

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Die nichtlineare Wechselwirkung einer stationären zirkular polarisierten elektromagnetischen Welle mit einem kalten Plasma im konstanten longitudinalen Magnetfeld.

The Non-linear Interaction of a Steady-state Circularly Polarized Electromagnetic Wave with a Cold Plasma in a Constant Longitudinal Magnetic Field.

Werner Lünow

IPP 6/62

Januar 1968

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

IPP 6/62 W. Lünow

The Non-linear Interaction of a
Steady-state Circularly Polarized
Electromagnetic Wave with a Cold
Plasma in a Constant Longitudinal
Magnetic Field.

(in German) January 1968

ABSTRACT:

The strictly relativistic, non-linear solution describing the interaction of a stationary, circularly polarized electromagnetic wave with a cold plasma in a constant longitudinal magnetic field is derived.

Apart from the a priori restriction that the plasma in the wave-plasma-magnetic field system under consideration be cold, no other restriction is imposed on the range of validity of the solution. Provided the solution exists, it is thus valid for any values of the parameters.

The solution allows exact study of the resonance behaviour and cut-off behaviour of wave-plasma-magnetic field systems of the kind described.

The non-linear relations between the wave, plasma and field parameters can be solved numerically without approximations.

Owing to the complicated nature of the equations a special case is treated which at least conveys some idea of the general relationships.

INHALTSVERZEICHNIS

EINLEITUNG	1
GRUNDGLEICHUNGEN	2
VORAUSSETZUNGEN	5
GRUNDGLEICHUNGEN MIT VORAUSSETZUNGEN	6
LÖSUNGSANSATZ	8
LÖSUNGEN	9
LÖSUNG DES FALLES $V_{\text{ox}} = 0$; $B_{\text{ox}} \neq 0$	12
SPEZIELLER FALL	16
LITERATURVERZEICHNIS	22
ABBILDUNGEN	

EINLEITUNG

Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen ist ein in (1) abgeleitetes makroskopisches und relativistisches Gleichungssystem für ein vollionisiertes aus einer einzigen Atomsorte bestehendes Plasma. Es erlaubt die exakte nichtlineare Beschreibung der Wechselwirkung einer stationären zirkular polarisierten elektromagnetischen Welle mit einem kalten Plasma im konstanten longitudinalen Magnetfeld.

Der Begriff "kaltes Plasma" soll anzeigen, daß in den Grundgleichungen die von den Spannungs-(Druck)-Tensoren der Ionen und der Elektronen, die von der Gravitation und die von der direkten Wechselwirkung zwischen Ionen und Elektronen herrührenden Kraftwirkungen gegenüber den elektromagnetischen Kräften vernachlässigt worden sind. Da lediglich transversale Wellen behandelt werden, ist die LANDAU-Dämpfung für eine Abschätzung der zulässigen mittleren thermischen Teilchengeschwindigkeiten ohne Belang.

Als "longitudinales" Magnetfeld wird ein in oder gegen die Richtung der Wellenfortpflanzung orientiertes Feld bezeichnet.

Außer der a priori Einschränkung, daß das Plasma im jeweils betrachteten Welle-Plasma-Magnetfeld-System "kalt" sein muß, unterliegt die gefundene relativistische nichtlineare Lösung keiner weiteren Einschränkung ihres Gültigkeitsbereiches. In diesem Sinne gilt sie - ihre Existenz vorausgesetzt - für beliebige Werte der Parameter. Damit ermöglicht sie unter anderem ein exaktes Studium des cut-off- und des Resonanz-Verhaltens von Welle-Plasma-Magnetfeld-Systemen der vorliegenden Art.

GRUNDGLEICHUNGEN

Nach (1) gilt das folgende System von Vektorgleichungen

$$\begin{aligned}
 (\bar{U}\bar{V}_+ - \gamma_+ ku) \frac{d\bar{V}_+}{d\xi} &= - \frac{1}{ku} \frac{Ze}{m_+} \left\{ (\bar{U}\bar{V}_+ - \gamma_+ ku)\bar{E} - (\bar{V}_+\bar{E})\bar{U} - \right. \\
 &\left. - ku(\bar{V}_+ \times \bar{B}_0) + \frac{1}{\gamma_0} (\bar{U}\bar{V}_+)(\bar{V}_0 \times \bar{B}_0) - \frac{1}{\gamma_0} \left[\bar{V}_+ \cdot (\bar{V}_0 \times \bar{B}_0) \right] \bar{U} \right\} \quad 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\bar{U}\bar{V}_- - \gamma_- ku) \frac{d\bar{V}_-}{d\xi} &= \frac{1}{ku} \frac{e}{m_-} \left\{ (\bar{U}\bar{V}_- - \gamma_- ku)\bar{E} - (\bar{V}_-\bar{E})\bar{U} - \right. \\
 &\left. - ku(\bar{V}_- \times \bar{B}_0) + \frac{1}{\gamma_0} (\bar{U}\bar{V}_-)(\bar{V}_0 \times \bar{B}_0) - \frac{1}{\gamma_0} \left[\bar{V}_- \cdot (\bar{V}_0 \times \bar{B}_0) \right] \bar{U} \right\} \quad 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\xi} \left[\left(\frac{ku}{c^2} - \frac{\bar{U}\bar{U}}{ku} \right) \bar{E} + \frac{1}{ku} (\bar{U}\bar{E})\bar{U} \right] &= \frac{\omega_{Gm}^2}{ec^2} (\bar{U}\bar{V}_0 - \gamma_0 ku) * \\
 * \left[\bar{V}_+(\bar{U}\bar{V}_+ - \gamma_+ ku)^{-1} - \bar{V}_-(\bar{U}\bar{V}_- - \gamma_- ku)^{-1} \right] &\quad 3)
 \end{aligned}$$

Daneben bestehen die Beziehungen

$$\bar{B} = \bar{B}_0 + \frac{1}{ku} \left[\bar{U} \times (\bar{E} - \bar{E}_0) \right] \quad 4)$$

$$\gamma_0 \bar{E}_0 + (\bar{V}_0 \times \bar{B}_0) = 0 \quad 5)$$

$$\gamma_p = \left[1 + \frac{\bar{V}_p \bar{V}_p}{c^2} \right]^{\frac{1}{2}} ; \quad p = +, -, 0 \quad 6)$$

$$\omega_G^2 = \frac{u_o c^2 e}{m_-} \lambda_o \quad 7)$$

Überstrichene Größen sind Dreiervektoren. Der Index + zeigt den Ionen zugeordnete Größen an, der Index - zeigt den Elektronen zugeordnete Größen an und der Index o zeigt bezüglich ξ konstante (dem wellenfreien Plasma zugeordnete) Größen an. Die Betrachtung erfolgt in einem kartesischen rechtwinkligen Koordinatensystem.

Im einzelnen sind

$$\bar{V}_+(V_{+x}; V_{+y}; V_{+z}) ; \quad \bar{V}_-(V_{-x}; V_{-y}; V_{-z}) ; \quad \bar{V}_o(V_{ox}; V_{oy}; V_{oz}) \quad 8)$$

die Raumkomponenten der Vierergeschwindigkeit von Ionen und Elektronen, wobei im wellenfreien Plasma

$$\bar{V}_+ = \bar{V}_- = \bar{V}_o \quad 9)$$

gilt. Ihre Verknüpfung mit den wirklichen Teilchengeschwindigkeiten $\bar{v}_p(v_{px}; v_{py}; v_{pz})$ lautet

$$V_{pq} = \gamma_p v_{pq} ; \quad p = +, -, o ; \quad q = x, y, z \quad 10)$$

Die elektrische und die magnetische Feldstärke haben die Komponenten

$$\bar{E}(E_x; E_y; E_z) ; \quad \bar{E}_o(E_{ox}; E_{oy}; E_{oz}) \quad 11)$$

$$\bar{B}(B_x; B_y; B_z) ; \quad \bar{B}_o(B_{ox}; B_{oy}; B_{oz}) \quad 12)$$

Die Raumkomponenten des Viererausbreitungsvektors der Welle sind in

$$\bar{U}(U_x; U_y; U_z) = (+k; 0; 0) \quad 13)$$

enthalten. \bar{U} ist in 13) so gewählt, daß sich die Welle längs der x-Achse in positiver Richtung fortpflanzt. Die beiden transversalen Schwingungskomponenten liegen damit in Richtung der y- und der z-Achse.

Für die Wellenphase ξ gilt mit 13)

$$\xi = k(x - ut) = kx - \omega t \quad 14)$$

Es bedeuten schließlich

- k - Wellenzahl
- u - Phasengeschwindigkeit
- ω - Wellenfrequenz
- Z - Zahl der im Ion enthaltenen Elementarladungen
- e - Elementarladung
- m_+ - Ionen-Ruhmasse
- m_- - Elektronen-Ruhmasse
- c - Vakuumlichtgeschwindigkeit
- μ_0 - Permeabilität (Vakuum)
- λ_0 - Betrag der Ruh-Ladungsdichte von Ionen und Elektronen im wellenfreien Plasma

Die letztgenannten zehn Größen sind sämtlich konstant.

VORAUSSETZUNGEN

Es gelte die eingeschränkte Transversalitätsbedingung

$$E_x = 0 ; \quad V_{+x} = V_{-x} = V_{ox} ;$$

$$\bar{B}_o(B_{ox}; B_{oy}; B_{oz}) = (B_{ox}; 0; 0) \quad 15)$$

d.h. die konstanten longitudinalen Größen V_{ox} und B_{ox} sind noch zugelassen.

Mit 5) und 6) sei weiterhin

$$\bar{E}_o = 0 \quad \text{also:} \quad \bar{V}_o \times \bar{B}_o = 0 \quad 16)$$

vorausgesetzt.

GRUNDGLEICHUNGEN MIT VORAUSSETZUNGEN

Aus 1), 2) und 3) folgt mit 13), 15) und 16)

$$\frac{dV_{+y}}{d\xi} = - \frac{1}{ku} \frac{Ze}{m_+} \left(E_y - \frac{u}{V_{ox} - \gamma_+ u} B_{ox} V_{+z} \right) \quad (17)$$

$$\frac{dV_{+z}}{d\xi} = - \frac{1}{ku} \frac{Ze}{m_+} \left(E_z + \frac{u}{V_{ox} - \gamma_+ u} B_{ox} V_{+y} \right) \quad (18)$$

$$\frac{dV_{-y}}{d\xi} = \frac{1}{ku} \frac{e}{m_-} \left(E_y - \frac{u}{V_{ox} - \gamma_- u} B_{ox} V_{-z} \right) \quad (19)$$

$$\frac{dV_{-z}}{d\xi} = \frac{1}{ku} \frac{e}{m_-} \left(E_z + \frac{u}{V_{ox} - \gamma_- u} B_{ox} V_{-y} \right) \quad (20)$$

$$\frac{dE_y}{d\xi} = \frac{\omega_G^2 m_-}{ek} \frac{u}{u^2 - c^2} (V_{ox} - \gamma_0 u) \left(\frac{V_{+y}}{V_{ox} - \gamma_+ u} - \frac{V_{-y}}{V_{ox} - \gamma_- u} \right) \quad (21)$$

$$\frac{dE_z}{d\xi} = \frac{\omega_G^2 m_-}{ek} \frac{u}{u^2 - c^2} (V_{ox} - \gamma_0 u) \left(\frac{V_{+z}}{V_{ox} - \gamma_+ u} - \frac{V_{-z}}{V_{ox} - \gamma_- u} \right) \quad (22)$$

$$V_{+y} \frac{dV_{+y}}{d\xi} + V_{+z} \frac{dV_{+z}}{d\xi} = 0 : \quad V_{+y}^2 + V_{+z}^2 = \tilde{V}_+^2 = \text{const.} \quad (23)$$

$$V_{-y} \frac{dV_{-y}}{d\xi} + V_{-z} \frac{dV_{-z}}{d\xi} = 0 : \quad V_{-y}^2 + V_{-z}^2 = \tilde{V}_-^2 = \text{const.} \quad (24)$$

$$\frac{\omega_G^2}{eku} (v_{ox} - \gamma_0 u) \left(\frac{1}{v_{ox} - \gamma_+ u} - \frac{1}{v_{ox} - \gamma_- u} \right) v_{ox} = 0 \quad 25)$$

wobei

$$v_{ox} - \gamma_+ u \neq 0; \quad v_{ox} - \gamma_- u \neq 0; \quad v_{ox} - \gamma_0 u \neq 0$$

sein soll.

Wegen 23) und 24) wird

$$\gamma_+ = \left[1 + \frac{1}{c^2} (v_{ox}^2 + \tilde{v}_+^2) \right]^{\frac{1}{2}} = \text{const.} \quad 26)$$

$$\gamma_- = \left[1 + \frac{1}{c^2} (v_{ox}^2 + \tilde{v}_-^2) \right]^{\frac{1}{2}} = \text{const.} \quad 27)$$

Mit 15) und 16) gilt für $B_{ox} \neq 0$

$$\bar{V}_0(v_{ox}; v_{oy}; v_{oz}) = (v_{ox}; 0; 0) \quad \text{d.h.}$$

$$\gamma_0 = \left[1 + \frac{1}{c^2} v_{ox}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad 28)$$

Wegen 26) und 27) sind die Gleichungen 17) bis 22) in den Lösungsfunktionen $V_{+y}, V_{+z}, V_{-y}, V_{-z}, E_y$ und E_z linear.

LÖSUNGSANSATZ

Für 17) bis 22) ist der folgende Lösungsansatz möglich

$$\begin{aligned}
 E_y &= + \tilde{E} \sin \xi ; & E_z &= + \tilde{E} \cos \xi ; \\
 V_{+z} &= + \tilde{V}_+ \sin \xi ; & V_{+y} &= + \tilde{V}_+ \cos \xi ; \\
 V_{-z} &= + \tilde{V}_- \sin \xi ; & V_{-y} &= + \tilde{V}_- \cos \xi
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

Die beliebige Anfangsphase wurde zu Null gewählt.

28) stellt eine zirkular polarisierte elektromagnetische Welle dar. Dabei gilt das obere Vorzeichen für die rechtszirkulare Polarisation, das untere Vorzeichen für die linkszirkulare.

Für die drei Amplituden \tilde{E} , \tilde{V}_+ und \tilde{V}_- ergibt sich aus 28) und 17) bis 22) das nichtlineare algebraische Gleichungssystem

$$+ \frac{k u m_+}{Z e} \tilde{V}_+ = + \tilde{E} - \frac{u B_{0x}}{V_{0x} - \gamma_+ u} \tilde{V}_+
 \tag{29}$$

$$- \frac{k u m_-}{e} \tilde{V}_- = + \tilde{E} - \frac{u B_{0x}}{V_{0x} - \gamma_- u} \tilde{V}_-
 \tag{30}$$

$$+ \tilde{E} = + \frac{\omega_{Gm}^2}{ek} \frac{u}{u^2 - c^2} (V_{0x} - \gamma_0 u) \left(\frac{\tilde{V}_+}{V_{0x} - \gamma_+ u} - \frac{\tilde{V}_-}{V_{0x} - \gamma_- u} \right)
 \tag{31}$$

LÖSUNGEN

Das Gleichungssystem 29) bis 31) enthält vier Lösungsfälle

$$1. \quad V_{\text{ox}} = 0 ; \quad B_{\text{ox}} = 0 ; \quad (V_{\text{oy}} = V_{\text{oz}} = 0)$$

$$2. \quad V_{\text{ox}} \neq 0 ; \quad B_{\text{ox}} \neq 0 ; \quad (V_{\text{oy}} = V_{\text{oz}} = 0)$$

$$3. \quad V_{\text{ox}} \neq 0 ; \quad B_{\text{ox}} = 0 ; \quad (V_{\text{oy}} = V_{\text{oz}} = 0)$$

$$4. \quad V_{\text{ox}} = 0 ; \quad B_{\text{ox}} \neq 0 ; \quad (V_{\text{oy}} = V_{\text{oz}} = 0)$$

Der 1. Fall wurde bereits in (1) abgehandelt. Der 2. und der 3. Fall sind physikalisch bedeutungslos. Dennoch sollen die ersten drei Fälle kurz betrachtet werden.

$$1. \text{ Fall : } \quad V_{\text{ox}} = 0 ; \quad B_{\text{ox}} = 0$$

Aus 29) bis 31) ergeben sich die folgenden Beziehungen

$$\begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \tilde{V}_+ = \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \frac{Zm_-}{m_+} \tilde{V}_- \quad 32)$$

$$\begin{matrix} + \\ + \end{matrix} \frac{e}{cm_-} \frac{\tilde{E}}{\omega} = \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \frac{\omega_G^2}{\omega^2 - c^2 k^2} \left(\frac{1}{\langle - } + \frac{Zm_-}{m_+} \frac{1}{\langle + } \right) \frac{\tilde{V}_-}{c} = \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \frac{\tilde{V}_-}{c} \quad 33)$$

$$\omega^2 - c^2 k^2 = \omega_G^2 \left(\frac{1}{\langle - } + \frac{Zm_-}{m_+} \frac{1}{\langle + } \right) \quad 34)$$

2. Fall : $V_{ox} \neq 0$; $B_{ox} \neq 0$

Für $V_{ox} \neq 0$ folgt aus 25)

$$\chi_+ = \chi_- = \chi \quad \text{also:} \quad \tilde{v}_+^2 = \tilde{v}_-^2 \quad 35)$$

Aus 29) bis 31) und 35) ergibt sich

$$\frac{Zm_-}{m_+} = -1 \quad ; \quad \tilde{v}_+ = \tilde{v}_- \quad ; \quad \tilde{E} = 0 \quad 36)$$

Durch 36) wird postuliert, daß entweder m_+ oder m_- negativ sein muß; vom Verschwinden von \tilde{E} abgesehen:

Die Lösung ist physikalisch bedeutungslos.

3. Fall : $V_{ox} \neq 0$; $B_{ox} = 0$

Aus 29) bis 31) und 35) ergibt sich 36) sowie

$$\frac{Zm_-}{m_+} = 1 \quad ; \quad +\tilde{v}_+ = +\tilde{v}_- \quad ;$$

$$+\frac{e}{cm_-} \frac{\tilde{E}}{\omega} = +\frac{2\omega_G^2}{\omega^2 - c^2k^2} \frac{kV_{ox} - \chi_0\omega}{kV_{ox} - \chi\omega} \frac{\tilde{v}_-}{c} = +\frac{\tilde{v}_-}{c} \quad 37)$$

$$\omega^2 - c^2k^2 = 2\omega_G^2 \frac{kV_{ox} - \chi_0\omega}{kV_{ox} - \chi\omega} \quad 38)$$

Eine Welle 37), 38) wäre beispielsweise in einem Positronen-Elektronen-Gas grundsätzlich möglich:

Hier kann die Lösung als physikalisch bedeutungslos betrachtet werden.

Es bleibt die Lösung des 4. Falles. Sie ist von prinzipiellem Interesse und wird deshalb gesondert behandelt.

LÖSUNG DES FALLES $V_{ox} = 0$; $B_{ox} \neq 0$

Aus 29) und 30) folgt im wesentlichen durch Elimination von \tilde{E} mittels 31)

$$W_+ = -M \left(1 + \frac{\phi}{\chi}\right) W_- \quad 39)$$

$$\frac{W_+}{\chi_+} = \left(\frac{1}{\chi_-} - X\right) W_- \quad 40)$$

per definitionem gilt

$$X = \frac{1}{\theta^2} \left(1 + \frac{\phi}{\chi}\right) (1 - n^2) \quad 41)$$

sowie

$$M = \frac{Zm_-}{m_+}; \quad W_+ = \frac{\tilde{V}_+}{c}; \quad W_- = \frac{\tilde{V}_-}{c}; \quad \phi = \frac{eB_{ox}}{m_- \omega}; \quad \theta = \frac{\omega_G}{\omega};$$

$$n = \frac{c}{u}; \quad \chi_p = \left[1 + W_p^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{mit} \quad p = +, - \quad 42)$$

Mit 40), 41) und 42) wird aus 31)

$$\frac{e}{cm_-} \frac{\tilde{E}}{\omega} = \left(1 - \frac{\phi}{\chi_-}\right) W_- \quad 43)$$

obere Vorzeichen: rechtszirkulare Polarisation
untere Vorzeichen: linkszirkulare Polarisation

Das mathematische Problem besteht in der Lösung des Systems der beiden voneinander unabhängigen, in W_+ und W_- nichtlinearen Gleichungen 39) und 40). Sie verkoppeln - von M abgesehen - die fünf variierbaren physikalischen Größen W_+ , W_- , \emptyset , θ und n . Von diesen Größen sind also drei frei wählbar, die restlichen zwei werden durch die Gleichungen bestimmt.

Für die weitere allgemeine Betrachtung wird das System 39), 40) in eine andere Form gebracht. Aus 39) und 40) ergibt sich durch Elimination von W_+

$$X = \left(\frac{1}{\gamma_-} + \frac{M}{\gamma_+} \right) \frac{1}{1 + \frac{M\emptyset}{\gamma_+}} \quad 44)$$

Mit 44) und 41) folgt die Dispersionsbeziehung

$$n^2 = 1 - \theta^2 \left(\frac{1}{\gamma_-} + \frac{M}{\gamma_+} \right) \frac{1}{1 + \frac{\emptyset}{\gamma_-}} \frac{1}{1 + \frac{M\emptyset}{\gamma_+}} \quad 45)$$

oder

$$\omega^2 - c^2 k^2 = \omega_G^2 \left(\frac{1}{\gamma_-} + \frac{M}{\gamma_+} \right) \frac{1}{1 + \frac{\emptyset}{\gamma_-}} \frac{1}{1 + \frac{M\emptyset}{\gamma_+}} \quad 46)$$

Durch Elimination von X wird aus 39) und 40)

$$\emptyset = \frac{+ \frac{1}{M} \frac{MW_- + W_+}{W_- - W_+}}{- \frac{1}{M} \frac{MW_- + W_+}{W_- - W_+}} \quad 47)$$

Damit wurde das System 39), 40) durch das System 45), 47) ersetzt.

Eine lineare Superposition von durch 45), 47) beschriebenen Wellen ist wegen der Nichtlinearität der Grundgleichungen unstatthaft!

Zunächst sei auf zwei grundsätzliche Zusammenhänge hingewiesen -

Damit eine bestimmte physikalische Lösung überhaupt existieren kann, muß der Brechungsindex n (positiv) reell sein. Die notwendige und hinreichende Bedingung für reelle Werte von n ist, daß n^2 reell und nicht negativ wird. Dann ist die Lösung durch das Verhalten von n^2 charakterisiert (2):

$$\begin{aligned} n^2 \rightarrow 0 & - \text{cut-off} \\ n^2 \rightarrow \infty & - \text{Resonanz} \end{aligned}$$

Die Lösung ist über \emptyset und θ durch Verhältnisse der Parameter B_{ox} , ω_G und ω bestimmt, nicht durch absolute Größen.

Aus 45), 47) lassen sich die wesentlichen Grenzfälle der Lösung ablesen. Hierbei ist der Fall des wellenfreien Plasmas

$$W_+ = W_- = 0 \quad 48)$$

auszuschließen. Es gilt

1) Elektronengyroresonanz -

$$W_+ \rightarrow 0 : \quad \emptyset \rightarrow \frac{+}{-} \gamma_- ; \quad \frac{e}{cm_-} \frac{\tilde{E}}{\omega} \rightarrow 0 ; \quad n^2 \rightarrow \infty ;$$

$$(\theta > 0) \quad 0 < |W_-| \ll \infty$$

2) Ionengyroresonanz -

$$W_- \rightarrow 0 : \quad M\emptyset \rightarrow \frac{-}{+} \gamma_+ ; \quad \frac{e}{cm_-} \frac{\tilde{E}}{\omega} \rightarrow 0 ; \quad n^2 \rightarrow \infty ;$$

$$(\theta > 0) \quad 0 < |W_+| \ll \infty$$

3) cut-off -

$$1 - \theta^2 \left(\frac{1}{\gamma_-} + \frac{M}{\gamma_+} \right) \frac{1}{1 - \frac{\emptyset}{\gamma_-}} \frac{1}{1 + \frac{M\emptyset}{\gamma_+}} = 0$$

4) $\emptyset = 0$ -

$$W_+ = - MW_- ; \quad \frac{e}{cm_-} \frac{\tilde{E}}{\omega} = \frac{+}{-} W_- ; \quad n^2 = 1 - \theta^2 \left(\frac{1}{\gamma_-} + \frac{M}{\gamma_+} \right)$$

Die allgemeinen Fälle sind durch Vorgabe von W_+ , W_- und θ zu berechnen. Zuerst wird \emptyset aus 47) bestimmt, danach in 45) eingesetzt und schließlich n^2 ermittelt. Der gefundene Wert von n^2 zeigt, ob der vorgegebene Zustand des Welle-Plasma-Magnetfeld-Systems physikalisch realisierbar ist oder nicht. Der Rest folgt aus 43).

45), 47) bieten ihrer Kompliziertheit wegen leider wenig Raum zur Vermittlung eines anschaulichen Bildes der allgemeinen Zusammenhänge. Allein die Möglichkeit, 45), 47) in der vorliegenden Form schreiben und exakt - d.h. ohne Näherungsverfahren - lösen zu können, ist keineswegs trivial und beruht auf den zufällig günstigen gegenseitigen Abhängigkeiten der Größen.

Abschließend wird - um wenigstens eine gewisse Anschauung zu geben - ein spezieller Fall behandelt.

Spezieller Fall

Die Spezialisierung besteht in der Voraussetzung

$$W_- > 0 \quad 49)$$

Ein negativer Wert von W_- würde lediglich eine Verschiebung der Anfangsphase der Welle bedeuten.

$W_- = \text{const.}$ wird als Hauptparameter eingeführt; d.h. er sei allen sonstigen Parametern übergeordnet.

Aus 49) und den Bedingungen für die Elektronen- und die Ionengyroresonanz ist ersichtlich, daß die Rechnung nur die Elektronengyroresonanz ($W_+ \rightarrow 0$) erfassen kann, da der Fall $W_- \rightarrow 0$ von vornherein ausgeschlossen ist. Die Ionengyroresonanz wird - wie man mit 47) zeigt - weder im Endlichen noch im Unendlichen erreicht:

Die Beträge von W_+ und \emptyset gehen bei einer Parameterverschiebung in Richtung auf die Ionengyroresonanz gegen Unendlich und können sich beim Grenzprozeß gewissermaßen nie gegenseitig einholen.

Zunächst folgt aus 40)

$$W_+ = \begin{matrix} (+) \\ (-) \end{matrix} W_- \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{\gamma_-} - X\right)^2} - W_-^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad 50)$$

Mit 50) und 39) wird

$$\emptyset = \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \frac{1}{X} \left[1 \begin{matrix} (+) \\ (-) \end{matrix} \frac{1}{M} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{\gamma_-} - X\right)^2} - W_-^2}} \right] \quad 51)$$

und mit 41)

$$n^2 = 1 - \frac{\theta^2 X}{1 + \frac{\theta}{\gamma_-}} \quad 52)$$

Die Vorzeichen (\pm) rühren von der positiven und negativen Wurzel in 50) her und gelten für beide Polarisationen.

Zur Lösung werden die Größen X , W_- und θ vorgegeben. Dann resultiert

aus 51) : θ

aus 52) : n^2

aus 39) : W_+

aus 43) : $\frac{e}{cm_-} \frac{\tilde{E}}{\omega}$

θ läßt sich nur indirekt über X vorgeben. Zur Ermittlung der Lösung ist daher die Betrachtung der Funktion 51)

$$\theta = \theta(X) ; \quad -\infty \leq X \leq +\infty \quad 53)$$

wesentlich. 51) ist eine Gleichung vierten Grades in X . Sie kann vier reelle Wurzeln besitzen, was besagen will, daß vier verschiedene X -Werte den gleichen θ -Wert liefern können. Es erhebt sich die Frage, aus welchen der möglichen reellen X -Werte physikalisch sinnvolle Lösungen ableitbar sind. Die Ableitung derartiger Lösungen geschieht hier mit Hilfe einer zusätzlichen Annahme.

Mit Werten $M < 1$ wird die allein wichtige reelle Funktion $\theta = \theta(X)$ in der X - θ -Ebene durch vier Kurvenzweige dargestellt, für die nach 51) gelten möge

1. Zweig - X : positiv ; (\pm): (\pm)

2. Zweig - X: positiv ; $(\overset{+}{-})$: $(-)$

3. Zweig - X: negativ ; $(\overset{+}{-})$: $(\overset{+}{-})$

4. Zweig - X: negativ ; $(\overset{+}{-})$: $(-)$

Der Betrag von X bleibt beschränkt, während \emptyset die Werte $\overset{+}{-} \infty$ annehmen kann.

Sämtliche Kurvenzweige kommen bei $X = 0$ aus dem Unendlichen, kehren im Endlichen um und laufen bei

$$X = \frac{1}{W_-} + \frac{1}{\gamma_-} \quad (1. \text{ und } 2. \text{ Zweig}) \quad 54)$$

$$X = -\frac{1}{W_-} + \frac{1}{\gamma_-} ; \quad \frac{1}{W_-} > \frac{1}{\gamma_-} \quad (3. \text{ und } 4. \text{ Zweig}) \quad 55)$$

ins Unendliche zurück.

Die vier Kurvenzweige hängen im Unendlichen zusammen. Nur der 1. und der 2. Zweig haben im Endlichen an der Stelle

$$X_G = \frac{1}{\gamma_-} \quad 56)$$

einen gemeinsamen Punkt.

Bei fest vorgegebenem W_- charakterisiert jeder Kurvenpunkt $(X; \emptyset)$ einen bestimmten (realisierbaren oder nicht realisierbaren) "Zustand" des Welle-Plasma-Magnetfeld- Systems. Einem "Zustand" entspricht dabei eigentlich eine durch den Parameter \emptyset gekennzeichnete Schar von Zuständen. Nun sei eine zwar nicht zwingende, doch durch die physikalische Erfahrung zu rechtfertigende Annahme bezüglich der Stetigkeit der Lösungen gemacht:

Bei einer wegen der Stationarität der Lösungen allein möglichen genügend langsamen (adiabatischen) Änderung von X kann das Welle-Plasma-Magnetfeld-System seine "Zustände" nur stetig durchlaufen; d.h. zwei verschiedene "Zustände" sind nur dann ineinander überführbar, wenn sie im Endlichen durch ein $X-\emptyset$ -Kurvenstück verbunden sind.

Diese Annahme erlaubt die Auswahl physikalischer Lösungen aus den möglichen mathematischen. Zu dem Zweck werden die Nullstellen von 53) bestimmt. Mit 51) und 39) folgt

$$X_0 = X(\emptyset=0) = \frac{1}{\gamma_-} + \frac{M}{\gamma_+} ; \quad \emptyset_+ = \left[1 + M^2 W_-^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad 57)$$

Andererseits ergibt sich aus 39) und 40)

$$X_0 = X(\emptyset=0) = \frac{1}{\gamma_-} + \frac{M}{\gamma_+} \quad 58)$$

Damit ist nur die Nullstelle 58) zulässig. Physikalische Lösungen des Welle-Plasma-Magnetfeld-Systems müssen also auf einem $X-\emptyset$ -Kurvenzweig liegen, der den entsprechenden Punkt $(X_0; 0)$ enthält:

Es kommt lediglich der Teil des 2. Zweiges in Betracht, für den $X \geq X_G$ gilt.

Der Rest der Lösung muß entweder auf dem Teil des 1. Zweiges mit $X \leq X_G$ oder auf dem Teil des 1. Zweiges mit $X \geq X_G$ liegen. Die Ausgangsgleichungen 39) und 40) lassen zwei Möglichkeiten offen, nach denen der Betrag von \emptyset gegen Unendlich geht:

1. Möglichkeit - $|\emptyset| \rightarrow \infty ; \quad X \rightarrow 0$
 aus 40) wird $W_+ \rightarrow W_-$
 39) bleibt unbestimmt

2. Möglichkeit - $|\vartheta| \rightarrow \infty$; $X \rightarrow (\frac{1}{W_-} + \frac{1}{\gamma_-})$

aus 40) wird $W_+ \rightarrow -\infty$

39) läßt $W_+ \rightarrow \pm \infty$ offen

Mit 43) ergibt sich in jedem Fall, $\left| \frac{e}{cm_-} \frac{\tilde{E}}{\omega} \right| \rightarrow \infty$,

Die Gesamtlösung muß beide Möglichkeiten enthalten. Der Rest der Lösung kann somit nur noch aus dem Teil des 1. Zweiges mit $X \leq X_G$ bestehen.

Die Funktion $n^2(\vartheta; \vartheta)$ wird über einem ϑ - ϑ -Koordinatensystem mit $W_- = \text{const.}$ bzw. $\tilde{v}_-/c = \text{const.}$ als Hauptparameter dargestellt.

\tilde{v}_- ist die Amplitude der wirklichen Elektronengeschwindigkeit und hängt über 10) und 42) mit W_- zusammen. Entsprechendes gilt für die Ionen, also für \tilde{v}_+ .

Es sind die Parameterbereiche

$$0 < W_- \leq \infty \quad \text{bzw.} \quad 0 < (\tilde{v}_-/c) \leq 1 ;$$

$$0 \leq \vartheta \leq \infty \quad \text{und} \quad -\infty \leq \vartheta \leq +\infty$$

erlaubt; d.h. für die Darstellung von n^2 kommt lediglich die Halbebene $\vartheta \geq 0$ in Frage.

Die allgemeinen Merkmale der Funktion $n^2(\vartheta; \vartheta)$ zeigt Abb. 1 am Fall der rechtszirkularen Polarisation. Nach 51) und 52) ergibt sich daraus der Fall der linkszirkularen Polarisation durch Spiegelung sämtlicher n^2 -Werte an der ϑ -Achse. Die Halbebene $\vartheta \geq 0$ besteht hinsichtlich der Werte von n^2 aus drei einfach zusammenhängenden Gebieten (ohne Rand):

Gebiet I - Zwischen der Geraden $n^2 = 1$ (ϑ -Achse; unterer Teil) und der Kurve $n^2 = 0$. Letztere läuft für $\vartheta \rightarrow \infty$ nach $\vartheta \rightarrow -\infty$. Es gilt $0 < n^2 < 1$ und $\vartheta < \gamma_-$. Hier sind Wellen möglich.

Gebiet II - Zwischen der Kurve $n^2 = 0$ und der der θ -Achse parallel laufenden Geraden $n^2 = \infty$. Es gilt $n^2 < 0$ und $\theta < \gamma_-$. Hier sind keine Wellen möglich (cut-off).

Gebiet III- Zwischen der Geraden $n^2 = 1$ (θ -Achse; oberer Teil) und der Geraden $n^2 = \infty$. Es gilt $1 < n^2 < \infty$ und $\theta > \gamma_-$. Hier sind Wellen möglich. Das Gebiet beginnt bei $\theta = \gamma_-$; d.h. bei der einfachen Resonanz der Elektronengyrofrequenz mit der Wellenfrequenz, sofern man von der in γ_- enthaltenen relativistischen Korrektur absieht. Mehrfachresonanzen prägen sich nicht besonders aus.

Die Struktur der Gebiete I und III bezüglich n^2 wird aus den numerisch berechneten Diagrammen deutlich (Abb. 4 und Abb. 5).

Die allgemeinen Merkmale der Funktion $\tilde{v}_+/c(\theta)$ zeigt Abb. 2 am Fall der rechtszirkularen Polarisation. Nach 39) und 51) ergibt sich daraus der Fall der linkszirkularen Polarisation durch Spiegelung der Kurve an der \tilde{v}_+/c -Achse. Für $\theta \rightarrow +\infty$ ergibt sich $\tilde{v}_+/c \rightarrow \tilde{v}_-/c$. Für $\theta \rightarrow -\infty$ gilt $\tilde{v}_+/c \rightarrow -1$.

Die allgemeinen Merkmale der Funktion $\frac{e}{cm} \frac{\tilde{E}}{\omega}(\theta)$ zeigt Abb. 3 am Fall der rechtszirkularen Polarisation. Nach 43) und 51) ergibt sich daraus der Fall der linkszirkularen Polarisation durch Spiegelung der Kurve am Nullpunkt. Die Kurve ist stets eine Gerade.

Wegen der Spiegelungseigenschaft der Funktion $\frac{e}{cm} \frac{\tilde{E}}{\omega}(\theta)$ ist die Gesamtlösung nicht symmetrisch in dem Sinne, daß eine Umkehrung der Magnetfeldrichtung durch eine Umkehrung der Polarisationseinrichtung aufgehoben werden kann.

LITERATURVERZEICHNIS

- (1) W. Lünow, Zur relativistischen nichtlinearen Wechselwirkung kalter Plasmen mit elektromagnetischen Wellen, IPP 6/58, Juli 1967 (wird veröffentlicht)
- (2) T.H. Stix, The Theory of Plasma Waves, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York San Francisco Toronto London 1962

Herrn Dr. K.U. von H a g e n o w möchte ich für die kritische Durchsicht des Manuskriptes danken.

Abb. 1 : $n^2 = n^2(\theta; \varnothing)$ mit $\tilde{v}_-/c = \text{const.}$ (rechtszirkular)

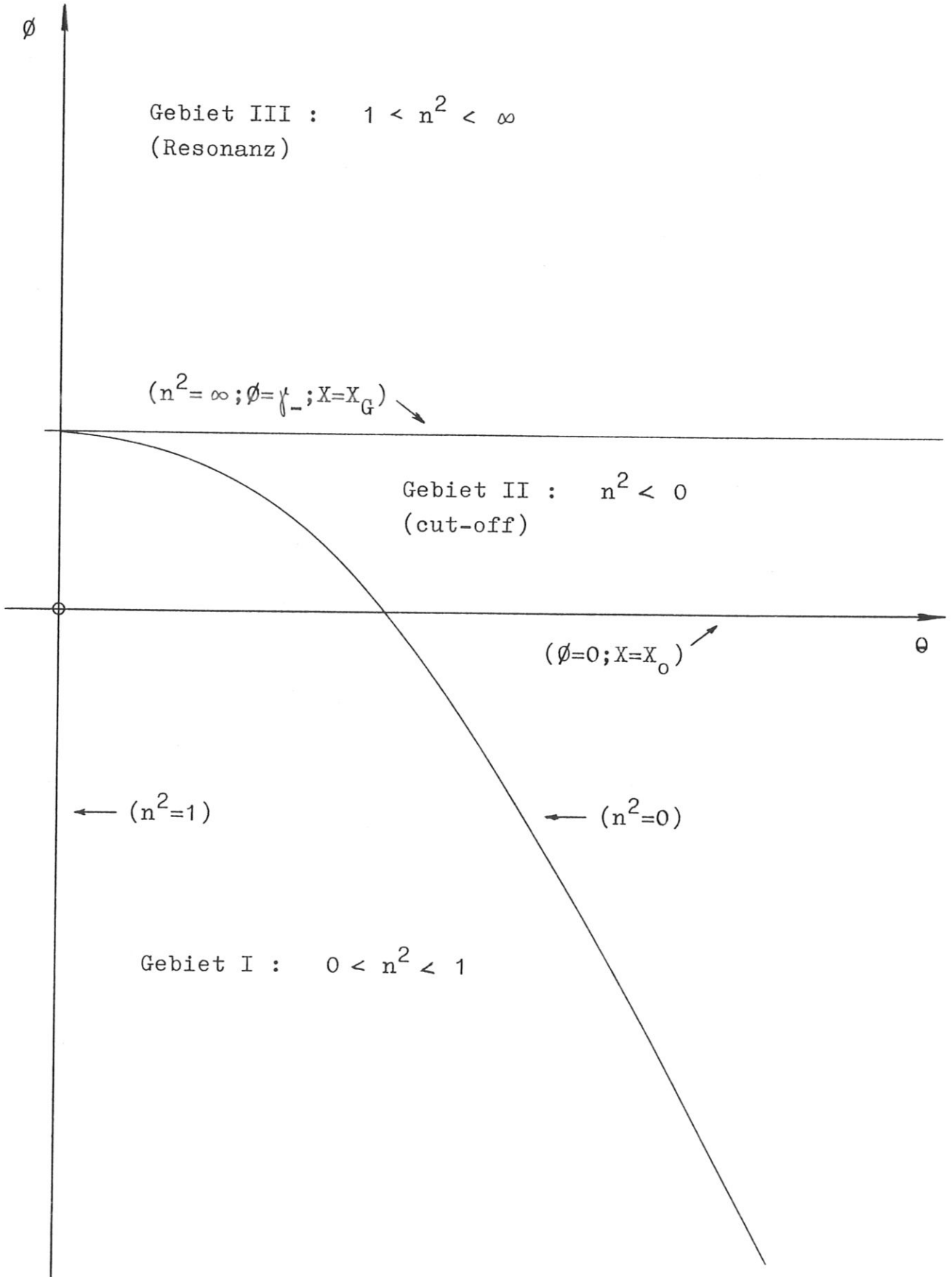


Abb. 2 : $\tilde{v}_+/c(\varnothing)$ mit $\tilde{v}_-/c = \text{const.}$ (rechtszirkular)

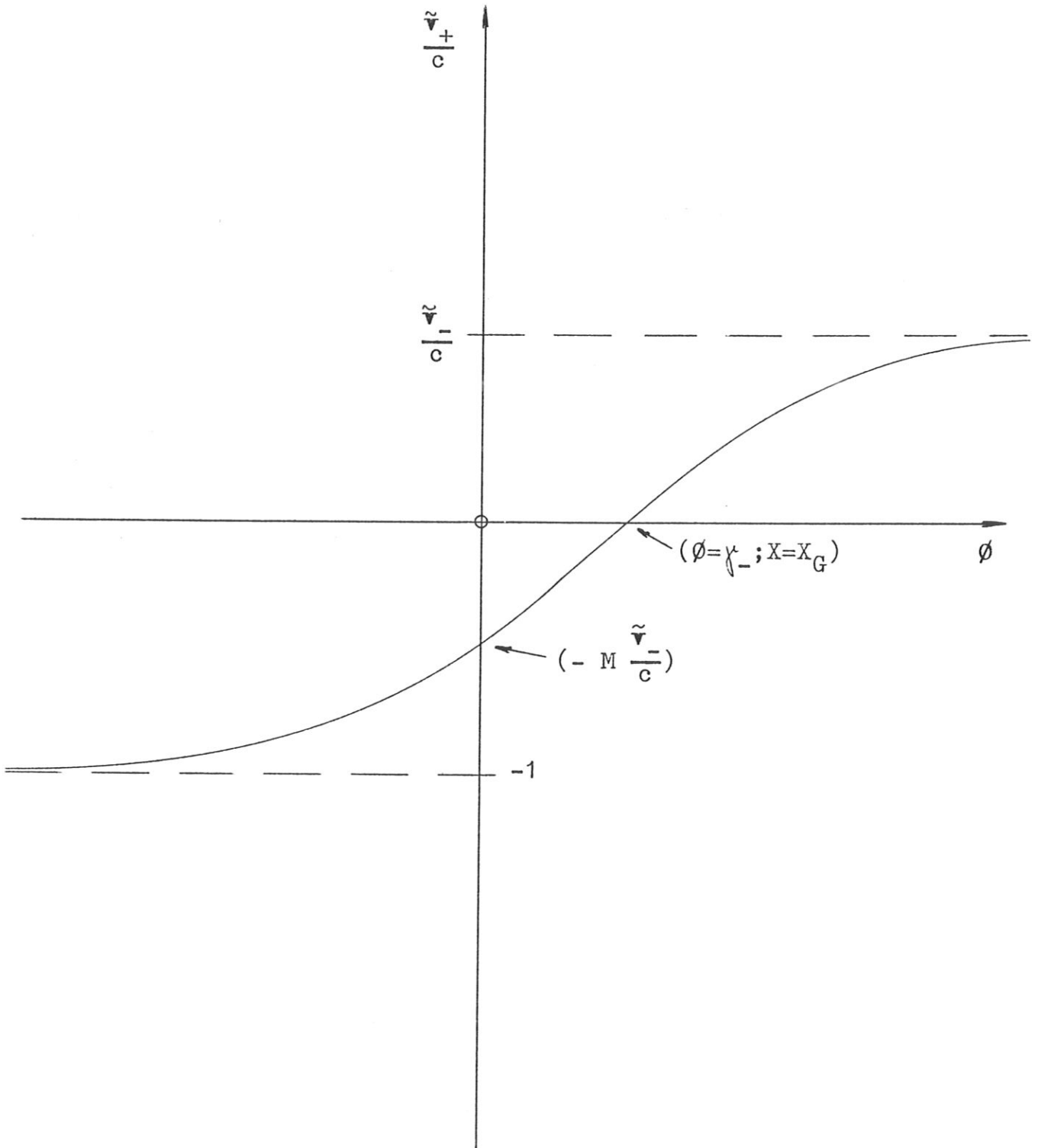


Abb. 3 : $\frac{e}{cm_-} \frac{\tilde{E}}{\omega}(\varnothing)$ mit $\tilde{v}_-/c = \text{const.}$ (rechtszirkular)

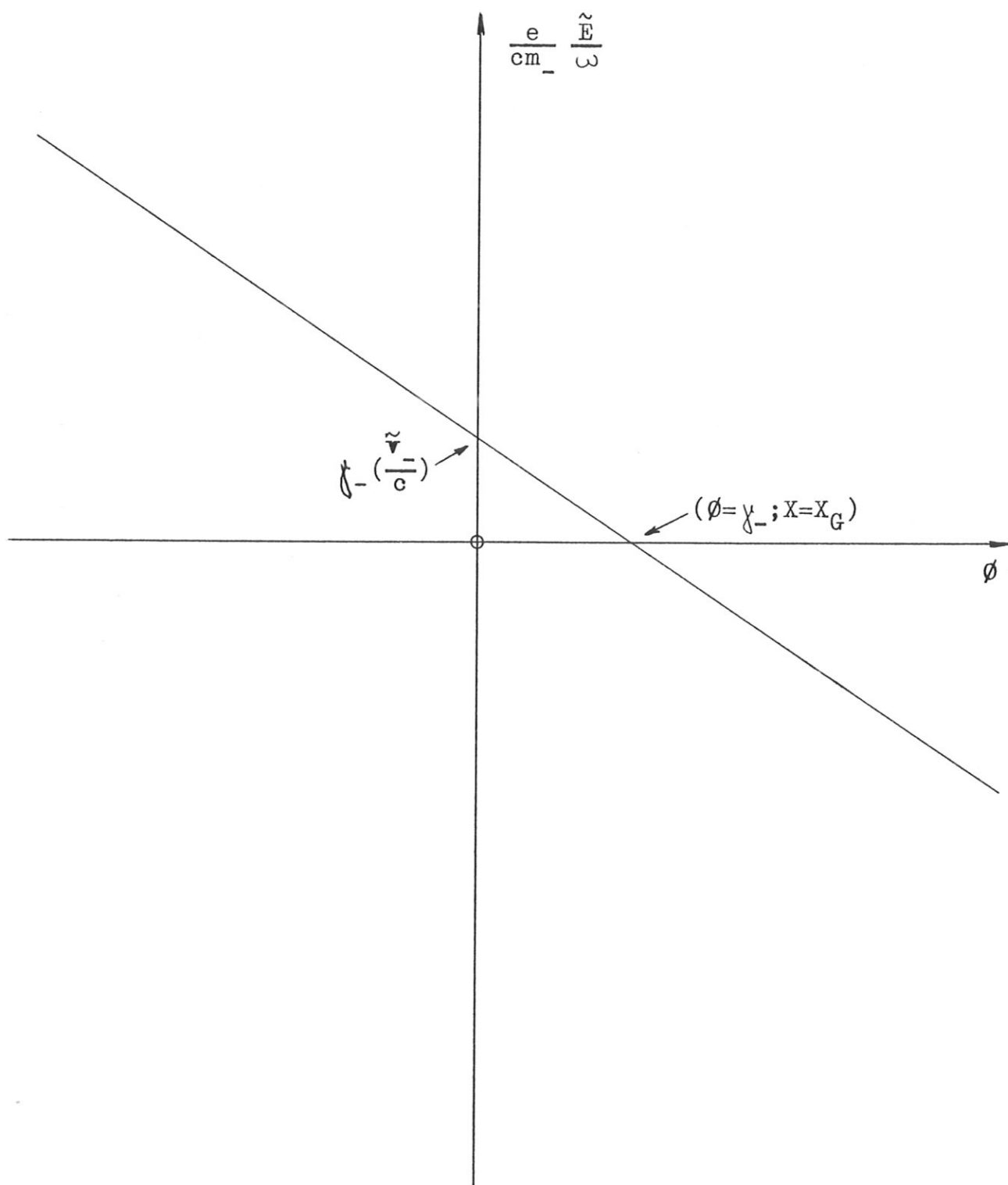


Abb.4 $n^2 = n^2(\theta; \phi)$ mit $\tilde{v}_-/c = 0,1$ (rechtszirkular)

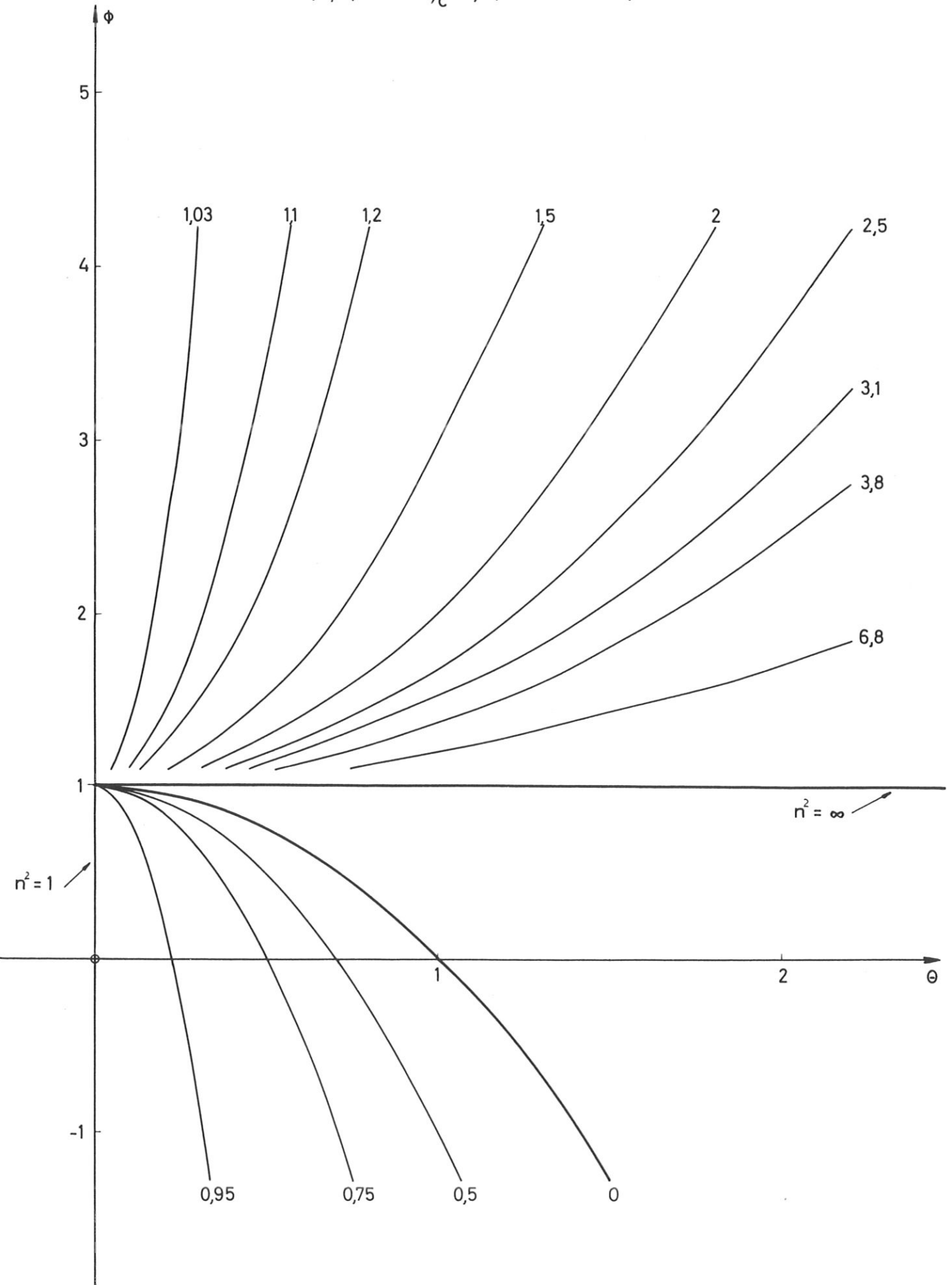
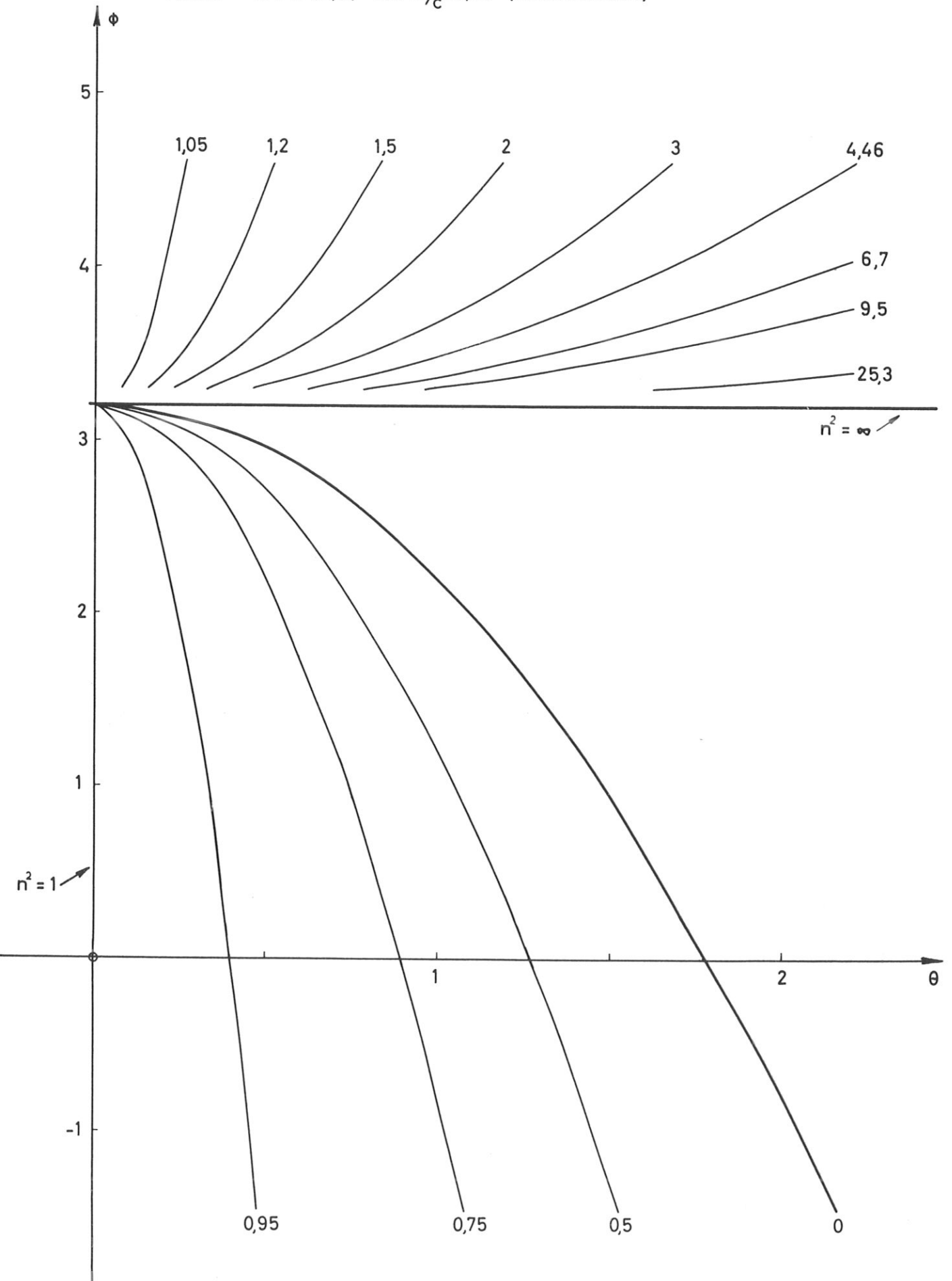


Abb. 5 $n^2 = n^2(\theta; \phi)$ mit $\tilde{v}_-/c = 0,95$ (rechtszirkular)



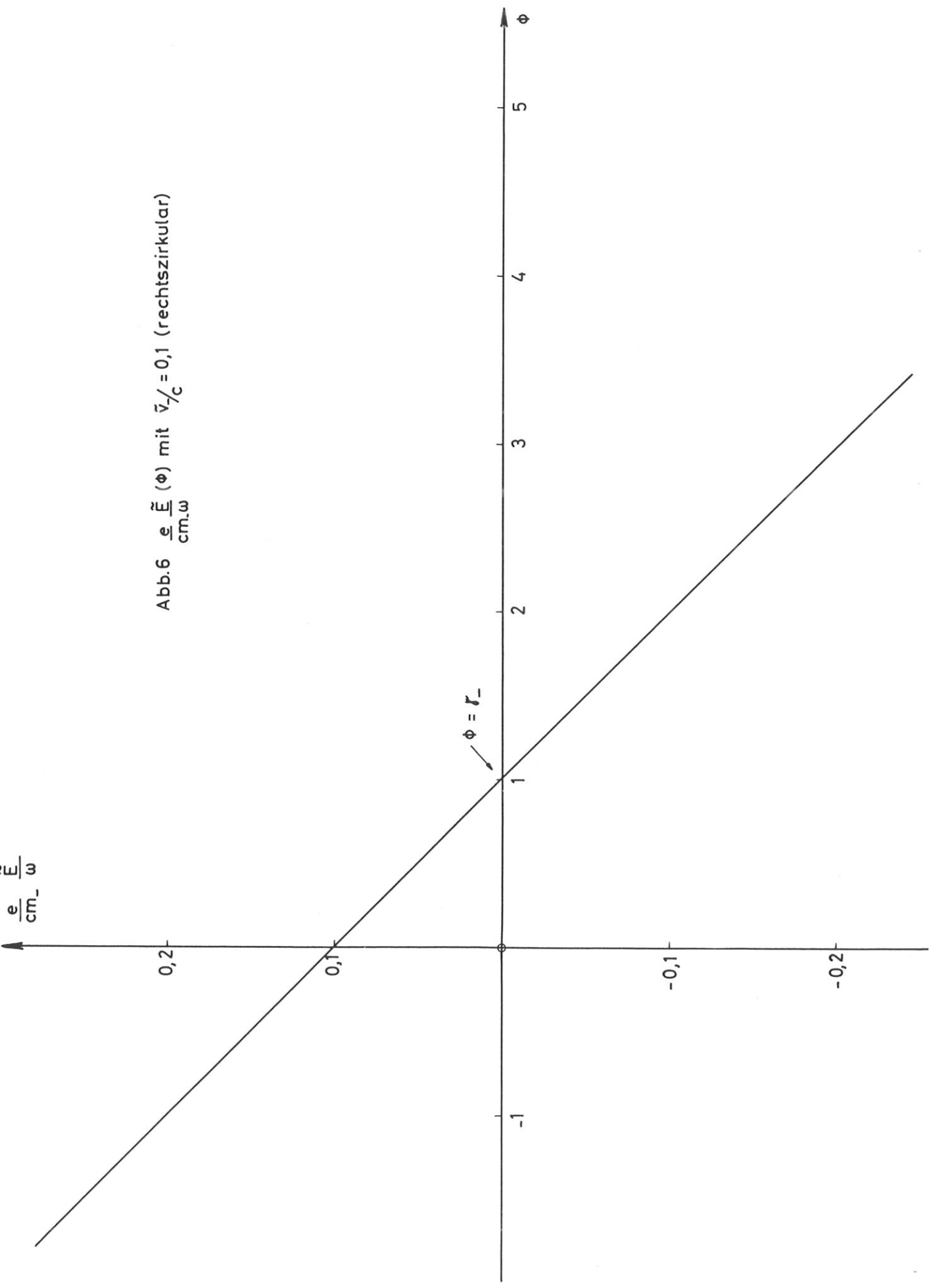


Abb.6 $\frac{e}{E_0}(\phi)$ mit $\bar{v}/c = 0,1$ (rechtszirkular)

$\frac{1}{cm_1 \omega}$

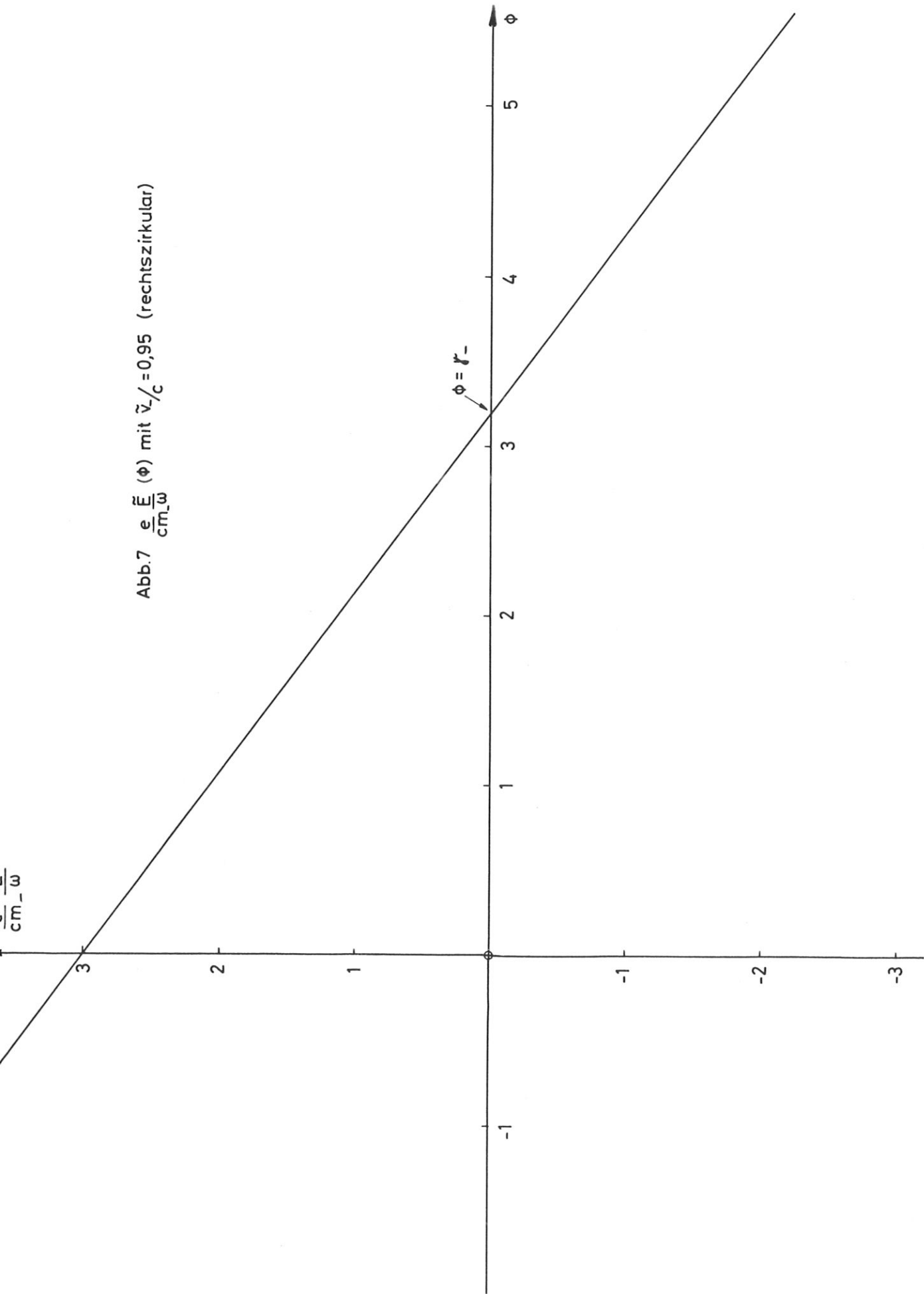


Abb.7 $\frac{e \vec{E}}{cm_1 \omega}$ (ϕ) mit $\tilde{\nu}/c = 0,95$ (rechtszirkular)

This report is to be treated as strictly confidential.

The 'Institut für Plasmaphysik' holds the exclusive rights of publication, mimeographing, propagation and translation into foreign languages of the original text, inclusive of the drawings, wholly or partially; also of excerpts or résumés, as well as of the technical or scientific contents of this report. Exceptions to these restrictions require written permission.

Furthermore, the 'Institut für Plasmaphysik' reserves the right of exclusive exploitation of the information contained in this report, for the purpose of obtaining protective industrial rights, particularly patent and utility patent rights at home and abroad. Actions of exploitation taken on the basis of the knowledge gained from this report cannot be regarded as grounds for obtaining the right of prior use ('Vorbenutzungsrecht') according to article 7 paragraph 1, first sentence of the German Patent Law. The reader is referred to article 5 of the Patent Law. For reasons stipulated by the Patent Law, the report must not be exhibited in public libraries, or lent out indiscriminately.

The Institute does not guarantee that the information given in this report is free from protective rights, such as patent rights, utility patent rights or trade-mark rights.

No guarantee is given in respect of the accuracy, completeness or usefulness of the information contained in this report. Thus, no liability can be accepted for damage resulting from use of the information, or of the apparatus, methods and procedures described.