hauptproblem wird darin liegen, die Bedingungen für deren Konstruierbarkeit und Konstanz als Bedingungen an die Felder zu formulieren. Die Hamiltonfunktion ist in nullter Ordnung

$$H_0 = \frac{1}{2}\left(p_1 \nabla\alpha_0 - q_1 \nabla\beta_0 + p_2 \nabla\chi_0\right)^2 + p_1 \frac{\partial\alpha_0}{\partial\tau_1} - q_1 \frac{\partial\beta_0}{\partial\tau_1} + p_2 \frac{\partial\chi_0}{\partial\tau_1} + \frac{e}{m}\varphi_1^* . \tag{5.1}$$

In den Ortsfunktionen hat man jetzt

$$\mathfrak{r} = R_0(p_3, q_3, q_2, \tau_1, \tau_2, \dots) \tag{5.2}$$

einzusetzen.

Die Abhängigkeit von den Variablen p_1, q_1 und p_2 kommt in (5.1) explizit zum Ausdruck. Die Kurven $H_0 =$ const entsprechen den Gyrationskreisen im Geschwindigkeitsraum. In der (p_1, q_1)-Ebene sind dies Ellipsen. Die Voraussetzung für die Konstruierbarkeit der ersten adiabatischen Invarianten

$$M = \oint p_1 \, dq_1 + O(\varepsilon) \tag{5.3}$$

ist somit erfüllt. Diese ist in niedrigster Ordnung gleich der Fläche dieser Ellipsen. Eine elementare Rechnung ergibt

$$M_0 = 2\pi (B_0)^{-1} \left\{ H_0 - \frac{e}{m}\varphi_1^* + \frac{1}{2} D_0^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{D_0}{B_0} p_2 - V_{0\parallel}\right)^2 \right\} , \tag{5.4}$$

oder, nach Einsetzen für H_0,

$$M_0 = \frac{\pi}{B_0}(\mathfrak{w} - \mathfrak{W}_0)_\perp^2 = \frac{\pi}{B_0}\left(\mathfrak{w}_\perp - \frac{\mathfrak{E}_0 \times \mathfrak{B}_0}{B_0^2}\right)^2. \tag{5.5}$$

$\mathfrak{w}_\perp$ ist die zu $\mathfrak{B}_0$ senkrechte Komponente der Teilchengeschwindigkeit. Aufgrund unserer Voraussetzung, daß die Felder nicht von τ_0 abhängen, ist auch die Bedingung für die Konstanz des magnetischen Momentes M automatisch erfüllt. Durch Auflösen von (5.4) nach H_0 gewinnt man die Hamiltonfunktion

$$H_0' = \frac{e}{m}\varphi_1^* + \frac{M}{2\pi}B_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{p_0}{B_0}p_2 - V_{0\parallel}\right)^2 - \frac{1}{2}\mathfrak{W}_0^2 \tag{5.6}$$

für die über die Gyration gemittelte Bewegung niedrigster Ordnung. Die Gleichungen für diese Bewegung sind

$$\frac{dp_2}{dt} = -\varepsilon H'_{0/q_2}, \quad \frac{dp_3}{dt} = -\varepsilon^2 \frac{m}{e} H'_{0/q_3}, \qquad \frac{dM}{dt} = 0 \tag{5.7}$$
$$\frac{dq_2}{dt} = \varepsilon H'_{0/p_2}, \quad \frac{dq_3}{dt} = \varepsilon^2 \frac{m}{e} H'_{0/p_3},$$

und führen auf die wohlbekannten [17] sog. "Driftgleichungen". Die schnelle Gyration wird jetzt durch

$$\frac{d\varphi_M}{dt} = \frac{e}{m} H'_{0/M} = \frac{1}{2\pi}\frac{e B_0}{m} \tag{5.8}$$

beschrieben.

Die zweite adiabatische Invariante heißt "longitudinale Invariante" und ist in nullter Ordnung+)

+) In anderen Arbeiten über dieses Thema [13, 18] wurde $V_\parallel = 0$ gesetzt. Aus diesem Grund wurden stets unnötig einschränkende Bedingungen für die Konstanz von J formuliert.

$$\mathcal{J}_0 = \oint \left(\frac{B_0}{D_0} \sqrt{2\left(H_0' - \frac{e}{m}\varphi_1^* - \frac{M}{2\pi} B_0 + \frac{1}{2} \mathbb{D}_0^2 + V_{0\parallel}\right)} \right) d q_2 , \qquad (5.9)$$

falls das Integral definiert ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Radikand auf der betreffenden Feldlinie, zu dem betreffenden Zeitpunkt und für die betreffenden Werte der Parameter H_0' und M genau zwei Nullstellen besitzt und dazwischen positiv ist. Diese Nullstellen nennt man "Spiegelpunkte", weil sie den Stellen entsprechen, an denen das Teilchen während seiner Bewegung längs der Feldlinie reflektiert wird. Für große Werte von H_0' und M folgt aus der oben genannten Bedingung, daß der Betrag B_0 der magnetischen Feldstärke auf jeder Feldlinie genau ein Minimum haben muß. Deshalb kann die Ableitung $B_{0/s}$ von B_0 längs $\mathcal{b}_0$ nicht identisch verschwinden,

$$B_{0/s} \not\equiv 0 . \qquad (5.10)$$

Dies hatten wir bereits stillschweigend benutzt.

Die Bedingung für die Konstanz von $\mathcal{J}$ ist

$$H'_{0/\tau_1} = \left(\frac{e}{m}\varphi_1^* - \frac{1}{2}\mathbb{D}_0^2 + \frac{1}{2}V_{0\parallel}^2\right)_{/\tau_1} + \frac{M}{2\pi} B_{0/\tau_1}$$
$$+ \frac{1}{2} p_2^2 \left(\frac{D_0}{B_0}\right)_{/\tau_1} - p_2 \left(\frac{D_0 V_{0\parallel}}{B_0}\right)_{/\tau_1} = 0 . \qquad (5.11)$$

Da sie identisch in den Größen M und p_2 erfüllt sein muß, ist sie den vier Beziehungen

$$D_{0/\tau_1} = 0 , \qquad (5.12)$$

$$B_{0/\tau_1} = 0 , \qquad (5.13)$$

$$(V_{0\parallel})_{|\tau_1} = 0 , \qquad (5.14)$$

$$\left(\frac{e}{m}\varphi_1^* - \frac{1}{2}\mathfrak{v}_0^2\right)_{|\tau_1} = 0 \qquad (5.15)$$

äquivalent. Hieraus folgt, daß die Bedingung für die Konstruierbarkeit von γ während eines Zeitraums der Ordnung $1/\varepsilon$ erfüllt ist, falls sie es zu Anfang war.

Um die Bedingungen (5.12 - 15), in denen die Ableitungen nach τ_1 bei konstantgehaltenem p_3, q_3 und q_2 zu bilden sind, im Ortsraum zu formulieren, führen wir nun die Ableitungen bei konstantgehaltenem Ort ein. Da die Größen p_3, q_3 und q_2 in der hier betrachteten Ordnung gleich den Funktionen α_0, β_0 und χ_0 sind, und letztere den Gleichungen (4.18) genügen, geschieht dies nach der Regel

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau_1}\right)_{p_3, q_3, q_2} = \left(\frac{\partial}{\partial\tau_1}\right)_{\mathfrak{r}} + \mathfrak{v}_0\cdot\nabla . \qquad (5.16)$$

Gleichung (5.12) ist dann, da für D die Kontinuitätsgleichung (4.15) gilt, gleichbedeutend mit

$$\operatorname{div}\mathfrak{v}_0 = 0 . \qquad (5.17)$$

Gleichung (5.13) ist die niedrigste Ordnung von (4.9),

$$\frac{\partial B_0}{\partial\tau_1} + \mathfrak{v}_0\cdot\nabla B_0 = 0 \;^{+)} \qquad (5.18)$$

+) Hieraus folgt, daß sich B_0 in einem lokalen Feldminimum während der Dauer einer Oszillation nicht wesentlich ändern darf.

Daneben muß $\mathfrak{w}_0$ die niedrigste Ordnung der Induktionsgleichung, die sich wegen (5.17) als

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_0}{\partial \tau_1} + (\mathfrak{w}_0 \cdot \nabla)\mathfrak{B}_0 = (\mathfrak{B}_0 \cdot \nabla)\mathfrak{w}_0 \tag{5.19}$$

schreiben läßt, erfüllen. Für (5.14) findet man schließlich unter Benutzung von (5.18) und (5.19)

$$\mathfrak{B}_0 \cdot \left(\frac{\partial \mathfrak{w}_0}{\partial \tau_1} + (\mathfrak{w}_0 \cdot \nabla)\mathfrak{w}_0\right) + \mathfrak{w}_0 \cdot (\mathfrak{B}_0 \cdot \nabla)\mathfrak{w}_0 = 0 \, . \tag{5.20}$$

Wir interpretieren die Bedingungen (5.17 - 20) zusammen mit

$$\operatorname{div} \mathfrak{B}_0 = 0 \tag{5.21}$$

als Gleichungen für die Feldliniengeschwindigkeit $\mathfrak{w}_0$ +), deren Lösungen die zulässigen zeitlichen Änderungen des Magnetfeldes bei vorgegebenem Anfangswert definieren. Wegen

$$\mathfrak{E}_0 + \mathfrak{w}_0 \times \mathfrak{B}_0 = 0 \tag{5.22}$$

sind damit auch die zulässigen elektrischen Felder nullter Ordnung definiert. Bei vorgegebenem $\mathfrak{w}_0$ legt (5.15) darüberhinaus den seitlichen Verlauf der Parallelkomponente erster Ordnung des elektrischen Feldes fest.

Wir zeigen nun, daß die Lösungsmannigfaltigkeit der Gleichungen (5.17 - 21) nur von der Form der Feldlinien, nicht aber von der Feldstärke des Anfangs-Magnetfeldes abhängt. Hierzu betrachten wir das System

---

+) Da eine Lösung $\mathfrak{w}_0(\mathfrak{r},\tau_1)$ natürlich keine Singularitäten haben darf, und der in § 3) eingeführten Bezugsgeschwindigkeit proportional ist, ist unsere Art der Einführung des Entwicklungsparameters ε jetzt nachträglich gerechtfertigt.

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{D}_0 = 0 \,, \tag{5.23}$$

$$\mathfrak{b}_{0/\tau_1} = \mathfrak{D}_{0/s} \,, \tag{5.24}$$

$$\mathfrak{b}_0 \cdot \mathfrak{D}_{0/\tau_1} + \mathfrak{D}_0 \cdot \mathfrak{D}_{0/s} = 0 \,, \tag{5.25}$$

wo " $\cdots{}_{/s}$ " wieder die Ableitung längs der Feldlinien, und " $\cdots{}_{/\tau_1}$ " der Operator (5.16) ist+). Dieses System folgt aus (5.17 - 20). Umgekehrt gibt es aber auch zu jeder Lösung $\mathfrak{b}_0(\mathfrak{x},\tau_1)$ und $\mathfrak{D}_0(\mathfrak{x},\tau_1)$ von (5.23 - 25) eine Funktion $B_0(\mathfrak{x},\tau_1)$, mit der $\mathfrak{B}_0 := B_0\,\mathfrak{b}_0$ und $\mathfrak{D}_0$ eine Lösung von (5.17 - 21) bilden. Es genügt zu zeigen, daß die beiden Gleichungen

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{B}_0 = 0 \tag{5.26}$$

$$B_{0/\tau_1} = 0 \tag{5.27}$$

simultan gelöst werden können. Die Lösbarkeitsbedingung

$$(\mathrm{div}\,\mathfrak{b}_0)_{/\tau_1} \tag{5.28}$$

ist nun aufgrund von (5.23 - 24) stets erfüllt.

Die Lösungen $\mathfrak{D}_0$ = const entsprechen genau den Situationen,

---

+) Aus (5.23) folgt, daß diese beiden Differentiations-operatoren kommutieren.

in denen es ein Inertialsystem gibt, in welchem die Zeitableitungen des Magnetfeldes nullter Ordnung undder Parallelkomponente erster Ordnung des elektrischen Feldes von zweiter Ordnung klein sind, und in welchem außerdem das elektrische Feld nullter Ordnung verschwindet. Daß die longitudinale Invariante in solchen Feldern existiert, ist eine wohlbekannte Tatsache [13, 15, 18]. Da die Gleichungen (5.23 - 25) i.A. sicher auch nichttriviale Lösungen besitzen, gibt es jedoch allgemeinere Situationen, in denen diese Invariante konstant ist.

Von den Bedingungen (5.15) und (5.23 - 25) sind i.A. nur (5.23 - 24) Galilei-invariant. Notwendig und hinreichend für die Galilei-Invarianz von (5.15) bzw. (5.25) ist $\mathfrak{W}_{0/\tau_1} = 0$ bzw. $\mathfrak{W}_{0/s} = 0$. Daß diese beiden Beziehungen nicht notwendig aus unseren Gleichungen folgen, kann man anhand von einfachen Beispielen verifizieren. Es genügt also zu fordern, daß es irgendein Inertialsystem gibt, in welchem unsere Bedingungen erfüllt sind. Man beachte, daß die longitudinale Invariante nur in diesem System die Form (5.9) hat.

Wir beweisen nun noch, daß es i.A. nicht genügt, die Existenz eines Inertialsystems, in welchem die Zeitableitungen der Felder von zweiter Ordnung sind, zu fordern, sondern daß das Verschwinden des elektrischen Feldes nullter Ordnung dann wirklich noch eine notwendige Bedingung für die Konstanz von $\mathcal{J}$ ist. Hierzu benutzen wir die Gleichungen (5.17 - 19). Mit

$$\mathfrak{E}_0 = -\nabla\psi \tag{5.29}$$

gilt dann (wegen $\varphi_0^* = 0$)

$$\mathfrak{b}_0 \cdot \nabla\psi = 0 , \tag{5.30}$$

und

$$\mathfrak{W}_0 = \frac{\nabla B_0 \times \nabla \psi}{\mathfrak{b}_0 \cdot \nabla B_0} \tag{5.31}$$

ist die Lösung von (5.18 - 19). Die Bedingung (5.17) ist nun gleichbedeutend mit

$$(\nabla B_0 \times \nabla B_{0/s}) \cdot \nabla \psi = 0 \; . \tag{5.32}$$

Die beiden Gleichungen (5.30) und (5.32) für ψ können als von einander unabhängig angenommen werden, da aus dem Gegenteil eine sehr einschränkende Bedingung an das Magnetfeld folgen würde+). Aus den beiden Gleichungen für ψ folgt also

$$\nabla \psi = \lambda \, \mathfrak{b}_0 \times (\nabla B_0 \times \nabla B_{0/s}) , \tag{5.33}$$

wo λ irgendeine skalare Funktion ist. Bildet man hiervon die Rotation, und multipliziert das Ergebnis skalar mit ∇B_0 und mit $\nabla B_{0/s}$, so findet man

$$\lambda (\nabla B_0 \times \nabla B_{0/s}) \cdot \nabla B_{0/ss} = 0 \; . \tag{5.34}$$

Da das hier auftretende Spätprodukt i.A. nicht verschwindet (dies wäre z.B. bei Axialsymmetrie der Fall), folgt hieraus i.A. $\lambda = 0$, und somit $\mathfrak{E}_0 = 0$ und $\mathfrak{W}_0 = 0$. In dem hier betrachteten Fall gibt es also wirklich nur die trivialen Lösungen. Dieses Ergebnis sagt, daß elektrische Felder nullter Ordnung die longitudinale Invariante zerstören, falls das Magnet-

---

+) Es würde nämlich folgen, daß die Abschnitte aller Feldlinien zwischen je zwei magnetischen Isobaren gleich lang wären. In Minimum B Feldern ist dies z.B. nicht möglich.

feld statisch ist. Aus diesem Grunde ist jede Theorie der elektrostatischen Austausch-Instabilitäten, die die Konstanz der longitudinalen Invarianten voraussetzt, inkonsistent+).

Sind alle hier angegebenen Bedingungen erfüllt, so ist die durch Auflösen von (5.9) nach H_0' zu konstruierende Funktion $H_0''(M, \mathcal{J}, p_3, q_3, \tau_2, \tau_3, \ldots)$ eine Hamiltonfunktion für die über die Oszillation zwischen den Spiegelpunkten gemittelte Drift niedrigster Ordnung quer zum Magnetfeld, und die zugehörigen Bewegungsgleichungen sind

$$\frac{dp_3}{dt} = -\varepsilon^2 \frac{m}{e} H''_{0|q_3}, \quad \frac{dq_3}{dt} = \varepsilon^2 \frac{m}{e} H''_{0|p_3}, \qquad \frac{dM}{dt} = 0, \quad \frac{d\mathcal{J}}{dt} = 0. \tag{5.35}$$

Die Bewegung entlang der sich mit der Geschwindigkeit bewegenden Feldlinien wird nun durch

$$\frac{d\varphi_{\mathcal{J}}}{dt} = \varepsilon H''_{0|\mathcal{J}} \tag{5.36}$$

beschrieben. Die Flächen H_0'' = const werden "Driftflächen" genannt. Für jeden Wert der Parameter $M, \mathcal{J}$ und τ_i bilden diese eine Schar von zylinderartigen Flächen, deren Mantellinien die von Spiegelpunkten begrenzten Abschnitte von Feldlinien sind.

Sind die Driftflächen geschlossen, so ist die niedrigste Ordnung der dritten adiabatischen Invarianten definiert, und durch

$$\Phi_0(H_0'', M, \mathcal{J}, \tau_i) = \oint p_3(H_0'', M, \mathcal{J}, \tau_i; q_3)\, dq_3 \tag{5.37}$$

+) Dies gilt z.B. für [19].

gegeben. Da dies der magnetische Fluß durch die von den Driftflächen begrenzten Flußröhren ist, wird Φ "Flußinvariante" genannt. Die Bedingung

$$\frac{\partial H''}{\partial \tau_2} = 0 \qquad (5.38)$$

für die Konstanz von Φ wollen wir hier nicht weiter untersuchen.

Bildet man die Hamiltonfunktion $H'''(M, J, \Phi, \tau_3, \tau_4, \dots, \varepsilon)$ des dreifach reduzierten Systems (in niedrigster Ordnung ist dies die Umkehrfunktion von (5.37), so hat man die Bewegungsgleichungen des geladenen Teilchens asymptotisch auf die einfache Form

$$\frac{dM}{dt} = 0, \qquad \frac{dJ}{dt} = 0, \qquad \frac{d\Phi}{dt} = 0,$$
$$\frac{d\varphi_M}{dt} = \frac{e}{m} H'''_{|M}, \quad \frac{d\varphi_J}{dt} = \varepsilon H'''_{|J}, \quad \frac{d\varphi_\Phi}{dt} = \varepsilon^2 \frac{m}{e} H'''_{|\Phi} \qquad (5.39)$$

transformiert. Die Funktionaldeterminante der Transformation

$$\mathfrak{X}, \mathfrak{V} \longrightarrow M, J, \Phi, \varphi_M, \varphi_J, \varphi_\Phi \qquad (5.40)$$

auf zyklische Variable ist, da diese sich aus der Transformation (4.23 - 24) und drei weiteren kanonischen Transformationen zusammensetzt, identisch gleich Eins. Dies gilt natürlich auch für die hier diskutierte niedrigste Ordnung dieser Transformation. Die Hamiltonfunktionen der i-fach reduzierten Systeme, $i = 0, \dots, 3$ sind in dieser Ordnung (aber auch nur in dieser) alle gleich.

§ 6) Statische Magnetfelder

Im Hinblick auf die Anwendung der adiabatischen Entwicklung auf elektrostatische Instabilitäten behandeln wir jetzt den Fall, daß das Magnetfeld statisch ist, und stellen alle später benötigten Formeln, die sich in diesem Fall zum Teil stark vereinfachen, nochmals zusammen.

Wie wir im letzten § gezeigt haben, ist

$$\mathcal{E} = O(\varepsilon) \qquad (6.1)$$

notwendig für die Konstanz von $\mathcal{J}$. Wir nehmen also an, daß das elektrostatische Potential φ von der Ordnung ε ist, setzen aber außerdem noch voraus, daß es für $i < 3$ nicht von τ_i abhängt:

$$\varphi = \sum_{\nu \geq 1} \varepsilon^\nu \varphi_\nu(\mathcal{H}, \tau_3, \tau_4, \cdots). \qquad (6.2)$$

Wir zeigen nun, daß aus dieser Annahme die Konstanz aller drei adiabatischen Invarianten in allen Ordnungen folgt. Wir können jetzt nämlich die Funktion φ^* durch

$$\varphi^* := \varphi \qquad (6.3)$$

festlegen. Hieraus folgt

$$\mathcal{D} = 0 \qquad (6.4)$$

in allen Ordnungen, und wegen (4.18) gilt dann

$$\frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \tau_i} = \frac{\partial \beta_\nu}{\partial \tau_i} = \frac{\partial \chi_\nu}{\partial \tau_i} = 0 \qquad (6.5)$$

für alle ν und alle i . Die exakte Hamiltonfunktion

$$H(p_1,\cdots,q_3,\tau_i,\varepsilon) = \frac{1}{2}(p_1\nabla\alpha - q_1\nabla\beta + p_2\nabla\chi)^2 + \frac{1}{\varepsilon}\frac{e}{m}\varphi \tag{6.6}$$

hängt nur noch über φ von den τ_i ab. Es gilt also

$$\frac{\partial H}{\partial \tau_i} = 0 \quad , \quad i = 0,1,2 \tag{6.7}$$

womit alles bewiesen ist.

Setzen wir χ gleich der Bogenlänge längs der Feldlinien,

$$\chi = s, \tag{6.8}$$

so ist die Funktionaldeterminante D gleich der Feldstärke,

$$D = B, \tag{6.9}$$

und die nun zeitunabhängigen Transformationsgleichungen (4.23 - 24) werden in nullter Ordnung

$$p_1 = -\frac{(w \times \nabla s_0)\cdot\nabla\beta_0}{B_0}, \quad q_1 = -\frac{(w\times\nabla s_0)\cdot\nabla\alpha_0}{B_0},$$

$$p_2 = w\cdot b_0, \qquad q_2 = s_0, \tag{6.10}$$

$$p_3 = \alpha_0, \qquad q_3 = \beta_0,$$

bzw.

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{R}_0(p_3, q_3, q_2)\,, \tag{6.11}$$

$$\mathfrak{v} = p_1 \nabla\alpha_0 - q_1 \nabla\beta_0 + p_2 \nabla s_0\,. \tag{6.12}$$

Die Hamiltonfunktion nullter Ordnung ist

$$H_0 = \frac{1}{2}(p_1 \nabla\alpha_0 - q_1 \nabla\beta_0 + p_2 \nabla s_0)^2 + \frac{e}{m}\varphi_1\,, \tag{6.13}$$

und das magnetische Moment

$$M_0 = \frac{\pi v_\perp^2}{B_0} \tag{6.14}$$

hängt in dieser Ordnung weder von den τ_i , noch von der Masse und der Ladung des betrachteten Teilchens ab. Da die Phase φ_M im wesentlichen ein Winkel in der (p_1, q_1)-Ebene ist, und die Ortskoordinaten wegen der Transformationsgleichungen (6.11) nicht von p_1 und q_1 abhängen, hängen sie auch nicht von φ_M ab. Dies gilt dann natürlich auch für jede Ortsfunktion, wenn man sie als Funktion der adiabatischen Invarianten und der Phasen schreibt.

Die Hamiltonfunktion des einfach reduzierten Systems vereinfacht sich zu

$$H_0' = \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{M}{2\pi}B_0 + \frac{e}{m}\varphi_1\,. \tag{6.15}$$

Dementsprechend ist die longitudinale Invariante

$$\mathcal{J}_0 = \oint \sqrt{2\left(H_0' - \frac{M}{2\pi} B_0 - \frac{e}{m} \varphi_1\right)}\, dq_2 . \qquad (6.16)$$

Der Integrationsweg ist jetzt zu allen Zeiten derselbe, weil sich die Feldlinien nicht bewegen.

Für den späteren Gebrauch bemerken wir noch, daß die drei adiabatischen Invarianten von der Teilchengeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ nur über die Beträge der Parallel- und der Senkrechtkomponente abhängt. Wir drücken dies (in einer allerdings nicht ganz korrekten Schreibweise) durch

$$\begin{aligned} M_0 &= M_0(H, v_\perp^2), \\ \mathcal{J}_0 &= \mathcal{J}_0(H, v_\perp^2, v_\parallel^2, \tau_3, \cdots), \\ \Phi_0 &= \Phi_0(H, v_\perp^2, v_\parallel^2, \tau_3, \cdots) \end{aligned} \qquad (6.17)$$

aus. Dies gilt übrigens auch für die Phase φ_Φ .

II. DAS PLASMA

§ 7) Die Bewegungsgleichungen

Wir legen das System der Vlasov-Gleichungen in der ladungsneutralen Näherung zugrunde. Dieses besteht aus den kinetischen Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m}\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \tag{7.1}$$

für die Verteilungsfunktionen+) $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ der verschiedenen Plasma-Komponenten, aus der Galilei-invarianten Version der Maxwell-Gleichungen

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \tag{7.2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \tag{7.3}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \sum e \int d^3v \, \mathbf{v} \, f, \tag{7.4}$$

und aus der Neutralitätsbedingung

$$\sum e \int d^3v \, f = 0. \tag{7.5}$$

Die Summationen gehen über die Plasma-Komponenten. Diese Gleichungen unterscheiden sich von den sonst üblichen lorentz-invarianten Maxwell-Gleichungen dadurch, daß in (7.4)

+) Um unsere Symbole nicht mit Indices zu überladen, verzichten wir auf eine explizite Kennzeichnung der verschiedenen Teilchensorten.

der Verschiebungsstrom weggelassen wurde, und daß die Poisson-Gleichung durch die Neutralitätsbedingung ersetzt wurde. (7.2) und (7.5) sind nur Anfangsbedingungen. Dies folgt aus (7.3), und, mit (7.4), aus der Kontinuitätsgleichung für die Ladungsdichte, die wiederum eine Folge der kinetischen Gleichungen ist. Setzt man [4] weiter

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\mathfrak{b} = \frac{\partial}{\partial t}\sum e\int d^3v\, \mathfrak{w} f,$$

so ist auch (7.4) nur noch eine Anfangsbedingung. Benutzt man hier für die linke Seite das Induktionsgesetz, und für die rechte Seite die ersten Momente der kinetischen Gleichungen, so findet man

$$\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{E} + \sum\frac{e^2 n}{m}(\mathfrak{E}+\bar{\mathfrak{w}}\times\mathfrak{b}) = \sum\frac{e}{m}\operatorname{div}\Pi . \qquad (7.6)$$

Diese stoßfreie Version des Ohmschen Gesetzes kann als Gleichung für das elektrische Feld aufgefaßt werden. n ist die Teilchendichte, $\bar{\mathfrak{w}}$ die mittlere Geschwindigkeit, und Π der kinetische Spannungstensor der betreffenden Komponente.

Wir machen die Plasma-Gleichungen zunächst dimensionslos. Hierzu verwenden wir neben den schon in § 3) eingeführten charakteristischen Größen noch die Permeabilität μ_0 und, als Maß für die Teilchendichte, n_0. Mit diesen Größen läßt sich der weitere Parameter

$$\beta = \frac{m_0 n_0 v_0^2 \mu_0}{L} \qquad (7.7)$$

bilden. Er ist gleich einem charakteristischen Wert des Verhältnisses von Teilchendruck und magnetischem Druck. Die dimensionslosen Plasma-Gleichungen sind dann: Die

Vlasov-Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \varepsilon \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \tag{7.8}$$

die Induktionsgleichung

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \varepsilon \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \tag{7.9}$$

und das Ohmsche Gesetz

$$\varepsilon^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \beta \sum \frac{e^2 n}{m}(\mathbf{E} + \bar{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}) = \beta \varepsilon \sum \frac{e}{m} \operatorname{div} \Pi, \tag{7.10}$$

ergänzt durch die Flußerhaltung

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \tag{7.11}$$

das Verkettungsgesetz

$$\varepsilon \operatorname{rot} \mathbf{B} = \beta \sum e n \bar{\mathbf{v}} \tag{7.12}$$

und die Neutralitätsbedingung

$$\sum e n = 0 . \tag{7.13}$$

(7.11 - 13) sind nur Anfangsbedingungen. Die hier auftretenden Momente der Verteilungsfunktionen sind durch

$$n = \int d^3 v \, f, \tag{7.14}$$

$$\overline{\mathbf{v}} = \frac{1}{n}\int d^3v\, \mathbf{v} f, \tag{7.15}$$

$$\Pi = m\int d^3v\, \mathbf{v}\mathbf{v} f \tag{7.16}$$

definiert. Die Ergebnisse dieser Arbeit werden unabhängig von dem Parameter β sein. Dementsprechend lassen wir es offen, wie sich β verhalten soll, wenn ε klein wird.

Aus den Gleichungen (7.8 - 13) kann man einen Energiesatz herleiten. Die Energie ist

$$E = \frac{1}{\beta}\int d^3x \frac{1}{2}\mathcal{B}^2 + \sum m\int d^3x\, d^3v \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 f, \tag{7.17}$$

wobei die Ortsintegration über ein endliches Gebiet, außerhalb dessen die Verteilungsfunktionen identisch verschwinden, zu erstrecken ist. E ist genau dann eine Erhaltungsgröße, wenn das Oberflächenintegral des Poyntingvektors $\mathcal{E}\times\mathcal{B}$ verschwindet. Dies kann man durch geeignete Randbedingungen, wie z.B. perfekt leitende Wände, erreichen.

Angenommen die Felder erfüllen die Bedingungen für die Konstruierbarkeit und Konstanz der drei adiabatischen Invarianten und man kennt diese mitsamt ihren Phasen bis zu beliebig hohen Ordnungen. Dann kann man auch die Vlasov-Gleichungen (7.8) bis zu beliebig hohen Ordnungen lösen. Denn da die Bewegungsgleichungen der Teilchen die Charakteristiken der Vlasov-Gleichungen sind, ist jede Funktion, die nur über irgendwelche Konstanten der Teilchen-Bewegung von $\mathbf{r}, \mathbf{v}$ und t abhängt, eine Lösung der Vlasov-Gleichung. Die allgemeinste Lösung hängt von sechs unabhängigen Konstanten ab. Als solche wählen wir die drei adiabatischen

Invarianten $M, \mathcal{J}$ und Φ , sowie die Anfangswerte $\overline{\varphi_M}$, $\overline{\varphi_{\mathcal{J}}}$ und $\overline{\varphi_\Phi}$ der drei Phasen $\varphi_M, \varphi_{\mathcal{J}}$ und φ_Φ . Für letztere findet man durch Integration der Bewegungsgleichungen (5.30)

$$
\begin{aligned}
\overline{\varphi_M} &= \varphi_M - \frac{e}{m}\frac{\partial}{\partial M}\int_0^t dt'\, H'''(M,\mathcal{J},\Phi,t',\varepsilon)\,,\\
\overline{\varphi_{\mathcal{J}}} &= \varphi_{\mathcal{J}} - \varepsilon\frac{\partial}{\partial \mathcal{J}}\int_0^t dt'\, H'''(M,\mathcal{J},\Phi,t',\varepsilon)\,,\\
\overline{\varphi_\Phi} &= \varphi_\Phi - \varepsilon^2\frac{m}{e}\int_0^t dt'\, H'''(M,\mathcal{J},\Phi,t',\varepsilon)\,.
\end{aligned}
\tag{7.18}
$$

Als allgemeinste Lösungen der Vlasov-Gleichungen haben wir also

$$
f(\mathbf{r},\mathbf{v},t,\varepsilon) = G(M,\mathcal{J},\Phi,\overline{\varphi_M},\overline{\varphi_{\mathcal{J}}},\overline{\varphi_\Phi},\varepsilon)\,,
\tag{7.19}
$$

wo die Funktionen G weitgehend beliebig sind.

Wir führen nun Symbole für die Verteilungsfunktionen in den verschiedenen Variablen ein:

$$
\begin{aligned}
& f(\mathbf{r},\mathbf{v},t,\varepsilon)\,,\\
& g(p_1,p_2,p_3,q_1,q_2,q_3,t,\varepsilon)\,,\\
& g'(M,\varphi_M,p_2,p_3,q_2,q_3,t,\varepsilon)\,,\\
& g''(M,\varphi_M,\mathcal{J},\varphi_{\mathcal{J}},p_3,q_3,t,\varepsilon)\,,\\
& g'''(M,\varphi_M,\mathcal{J},\varphi_{\mathcal{J}},\Phi,\varphi_\Phi,t,\varepsilon)\,,\\
& G(M,\mathcal{J},\Phi,\overline{\varphi_M},\overline{\varphi_{\mathcal{J}}},\overline{\varphi_\Phi},\varepsilon)\,.
\end{aligned}
\tag{7.20}
$$

Da alle Funktionaldeterminanten Eins sind, sind diese Verteilungsfunktionen ihrem Wert nach alle gleich:

$$f = g = g' = g'' = g''' = G. \tag{7.21}$$

Jetzt sieht man auch, daß die Funktionen G nicht ganz beliebig sind, sondern die Normierungsbedingung

$$\sum e \int dM \cdots d\varphi_\Phi \, G = 0 \tag{7.22}$$

befriedigen müssen, damit die Neutralitätsbedingung erfüllbar ist. Ausserdem müssen sie natürlich periodisch mit den Perioden Eins in den drei Phasen sein.

Da die Größen $M, \cdots, \varphi_\Phi$ als Funktionen von $\mathbf{r}, \mathbf{v}$ und t Funktionale der Felder sind, gilt dies auch für die Verteilungsfunktionen f, und damit für deren Momente. Die Plasmagleichungen (7.9 - 13) sind deshalb letzten Endes Gleichungen für die Felder alleine. Damit letztere die Bedingungen für die Konstanz der drei adiabatischen Invarianten erfüllen, muß man gewisse Konsistenzbedingungen an die Funktionen G, oder was dasselbe ist, an g''' stellen. Solche Bedingungen sind

$$g'''_{/\varphi_M} = O(\varepsilon^3), \quad g'''_{/\varphi_g} = O(\varepsilon^2), \quad g'''_{/\varphi_\Phi} = O(\varepsilon). \tag{7.23}$$

Da wir im Folgenden nur elektrostatische Bewegungen (dies sind fiktive Bewegungen, die das Magnetfeld nicht ändern) betrachten werden, beschränken wir uns darauf, dies für diesen Fall zu beweisen: Aus (6.17), (7.18) und (7.19) liest man unmittelbar ab, daß (7.23) notwendig und hinreichend ist für

$$\frac{\partial f}{\partial t} = O(\varepsilon^3) \quad ^{+)} \quad . \tag{7.24}$$

Damit sind auch die Zeitableitungen der Momente von dritter Ordnung klein, und die Plasmagleichungen sind mit $\partial\varphi/\partial t = O(\varepsilon^3)$ verträglich. Nun bleibt noch zu zeigen, daß die Forderung $\varphi = O(\varepsilon)$ mit dem Ohmschen Gesetz verträglich ist. Letzteres ist in niedrigster Ordnung

$$\sum \frac{e^2 n_0}{m}(\mathfrak{E}_0 + \overline{\mathfrak{w}}_0 \times \mathfrak{B}_0) = 0 \quad . \tag{7.25}$$

Wegen (7.19) und (7.23) gilt

$$f(\mathfrak{r}, \mathfrak{w}, t, \varepsilon) = g_0'''(M_0, J_0, \Phi_0) + O(\varepsilon) \, . \tag{7.26}$$

Mit (6.17) folgt hieraus

$$\overline{\mathfrak{w}}_0 = 0 \tag{7.27}$$

für alle Plasma-Komponenten. Damit sind die Voraussetzungen von § 6) erfüllt.

Da die mittlere Geschwindigkeit in nullter Ordnung verschwindet, haben unsere Gleichungen keine Ähnlichkeit zu denen der Magnetohydrodynamik. Unsere Theorie der elektrostatischen Instabilitäten wird also ihrem Wesen nach eine mikroskopische sein. Dasselbe gilt für jede Theorie, die die Konstanz nur von M und J voraussetzt. Die entsprechenden Konsistenzbedingungen an die Verteilungsfunktionen sind dann nämlich

---

+) Dies gilt natürlich nur in dem Inertialsystem, in welchem das Magnetfeld statisch ist.

$$g''_{1\varphi_M} = O(\varepsilon^2), \; g''_{1\varphi_J} = O(\varepsilon), \tag{7.28}$$

und wegen (6.17) folgt auch hier, daß die mittleren Geschwindigkeiten von erster Ordnung sind. Erst die Theorien, die lediglich die Konstanz von M benutzen, tragen makroskopische Züge [2,4] . Die Konsistenzbedingungen sind hier

$$g'_{1\varphi_M} = O(\varepsilon), \tag{7.29}$$

und die zu (7.27) analogen Beziehungen sind $\mathfrak{E}_0 + \bar{\mathfrak{w}}_0 \times \mathfrak{b}_0 = 0$. Hier haben alle Komponenten dieselbe makroskopische Geschwindigkeit quer zum Magnetfeld. Da diese gleich der Feldliniengeschwindigkeit ist, nennt man solche Bewegungen "Austausch" +).

Nun zurück zu den elektrostatischen Bewegungen, die alle drei adiabatischen Invarianten aller Teilchen konstant lassen. Wir nennen diese künftig "dreifach adiabatisch". Sie werden durch ein statisches Magnetfeld, durch die Anfangswerte G der Verteilungsfunktionen g''' , und ein in dritter Ordnung zeitabhängiges elektrostatisches Potential von der Ordnung ε beschrieben. Da die Vlasov-Gleichungen (7.8) und die Induktionsgleichung (7.9) automatisch erfüllt sind, und die Gleichungen (7.11 - 13) nur Anfangsbedingungen darstellen, legt das Ohmsche Gesetz (7.10) alleine die zeitliche Entwicklung von φ Ordnung für Ordnung fest. Wie wir soeben feststellten, ist es in nullter

---

+) In letzter Zeit ist es üblich geworden [1,2,4,8,9], alle elektrostatischen Bewegungen mit "Austausch" zu bezeichnen. Dieser etwas irreführenden Bezeichnungsweise schließen wir uns nicht an.

Ordnung automatisch erfüllt. Da es in erster Ordnung die makroskpischen Geschwindigkeiten erster Ordnung enthält, zu deren Berechnung man die adiabatischen Invarianten bis zur ersten Ordnung, und damit das elektrostatische Potential bis zur zweiten Ordnung benötigt, gibt es keine geschlossene Gleichung für das elektrostatische Potential erster Ordnung. Dasselbe gilt natürlich auch für die höheren Ordnungen. Da nicht alle drei adiabatischen Invarianten bis zur ersten Ordnung bekannt sind +), sind wir nicht einmal in der Lage, die niedrigste nicht triviale Ordnung des Ohmschen Gesetzes explizit hinzuschreiben.

Trotzdem ist es möglich, einen exakten Erhaltungssatz für die Energie niedrigster Ordnung zu beweisen. Dies wird für die Stabilitätstheorie sehr von Nutzen sein. Da das Magnetfeld statisch ist, genügt es, die kinetische Energie

$$W = \sum m \int d^3x \, d^3v \, \frac{1}{2} v^2 f \tag{7.30}$$

der Teilchen zu betrachten. In nullter Ordnung gilt hierfür

$$\begin{aligned} W_0(\tau_3, \tau_4, \cdots) &= \sum m \int d^3x \, d^3v \, \frac{1}{2} v^2 f_0 \\ &= \sum \int d^3x \, d^3v \, (m H_0 - e\varphi_1) f_0 = \sum m \int d^3x \, d^3v \, H_0 f_0 \\ &= \sum m \int dr \cdots d\varphi_\phi \, H_0''' g_0''' = \sum m \int dr \, dJ \, d\Phi \, H_0''' g_0''' . \end{aligned} \tag{7.31}$$

+) Das magnetische Moment wurde allgemein bis zur ersten Ordnung berechnet [21] . Die longitudinale Invariante kennt man nur für den Fall, daß das elektrische Feld verschwindet, bis zu dieser Ordnung [20,22] , während die Flußinvariante überhaupt nur in nullter Ordnung bekannt ist.

Hier wurden der Reihe nach die Hamilton-Funktion (4.29) mit $\mathcal{W}=0$, die Neutralitätsbedingung, die Tatsache, daß die Funktionaldeterminante der niedrigsten Ordnung unserer Transformation auf zyklische Variable identisch gleich Eins ist, und die Konsistenzbedingung (7.23) benutzt.
Die Zeitableitung von W_0 ist

$$\frac{dW_0}{dt} = \sum_i \varepsilon^i W_{0/\tau_i} . \tag{7.32}$$

Da die g''' nicht von den τ_i abhängen, sind die einzelnen Summanden (den Index i lassen wir weg)

$$W_{0/\tau} = \sum m \int dM\, dJ\, d\Phi\, H'''_{0/\tau}\, g'''_0 . \tag{7.33}$$

Wegen (2.18) und (7.23) ist dies

$$\begin{aligned} W_{0/\tau} &= \sum m \int dM\, dJ\, d\Phi\, g'''_0 \langle\langle\langle H_{0/\tau}\rangle_M\rangle_J\rangle_\Phi \\ &= \sum m \int dM \cdots d\varphi_\phi\, g'''_0\, H_{0/\tau} . \end{aligned} \tag{7.34}$$

Da die Hamilton-Funktion (6.13) nur über φ_1 von den τ abhängt, schreibt sich dies in den ursprünglichen Variablen

$$W_{0/\tau} = \sum e \int d^3x\, d^3v\, f_0\, \varphi_{1/\tau} . \tag{7.35}$$

Die Neutralitätsbedingung zeigt nun, daß dies tatsächlich verschwindet. Daß wir, außer dem Verschwinden der Verteilungsfunktionen, keine weiteren Randbedingungen zu stellen hatten, liegt daran, daß bei den hier betrachteten elektrostatischen Bewegungen das Oberflächenintegral des Poytingvektors von selbst verschwindet. Es gilt nämlich

$$\mathfrak{E} \times \mathfrak{B} = \mathfrak{B} \times \nabla\varphi = \varphi \, \mathrm{rot} \, \mathfrak{B} - \mathrm{rot} \, \varphi \mathfrak{B} . \tag{7.36}$$

Der erste Term ist wegen (7.12) nur dort von Null verschieden, wo die Verteilungsfunktionen von Null verschieden sind, und der zweite Term trägt aufgrund des Stokesschen Satzes nichts zum Integral bei.

§ 8) Elektrostatische Instabilitäten

Die Gleichgewichte, deren Stabilitätsverhalten wir untersuchen wollen, sind durch ein statisches Magnetfeld nullter Ordnung, und ein statisches elektrisches Potentialfeld erster Ordnung, welche zusammen die Bedingungen für die Konstruierbarkeit der drei adiabatischen Invarianten erfüllen, sowie die Verteilungsfunktionen G charakterisiert. Da die Größen $M, \dots, \varphi_\phi$ jetzt nicht explizit von der Zeit abhängen, sind die Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{8.1}$$

genau dann erfüllt, wenn die Funktionen G nicht von den Anfangswerten der Phasen abhängen. Eine Unterscheidung zwischen den Funktionen G und den Funktionen g''' wird damit überflüssig, und wir können für die Gleichgewichtsverteilungsfunktionen

$$f(\mathfrak{r}, \mathfrak{w}, \varepsilon) = g'''(M(\mathfrak{r}, \mathfrak{w}, \varepsilon), J(\mathfrak{r}, \mathfrak{w}, \varepsilon), \Phi(\mathfrak{r}, \mathfrak{w}, \varepsilon), \varepsilon) \tag{8.2}$$

schreiben. Die Teilchen sind also bezüglich der zyklischen Variablen gleich verteilt+).

Die Felder hat man sich als selbstkonsistent vorzustellen, d.h. sie sollen zusammen mit den Verteilungsfunktionen Ordnung für Ordnung das Verkettungsgesetz (7.12) und die Neutralitätsbedingung (7.13) befriedigen. Das elektrostatische Potential geht dabei implizit in die Momente n und $\overline{\mathfrak{w}}$ ein.

+) Diese Tatsache kann zur Berechnung von höheren Ordnungen der adiabatischen Invarianten in statischen Feldern bentutzt werden [20] .

Da wir uns auf eingeschlossene Gleichgewichte beschränken wollen, setzen wir wieder voraus, daß die Verteilungsfunktionen f am Rande verschwinden. Für die Verteilungsfunktionen g'', die sowieso nur für positive Werte ihrer Argumente relevant sind, bedeutet dies, daß sie für große Werte von J oder Φ verschwinden. Dasselbe gilt natürlich auch für ihre Abhängigkeit von M.

Wir wollen die Stabilität dieser Gleichgewichte bezüglich dreifach adiabatischer Bewegungen untersuchen, legen also die in § 7 diskutierten Gleichungen zugrunde. Dementsprechend sind die Frequenzen bzw. Anwachsraten der zu behandelnden Störungen bzw. Instabilitäten klein gegen die Driftfrequenzen der Teilchen.

Die sinnvollste Definition der Stabilität eines Gleichgewichts würde sich auf Eigenschaften von Lösungen der Bewegungsgleichungen beziehen, deren Anfangswerte in der Nähe des Gleichgewichts liegen. In manchen Fällen ist eine solche Definition einem Variationsprinzip äquivalent. In anderen Fällen, wo man dies nicht streng beweisen kann, und wo eine Untersuchung der Bewegungsgleichungen zu schwierig wäre, ist es üblich, Stabilität von vornherein durch ein Variationsprinzip zu definieren. Man fordert dann z.B., daß die Energie als Funktional einer geeigneten Klasse von Vergleichszuständen im Gleichgewicht ein lokales Extremum besitzt. Aus praktischen Gründen geht man meist noch einen Schritt weiter, und fordert lediglich, daß die im Gleichgewicht gebildete zweite Variation der Energie definit oder semidefinit ist. Beschränkt man sich Hierbei noch auf elektrostatische Variationen, so hat man wiederum eine neue, aber in vielen Fällen gerade noch traktable Stabilitäts-Definition. Aufgrund der Hypothese, daß elektrostatische Stabilität bei kleinem β nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für absolute

Stabilität sei, besteht die Hoffnung, daß die zuletzt genannte Definition der "linearen variationalen elektrostatischen Stabilität"+) bei hinreichend kleinem β einen physikalischen Sinn hat.

Wir benutzen diese Definition, indem wir die zweite Variation der Energie nullter Ordnung W_0 betrachten. Hierbei variieren wir das elektrostatische Potential erster Ordnung φ_1 und die Verteilungsfunktion g_0''' nullter Ordnung. unter der Einschränkung, daß die Neutralitätsbedingung stets erfüllt sein soll.

Da wir es künftig nur noch mit den Größen niedrigster Ordnung zu tun haben, lassen wir die Indices weg, setzen also

$$\varphi_1 = \varphi, \; G_0 = g_0''' = g''', \; M_0 = M, \; \mathcal{J}_0 = \mathcal{J}, \; \Phi_0 = \Phi, \; W_0 = W. \tag{8.3}$$

Den Gleichgewichtszustand bezeichnen wir mit

$$\varphi = \overset{\circ}{\varphi}, \quad g''' = \overset{\circ}{g}{}''' \tag{8.4}$$

und für den gestörten Zustand setzen wir

$$\varphi = \overset{\circ}{\varphi} + \varrho \hat{\varphi}, \quad g''' = \overset{\circ}{g}{}''' + \varrho \overset{1}{g}{}'''. \tag{8.5}$$

Damit ist W eine Funktion von ϱ. Entwickeln wir diese,

$$W = \sum_{i \geq 0} \overset{i}{W} \varrho^{i}, \tag{8.6}$$

+) Eine ausführliche Diskussion der verschiedenen gebräuchlichen Stabilitäts-Definitionen findet man in [4] und [2] .

so ist $\overset{0}{\omega}$ die Energie des Gleichgewichtszustandes und die erste Variation

$$\delta^1\omega := \overset{1}{\omega} \tag{8.7}$$

wird, wie wir sehen werden und wie es auch sein muß, verschwinden. Da die zweite Variation

$$\delta^2\omega := 2\overset{2}{\omega} \tag{8.8}$$

nicht von den Störungen $\overset{1}{g}'''$ der Verteilungsfunktionen abhängen wird, kann man die Stabilitätsfrage durch Betrachtung des elektrostatischen Störpotentials $\overset{1}{\varphi}$ alleine entscheiden.

Um $\delta^2\omega$ zu berechnen, werden wir die Verteilungsfunktionen f im Orts- und Geschwindigkeitsraum bis zur ersten Ordnung benötigen. Im Gleichgewicht gilt

$$\overset{0}{f}(\mathfrak{x},\mathfrak{v}) = \overset{0}{g}'''(\overset{0}{\Phi}(\mathfrak{x},\mathfrak{v}), \overset{0}{J}(\mathfrak{x},\mathfrak{v}), \overset{0}{M}(\mathfrak{x},\mathfrak{v})) \tag{8.9}$$

und für den gestörten Zustand bekommt man

$$\begin{aligned} f(\mathfrak{x},\mathfrak{v},\tau_i) &= \\ &\overset{0}{g}'''(\Phi(\mathfrak{x},\mathfrak{v},\tau_i), J(\mathfrak{x},\mathfrak{v},\tau_i), M(\mathfrak{x},\mathfrak{v},\tau_i)) \\ &\quad + \varrho\,\overset{1}{g}'''(\Phi(\mathfrak{x},\mathfrak{v},\tau_i), J(\mathfrak{x},\mathfrak{v},\tau_i), M(\mathfrak{x},\mathfrak{v},\tau_i)) = \\ &\overset{0}{g}'''(\overset{0}{\Phi}(\mathfrak{x},\mathfrak{v}) + \varrho\overset{1}{\Phi}(\mathfrak{x},\mathfrak{v},\tau_i) + \cdots, \overset{0}{J}(\mathfrak{x},\mathfrak{v}) + \cdots, \cdots) \\ &\quad + \varrho\,\overset{1}{g}'''(\overset{0}{\Phi}(\mathfrak{x},\mathfrak{v}) + \varrho\overset{1}{\Phi}(\mathfrak{x},\mathfrak{v},\tau_i) + \cdots, \overset{0}{J}(\mathfrak{x},\mathfrak{v}) + \cdots, \cdots). \end{aligned} \tag{8.10}$$

Die erste Ordnung hiervon ist

$$\hat{f}(K, k, \tau_i) = \hat{g}'''(\mathring{\Phi}, \mathring{J}, \mathring{M}) + \mathring{g}'''_{/\Phi}\hat{\Phi} + \mathring{g}'''_{/J}\hat{J} + \mathring{g}'''_{/M}\hat{M} \, . \tag{8.11}$$

Um dies auszuwerten, benötigen wir die gestörten adiabatischen Invarianten. Da M nicht von φ abhängt, gilt stets

$$M = \mathring{M} \, . \tag{8.12}$$

Der letzte Term von (8.11) fällt also weg. Die Hamiltonfunktion des reduzierten Systems ist

$$H' = \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{M}{2\pi}B + \frac{e}{m}\mathring{\varphi} + \varrho\frac{e}{m}\hat{\varphi} = \mathring{H}' + \varrho\hat{H}' . \tag{8.13}$$

Dementsprechend ist die longitudinale Invariante

$$J = \oint\sqrt{2\left(H' - \frac{M}{2\pi}B - \frac{e}{m}\mathring{\varphi} - \varrho\frac{e}{m}\hat{\varphi}\right)}\, dq_2 \, . \tag{8.14}$$

Bis zur ersten Ordnung in ϱ ist dies

$$J = \oint\sqrt{2\left(H' - \frac{M}{2\pi}B - \frac{e}{m}\mathring{\varphi}\right)}\, dq_2 - \varrho\frac{e}{m}\oint\frac{\hat{\varphi}}{\sqrt{2\left(H' - \frac{M}{2\pi}B - \frac{e}{m}\mathring{\varphi}\right)}}\, dq_2 . \tag{8.15}$$

Benutzen wir hier die Beziehungen

$$\mathring{J}(H', M, p_3, q_3, \tau_i) = \oint\sqrt{2\left(H' - \frac{M}{2\pi}B - \frac{e}{m}\mathring{\varphi}\right)}\, dq_2 , \tag{8.16}$$

$$\mathring{J}_{/H'} = \oint\frac{1}{\sqrt{2\left(H' - \frac{M}{2\pi}B - \frac{e}{m}\mathring{\varphi}\right)}}\, dq_2 = \frac{1}{\mathring{H}''_{/J}} , \tag{8.17}$$

$$\langle\hat{\varphi}\rangle_J = \mathring{H}''_{/J}\oint\frac{\hat{\varphi}}{\sqrt{2\left(H' - \frac{M}{2\pi}B - \frac{e}{m}\mathring{\varphi}\right)}}\, dq_2 , \tag{8.18}$$

so finden wir weiter

$$J(H', M, p_3, q_3, \tau_i) = \overset{\circ}{J}(H', M, p_3, q_3, \tau_i) - \varrho \frac{e}{m} \overset{\circ}{J}_{|H'} \langle \overset{1}{\varphi} \rangle_J + O(\varrho^2). \qquad (8.19)$$

Um dies als Funktion von H und Φ zu schreiben, setzen wir (8.13) ein und entwickeln den ersten Term, um schließlich

$$\overset{1}{J} = \frac{e}{m} \frac{(\overset{1}{\varphi} - \langle \overset{1}{\varphi} \rangle_J)}{\overset{\circ}{H}''_{|J}} \qquad (8{,}20)$$

zu finden. $\overset{\circ}{H}''$ ist die Umkehrfunktion von (8.16). Die ersten Terme der Entwicklung von H'' nach ϱ bekommt man durch Umkehrung von (8.19). Das Ergebnis ist

$$H'' = \overset{\circ}{H}'' + \varrho \frac{e}{m} \langle \overset{1}{\varphi} \rangle_J + O(\varrho^2). \qquad (8.21)$$

Hiervon ausgehend findet man durch Wiederholung derselben Prozedur

$$\overset{1}{\Phi} = \frac{e}{m} \frac{1}{\overset{\circ}{H}'''_{|\Phi}} \left\{ (\overset{1}{\varphi} - \langle \overset{1}{\varphi} \rangle_\Phi) - \frac{\overset{\circ}{H}'''_{|J}}{\overset{\circ}{H}''_{|J}} (\overset{1}{\varphi} - \langle \overset{1}{\varphi} \rangle_J) \right\} \qquad (8.22)$$

für die Störung erster Ordnung der Flußinvarianten. Die Störung erster Ordnung der Verteilungsfunktionen wird, wenn wir (8.12), (8.20) und (8.22) in (8.11) einsetzen,

$$\overset{1}{f} = \overset{1}{g}'''(\overset{\circ}{H}, \overset{\circ}{J}, \overset{\circ}{\Phi}) + \frac{e}{m} \left\{ \frac{1}{\overset{\circ}{H}''_{|J}} \left(\overset{\circ}{g}'''_{|J} - \overset{\circ}{g}'''_{|\Phi} \frac{\overset{\circ}{H}'''_{|J}}{\overset{\circ}{H}'''_{|\Phi}} \right) (\overset{1}{\varphi} - \langle \overset{1}{\varphi} \rangle_J) + \frac{\overset{\circ}{g}'''_{|\Phi}}{\overset{\circ}{H}'''_{|\Phi}} (\overset{1}{\varphi} - \langle \overset{1}{\varphi} \rangle_\Phi) \right\}. \qquad (8.23)$$

Nach diesen Vorbereitungen werden wir uns der Entwicklung der Energie zu. Hierzu bedienen wir uns des Tricks [10] , zunächst nicht W selbst, sondern seine Ableitungen (7.35) nach den τ zu entwickeln. Wir machen also keinen Gebrauch von der vollen Neutralitätsbedingung, sondern benutzen sie nur gelegentlich in den einzelnen Ordnungen. Mit

$$\overset{0}{\varphi}_{/\tau} = 0 \tag{8.24}$$

gilt

$$\omega_{/\tau} = \varrho \sum e \int d^3x\, d^3v\, \overset{1}{\varphi}_{/\tau} \overset{0}{f} + \varrho^2 \sum e \int d^3x\, d^3v\, \overset{1}{\varphi}_{/\tau} \overset{1}{f} + O(\varrho^3) . \tag{8.25}$$

Der in ϱ lineare Term verschwindet aufgrund der Neutralität des Gleichgewichts und der Rest lässt sich mit Hilfe der Neutralitätsbedingung erster Ordnung als

$$\omega_{/\tau} = -\varrho^2 \sum e \int d^3x\, d^3v\, \overset{1}{\varphi} \overset{1}{f}_{/\tau} + O(\varrho^3) \tag{8.26}$$

schreiben. Spalten wir nun den Ausdruck (8.23) für die Verteilungsfunktion erster Ordnung in der Form

$$\overset{1}{f} = \overset{1}{g}{}''' + \frac{e}{m} \overline{f} \tag{8.27}$$

auf, so gilt, da $\overset{1}{g}{}'''$ hier nur von den zeitunabhängigen ungestörten adiabatischen Invarianten abhängt,

$$\overset{1}{f}_{/\tau} = \frac{e}{m} \overline{f}_{/\tau} . \tag{8.28}$$

Wir haben also

$$\omega_{/\tau} = -\varrho^2 \sum \frac{e^2}{m} \int d^3x\, d^3v\, \overset{1}{\varphi} \overline{f}_{/\tau} + O(\varrho^3) . \tag{8.29}$$

Alle explizit oder implizit auftretenden Größen, mit Ausnahme von $\overset{1}{\varphi}$, beziehen sich jetzt auf das Gleichgewicht, da $\overset{1}{g}'''$ nicht mehr vorkommt. Deshalb sind keine Verwechslungen möglich, wenn wir die oberen Indices weglassen.

Bevor wir den Ausdruck (8.29) weiter umformen, führen wir zur Vereinfachung der Schreibweise die Gleichgewichtsverteilungsfunktionen in den Variablen des zweifach reduzierten Systems ein. Für diese gilt [19]

$$g''(p_3, q_3, J, M) = F(H''(p_3, q_3, J, M), J, M). \tag{8.30}$$

Der Zusammenhang zwischen F und g'' ist+)

$$g'''(\Phi, J, M) = F(H'''(\Phi, J, M), J, M). \tag{8.31}$$

Drücken wir in $\bar{f}$ die Ableitungen der g''' durch die Ableitungen der F aus, so finden wir

$$\bar{f} = \frac{F_{/J}}{H''_{/J}}(\varphi - \langle\varphi\rangle_J) + F_{/H}(\varphi - \langle\varphi\rangle_\Phi). \tag{8.32}$$

Da in dem Ausdruck

$$\int d^6\Omega\, \varphi\, \bar{f}_{/\tau} = \int d^6\Omega \left\{ \frac{F_{/J}}{H''_{/J}}(\varphi\varphi_{/\tau} - \varphi\langle\varphi\rangle_{J/\tau}) + F_{/H}(\varphi\varphi_{/\tau} - \varphi\langle\varphi\rangle_{\Phi/\tau}) \right\} \tag{8.33}$$

nur die Funktion φ von den τ abhängt, können wir die Ableitung nach τ durchschieben, und die einzelnen Terme wie folgt als Ableitung schreiben:

+) F ist keine Verteilungsfunktion!

$$\int d^6\Omega \, \frac{F_{/\mathcal{J}}}{H''_{/\mathcal{J}}} \varphi \varphi_{/\tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \int dr \, d\mathcal{J} \, d\phi \, F_{/\mathcal{J}} \left\langle \frac{\langle \varphi^2 \rangle_{\mathcal{J}}}{H''_{/\mathcal{J}}} \right\rangle_\phi , \tag{8.34}$$

$$\int d^6\Omega \, \frac{F_{/\mathcal{J}}}{H''_{/\mathcal{J}}} \varphi \langle \varphi \rangle_{\mathcal{J}/\tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \int dr \, d\mathcal{J} \, d\phi \, F_{/\mathcal{J}} \left\langle \frac{\langle \varphi \rangle^2_{\mathcal{J}}}{H''_{/\mathcal{J}}} \right\rangle_\phi , \tag{8.35}$$

$$\int d^6\Omega \, F_{/H} \varphi \varphi_{/\tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \int dr \, d\mathcal{J} \, d\phi \, F_{/H} \langle \varphi^2 \rangle_\phi , \tag{8.36}$$

$$\int d^6\Omega \, F_{/H} \varphi \langle \varphi \rangle_{\phi/\tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \int dr \, d\mathcal{J} \, d\phi \, F_{/H} \langle \varphi \rangle^2_\phi . \tag{8.37}$$

Für die τ – Ableitungen von W haben wir damit insgesamt

$$W_{/\tau} = -\frac{1}{2} \varrho^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \sum \frac{e^2}{m} \int dr \, d\mathcal{J} \, d\phi \left\{ F_{/\mathcal{J}} \left\langle \frac{\langle \varphi^2 \rangle_{\mathcal{J}} - \langle \varphi \rangle^2_{\mathcal{J}}}{H''_{/\mathcal{J}}} \right\rangle_\phi + F_{/H} \left(\langle \varphi^2 \rangle_\phi - \langle \varphi \rangle^2_\phi \right) \right\} . \tag{8.38}$$

Für die Variationen von W folgt hieraus

$$\delta^1 W = 0 \tag{8.39}$$

und

$$\delta^2 W = -\sum \frac{e^2}{m} \int dr \, d\mathcal{J} \, d\phi \left\{ F_{/\mathcal{J}} \left\langle \frac{\langle \varphi^2 \rangle_{\mathcal{J}} - \langle \varphi \rangle^2_{\mathcal{J}}}{H''_{/\mathcal{J}}} \right\rangle_\phi + F_{/H} \left(\langle \varphi^2 \rangle_\phi - \langle \varphi \rangle^2_\phi \right) \right\} . \tag{8.40}$$

Wir betonen nochmals, dass die Transformation auf zyklische Variable, und dementsprechend auch die verschiedenen hier autretenden Mittelungen, für den Gleichgewichtszustand durchzuführen sind. Die zu variierende Funktion φ kommt also nur explizit vor.

Stabilität liegt genau dann vor, wenn $\delta^2 W$ für alle in dem betrachteten Gebiet stetig differenzierbaren Funktionen $\varphi(\mathbf{r})$ das gleiche Vorzeichen hat. Da alle im Integranden von (8.40) vorkommenden Größen, mit Ausnahme der Ableitungen der F, aufgrund der Schwarzschen Ungleichung stets positiv sind, ist

$$F_{/\gamma} \leq 0 \,, \quad F_{/H} \leq 0 \qquad (8.41)$$

ein hinreichendes Stabilitätskriterium +). Betrachtet man nur transversale Störungen, d.h. setzt man in (8.40) für φ nur Funktionen ein, die längs der Feldlinien konstant sind, so verschwindet der erste Term des Integranden. Hieraus folgt, daß die erste der beiden Ungleichungen (8.43) nur für Störungen wichtig ist, deren elektrisches Feld eine Längskomponente hat. Dies hängt mit der Tatsaache zusammen, daß die andere Ungleichung für sich alleine aus einer Einflüssigkeitstheorie, deren wesentlichstes Charakteristikum ja gerade die Vernachlässigung der Parallelkomponente des elektrischen Feldes ist, als hinreichendes Stabilitätskriterium folgt [1].

Interessant ist auch ein Vergleich des Kriteriums (8.41) mit dem auf analoge Weise gewonnenen hinreichenden Kriterium

$$F_{/H} + \frac{1}{H''_{/\gamma}} F_{/\gamma} \leq 0 \,, \quad F_{/H} \leq 0 \qquad (8.42)$$

für Stabilität gegenüber zweifach adiabatischen Störungen [10]. Offensichtlich ist (8.42) erfüllt, wenn (8.41) erfüllt ist. Das in dieser Arbeit hergeleitete Kriterium (8.41) ist also auch hinreichend für Stabilität gegenüber schnelleren elektrostatischen Störungen, die die Flußinvariante verletzen.

+) Auch im umgekehrten Fall, daß die Ableitungen von F positiv sind, wäre $\delta^2 \omega$ definit. Dieser Fall ist aber nicht möglich, weil F sets positiv ist und im Unendlichen verschwindet.

Dieses Ergebnis ist überraschend, weil die hier behandelten dreifach adiabatischen Störungen eine spezielle Klasse der in [10] behandelten zweifach adiabatischen Störungen bilden. Deshalb schiene es plausibler, wenn man für letztere ein schärferes Stabilitätskriterium bekäme. In Wirklichkeit jedoch gehorchen die zugehörigen Bewegungen verschiedenen, voneinander unabhängigen Gleichungen, die durch verschiedene Ordnungsbeziehungen zwischen den einzelnen Termen der exakten Gleichungen im Limes $\varepsilon \to 0$ entstehen. Dementsprechend beschreiben diese verschiedenen Gleichungen auch die Abhängigkeit der physikalischen Größen von verschiedenen Zeitskalen und gelten für verschieden lange Zeiten.

Literaturverzeichnis

1 H. Grad, "Stability of Mirror Machines", Proc. of the IAEA Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research in Culham (1965).

2 H. Grad, Phys. Fluids 9, 225 (1966)

3 H. Grad, Phys. Fluids 9, 498 (1966)

4 H. Grad, AEC Report TID-4500 (1966)

5 H. Grad, Phys. Fluids 10, 137 (1967)

6 J.B. Taylor, Culham Report CLM-L14 (1967)

7 J.B. Taylor und R.J. Hastie, Plasma Phys. 10, 497 (1967)

8 P.H. Rutherford und E.A. Frieman, Phys. Fluids 11, 569 (1968)

9 M.N. Rosenbluth, Phys. Fluids 11, 869 (1968)

10 P.H. Rutherford und E.A. Frieman, Phys. Fluids 11, 252 (1968)

11 M. Kruskal, Journ. Math. Phys. 3, 806 (1962)

12 N.N. Bogolinbow und Y.A. Mitropolsky, "Asymptotic Methods in the Theory of Non-linear Oscillations" (New York 1961)

13 T.G. Northrop und E. Teller, Phys. Rev. 117, 215 (1960)

14 H. Goldstein, "Classical Mechanics" (London 1959)

15 C.S. Gardner, Phys. Rev. 115, 791 (1959)

16 W.A. Newcomb, Ann. Phys. 3, 347 (1958)

17 T.G. Northrop, Rev. Geophys. 1, 283 (1963)

18 T.G. Northrop, "The Adiabatic Motion of Charged Particles" (New York 1963)

19 J.B. Taylor, Phys. Fluids 7, 767 (1964)

20 R.J. Hastie, J.B. Taylor, F.A. Haas, Ann. Phys. 41, 302 (1967)

21 M. Kruskal, "The Gyration of a Charged Particle" Terzo Congresso Internazionale sui Fenomeni di Jonizzazione nei Gas (Venezia 1957)

22 T.G. Northrop, C.S. Liu, M.D. Kruskal, Phys. Fluids 9, 1503 (1966)