INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Über die numerische Behandlung
hyperbolischer Differentialgleichungen mit
konstanten Koeffizienten, insbesondere der
n-dimensionalen Wellengleichung.

(On the Numerical Treatment of Hyperbolic
Differential Equations with Constant
Coefficients, particularly the n-Dimensional
Wave Equation)

Karl Graf Finck v. Finckenstein

IPP 6/73 Dezember 1968

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

IPP 6/73 K. Graf Finck v. Finckenstein On the Numerical Treatment of Hypberbolic Differential Equations with Constant Coefficients, particularly the n-Dimensional Wave Equation.

December, 1968 (in German)

ABSTRACT

Second-order difference schemes for numerically solving linear hyperbolic differential equations with constant coefficients were investigated in 1964 by P.D. Lax and B. Wendroff, who derived a sufficient stability criterion. Let h be the time step size, $\mu_i h$, i = 1, ..., n the space step sizes of the lattice network. The stability criterion is then:

$$\mu_i \geqslant \|A_i\| \cdot n \cdot \sqrt{n} \quad , \quad i = 1, \cdots, n$$

where the A_i are the coefficients of the differential equation and $\|A_i\|$ the spectral norm of A_i . Lax and Wendroff prove this inequality for n = 2, but it can easily be generalized.
In this paper the above criterion is improved for the wave equation:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} \quad , \quad c_i \neq 0, \text{ real, constant}$$

$$x := (x_1, \cdots, x_n)$$

If this equation is rearranged into a hyperbolic system, the following sufficient stability criterion is obtained:

$$\mu_i \geqslant |c_i| \cdot n \quad , \quad i = 1, \cdots, n$$

In a first-order difference scheme one has for the general case:

$$\mu_i \geqslant \|A_i\| \cdot n \quad , \quad i = 1, \cdots, n$$

and for the wave equation:

$$\mu_i \geqslant |c_i| \cdot \sqrt{n} \quad , \quad i = 1, \cdots, n \; .$$

The latter condition is also necessary for stability. The theoretical investigations were followed by numerical experiments for the wave equation in one, two, and three dimensions using the IBM 7090. These confirm the theoretical results, but suggest that the stability criterion can be improved even more for the second-order scheme relating to the wave equation.

I n h a l t s v e r z e i c h n i s

ZUSAMMENFASSUNG

Im Jahre 1964 wurden von P.D. Lax und B. Wendroff Differenzenschemata 2. Ordnung zur numerischen Lösung linearer hyperbolischer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten untersucht. Es wurde für diese Schemata ein hinreichendes Stabilitätskriterium hergeleitet. Seien h die Zeitschrittweite, $\mu_i h$, , i = 1, ..., n die Ortschrittweiten des Gitternetzes. Dann lautet das Stabilitätskriterium:

$$\mu_i \geqslant \|A_i\| \cdot n \cdot \sqrt{n} \quad , \quad i = 1, \ldots, n$$

wobei die A_i die Koeffizienten der Differentialgleichung sind und $\|A_i\|$ die Spektralnorm von A_i bezeichnet. Lax und Wendroff beweisen diese Ungleichung für n = 2; sie läßt sich aber leicht verallgemeinern. In der vorliegenden Arbeit wird dieses Kriterium für die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}$$

$c_i \neq 0$, reell, konstant

$x := (x_1, \ldots, x_n)$

verschärft. Formt man diese in ein hyperbolisches System um, so ergibt sich als hinreichendes Stabilitätskriterium:

$$\mu_i \geqslant |c_i| \cdot n \quad , \quad i = 1, \ldots, n.$$

Bei einem Differenzenschema 1. Ordnung hat man im allgemeinen Fall:

$$\mu_i \geqslant \|A_i\| \cdot n \quad , \quad i = 1, \ldots, n$$

und im Fall der Wellengleichung:

$$\mu_i \geq |c_i| \cdot \sqrt{n} \quad , \quad i = 1, \ldots, n$$

Diese letzte Bedingung ist auch notwendig für Stabilität. Zu diesen theoretischen Untersuchungen sind numerische Experimente für die Wellengleichung in ein, zwei und drei Dimensionen auf der IBM 7090 durchgeführt worden. Sie bestätigen die theoretischen Ergebnisse, lassen jedoch die Vermutung aufkommen, daß sich bei dem Schema 2. Ordnung im Falle der Wellengleichung die Stabilitätsbedingung noch verschärfen läßt.

1. Stabilität von Differenzenschemata für lineare hyperbolische Differentialgleichungen in n Dimensionen und mit konstanten Koeffizienten.

Es sei $x := (x_1, \ldots, x_n)$ der Vektor der n reellen Ortsvariablen, mit t sei die Zeitvariable bezeichnet, und $w := w(x,t)$ sei ein m-dimensionaler Spaltenvektor. Ferner seien $A_1, \ldots, A_n$ m-reihige reelle symmetrische Matrizen mit konstanten Gliedern. Wir betrachten folgendes Anfangswertproblem:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\partial w}{\partial x_k} \\ w(x,0) &= f(x) \qquad , \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Dieses Anfangswertproblem ist ein sogenanntes <u>korrekt</u> gestelltes Problem, das soll heißen:

a) Die Lösung $w(x,t)$ von (1) hängt stetig von den Anfangswerten $f(x)$ ab für $0 \leq t \leq T$,

b) Ist $f(x)$ eine beliebige, quadratintegrierbare Anfangsfunktion, so läßt sich $f(x)$ beliebig genau durch eine andere Anfangsfunktion $g(x)$ approximieren (im Sinne der L_2-Norm) derart, daß $g(x)$ zu einer <u>eigentlichen</u>, d.h. mindestens einmal stetig differenzierbaren Lösung von (1) führt.

Wir wenden uns nun der numerischen Lösung von (1) zu. Im folgenden werden zwei zu (1) konsistente Differenzenschemata angegeben; das eine von ihnen ist von erster Ordnung, das andere von zweiter Ordnung konsistent. Die Konvergenz der Lösung eines konsistenten Differenzenschemas gegen die gesuchte Lösung der Differentialgleichung bei verschwindenden Schrittweiten ist bekanntlich äquivalent mit der Stabilität des betreffenden Schemas. Dies ist der bekannte Satz von Lax. Damit wiederum ist äquivalent die Potenzbeschränktheit der zu dem Schema S_h gehörigen Amplifikationsmatrix C, d.h. die Eigenschaft

$$\|C^n\| \leq K \quad , \qquad \begin{array}{l} 0 < \Delta t < \tau \\ 0 \leq n.\Delta t \leq T \end{array} \tag{2}$$

für eine Konstante K und eine Konstante τ. Die oben angegebene Norm soll die Spektralnorm von C^n sein. Wir setzen

$$h := \Delta t \quad = \quad \text{Zeitschrittweite}$$

$$\mu_k \cdot h := \Delta x_k \quad = \quad \text{Raumschrittweiten, } k = 1, \ldots, n$$

$$\alpha_k := \mu_k \cdot h \cdot \xi_k \; , \qquad \xi_k \text{ reell, } k = 1, \ldots, n.$$

Wegen:

$$\begin{aligned} 2 - 2\cos\alpha_k &= \alpha_k^2 + O(h^4) \\ \sin\alpha_k &= \alpha_k + O(h^3) \\ \cos\alpha_k - 1 &= O(h^2) \end{aligned}$$

folgt:

$$\begin{aligned} e^{i \cdot \sum_1^n \frac{\alpha_k}{\mu_k} A_k} &= I + i \sum_1^n \frac{\sin\alpha_k}{\mu_k} A_k + \frac{1}{n} I \cdot \sum_1^n (\cos\alpha_k - 1) + O(h^2) \\ &= I + i \sum_1^n \frac{\sin\alpha_k}{\mu_k} A_k - \sum_1^n \frac{1 - \cos\alpha_k}{\mu_k^2} A_k^2 \\ &\quad - \sum_{j<k} \frac{\sin\alpha_j \sin\alpha_k}{2\mu_j \mu_k} \cdot B_{jk} + O(h^3) \end{aligned}$$

mit:

$$B_{jk} := A_j A_k + A_k A_j$$

Aus [2] ergibt sich nun folgendes:

1.) Die Matrix

$$C_1 := \frac{1}{n} \cdot I \cdot \sum_{1}^{n} \cos \alpha_k + i \sum_{1}^{n} \frac{\sin \alpha_k}{\mu_k} A_k \qquad (3)$$

ist die Amplifikationsmatrix eines zu (1) von 1. Ordnung konsistenten Differenzenschemas S_1. (S_1 genügt einer Differenzengleichung der Form: $v(x,t+h) = S_1 v(x,t)$).

2.) die Matrix

$$C_2 := I - \sum_{1}^{n} \frac{1-\cos \alpha_k}{\mu_k^2} A_k^2 - \sum_{j<k} \frac{\sin \alpha_j \sin \alpha_k}{2\mu_j \mu_k} B_{jk} + i \sum \frac{\sin \alpha_k}{\mu_k} A_k \qquad (4)$$

ist die Amplifikationsmatrix eines zu (1) von 2. Ordnung konsistenten Differenzenschemas S_2, wobei wieder $v(x,t+h) = S_2 v(x,t)$ gilt.

S_1 bzw. S_2 erhält man aus C_1 bzw. C_2 durch die Substitutionen:

$$e^{i\alpha_k} \longrightarrow T_k \qquad k = 1, \ldots, n \qquad (5)$$

wobei T_k den Translationsoperator in der x_k-Richtung um die Schrittweite $\mu_k \cdot h$ bezeichnet.

Es gilt nun folgender Satz:

Satz 1: Hinreichend für die Stabilität des Schemas S_1 bzw. S_2 in jedem endlichen Zeitintervall (0,T) ist die Bedingung:

$$\mu_k \geq n \cdot \| A_k \| , \qquad k = 1, \ldots, n \qquad (6a)$$

bzw. $\mu_k \geq n \cdot \sqrt{n} \cdot \|A_k\|$ k = 1,...., n (6b)

Für n = 1 sind diese Bedingungen auch notwendig für Stabilität.

Beweis: Nach einem Satz von Lax und Wendroff genügt es zu zeigen, (vgl. [2]), daß gilt:

$$|(C_k u, u)|^2 \leq 1 \quad , \quad k = 1,2 \qquad (7)$$

für alle Einheitsvektoren u, also mit $u^* u = 1$. Wir leiten die Stabilität zunächst für C_1 her (Formel (6a)). Sei u ein beliebiger Einheitsvektor. Mit Hilfe der Schwarz'schen Ungleichung

$$|(A_k u, u)| \leq \|A_k\| \quad , \quad k = 1,..., n$$

folgt durch Anwendung von (6a):

$$|(C_1 u, u)|^2 = \frac{1}{n^2}\Big(\sum_1^n \cos\alpha_k\Big)^2 + \Big(\sum_1^n \frac{\sin\alpha_k}{\mu_k}(A_k u, u)\Big)^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^2}\Big(\sum_1^n |\cos\alpha_k|\Big)^2 + \Big(\sum_1^n \frac{|\sin\alpha_k|}{\mu_k}|(A_k u, u)|\Big)^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^2} \cdot \sum_1^n \cos^2\alpha_k + \frac{2}{n^2}\sum_{j<k} |\cos\alpha_j| \cdot |\cos\alpha_k| + \frac{1}{n^2}\sum_1^n \sin^2\alpha_k +$$

$$+ \frac{2}{n^2}\sum_{j<k} |\sin\alpha_j||\sin\alpha_k| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^2} \cdot \Big[n + 2\Big\{\frac{n}{2}(n-1)\Big\}\Big] = 1$$

Die letzte Ungleichung beruht auf den Formeln:

$$2\,|\cos\alpha| \cdot |\cos\beta| \leq \cos^2\alpha + \cos^2\beta$$

$$2\,|\sin\alpha||\sin\beta| \leq \sin^2\alpha + \sin^2\beta$$

bzw. $\quad |\cos\alpha|\cdot|\cos\beta| + |\sin\alpha|\cdot|\sin\beta| \leq 1$

Es gilt also: $|(C_1 u, u)|^2 \leq 1$ und somit ist S_1 stabil.

Wir zeigen jetzt die Umkehrung für n = 1:
Angenommen, Formel (6a) gelte nicht, sei also:

$$\mu < \|A\| \quad .$$

Da für den Spektralradius von A , $\varrho(A)$ gilt: $\varrho(A) = \|A\|$,
folgt:

$$\frac{\varrho(A)}{\mu} > 1 \quad . \tag{8}$$

A ist als symmetrische reelle Matrix diagonalisierbar, also:

$$T^{-1} A T = \mathcal{D}iag.$$

für ein geeignetes reguläres T. Die Amplifikationsmatrix

$$C_1 = \cos\alpha \cdot I + i \frac{\sin\alpha}{\mu} A$$

ist zudem normal. Also ist $\varrho(C_1) \leq 1$ gleichbedeutend mit der Potenzbeschränktheit von C_1. Es gilt dann nämlich:

$$\|C_1^n\| = \varrho(C_1^n) = \varrho^n(C_1) = \|C_1\|^n \quad . \tag{9}$$

Mit: $\quad \tilde{C}_1 := T^{-1} C_1 T \quad$ folgt:

$$\varrho^2(C_1) = \varrho^2(\tilde{C}_1) \geqslant \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \cdot \left(\frac{\varrho(A)}{\mu}\right)^2 > 1$$

wegen Formel (8), also

$$\varrho(C_1) > 1$$

Wegen (9) folgt, daß S_1 instabil ist.

Damit ist Formel (6a) bewiesen.

Der Beweis der Stabilität von S_2 mit Hilfe von Formel (6b) wird für n = 2 in der Arbeit [2] gebracht. Er läßt sich ohne weiteres auf n Dimensionen (n > 2) erweitern. Dies soll hier nicht durchgeführt werden; es wird auf obige Arbeit verwiesen. Gezeigt wird hier nur noch der Fall n = 1 in beiden Richtungen. Es ist:

$$C_2 = I - \frac{1-\cos\alpha}{\mu^2} A^2 + i\,\frac{\sin\alpha}{\mu} A$$

Es folgt, daß C_2 normal ist, also :

$$\varrho(C_2) \leq 1 \quad \text{genau dann, wenn } S_2 \text{ stabil ist.}$$

C_2, A und A^2 sind gemeinsam diagonalisierbar:

$$\tilde{C}_2 = T^{-1} C_2 T = I + \frac{\cos\alpha - 1}{\mu^2} \Lambda^2 + i \cdot \frac{\sin\alpha}{\mu} \Lambda \quad .$$

Die Diagonalmatrix Λ hat die gleichen Eigenwerte wie A , sie sind alle reell und es ist $\|A\| = \varrho(A)$ . .

Sei jetzt $\mu \geq \|A\|$. Dann folgt:

$$\frac{|\lambda_k|}{\mu} \leq 1 \quad , \quad k = 1,\ldots,m, \quad \lambda_k = \text{Eigenwerte von } A \;.$$

Sei $\mathbb{C} \ni \lambda_1$ derjenige Eigenwert von A mit

$$\rho(\tilde{C}_2) = \left| 1 + (\cos\alpha - 1)\cdot\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^2 + i \sin\alpha \frac{\lambda_1}{\mu} \right| .$$

Es folgt :

$$\rho^2(\tilde{C}_2) = 1 + 2(\cos\alpha - 1)\cdot\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^2 + (\cos^2\alpha - 2\cos\alpha + 1)\cdot\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^4 + \sin^2\alpha\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^2 \leq$$

$$\leq 1 + \left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^2\cdot\left[2(\cos\alpha - 1) + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha + 1 + \sin^2\alpha\right] = 1$$

Es folgt daraus:

$$\rho(C_2) = \rho(\tilde{C}_2) \leq 1$$

also ist S_2 stabil.

Sei umgekehrt $\mu < \|A\|$. Sei $\mathbb{C} \ni \lambda_2$ der dem Betrage nach größte Eigenwert von A. Dann folgt:

$$\frac{|\lambda_2|}{\mu} > 1$$

Da $\rho(\tilde{C}_2)$ das Betragsmaximum aller Eigenwerte von $\tilde{C}_2$ ist, folgt:

$$\rho^2(\tilde{C}_2) \geqslant \left| 1 + (\cos\alpha - 1)\cdot\left(\frac{\lambda_2}{\mu}\right)^2 + i\cdot\sin\alpha \frac{\lambda_2}{\mu} \right|^2 >$$

$$> 1 + \left(\frac{\lambda_2}{\mu}\right)^2\cdot\left[2(\cos\alpha - 1) + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha + 1 + \sin^2\alpha\right] = 1$$

also ist $\rho(C_2) > 1$ und somit S_2 instabil. Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

q.e.d.

2. Stabilität von Differenzenschemata zur Lösung der n-dimensionalen Wellengleichung mit konstanten Koeffizienten.

Eine Möglichkeit, die n-dimensionale Wellengleichung mit konstanten Koeffizienten numerisch zu behandeln, ist die, die Wellengleichung in ein hyperbolisches System umzuformen und letzteres mit Hilfe von Differenzenschemata zu lösen. Es werden hier die Differenzenschemata S_1 und S_2 von Kapitel 1. verwendet. Es ergibt sich dabei, daß sich in diesem Falle die allgemeinen Stabilitätskriterien verschärfen lassen. In einem anschließenden Kapitel werden dann noch numerische Experimente diskutiert.

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \\ u(x,0) &= f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= g(x) \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

wobei $u = u(x;t) = u(x_1,\dots,x_n;t)$ jetzt eine skalare Funktion und die c_k $(k = 1,\dots,n)$ von Null verschiedene konstante reelle Zahlen sind.

Die Wellengleichung (10) wird folgendermaßen in ein hyperbolisches System umgeformt:
Es wird gesetzt:

$$W := \begin{bmatrix} W_0 \\ \vdots \\ W_n \end{bmatrix}, \qquad G_k(x) := p_k \cdot \int_{x_k^{(0)}}^{x_k} g(x_1,\dots,\xi_k,\dots,x_n)\, d\xi_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k p_k = 1, \qquad x_k^{(0)} \text{ frei wählbar}.$$

Es wird weiter gesetzt:

$$W_0 \; := \; u$$

$$W_k \; := \; G_k + c_k \cdot \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x_k}\, d\tau \quad , \qquad k = 1,\dots, n$$

Es folgt:

1.) $$\frac{\partial w_0}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} = \int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\, d\tau + g(x) = \int_0^t \sum_1^n c_k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\, d\tau + g(x) =$$

$$= g(x) + \sum_1^n c_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left[c_k \int_0^t \frac{\partial u}{\partial x_k}\, d\tau\right] = \sum_{k=1}^n c_k \frac{\partial w_k}{\partial x_k}$$

2.) $$\frac{\partial w_k}{\partial t} = c_k \cdot \frac{\partial w_0}{\partial x_k} \qquad k = 1,\dots, n$$

Hieraus erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \sum_{k=1}^n c_k A_k \frac{\partial w}{\partial x_k} \\ w(x,0) &= f(x) \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

mit:

$$A_k := \begin{array}{c} \qquad\qquad\; k+1 \\ \begin{bmatrix} 0, \cdots 0, & 1, & 0, \cdots, 0 \\ \vdots & & \\ 0 & & \\ 1 \cdots & 0 & \\ 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{bmatrix} \end{array} k+1 \quad , \quad f(x) := \begin{bmatrix} f(x) \\ G_1(x) \\ \vdots \\ G_n(x) \end{bmatrix} .$$

Zur numerischen Behandlung von (11) betrachten wir zunächst das Schema S_1 bzw. die Amplifikationsmatrix C_1.

Wir setzen:

$$\tau_k := \frac{c_k}{\mu_k} , \qquad k = 1, \dots, n \tag{12}$$

und erhalten für C_1 mit Hilfe von (3):

$$C_1 = a_0 I + iB \tag{13}$$

mit:

$$B := \begin{bmatrix} 0, & a_1, & \cdots, & a_n \\ a_1 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ a_n & & & \end{bmatrix} ,$$

$$a_0 := \frac{1}{n}\sum_1^n \cos\alpha_k , \quad a_k := \tau_k \cdot \sin\alpha_k \qquad k = 1, \dots, n$$

Man prüft sofort nach, daß C_1 normal ist, wegen (9) gilt also:

<u>S_1 ist stabil genau dann, wenn $\varrho(C_1) \leq 1$ ist für alle α_k .</u>

Der Spektralradius von C_1 ist leicht zu berechnen:

$$\mathrm{Det}\,(C_1 - \lambda I) = (a_0 - \lambda)^{n-1} \cdot \left[(a_0 - \lambda) + i\sqrt{\sum_1^n a_k^2}\,\right] \cdot \left[(a_0 - \lambda) - i\sqrt{\sum_1^n a_k^2}\,\right]$$

woraus folgt:

$$\varrho\,(C_1) = \left(\sum_{k=0}^n a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{14}$$

Es gilt:

Satz 2: Notwendig und hinreichend für die Stabilität des Differenzenschemas S_1 in jedem endlichen Zeitintervall $(0,T)$ ist die Bedingung:

$$\mu_k \geq \sqrt{n}\cdot|c_k| \quad , \quad k = 1,\ldots, n \quad . \tag{15}$$

Beweis: a) Es gelte die Bedingung (15). Es wird gezeigt, daß $\rho(C_1) \leq 1$ ist für alle $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Aus (15) und (12) folgt:

$$r_k^2 \leq \frac{1}{n} \qquad k = 1,\ldots, n \tag{16}$$

also ergibt sich mit (14):

$$\rho^2(C_1) = \frac{1}{n^2}\Big(\sum_1^n \cos\alpha_k\Big)^2 + \sum_1^n r_k^2 \sin^2\alpha_k \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^2}\Big\{\sum_1^n \cos^2\alpha_k + 2\sum_{j<k}\cos\alpha_j\cos\alpha_k + n\cdot\sum_1^n \sin^2\alpha_k\Big\} =$$

$$= \frac{1}{n^2}\cdot\Big\{n\cdot\sum_1^n \cos^2\alpha_k + n\cdot\sum_1^n \sin^2\alpha_k + 2\sum_{j<k}\cos\alpha_j\cos\alpha_k - (n-1)\sum_1^n \cos^2\alpha_k\Big\} =$$

$$= 1 - \frac{1}{n^2}\cdot\Big\{(n-1)\sum_1^n \cos^2\alpha_k - 2\sum_{j<k}\cos\alpha_j\cos\alpha_k\Big\}$$

Wegen:

$$2\cos\alpha_j\cos\alpha_k \leq \cos^2\alpha_j + \cos^2\alpha_k$$

ist der 2. Term der rechten Seite größer oder gleich Null. Damit folgt: $\rho^2(C_1) \leq 1$, also $\rho(C_1) \leq 1$. Folglich ist S_1 stabil.

b) Es gelte die Bedingung (15) nicht. Wir zeigen, daß für geeignete Wahl von $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ $\rho(C_1) > 1$ ist. O.E. gelte also:

$$\mu_1 < |c_1| \sqrt{n}, \quad \mu_2, \dots, \mu_n \quad \text{beliebig.}$$

Dies bedeutet aus Symmetriegründen keine Einschränkung des allgemeinen Falles. Also gelte:

$$t_1^2 > \frac{1}{n} \tag{17}$$

Folglich existiert ein ε_0 mit

$$\left.\begin{aligned} & 0 < \varepsilon_0 < 1 \\ \text{und} \quad & t_1^2 = \frac{1}{n \cdot \varepsilon_0} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Es werden jetzt $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ so gewählt, daß gilt:

$0 \leq \alpha_k \leq \pi/2$ für k = 1,...., n

$\sin^2\alpha_1 = 1 - \varepsilon_0$

$\sin^2\alpha_k = 0$ für k = 2,...., n

Es folgt: $\cos\alpha_1 = \sqrt{\varepsilon_0}$, $\cos\alpha_k = 1$ für k = 2,..., n.

Einsetzen in (14) ergibt:

$$\rho^2(C_1) = \frac{1-\varepsilon_0}{n\,\varepsilon_0} + \frac{1}{n^2}\left(\sqrt{\varepsilon_0} + n - 1\right)^2 \tag{19}$$

Wir betrachten jetzt die Funktion:

$$f(\varepsilon) := \frac{1-\varepsilon}{n \cdot \varepsilon} + \frac{1}{n^2}\left(\sqrt{\varepsilon} + n - 1\right)^2$$

im Intervall $0 < \varepsilon \leq 1$.

Man sieht sofort:

$$\left.\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ \lim_{\varepsilon \to 0} f(\varepsilon) &= \infty \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Weiter gilt:

$$\frac{df}{d\varepsilon} = -\frac{1}{n\varepsilon^2} + \frac{1}{n^2}\left(1 + \frac{n-1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

Wegen $\varepsilon < 1$ folgt: $\varepsilon^2 < \sqrt{\varepsilon}$, womit sich ergibt:

$$\frac{df}{d\varepsilon} < -\frac{1}{n\varepsilon^2} + \frac{1}{n^2}\left(1 + \frac{n}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = -\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1\right) < 0 \,,$$

also fällt $f(\varepsilon)$ monoton für $0 < \varepsilon < 1$. Wegen (20) folgt daher:

$$\rho^2(C_1) = f(\varepsilon_0) > 1$$

also: $$\rho(C_1) > 1 \tag{21}$$

Also ist S_1 instabil und Satz 2 bewiesen.

q.e.d.

Wir betrachten jetzt das Schema S_2 und die zugehörige Amplifikationsmatrix C_2 .

Für den Fall, daß man S_2 auf (11) anwendet, ergibt sich aus (4):

$$
C_2 = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} & & & k+1 & j+1 & \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccc}
1 - \sum_1^n t_k^2 (1-\cos\alpha_k), & i t_1 \cdot \sin\alpha_1, & \cdots & \vdots & \cdots & i t_n \sin\alpha_n \\
i t_1 \sin\alpha_1, & 1 - t_1^2(1-\cos\alpha_1) & & \vdots & \vdots & \\
\vdots & & \ddots & & \vdots & \\
\vdots & \cdots & \cdots & \ddots & -\frac{t_j t_k \sin\alpha_j \sin\alpha_k}{2} & \cdots \\
\vdots & & & \vdots & \ddots & \\
\vdots & \cdots & \cdots & -\frac{t_j t_k \sin\alpha_j \sin\alpha_k}{2} & \cdots & \ddots \\
i t_n \sin\alpha_n & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 - t_n^2(1-\cos\alpha_n)
\end{array} \right)
\begin{array}{l} \\ \\ \\ (k+1 \\ \\ (j+1) \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

Es gilt:

Satz 3: Hinreichend für die Stabilität des Differenzenschemas S_2 in jedem endlichen Zeitintervall $(0,T)$ ist die Bedingung:

$$\mu_k \geqslant n \cdot |c_k| \quad , \quad k = 1, \ldots, n \tag{22}$$

Für n = 1 ist diese Bedingung auch notwendig für die Stabilität von S_2 .

Beweis: Wir behandeln zunächst den Fall n = 1. Es ist in diesem Falle C_2 eine 2-reihige normale Matrix. Also ist wieder $\varrho(C_2) \leq 1$ äquivalent mit der Stabilität von S_2. Man rechnet nach $\left(r := \frac{c}{\mu} \right)$:

$$\varrho^2(C_2) = [1 - r^2(1-\cos\alpha)]^2 + r^2 \cdot \sin^2\alpha =$$

$$= 1 + r^4(1-\cos\alpha)^2 - 2r^2(1-\cos\alpha) + r^2 \cdot \sin^2\alpha =$$

$$= 1 + r^4(1-\cos\alpha)^2 - r^2(1-\cos\alpha)^2 =$$

$$= 1 - r^2(1-\cos\alpha)^2 \cdot [1 - r^2] .$$

Also $\varrho^2(C_2) \leq 1$ genau dann, wenn $r^2 \leq 1$ ist.
Dies ist aber gleichbedeutend mit Formel (22) für n = 1. Es sei jetzt n > 1. Nach dem bekannten Satz von Lax und Wendroff (vgl. [2]) genügt es zu zeigen, daß für beliebige Einheitsvektoren u gilt:

$$|(C_2 u, u)|^2 \leq 1 \qquad (23)$$

Wir zerlegen C_2 auf folgende eindeutige Weise:

$$C_2 = I - K + iJ \qquad (24)$$

I ist die Einheitsmatrix und K,J sind reelle, symmetrische Matrizen. Wir setzen:

$$X_k := 1 - \cos\alpha_k \quad , \qquad k = 1, \dots, n$$

und erhalten durch leichte Rechnung:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n} r_k^2 X_k^2 A_k^2 + \frac{1}{2} J^2 \tag{25}$$

$$K = \sum_{1}^{n} r_k^2 X_k A_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{j<k} r_j r_k \sin\alpha_j \sin\alpha_k B_{jk} \tag{26}$$

Dabei sind die A_k wie in (11) definiert. Es ist:

$$A_k^2 = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} k+1 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & & \vdots & & \\ & 0 & \vdots & 0 & \\ \cdots & \cdots\, 0 & 1 & 0 \cdots & \cdots \\ & 0 & \vdots & \ddots & \\ & & \vdots & & 0 \end{array}\right] & k+1 \end{array} \qquad k = 1,\ldots\ldots, n$$

$$B_{jk} = A_j A_k + A_k A_j = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} j+1 & k+1 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \\ \cdots 0 \cdots & \cdots 1 \cdots & \\ \vdots & \vdots & \\ \cdots 1 \cdots & \cdots 0 \cdots & \\ \vdots & \vdots & \end{array}\right] & \begin{array}{c} j+1 \\ \\ k+1 \end{array} \end{array} \qquad j,k = 1,\ldots,n$$

Aus (25) ersieht man, daß K positiv semidefinit ist.

Sei $u := \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n+1} \end{bmatrix}$ ein beliebiger Einheitsvektor, d.h. es gelte:

$$\sum_{k=1}^{n} |u_k|^2 = 1 \tag{27}$$

Es folgt:

$$\left.\begin{aligned} (C_2 u, u) &= 1 - (Ku, u) + i(Ju, u) = \\ &= r + i \cdot j \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Man beachte, daß (Ku,u) und (Ju,u) reell sind. Wir wollen zeigen:

$$\|(C_2 u,u)\|^2 = r^2 + j^2 \leq 1 \tag{29}$$

Mit $\quad a_k := |A_k u|^2 \quad , \quad$ k = 1,...., n folgt aus (25):

$$(Ku,u) = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n} t_k^2 a_k X_k^2 + \frac{1}{2} |Ju|^2 \tag{30}$$

Dieses und (28) ergibt:

$$\begin{aligned} r^2 &= 1 - 2(Ku,u) + (Ku,u)^2 = \\ &= 1 - \sum_{1}^{n} t_k^2 a_k X_k^2 - |Ju|^2 + (Ku,u)^2 \end{aligned}$$

Wegen der Schwarz'schen Ungleichung:

$$j^2 = (Ju,u)^2 \leq |Ju|^2$$

folgt:

$$r^2 + j^2 \leq 1 - \sum_{1}^{n} t_k^2 a_k X_k^2 + (Ku,u)^2 \tag{31}$$

Formel (26) ergibt:

$$(Ku,u) = \sum_{1}^{n} t_k^2 a_k X_k + \sum_{j<k} t_j t_k \sin\alpha_j \sin\alpha_k \cdot \mathrm{Re}(A_j u, A_k u) \tag{32}$$

Ausrechnen ergibt:

$$\left.\begin{array}{lll} a_k = |u_1|^2 + |u_{k+1}|^2, & & k = 1, \dots, n \\ \mathrm{Re}(A_j u, A_k u) \leq |u_{j+1}| \cdot |u_{k+1}| & , & j < k \\ \sin^2 \alpha_k \leq 2\chi_k & , & k = 1, \dots, n \\ r_j r_k \sin\alpha_j \sin\alpha_k \leq r_j^2 \chi_j + r_k^2 \chi_k & , & j < k \end{array}\right\} \tag{33}$$

Daraus ergibt sich:

$$(Ku,u) \leq \sum_1^n r_k^2 a_k \chi_k + \sum_{j<k} (r_j^2 \chi_j + r_k^2 \chi_k) \cdot |u_{j+1}| \cdot |u_{k+1}| =$$

$$= \sum_{k=1}^n r_k^2 \chi_k \cdot \Big(a_k + |u_{k+1}| \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |u_{j+1}| \Big) = \sum_{k=1}^n r_k^2 \chi_k \omega_k .$$

Wegen der Ungleichung:

$$(s_1 + \dots + s_n)^2 \leq n \cdot s_1^2 + \dots\dots + n \cdot s_n^2$$

folgt:

$$(Ku,u)^2 \leq \sum_1^n n \cdot r_k^4 \chi_k^2 \omega_k^2 \tag{34}$$

Einsetzen von (34) in (31) ergibt:

$$r^2 + j^2 \leq 1 - \sum_1^n r_k^2 \chi_k^2 \cdot (a_k - n r_k^2 \omega_k^2) \tag{35}$$

Es ist also zu zeigen:

$$a_k - n r_k^2 \omega_k^2 \geq 0 \quad , \qquad k = 1, \dots, n \quad .$$

Diese Ungleichung ist sicher erfüllt, wenn sie für $r_k^2 = \frac{1}{n^2}$, $k = 1,\ldots, n$ gilt, denn wegen Formel (22) ist ja

$$r_k^2 \leq \frac{1}{n^2} \quad , \qquad k = 1,\ldots,n \quad .$$

Also ist zu zeigen:

$$n \cdot a_k - \omega_k^2 \geqslant 0 \quad , \qquad k = 1,\ldots,n \quad .$$

Aus Symmetriegründen genügt es zu zeigen:

$$n\, a_1 - \omega_1^2 \geqslant 0$$

oder ausführlich geschrieben:

$$n \cdot |u_1|^2 + n \cdot |u_2|^2 - \left\{|u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_2| \cdot \left(|u_3| + \cdots + |u_{n+1}|\right)\right\}^2 \geqslant 0 \qquad (36)$$

mit der zusätzlichen Bedingung:

$$\sum_1^{n+1} |u_k|^2 = 1$$

Wir setzen

$$x_k := |u_k| \quad , \qquad k = 1,\ldots,n,$$

eliminieren $|u_{n+1}|$ aus (36) und definieren:

$$f(x_1, \ldots, x_n) := n\,(x_1^2 + x_2^2) - \left\{x_1^2 + x_2^2 + x_2 \cdot \left(x_3 + \cdots + x_n + \sqrt{1 - \sum_1^n x_k^2}\right)\right\}^2$$

also ist zu zeigen:

$$f(x_1, \cdots, x_n) \geqslant 0 \qquad \text{für} \quad \sum_1^n x_k^2 \leq 1 \tag{37}$$

Wir formen jetzt $f(x_1, \cdots, x_n)$ um durch Einführen von Parametern:

Sei a_1 ein Parameter: $0 \leq a_1 \leq 1$.

Mit :

$$x_n = \sqrt{a_1^2 - \sum_1^{n-1} x_k^2}$$

wird $f(x_1, \cdots, x_n)$ zu:

$$f(x_1, \cdots, x_{n-1}) = n(x_1^2 + x_2^2) - \Big\{ x_1^2 + x_2^2 + x_2\Big(x_3 + \cdots + x_{n-1} + \sqrt{a_1^2 - \sum_1^{n-1} x_k^2} + \sqrt{1-a_1^2}\Big)\Big\}^2$$

Sei a_2 ein Parameter: $0 \leq a_2 \leq 1$

Mit:

$$x_{n-1} = \sqrt{a_2^2 - \sum_1^{n-2} x_k^2}$$

wird $f(x_1, \cdots, x_{n-1})$ zu einer Funktion $f(x_1, \cdots, x_{n-2})$, in der nun die beiden Parameter a_1, a_2 enthalten sind.

So wird successiv fortgefahren bis man folgende Funktion erhält (wir setzen $x := x_1$):

$$a_0 := 1$$

$$f(x) = n \cdot a_{n-1}^2 - \Big\{ a_{n-1}^2 + \sqrt{a_{n-1}^2 - x^2} \cdot \sum_0^{n-2} \sqrt{a_k^2 - a_{k+1}^2} \Big\}^2$$

Zu zeigen ist :

$$f(x) \geqslant 0 \qquad \text{für:} \tag{38}$$

$$0 \leq x \leq a_{n-1} \leq \cdots \leq a_2 \leq a_1 \leq 1 .$$

Man überlegt sich sofort, daß (38) sicher erfüllt ist, wenn diese Ungleichung für x = 0 gilt. Da für $a_{n-1} = 0$ die Ungleichung (38) erfüllt ist, reduziert sich jetzt das Problem auf den Nachweis der Ungleichung:

$$\sqrt{n} \geq a_{n-1} + \sum_{0}^{n-2} \sqrt{a_k^2 - a_{k+1}^2} \tag{39}$$

Die rechte Seite von (39) bezeichnen wir jetzt mit $\varphi_1 := = \varphi(a_1, \cdots, a_{n-1})$. Formel (39) und damit Satz 3 sind bewiesen, wenn gilt:

$$\max_G \varphi(a_1, \cdots, a_{n-1}) \leq \sqrt{n} \tag{40}$$

mit:

$$G := \{ (a_1, \cdots, a_{n-1}) : 0 \leq a_{n-1} \leq \cdots \leq a_1 \leq 1 \}$$

Wir zeigen:

$$\max_G \varphi = \sqrt{n} \tag{41}$$

Es ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_{n-1}} = \frac{\sqrt{a_{n-2}^2 - a_{n-1}^2} - a_{n-1}}{\sqrt{a_{n-2}^2 - a_{n-1}^2}}$$

Es folgt, daß in Bezug auf a_{n-1} das Maximum von φ bei

$$a_{n-1} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, a_{n-2}$$

liegt. Daraus folgt durch Einsetzen:

$$\varphi_2 := \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, a_{n-2} + \sqrt{a_{n-2}^2 - \tfrac{1}{2} a_{n-2}^2} + \cdots + \sqrt{1 - a_1^2} =$$

$$= \sqrt{2}\, a_{n-2} + \sum_0^{n-3} \sqrt{a_k^2 - a_{k+1}^2} \quad .$$

So wird fortgefahren:

$$\varphi_r := \sqrt{r}\, a_{n-r} + \sum_0^{n-r-1} \sqrt{a_k^2 - a_{k+1}^2}$$

Es ist:

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial a_{n-r}} = \frac{\sqrt{r} \cdot \sqrt{a_{n-r-1}^2 - a_{n-r}^2} - a_{n-r}}{\sqrt{a_{n-r-1}^2 - a_{n-r}^2}}$$

Es folgt wieder, daß in Bezug auf a_{n-r} das Maximum von φ_r bei

$$a_{n-r} = \sqrt{\frac{r}{r+1}}\, a_{n-r-1}$$ liegt.

Es folgt durch Einsetzen:

$$\varphi_{r+1} := \sqrt{r} \cdot \sqrt{\frac{r}{r+1}} \cdot a_{n-r-1} + \sqrt{a_{n-r-1}^2 - \frac{r}{r+1} a_{n-r-1}^2} + \cdots + \sqrt{1 - a_1^2} =$$

$$= \sqrt{r+1} \cdot a_{n-r-1} + \sum_0^{n-r-2} \sqrt{a_k^2 - a_{k+1}^2}$$

So erhalten wir schließlich:

$$\varphi_{n-1} := \sqrt{n-1} \cdot a_1 + \sqrt{1 - a_1^2} \qquad (42)$$

Es ist:

$$\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial a_1} = \sqrt{n-1} - \frac{a_1}{\sqrt{1-a_1^2}}$$

In Bezug auf a_1 liegt das Maximum von $\varphi_{n-1}(a_1)$ bei

$$a_1 = \sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

Durch Einsetzen folgt:

$$\varphi_n := \sqrt{n-1}\sqrt{\frac{n-1}{n}} + \sqrt{1-\frac{n-1}{n}} = (n-1)\cdot\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{1}{n}} = n\cdot\sqrt{\frac{1}{n}} = \sqrt{n}$$

Also:

$$\varphi_n = \sqrt{n} \qquad (43)$$

Damit ist (41) bzw. (40) gezeigt und somit Satz 3 bewiesen.

q.e.d.

Anmerkung: Es folgt, daß die ursprüngliche Funktion (36) auch tatsächlich den Wert Null annimmt, und zwar im Punkte:

$$|u_1| = 0$$
$$|u_k| = \sqrt{\frac{1}{n}} \quad , \qquad k = 2,\dots\dots,n+1.$$

3. Numerische Experimente an der Wellengleichung mit konstanten Koeffizienten in ein, zwei und drei Dimensionen.

Die Differenzenschemata S_1 bzw. S_2 erhält man aus den Formeln (3) bzw. (4) durch die Substitutionen:

$$e^{i\alpha_k} \longrightarrow T_k \qquad k = 1,\dots,n$$

Wir setzen weiter:

$$\left.\begin{aligned} D_k^{(1)} &:= T_k - T_k^{-1} \\ D_k^{(2)} &:= T_k - 2I + T_k^{-1} \end{aligned}\right\} k = 1,\dots,n$$

und erhalten aus (3) und (4):

$$S_1 = I + \sum_1^n \frac{1}{2\mu_k} A_k \cdot D_k^{(1)} + \frac{1}{2n} I \cdot \sum_1^n D_k^{(2)} \tag{44}$$

$$S_2 = I + \sum_1^n \frac{1}{2\mu_k} A_k \cdot D_k^{(1)} + \sum_1^n \frac{1}{2\mu_k^2} A_k^2 \cdot D_k^{(2)} + \sum_{j<k} \frac{1}{8\mu_j\mu_k} B_{jk} \cdot D_j^{(1)} \cdot D_k^{(1)} \tag{45}$$

Wir betrachten zunächst die eindimensionale Wellengleichung und denken uns diese wie in (11) umgeformt. S_1 hat die Form:

$$S_1(\mu h) = I + \frac{1}{2\mu} A \cdot D^{(1)} + \frac{1}{2} I \cdot D^{(2)} \tag{46}$$

mit: $\qquad A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c ist jetzt gleich 1 gesetzt).

Die Differenzengleichung hat die Form:

$$S_1(\mu h) \cdot v(x,t) = v(x, t+h) \qquad (47)$$

mit:

$$v(x,t) := \begin{bmatrix} v_0(x,t) \\ v_1(x,t) \end{bmatrix}$$

Sie approximiert das System

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} &= A \cdot \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \\ w(x,0) &= f(x) \end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

von erster Ordnung.

Da $\quad w(x,0) = v(x,0) = f(x)$ ist, folgt aus (47):

$$v_0(x,h) = w_0(x,0) + \frac{1}{2}\{w_0(x+\mu h,0) - 2w_0(x,0) + w_0(x-\mu h,0)\}$$
$$+ \frac{1}{2\mu}\{w_1(x+\mu h,0) - w_1(x-\mu h,0)\}.$$

Wegen:

$$w_k(x+\mu h,t) - w_k(x-\mu h,t) = 2\mu h \frac{\partial w_k}{\partial x}(x,t) + O(h^3)$$

$$w_k(x+\mu h,t) + w_k(x-\mu h,t) = 2w_k(x,t) + \mu^2 h^2 \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2}(x,t) + O(h^4)$$

für k = 0,1

und:

$$h \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x}(x,0) = h \frac{\partial w_0}{\partial t}(x,0) = w_0(x,h) - w_0(x,0) + O(h^2)$$

ergibt sich daraus:

$$v_0(x,h) = w_0(x,h) + O(h^2) \tag{49}$$

Falls $\frac{\partial^n w_0}{\partial x^n}$, $\frac{\partial^n w_0}{\partial t^n}$ für $n \geqslant 2$ identisch verschwinden, stimmen exakte Lösung und Näherungslösung bei $t = h$ überein. Durch Induktion folgt dann, daß sie auch für jeden Zeitschritt übereinstimmen.

Analog kann man die Betrachtungen für $S_2(\mu h)$ durchführen. $S_2(\mu h)$ hat die Form:

$$S_2(\mu h) = I + \frac{1}{2\mu} A \cdot D^{(1)} + \frac{1}{2\mu^2} I \cdot D^{(2)} \tag{50}$$

Man beachte, daß $A^2 = I$ ist.

Mit analogen Betrachtungen wie oben und wegen:

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}(x,t)$$

ergibt sich:

$$v_0(x,h) = w_0(x,h) + O(h^3) \tag{51}$$

Falls jetzt für $n \geqslant 3$ die Ableitungen von w_0 nach x und t der

Ordnung n identisch verschwinden, stimmen wieder exakte Lösung und Näherungslösung bei t = h überein. Durch Induktion folgt, daß sie für jeden Zeitschritt übereinstimmen. Damit folgt:

Satz 4: Hat die Lösung $u(x,t)$ der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

die Eigenschaft, daß gilt:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} \equiv \frac{\partial^n u}{\partial t^n} \equiv 0 \qquad \text{für } n \geq 2 \text{ bzw. } n \geq 3 \tag{52}$$

dann stimmt sie exakt mit der ersten Komponente der Lösung des Differenzenschemas $S_1(\mu h)$ bzw. $S_2(\mu h)$ überein. Dies gilt unabhängig von μ.

Rechenbeispiele:

1.) $$u(x,t) = x^2 + t^2$$

Umformung:

$$w(x,t) = \begin{bmatrix} w_0(x,t) \\ w_1(x,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + t^2 \\ 2xt \end{bmatrix}$$

2.) $$u(x,t) = \sin x \cdot \cos t$$

Umformung:

$$w(x,t) = \begin{bmatrix} w_0(x,t) \\ w_1(x,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin x \cdot \cos t \\ \cos x \cdot \sin t \end{bmatrix}$$

Es sei noch ein Satz angeführt, der in [1], Seite 496-497 bewiesen wird:

Satz 5: Ist $\mu = 1$, so stimmen die Lösungen der Differenzenschemata S_1 bzw. S_2 exakt mit der Lösung der Wellengleichung überein.

Im zweidimensionalen Fall wurde als Rechenbeispiel die Lösungsfunktion

3.) $u(x,y,t) := (\sin x + \sin y) \cdot \cos t$

benutzt. $(c_1 = c_2 = 1)$.

Umformung:

$$W_0(x,y,t) = (\sin x + \sin y) \cdot \cos t$$

$$W_1(x,y,t) = \cos x \cdot \sin t$$

$$W_2(x,y,t) = \cos y \cdot \sin t$$

Bei diesen Rechenbeispielen 1.), 2.), 3.) wurde mit Randwerten gearbeitet und die numerischen Lösungen mit den exakten Lösungen verglichen. Im dreidimensionalen Fall wurden mit einem RDM-Programm Zufallszahlen als Anfangswerte eingesetzt und die zu berechnende Lösung als periodisch in allen drei Ortsvariablen angenommen. Das Periodenintervall war der Einheitswürfel. Bei den Berechnungen, bei denen die Schrittweitenverhältnisse μ_1, μ_2, μ_3 variiert wurden, ließ sich sehr gut die Stabilität bzw. Instabilität der Schemata S_1 , S_2 ablesen. $(c_1 = c_2 = c_3 = 1)$.

Die Resultate stimmen bei dem Schema S_1 gut mit Formel (15) überein. (120 bis 200 Zeitschritte). Bei dem Schema $S_2(\mu_1 h, \mu_2 h, \mu_3 h)$ führen die Rechenergebnisse zu der Annahme, daß sich Formel (22) verschärfen läßt:

Nach 120 Zeitschritten zeigten sich folgende Resultate:

1.)	$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$	$= 2{,}5$	stabiles Verhalten
2.)	$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$	$= 2{,}0$	stabiles Verhalten
3.)	$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$	$= 1{,}8$	stabiles Verhalten
4.)	$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$	$= \sqrt{3}$	ungewiß
5.)	$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$	$= 1{,}7$	anscheinend instabiles Verhalten
6.)	$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$	$= 1{,}5$	instabiles Verhalten

Es ist also anzunehmen, daß die hinreichende Bedingung

$$\mu_k \geq 3 \quad , \qquad k = 1,2,3$$

verschärft werden kann zu

$$\mu_k \geq \sqrt{3} \quad , \qquad k = 1,2,3$$

bzw., daß Formel (22) verschärft werden kann zu:

$$\mu_k \geq \sqrt{n} \cdot |c_k| \quad , \qquad k = 1,\ldots,n \tag{22'}$$

Dies bedarf einer schärferen Untersuchung der Amplifikationsmatrix zu S_2 .

Im Falle, daß Formel (22') gelten sollte, ist natürlich das Schema S_2 dem Schema S_1 bei der numerischen Behandlung der Wellengleichung vorzuziehen, da ersteres auf Grund der höheren Konsistenz genauer ist und der Rechenaufwand nur unerheblich höher ausfällt.

L i t e r a t u r v e r z e i c h n i s.

[1] Isaacson, E. and H.B. Keller: Analysis of numerical methods. John Wiley a. Sons, Inc., New York, London, Sydney (1966)

[2] Lax, P.D., and B. Wendroff: Difference schemes with high order of accuracy for solving hyperbolic equations. Comm. pure appl. math. 17, 381-398 (1964)

[3] Richtmyer, R.D. and K.W. Morton: Difference methods for initial-value problems. Interscience publishers John Wiley a. Sons, New York, London, Sydney (1967)