

Reaktionsneutronen als Hilfsmittel der
Plasmadiagnostik

(Neutrons from d-d-reactions as a tool
for plasma diagnostics)

G. Lehner und F. Pohl

IPP 1/60

März 1967

I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K

G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Reaktionsneutronen als Hilfsmittel der
Plasmadiagnostik

(Neutrons from d-d-reactions as a tool
for plasma diagnostics)

G. Lehner und F. Pohl

IPP 1/60

März 1967

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

Abstract

The neutrons from d-d-reactions in a hot deuterium plasma can be used for plasma diagnostic purposes. The ion velocity distribution is responsible both for the total rate of neutron production and the energy spectrum of the neutrons. Anisotropic velocity distributions give rise to neutron fluxes and neutron energy spectra which are also anisotropic. These effects are discussed for generalized Maxwellian distributions (characterised by different parallel and perpendicular "temperatures") and for monoenergetic distributions (threedimensional and twodimensional), which serve as typical examples.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Einführung	1
2. Allgemeine Beziehungen	3
3. Gesamtausbeuten für verschiedene Geschwindigkeitsverteilungen	5
4. Die Energiespektren der Neutronen	7
A. Isotrope Maxwellverteilung	7
B. Zweidimensionale Maxwellverteilung	9
C. Verallgemeinerte Maxwellverteilung	10
D. Die dreidimensionale monoenergetische Verteilung	10
E. Die zweidimensionale monoenergetische Verteilung	12
5. Neutronenflussverteilung	13
A. Zweidimensionale Maxwellverteilung	13
B. Zweidimensionale monoenergetische Verteilung	14
6. Schlussbemerkung	15

$$(3) \quad \sigma(g, \theta) = A(g) [1 + B(g) \cos^2 \theta]$$

wo g die Relativgeschwindigkeit und θ der Winkel zwischen g und der Emissionsrichtung im Schwerpunktsystem ist, so gilt nach [1] für die Neutronenreaktion (1)

$$(4) \quad B(g) = 0,31 + 0,0058 E_d$$

und für die Protonenreaktion (2)

$$(5) \quad B(g) = 0,13 + 0,0047 E_d$$

wo die Relativenergie

$$(6) \quad E_d = \frac{m}{2} g^2$$

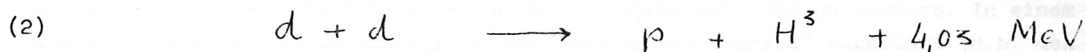
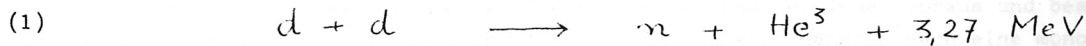
in keV zu messen ist (m = Deuteronenmasse).

Will man also die Anisotropie diagnostisch ausnutzen, so eignet sich dafür die Neutronenkomponente der Strahlung besser. Das ist einer der Gründe dafür, dass wir hier nur die Neutronen berücksichtigen. Dazu kommt noch, dass die Neutronen ausserhalb des Entladungsgefässes leichter beobachtet werden können als die Protonen. Zwar können auch die Protonen untersucht werden, wie dies z.B. von Nagle, Watanabe und Riesenfeld [2] getan wurde. In diesem Fall wurde das Energiespektrum "end-on" austretender Reaktionsprotonen durch magnetische Ablenkung gewonnen. In anderer als achsenparalleler Richtung wäre so etwas jedoch sehr schwer durchführbar und wegen der Ablenkung der Protonen in dem aus Plasma umgebenden Magnetfeldern auch nur schwer interpretierbar (die Magnetfelder von 1000 bis einigen 10^5 Gauss geben für die Protonen von 3 MeV Gyrationenradien von einigen cm). Diese Schwierigkeiten treten bei den Neutronen nicht auf. Allerdings werden auch die Neutroneneigenschaften durch die Wechselwirkung mit der das Plasma umgebenden Materie verflüchtigt.

1. Einführung

Während die von heissen Plasmen emittierte elektromagnetische Strahlung in vielfacher Weise diagnostisch ausgenutzt wird, ist dies für die von Deuteriumplasmen emittierten Reaktionsprotonen bzw. Reaktionsneutronen nicht der Fall. Zwar wurden auch an diesen Teilchen Messungen durchgeführt, jedoch wurde dabei auf die von ihnen mitgeführte Information weitgehend verzichtet. Teilweise liegt dies wohl daran, dass in den meisten Fällen Messungen durch kleine Ausbeuten sehr erschwert werden. Nun liefert aber z.B. der grosse Theta-Pinch Isar I $10^{10} - 10^{11}$ Neutronen pro Entladung, wodurch eine genauere Auswertung der Neutronenstrahlung möglich sein sollte. Dies ist der unmittelbare Anlass für den vorliegenden Bericht.

Die beiden d-d-Reaktionen



sind etwa gleich wahrscheinlich.

Abgesehen von den etwas verschiedenen frei werdenden Energien scheint es noch einen anderen Unterschied zwischen den beiden Reaktionen zu geben. Nach Booth, Preston und Shaw [1] zeigt die Neutronenreaktion eine stärkere Winkelabhängigkeit als die Protonenreaktion. Diese Messungen sind allerdings etwas umstritten und endgültige Klarheit herrscht noch nicht. Wir wollen jedoch für die Zwecke dieses Berichts die Werte der genannten Autoren annehmen. Schreibt man den differentiellen Wirkungsquerschnitt in der Form

$$(3) \quad \sigma(q, \theta) = A(q) [1 + B(q) \cos^2 \theta]$$

wo \vec{q} die Relativgeschwindigkeit und θ der Winkel zwischen \vec{q} und der Emissionsrichtung im Schwerpunktsystem ist, so gilt nach [1] für die Neutronenreaktion (1)

$$(4) \quad B(q) = 0,31 + 0,0058 E_d$$

und für die Protonenreaktion (2)

$$(5) \quad B(q) = 0,13 + 0,0047 E_d$$

wo die Relativenergie

$$(6) \quad E_d = \frac{m}{2} q^2$$

in keV zu messen ist (m = Deuteronenmasse).

Will man also die Anisotropie diagnostisch ausnutzen, so eignet sich dafür die Neutronenkomponente der Strahlung besser. Das ist einer der Gründe dafür, dass wir hier nur die Neutronen berücksichtigen. Dazu kommt noch, dass die Neutronen ausserhalb des Entladungsgefässes leichter beobachtet werden können als die Protonen. Zwar können auch die Protonen untersucht werden, wie dies z.B. von Nagle, Quinn, Ribe und Riesenfeld [2] getan wurde. In diesem Fall wurde das Energiespektrum "end-on" austretender Reaktionsprotonen durch magnetische Ablenkung gewonnen. In anderer als achsenparalleler Richtung wäre so etwas jedoch sehr schwer durchführbar und wegen der Ablenkung der Protonen in den das Plasma umgebenden Magnetfeldern auch nur schwer interpretierbar (die Magnetfelder von immerhin einigen 10^5 Gauss geben für die Protonen von 3 MeV Gyrationenradien von einigen cm). Diese Schwierigkeiten treten bei den Neutronen nicht auf. Allerdings werden auch die Neutroneneigenschaften durch die Wechselwirkung mit der das Plasma umgebenden Materie verfälscht.

Die damit zusammenhängenden Fragen wollen wir jedoch hier nicht diskutieren. Wir beschränken uns darauf, die Neutronenstrahlung so zu beschreiben, wie sie vom Plasma emittiert wird.

Die Frage ist, in welchem Umfang man durch Messungen an den Neutronen etwas über die Geschwindigkeitsverteilung der Ionen erfahren kann.

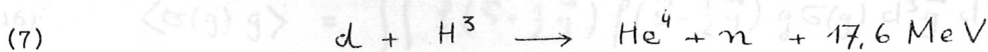
Zunächst kann man Schlüsse aus der Gesamtausbeute an Neutronen ziehen. Im allgemeinen setzt man eine Maxwellverteilung als Geschwindigkeitsverteilung der Ionen voraus und bestimmt dann die Temperatur aus der Gesamtausbeute [3,4,5]. In [5] wird daneben auch eine monoenergetische Verteilung der Ionen diskutiert. Beide Verteilungen sind jedoch isotrop. In einem sehr schnellen Theta-Pinch z.B. wird nun dem Plasma nur "senkrechte Energie" zugeführt (d.h. den zur Achse senkrechten beiden Freiheitsgraden), und zwar so schnell, dass die Geschwindigkeitsverteilung keine Zeit hat, isotrop zu werden. Dies werden wir durch anisotrope Verteilungen berücksichtigen.

Weitergehende Informationen erhält man, wenn man nicht nur die Gesamtausbeute misst, sondern auch das Energiespektrum. Vor allem im Zusammenhang mit z-Pinchen wurde dies schon wiederholt getan, wobei Kernspurplatten [6,7,8], Nebelkammern [9,10] und Blaskammern [11] Verwendung fanden. Man beobachtete hier im allgemeinen etwa durch Instabilitäten beschleunigte Gruppen von Deuteronen, die sich in einer Verschiebung der Neutronenlinie zu grösseren oder kleineren Energien hin (je nach der Beobachtungsrichtung) äusserten, einen der Dopplerverschiebung von Spektrallinien analogen Effekt also. Ein ruhendes heisses Plasma hingegen führt zu einer nur geringen Verschiebung, dafür aber zu einer wesentlichen Verbreiterung der Linie, die bei kleineren Temperaturen mit Hilfe von Kernspurplatten z.B. nicht auflösbar ist. Im Isar I - Experiment liegen die Temperaturen nur etwas unter 10 keV. Bei 10 keV nun hat die Neutronenlinie bei 2,45 MeV eine Halbwertsbreite von etwa 260 keV, die gut nachweisbar sein sollte. Darüber hinaus hängt im Falle eines anisotropen Plasmas die Breite der Linie von der Beobachtungsrichtung ab. Man kann also u.U. "senkrechte" und "parallele" Temperaturen getrennt messen. Ein Nachteil ist es jedoch, dass man mit Kernspurplatten z.B. über die Zeit mittelt. Das kann dazu führen, dass die Interpretation nicht sehr ergiebig ist. Zeitaufgelöste Spektren zu messen ist jedoch sicher sehr schwierig und kann aus Intensitätsgründen überhaupt scheitern.

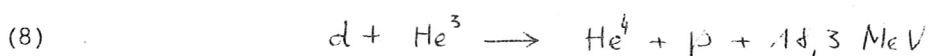
Einen Ausweg aus dieser Situation könnte die Anisotropie des Wirkungsquerschnitts bieten. Sie führt dazu, dass der Neutronenfluss aus einem anisotropen Plasma selbst anisotrop ist. Der Neutronenfluss nun kann mit Szintillationszählern zeitaufgelöst untersucht werden.

Dementsprechend werden wir nach einer allgemeinen Diskussion (§2) die Gesamtausbeuten (§3), Energiespektren (§4) und Neutronenflüsse (§6) für verschiedene isotrope und anisotrope Geschwindigkeitsverteilungen diskutieren. Dabei beschränken wir uns aus den erwähnten Gründen auf die Neutronen. Nach Einsetzen anderer Zahlenwerte für die freiwerdende Energie und den Anisotropiefaktor $B(g)$ können die Ergebnisse jedoch auch für Protonen herangezogen werden.

Man könnte auch daran denken, einem Deuteriumplasma etwas Tritium zuzusetzen und die dann entstehenden 14,1 MeV-Neutronen zu untersuchen:



Dies würde das Energiespektrum verbreitern, und zwar mit der Wurzel aus der freiwerdenden Energie (d.h. die relative Linienbreite würde um denselben Faktor abnehmen). Es sei jedoch bemerkt, dass die Reaktion (7) für die hier interessierenden kleinen Relativenergien (im Schwerpunktsystem) isotrop ist [12,13,14]. Die Flussanisotropie für ein anisotropes Plasma fällt also hier weg. Eventuell könnte man Schlüsse aus dem Verhältnis der Ausbeuten an 14,1 MeV-Neutronen und 2,45 MeV-Neutronen ziehen. Goldman und Mitarbeiter [5] haben Analoges durch Zusatz von He^3 erreicht, indem sie die Ausbeute an 14,7 MeV-Protonen aus der Reaktion



mit der an 2,45 MeV-Neutronen verglichen haben.

Die Gesamtwirkungsquerschnitte für die d-(dn)-Reaktion (1) verwenden wir in der von Goldman [5] zitierten Form:

$$(9) \quad \sigma(g) = \sigma^*(g^*) = \frac{1,79 \cdot 10^{-23}}{g^{*2}} \exp\left(-\frac{14,578}{g^*}\right)$$

$$(10) \quad \sigma(g) = \sigma^*(g^*) = 10^{-27} \exp\left(-1,802 + 8,9666g^* - 2,59541g^{*2} + 0,386918g^{*3} - 0,0287342g^{*4} + 0,00084047g^{*5}\right)$$

Dabei gilt Gleichung (9) für Relativenergien unterhalb 80 keV und Gleichung (10) für solche zwischen 80 und 1000 keV. Die Relativgeschwindigkeit g^* ist in beiden Formeln in Einheiten von 10^8 cm sec^{-1} zu messen. Der Zusammenhang mit dem differentiellen Wirkungsquerschnitt (Gleichungen (3) und (4)) ist natürlich gegeben durch

$$(11) \quad \sigma(g) = 4\pi A(g) \left[1 + \frac{1}{3} B(g)\right]$$

2. Allgemeine Beziehungen

Wir betrachten ein Deuteriumplasma zunächst beliebiger auf 1 normierter Ionengeschwindigkeitsverteilung $f(\vec{u})$ (\mathcal{U} ist der ganze Geschwindigkeitsraum):

$$(12) \quad \int_{\mathcal{U}} f(\vec{u}) d^3\vec{u} = 1$$

Die Wahrscheinlichkeit für eine Reaktion zweier Teilchen ist dann

$$(13) \quad dR = \frac{n^2}{2} f(\vec{u}_1) f(\vec{u}_2) g \sigma(g) d^3\vec{u}_1 d^3\vec{u}_2$$

wobei n die Teilchendichte und g der Betrag der Relativgeschwindigkeit \vec{g} ist. Wir führen noch die Schwerpunktschwindigkeit \vec{s} ein und transformieren:

$$(14) \quad \begin{cases} \vec{s} = \frac{1}{2} (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) & \vec{u}_1 = \vec{s} + \frac{1}{2} \vec{g} \\ \vec{g} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 & \vec{u}_2 = \vec{s} - \frac{1}{2} \vec{g} \end{cases}$$

Damit ist

$$(15) \quad R = \frac{n^2}{2} \langle \sigma(g) g \rangle$$

mit

$$(16) \quad \langle \sigma(g) g \rangle = \int \int_{\mathcal{S}} f(\vec{s} + \frac{1}{2} \vec{g}) f(\vec{s} - \frac{1}{2} \vec{g}) g \sigma(g) d^3\vec{g} d^3\vec{s}$$

Die Energie eines Neutrons aus einer Reaktion zweier Deuteronen der Relativgeschwindigkeit ist im Schwerpunktsystem

$$(17) \quad E_s = \frac{3}{4} \left(\mathcal{U} + \frac{m}{4} g^2 \right) = \frac{m}{4} u^2$$

wenn Q die Reaktionsenergie, m die Masse des Deuterons und \vec{w} die Geschwindigkeit des Neutrons im Schwerpunktssystem ist. Zur Vereinfachung haben wir dabei einfache Massenverhältnisse angenommen (die Masse des Neutrons als $m/2$ und die von He^3 als $3m/2$).

Lassen wir zu, dass der Wirkungsquerschnitt vom Winkel θ zwischen \vec{w} und \vec{g} abhängt, so kann die Ausbeute in folgender Form geschrieben werden ($\sigma(g, \theta)$ ist der differentielle Querschnitt):

$$(18) \quad R = \frac{n^2}{2} \iiint_{\text{SGW}} f(\vec{s} + \frac{\vec{g}}{2}) f(\vec{s} - \frac{\vec{g}}{2}) g \sigma(g, \theta) \frac{d^3(w^2 - \frac{4E_s}{m})}{w} d^3\vec{s} d^3\vec{g} d^3\vec{w}$$

Führen wir nun die Neutronengeschwindigkeit \vec{v} im Laborsystem ein

$$(19) \quad \vec{v} = \vec{w} + \vec{s}$$

so ergibt die Elimination von \vec{s}

$$(20) \quad R = n^2 \iiint_{\text{WVG}} f(\vec{v} - \vec{w} + \frac{\vec{g}}{2}) f(\vec{v} - \vec{w} - \frac{\vec{g}}{2}) \frac{g \sigma(g, \theta)}{\sqrt{\frac{4E_s}{m}}} d^3(w^2 - \frac{4E_s}{m}) d^3\vec{v} d^3\vec{w} d^3\vec{g}$$

bzw.

$$(21) \quad \frac{dR}{d\Omega dE_n} = \frac{2n^2 v}{m} \iint \frac{f(\vec{v} - \vec{w} + \frac{\vec{g}}{2}) f(\vec{v} - \vec{w} - \frac{\vec{g}}{2})}{T} \frac{g \sigma(g, \theta)}{\sqrt{\frac{4E_s}{m}}} d^3(w^2 - \frac{4E_s}{m}) d^3\vec{w} d^3\vec{g}$$

$d\Omega$ ist das Raumwinkelelement und $E_n = m/4 v^2$ die Neutronenenergie im Laborsystem.

Diese Beziehungen haben wir nun auf verschiedene Geschwindigkeitsverteilungen anzuwenden. Wir wollen zwei Typen als Beispiele untersuchen:

a) eine verallgemeinerte Maxwellverteilung, die von zwei Parametern abhängen soll, von der "senkrechten Temperatur" T_{\perp} und von der "parallelen Temperatur" T_{\parallel} , nämlich:

$$(22) \quad f(\vec{u}) = \frac{\beta_{\perp} \beta_{\parallel}^{1/2}}{\pi^{3/2}} \exp(-\beta_{\perp} u_{\perp}^2) \exp(-\beta_{\parallel} u_{\parallel}^2)$$

wo

$$(23) \quad \beta_{\perp} = \frac{m}{2kT_{\perp}}, \quad \beta_{\parallel} = \frac{m}{2kT_{\parallel}}$$

b) drei- und zweidimensionale monoenergetische Verteilungen, nämlich

$$(24) \quad f(\vec{u}) = \frac{\delta(u^2 - u_0^2)}{2\pi u_0}$$

und

$$(25) \quad f(\vec{u}) = \frac{\delta(u_{\perp}^2 - u_0^2) \delta(u_{\parallel})}{\pi}$$

Die beiden Typen von Verteilungsfunktionen sind sehr verschieden voneinander. Insbesondere sind im Fall der verallgemeinerten Maxwellverteilung Relativ- und Schwerpunktsgeschwindigkeiten statistisch unabhängig voneinander, während bei den monoenergetischen Verteilungen ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Relativ- und Schwerpunktsgeschwindigkeit zweier Teilchen besteht.

Betrachten wir nämlich eine Paarverteilungsfunktion, so ergibt sich aus Gleichung (22) durch die Transformation (14)

$$(26) \quad f(\vec{u}_1) f(\vec{u}_2) = S(\vec{s}) G(\vec{g})$$

mit

$$(27) \quad \mathcal{S}(\vec{s}) = \frac{2 \cdot 3_{\perp} (2 \cdot 3_{\parallel})^{3/2}}{\pi^{3/2}} \exp(-2\beta_{\perp} s_{\perp}^2) \exp(-2\beta_{\parallel} s_{\parallel}^2)$$

und

$$(28) \quad \mathcal{G}(\vec{g}) = \frac{(\beta_{\perp}/2) (\beta_{\parallel}/2)^{3/2}}{\pi^{3/2}} \exp(-\frac{\beta_{\perp} g_{\perp}^2}{2}) \exp(-\frac{\beta_{\parallel} g_{\parallel}^2}{2})$$

d.h. sowohl Schwerpunkts- als auch Relativgeschwindigkeit sind wiederum in demselben verallgemeinerten Sinn Maxwell-verteilt, wobei jedoch die Schwerpunktsgeschwindigkeiten sozusagen die halbe, die Relativgeschwindigkeiten die doppelte Temperatur haben. Genauer ausgedrückt heisst dies:

$$(29) \quad \frac{m}{2} \langle s^2 \rangle = \frac{1}{2} (k T_{\perp} + \frac{1}{2} k T_{\parallel})$$

$$(30) \quad \frac{m}{2} \langle g^2 \rangle = 2 (k T_{\perp} + \frac{1}{2} k T_{\parallel})$$

während

$$(31) \quad \frac{m}{2} \langle u^2 \rangle = k T_{\perp} + \frac{1}{2} k T_{\parallel}$$

Für die beiden monoenergetischen Verteilungen ist jedoch stets

$$(32) \quad u_0^2 = s^2 + \frac{g^2}{4}$$

3. Gesamtausbeuten für verschiedene Geschwindigkeitsverteilungen

Betrachten wir zunächst die verallgemeinerte Maxwellverteilung (22), so ergibt sich

$$\langle \mathcal{S} g \rangle = \frac{\beta_{\perp} \beta_{\parallel}^{3/2}}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathcal{G}} g \mathcal{S}(g) \exp(-\frac{\beta_{\perp} g_{\perp}^2}{2}) \exp(-\frac{\beta_{\parallel} g_{\parallel}^2}{2}) d^3 g$$

Dies kann umgeformt werden zu

$$(33) \quad \langle \mathcal{S} g \rangle = \beta_{\perp} \left(\frac{\beta_{\parallel}}{\beta_{\perp} - \beta_{\parallel}} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} g^2 \mathcal{S}(g) \exp(-\frac{\beta_{\perp} g^2}{2}) \operatorname{erfi} \left(g \sqrt{\frac{\beta_{\parallel} - \beta_{\perp}}{2}} \right) dg$$

wo

$$(34) \quad \operatorname{erfi}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \dots \right)$$

die normierte Fehlerfunktion ist. Gleichung (33) ist geeignet für den Fall $\beta_{\parallel} > \beta_{\perp}$ ($T_{\parallel} < T_{\perp}$).

Im umgekehrten Fall schreibt man besser

$$(35) \quad \langle \mathcal{S} g \rangle = \beta_{\perp} \left(\frac{\beta_{\parallel}}{\beta_{\perp} - \beta_{\parallel}} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} g^2 \mathcal{S}(g) \exp(-\frac{\beta_{\perp} g^2}{2}) \operatorname{erfi} \left(g \sqrt{\frac{\beta_{\perp} - \beta_{\parallel}}{2}} \right) dg$$

wo

$$(36) \quad \operatorname{erfi}(x) = -i \operatorname{erfi}(ix)$$

Die Funktion $\operatorname{erfi}(x)$ ist auch tabelliert worden [15].

Die drei wichtigsten Spezialfälle sind:

a) die dreidimensionale Maxwellverteilung mit

$$\beta_{\perp} = \beta_{\parallel} = \beta$$

für die

$$(37) \quad \langle \sigma q \rangle_3 = \beta^{3/2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} q^3 \sigma(q) \exp\left(-\frac{\beta q^2}{2}\right) dq$$

b) die zweidimensionale Maxwellverteilung, bei der

$$\beta_{\parallel} \Rightarrow \infty$$

für die

$$(38) \quad \langle \sigma q \rangle_2 = \beta_{\perp} \int_0^{\infty} q^2 \sigma(q) \exp\left(-\frac{\beta_{\perp} q^2}{2}\right) dq$$

c) die eindimensionale Maxwellverteilung, bei der

$$\beta_{\perp} \Rightarrow \infty$$

für die

$$(39) \quad \langle \sigma q \rangle_1 = \sqrt{\frac{2\beta_{\parallel}}{\pi}} \int_0^{\infty} q \sigma(q) \exp\left(-\frac{\beta_{\parallel} q^2}{2}\right) dq$$

Die drei Integrale (37), (38) und (39) unterscheiden sich also nur durch die verschiedenen Potenzen von q , die in ihnen vorkommen.

Aus den Gleichungen (37), (38), (39) ergeben sich unter Zuhilfenahme der Beziehung (54) des folgenden §4 einfache Zusammenhänge zwischen diesen Gesamtausbeuten, die näherungsweise erfüllt sind:

$$(37) \quad \langle \sigma q \rangle_2 \approx 0,35 (kT)^{1/6} \langle \sigma q \rangle_3$$

$$(38) \quad \langle \sigma q \rangle_1 \approx 0,077 (kT)^{1/3} \langle \sigma q \rangle_3$$

Dabei ist kT in keV einzusetzen. Eine Verallgemeinerung für $0 \leq T_{\parallel} \leq T_{\perp}$ ergibt sich in derselben Weise aus Gleichungen (33) und (38)

$$\langle \sigma q \rangle_{(T_{\parallel}, T_{\perp})} \approx \sqrt{\frac{T_{\perp}}{T_{\perp} - T_{\parallel}}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{6,5(kT_{\perp})^{-1/3} \left(\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} - 1\right)}\right) \langle \sigma q \rangle_2(T_{\perp})$$

Schon wenn T_{\perp} nur wenig grösser als T_{\parallel} ist, geht die Fehlerfunktion gegen 1 und

$$\langle \sigma q \rangle_{(T_{\parallel}, T_{\perp})} \approx \sqrt{\frac{T_{\perp}}{T_{\perp} - T_{\parallel}}} \langle \sigma q \rangle_2(T_{\perp})$$

Für die dreidimensionale monoenergetische Verteilung (24) erhält man

$$(40) \quad \langle \sigma q \rangle_{\text{mono } 3} = \frac{1}{2u_0^2} \int_0^{2u_0} q^2 \sigma(q) dq$$

und für die zweidimensionale monoenergetische Verteilung (25)

$$(41) \quad \langle \sigma q \rangle_{\text{mono } 2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{2u_0} \frac{q \sigma(q)}{\sqrt{4u_0^2 - q^2}} dq$$

Zum Vergleich kann man noch den trivialen eindimensionalen monoenergetischen Fall hinzufügen:

$$\langle \sigma q \rangle_{\text{mono } 1} = 2u_0 \sigma(2u_0)$$

Die numerischen Ergebnisse sind in den Abbildungen 1 und 2 zusammengestellt. Abbildung 1 bringt $\langle \sigma q \rangle_{1,2,3}$ als Funktion der entsprechenden Temperatur T_{\parallel} , T_{\perp} , T . Beim Vergleich verschiedenartiger Geschwindigkeitsverteilungen ist es jedoch sinnvoller, die Ausbeute als Funktion der mittleren Deuteronenenergie E aufzutragen. Dies ist in Abbildung 2 geschehen.

4. Die Energiespektren der Neutronen

A. Isotrope Maxwellverteilung

Im Falle einer isotropen Maxwellverteilung

$$(42) \quad \rho(\vec{u}) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{3/2} \exp(-\beta u^2)$$

ergibt sich aus Gleichung (20) bzw. (21) nach einiger Rechnung (zunächst Integration über den Raumwinkel im g-Raum und anschliessende Integration über den \vec{w} -Raum):

$$(43) \quad \frac{dR}{dE_n} = \frac{4n^2\beta^2}{m\pi} \int_0^\infty \exp\left[-2\beta\left(v^2 + \frac{4E_n}{m} + \frac{g^2}{4}\right)\right] \frac{\sinh\left(4\beta v \sqrt{\frac{4E_n}{m}}\right)}{\sqrt{\frac{4E_n}{m}}} g^3 G(g) dg$$

Beschränkt man sich auf kleine Temperaturen

$$(44) \quad kT \ll Q$$

so ist das Argument des \sinh sehr gross gegen 1 und man bekommt in 1. Näherung

$$(45) \quad \frac{dR}{dE_n} \approx \frac{n^2}{mv_0} \sqrt{\frac{2\beta}{\pi}} \langle\sigma g\rangle_3 \exp\left[-2\beta(v-v_0)^2\right]$$

wo

$$(46) \quad v_0 = \sqrt{\frac{3Q}{m}}$$

die Geschwindigkeit des Neutrons ist für den Fall, dass zwei ruhende Deuteronen miteinander reagieren. $\langle\sigma g\rangle_3$ ist der gemittelte Wirkungsquerschnitt entsprechend Gleichung (37). Aus Gleichung (45) ergibt sich die Halbwertsbreite der "Neutronenlinie"

$$(47) \quad \Delta E_n \approx \sqrt{3 \ln 2} \sqrt{kTQ}$$

Misst man ΔE_n und kT in keV, so ist wegen

$$(48) \quad Q = 3,27 \text{ MeV} = 3270 \text{ keV}$$

$$(49) \quad \Delta E_n \approx 82,5 \sqrt{kT}$$

Die folgende Tabelle gibt diese Halbwertsbreiten entsprechend der obigen Gleichung und das Ergebnis der numerischen Rechnung nach Gleichung (43), soweit sie durchgeführt wurde.

kT (keV)	E_n (keV) Gl. (49)	E_n (keV) numerisch (Gl.(43))
1	82,5	
2	116	117
3	143	143
5	184	186
7	218	220
10	261	264
15	319	324
20	369	376
50	583	609
100	825	

Abbildung 3 zeigt einige numerisch berechnete Profile. Man sieht, dass neben der bereits diskutierten Verbreiterung mit der Temperatur eine kleine ebenfalls mit der Temperatur zunehmende Verschiebung zu höheren Energien hin auftritt.

All dies ist auch anschaulich leicht zu verstehen. Aus Gleichung (14) ergibt sich als obere bzw. untere Grenze:

$$(50) \quad v^2 = w^2 \pm 2ws + s^2$$

Dementsprechend ist die Linienbreite etwa

$$\Delta E_n \approx \frac{m}{4} 2ws \approx \sqrt{w kT}$$

im Einklang mit obigen Ergebnissen. Das Zentrum liegt etwa bei

$$(51) \quad E_{n \text{ max}} = \frac{m}{4} \langle v^2 \rangle = \frac{m}{4} \langle w^2 \rangle + \frac{m}{4} \langle s^2 \rangle$$

Wegen Gleichung (29) ist

$$(52) \quad \frac{m}{4} \langle s^2 \rangle = \frac{3}{8} kT$$

Den Mittelwert w^2 darf man nicht so einfach bilden. Es kommt hier nicht auf die Verteilung der Relativgeschwindigkeiten im Plasma selbst an, sondern auf die Verteilung der Relativgeschwindigkeiten jener Deuteronen, die wirklich zu einer Reaktion führen, was wir durch eine doppelte Klammer ausdrücken wollen. Gleichung (17) gibt dann

$$(53) \quad \frac{m}{4} \langle w^2 \rangle = \frac{3}{4} w + \frac{3}{16} m \langle \langle y^2 \rangle \rangle$$

Etwas grob kann man so vorgehen: das Produkt aus Wirkungsquerschnitt (9) und Verteilung der Relativgeschwindigkeiten (28) hat sein Maximum bei einer Relativenergie, die ein Vielfaches der mittleren thermischen Energie ist:

$$(54) \quad \frac{m y^2}{2} \approx 13 (kT)^{2/3}$$

wenn man $mg^2/2$ und kT in keV ausdrückt.

Nimmt man an, dass dieser wahrscheinlichste Wert vom Mittelwert nicht wesentlich verschieden ist, so ergibt sich

$$(55) \quad \frac{m}{4} \langle w^2 \rangle \approx \frac{3}{4} w + 4,9 (kT)^{2/3}$$

und die Verschiebung des Maximums ergibt sich aus

$$(56) \quad E_{n \text{ max}} \approx \frac{3}{4} w + 4,9 (kT)^{2/3} + \frac{3}{8} kT$$

Die folgende Tabelle zeigt diese Verschiebung im Vergleich zu den numerischen Ergebnissen.

kT in keV $(E_n \text{ max} - 3/4 Q)$ in keV

	Gl. (56)	numerisch
1	5,3	5,2
2	8,5	9,0
3	11,3	12,0
4	13,9	
5	16,2	17,4
6	18,4	
7	20,5	22,4
8	22,6	
9	24,6	
10	26,6	29,3
15	35	40,0
20	44	50,0
50	85	104
100	143	

Man findet also Neutronenlinien, deren Breite mit Hilfe von Kernspurplatten messbar sein sollte. Ausserdem lässt sich so die Isotropie des Plasmas nachprüfen, da das Spektrum für jede Beobachtungsrichtung dasselbe sein sollte. In einem schnellen Theta-Pinch ist das Plasma vermutlich anisotrop, weswegen wir im folgenden Abschnitt eine zweidimensionale Maxwellverteilung diskutieren.

B. Zweidimensionale Maxwellverteilung

Gehen wir von einer zweidimensionalen Maxwellverteilung (d.h. $\rho_{||} \Rightarrow \infty$) aus

$$(57) \quad f(\vec{v}) = \frac{\beta_{\perp}}{\pi} \exp(-\beta_{\perp} v_{\perp}^2) \delta(v_{||})$$

so ergibt sich aus Gleichung (21)

$$(58) \quad \frac{d^2 R}{dE_n d\Omega} = \frac{4\beta_{\perp}^2 n^2}{m} \int_0^{\infty} \exp\left[-2\beta_{\perp}(v^2 \sin^2 \alpha - v^2 \cos^2 \alpha + \frac{4E_s}{m} + \frac{q^2}{4})\right] \cdot I_0\left(4\beta_{\perp} v \sin \alpha \sqrt{\frac{4E_s}{m} - v^2 \cos^2 \alpha}\right) \cdot \frac{q^2 A(q)}{\sqrt{\frac{4E_s}{m}}} \left[1 + \frac{B(q) \left(\frac{4E_s}{m} - v^2 \cos^2 \alpha\right)}{2 \frac{4E_s}{m}} \right] v \, dv$$

Dabei ist die untere Grenze des Integrals

$$(59) \quad F(v \cos \alpha) = F(v_{||}) = \begin{cases} \sqrt{\frac{4}{3} v_{||}^2 - \frac{4Q}{m}} & \text{wenn diese Wurzel reell ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und α ist der Winkel, den die Beobachtungsrichtung mit der Achse bildet.

Betrachten wir als speziellen Fall die senkrechte Richtung $\alpha = \frac{\pi}{2}$ unter der Annahme $kT_{\perp} \ll Q$, so ergibt sich im wesentlichen dasselbe wie im vorher diskutierten isotropen Fall:

$$(60) \quad \frac{d^2 R}{d\Omega dE_n} \sim \exp\left[-2\beta_{\perp}(v - v_0)^2\right]$$

D.h. die Halbwertsbreite ist in senkrechter Richtung in dieser Näherung ebenfalls durch obige Tabelle gegeben. Dies ist auch auf Grund der obigen qualitativen Erklärung klar, die wir für die senkrechte Richtung wörtlich übernehmen können. Für die übrigen Richtungen lässt sie sich leicht

modifizieren. Es kommt auf die Komponente der Schwerpunktsgeschwindigkeit in Beobachtungsrichtung an. Alle Schwerpunktsgeschwindigkeiten liegen in der senkrechten Ebene. Demzufolge müssen die Halbwertsbreiten der Neutronenlinien mit dem $\sin\alpha$ abnehmen. Dies gilt jedoch nicht für sehr kleine Winkel α . Man kann sich leicht überlegen, dass die Halbwertsbreite in achsenparalleler Richtung von der Ordnung kT_{\perp} sein muss. Diese qualitativen Überlegungen werden durch die numerischen Ergebnisse voll bestätigt. Diese wurden für $\alpha = 0^{\circ}$, $\alpha = 30^{\circ}$, $\alpha = 60^{\circ}$ und $\alpha = 90^{\circ}$ durchgeführt und sind in den Abbildungen 4 bis 8 dargestellt. In der folgenden Tabelle finden sich die wichtigsten Daten.

kT in keV	ΔE_n in keV			
	$\alpha = 0^{\circ}$	$\alpha = 30^{\circ}$	$\alpha = 60^{\circ}$	$\alpha = 90^{\circ}$
2	6,3	58,65	-	116,7
3	-	72,13	-	143,3
5	13,4	93,6	160,76	185,4
7	17,6	111,2	-	219,8
10	24,3	133,7	228,5	263,5
15	33,8	165,1	-	324,0
20	42,6	192,0	326,0	375,5

Während die Profile für die grösseren Winkel (entsprechend Gleichung (60)) etwa symmetrisch zum Maximum sind, ist dies für die Profile z.B. in achsenparalleler Richtung nicht der Fall. Das kommt daher, dass es für die grösseren Winkel in der beschriebenen Weise im wesentlichen auf die Schwerpunktsgeschwindigkeiten ankommt, die selbst eine Maxwellverteilung haben und von den Relativgeschwindigkeiten statistisch unabhängig sind. In paralleler Richtung jedoch kommt es auf die Relativgeschwindigkeiten an zusammen mit dem Gewicht, das ihnen der Wirkungsquerschnitt gibt.

C. Verallgemeinerte Maxwellverteilung

Nach allem bisher Gesagten erscheint es überflüssig, auf die verallgemeinerte Maxwellverteilung entsprechend Gleichung (22) im einzelnen einzugehen. Aus den bisherigen Ergebnissen folgt ohne weiteres, dass etwa

$$(61) \quad \Delta E_n \approx \sqrt{Q \left(kT_{\perp} \sin^2 \alpha + kT_{\parallel} \cos^2 \alpha \right)}$$

sein muss.

D. Die dreidimensionale monoenergetische Verteilung

Zum Vergleich mit den Maxwell'schen bzw. Maxwell-ähnlichen Verteilungen wollen wir nun monoenergetische Verteilungen betrachten, und zwar zunächst den dreidimensionalen Fall (Gleichung (24)), der folgendes Spektrum liefert:

$$(62) \quad \frac{dR}{dE_n} = \begin{cases} \frac{n^2}{2} \frac{1}{2m u_0^2} \int_0^{G(v)} \frac{g^2 G(g)}{\sqrt{\frac{3g^2}{m} + \frac{3}{4}g^2} \sqrt{u_0^2 - \frac{g^2}{4}}} dg & \text{für } G(v) \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist die obere Grenze $G(v)$ gegeben durch

$$(63) \quad G(v) = \sqrt{\frac{1}{2} v^2 + u_0^2 - \frac{3Q}{m} + v \sqrt{\frac{3Q}{m} + 3u_0^2 - \frac{3}{4} v^2}}$$

Sie ergibt sich rein formal, hat aber eine durchaus anschauliche Bedeutung. Betrachten wir bei festgehaltener Relativgeschwindigkeit g den möglichen Bereich der Geschwindigkeiten v der Neutronen im Laborsystem, so sind die Grenzen gegeben durch

$$(64) \quad v = w \pm s = \sqrt{\frac{3Q}{m} + \frac{3}{4} g^2} \pm \sqrt{u_0^2 - \frac{g^2}{4}}$$

Löst man diese Gleichung nach g auf, so ergibt sich gerade

$$g = G(v)$$

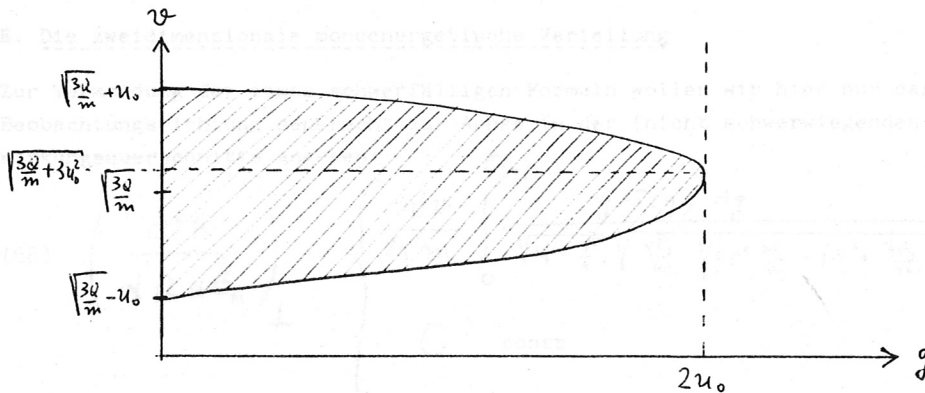
Der maximale Wert, den g annehmen kann, ist $2u_0$. Dafür wird $s = 0$ und

$$(65) \quad v = w = \sqrt{\frac{3Q}{m} + 3u_0^2}$$

Die obere und untere Grenze von v wird erreicht für $g = 0$ mit

$$(66) \quad v = \sqrt{\frac{3Q}{m}} \pm u_0$$

Diese Beziehungen sind in der nachfolgenden Skizze zusammengefasst. Die Integration erstreckt sich über das schraffierte Gebiet.



Das Maximum der Ausbeute wird erreicht bei dem maximalen g -Wert von $2u_0$, d.h. bei dem v aus Gleichung (65). An dieser Stelle zeigt das Spektrum eine Spitze. Die Ableitung der spektralen Verteilung d^2R/dE_n^2 hat nach links und rechts dem Betrag nach gleiche durch das Vorzeichen unterschiedene Ableitungen. Auch ist die Halbwertsbreite kleiner als z.B. bei einer Maxwellverteilung der gleichen mittleren Energie. Das erklärt sich dadurch, dass die Hauptausbeute von den maximalen vorkommenden Relativgeschwindigkeiten herrührt ($g = 2u_0$), für die jedoch die Schwerpunktschwindigkeiten gerade verschwinden, die ja die Verbreiterung des Spektrums bewirken würden. Mit anderen Worten: die Linie ist schmaler, weil im Gegensatz zur Maxwellverteilung Relativ- und Schwerpunktschwindigkeiten statistisch abhängig sind (siehe Gl. (32)). Das führt zu einer statistischen Wichtung, bei der die grossen Schwerpunktschwindigkeiten benachteiligt werden.

Die Abbildungen 9 und 10 bringen einige numerisch berechnete Spektren und einen Vergleich mit dem Fall der dreidimensionalen isotropen Maxwellverteilung.

Beispiele und Vergleiche mit dem dreidimensionalen einenergetischen Fall sind in den beiden Abbildungen 11 und 12 gegeben.

Aus Gleichung (66) ergibt sich die Basisbreite der Spektrallinie zu $\sqrt{6QE_d}$, wenn E_d die Deuteronenenergie ist. Die Halbwertsbreite ist deshalb von der Grössenordnung

$$(67) \quad \Delta E_n \approx \sqrt{QE_d}$$

in Analogie zu Gleichung (47). In diesem einfachen Bild wäre also $\Delta E_n \sim \sqrt{E_d}$. In Wirklichkeit steigt die Halbwertsbreite etwas stärker mit E_d an ($\Delta E_n \sim E_d^{0.7}$). Dies ist aus den folgenden numerischen Werten zu ersehen und liegt daran, dass mit zunehmender Energie die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von der Energie schwächer wird.

$E_d = \frac{1}{2} m u_0^2$	ΔE_n
3	43
4,5	57
7,5	82
10,5	105
15	135

E. Die zweidimensionale monoenergetische Verteilung

Zur Vermeidung der etwas schwerfälligen Formeln wollen wir hier nur das Spektrum für die Beobachtungsrichtung senkrecht zur Achse in der (nicht schwerwiegenden) Näherung isotropen Wirkungsquerschnitts angeben:

$$(68) \quad \left(\frac{d^2 R}{d\Omega dE_n} \right)_{\perp} = \begin{cases} \frac{n^2 v}{2\pi^3 m} \int_0^{G(v)} \frac{g G(g) dg}{\sqrt{u_0^2 - \frac{g^2}{4}} \sqrt{\frac{4E_d}{m} - \sqrt{4v^2 \frac{4E_d}{m} - (v^2 + \frac{4E_d}{m} + \frac{g^2}{4} - u_0^2)^2}} & \text{für } G(v) \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Im wesentlichen ist hier dasselbe wie im vorhergehenden Abschnitt zu sagen. Insbesondere ist $G(v)$ wiederum durch Gleichung (63) gegeben und wie vorher zu interpretieren. Die letzte Wurzel im Nenner des Integranden verschwindet an der oberen Grenze $G(v)$. An der Stelle des Maximums der Ausbeute, d.i. bei $v = \sqrt{\frac{3g}{m} + 3u_0^2}$ und $g = 2u_0$, verschwindet ausserdem noch die erste Wurzel dieses Nenners, so dass das Integral an dieser Stelle divergiert. Das Spektrum bleibt natürlich integrierbar. Die Halbwertsbreite verschwindet deshalb. Dennoch hat das Spektrum eine gewisse Ähnlichkeit mit dem der dreidimensionalen monoenergetischen Verteilung. Mit $G(v)$ ist auch die Basisbreite dieselbe. Der Unterschied liegt in der noch stärkeren Bevorzugung der kleinen Schwerpunktschwindigkeiten im Falle von nur zwei Dimensionen, die man sich rein geometrisch klar machen und bereits bei den vorher berechneten Gesamtausbeuten (man vergleiche die beiden Formeln (40) und (41)) zum Ausdruck kam. Beobachtet man unter dem Winkel α mit der Achse, so wird die Spektrallinie wiederum schmaler. Für hinreichend grosse Winkel α geht die Breite etwa mit dem $\sin \alpha$ und in paralleler Richtung ($\alpha = 0$) ist die Basisbreite in Bezug auf die Energie gleich der doppelten Deuteronenenergie.

Beispiele und Vergleiche mit dem dreidimensionalen monoenergetischen Fall sind in den beiden Abbildungen 11 und 12 gegeben.

5. Neutronenflussverteilung

Ein anisotropes Plasma emittiert auch einen anisotropen Neutronenfluss. Dies hat zwei verschiedene Ursachen. Erstens verursacht die Anisotropie der Schwerpunktschwindigkeiten eine Anisotropie beim Übergang vom Schwerpunkts- zum Laborsystem. Zweitens bewirkt der anisotrope Wirkungsquerschnitt eine Anisotropie schon im Schwerpunktsystem. Bei "kleinen" Plasmatemperaturen (d.h. wenn $kT \ll Q$) ist $S \ll \omega$ und der zweite Effekt überwiegt den ersten bei weitem. D.h. aber, dass wir näherungsweise die Winkelverteilung der Neutronen im Laborsystem durch die im Schwerpunktsystem ersetzen dürfen. Der Fehler, den man dabei macht, liegt für z.B. 10 keV-Plasmen bei etwa nur 1% und die Rechnungen werden erheblich einfacher.

Wir wollen bloss zwei Beispiele betrachten: die zweidimensionale Maxwellverteilung und die zweidimensionale monoenergetische Verteilung.

A. Zweidimensionale Maxwellverteilung

Dafür ergibt sich in der genannten Näherung ($S \ll \omega$)

$$(69) \quad \frac{dR}{d\Omega} = \frac{n^2 \beta_{\perp}}{2} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\beta_{\perp} g^2}{2}\right) g^2 A(g) \left[1 + \frac{B(g) \sin^2 \alpha}{2}\right] dg$$

Für einen isotropen Querschnitt, d.h. für $B(g) \Rightarrow 0$, geht diese Beziehung in die früher abgeleitete für die Gesamtausbeute, Gleichung (38), über. Aus Gleichung (69) kann man das Verhältnis der Neutronenflüsse für verschiedene Beobachtungsrichtungen berechnen. Beziehen wir alles auf die achsenparallele Richtung, so ist

$$(70) \quad V = \frac{\left(\frac{dR}{d\Omega}\right)_{\alpha}}{\left(\frac{dR}{d\Omega}\right)_{\parallel}} = 1 + \frac{1}{2} \left(0,31 + 0,0058 \frac{m}{4} \ll g^2 \gg\right)$$

wenn wir $\frac{m}{4} \ll g^2 \gg$ in keV ausdrücken und $\ll g^2 \gg$ der folgende Mittelwert ist:

$$(71) \quad \ll g^2 \gg = \frac{\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\beta_{\perp} g^2}{2}\right) A(g) g^4 dg}{\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\beta_{\perp} g^2}{2}\right) A(g) g^2 dg}$$

Dieser Mittelwert kann in guter Näherung durch den schon im Zusammenhang mit Gleichung (53) diskutierten ersetzt werden, d.h.

$$(72) \quad V \approx 1 + \left[0,155 + 0,038 (kT_{\perp})^{\frac{2}{3}}\right] \sin^2 \alpha$$

Die numerischen Ergebnisse unterscheiden sich von dieser Näherung nur wenig. Die folgende Tabelle gibt das Verhältnis V für die senkrechte Beobachtungsrichtung, und zwar die Näherung und das numerische Ergebnis.

kT (keV)	V (90°) Gl. (72)	V (90°) numerisch
1	1,19	1,20
2	1,21	1,22
3	1,23	1,24
4	1,25	1,26
5	1,27	1,28
6	1,28	1,29
7	1,29	1,31
8	1,31	1,33
9	1,32	1,34
10	1,33	1,36

B. Zweidimensionale monoenergetische Verteilung

Wiederum in derselben Näherung (d.h. $s \ll \omega$) ist

$$(73) \quad \frac{dR}{d\Omega} = \frac{n^2}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2u_0} \frac{g A(g) \left[1 + \frac{1}{2} B(g) \sin^2 \alpha \right]}{\sqrt{u_0^2 - \frac{g^2}{4}}} dg$$

Der wesentliche Beitrag kommt von dem Bereich knapp unterhalb der oberen Grenze, da $A(g)$ stark mit g zunimmt (jedenfalls in dem hier interessierenden Bereich kleiner Relativenergien) und ausserdem der Nenner des Integranden (d.i. die Schwerpunkts-geschwindigkeit) an dieser oberen Grenze gegen 0 geht. Das erlaubt uns den Mittelwert $\ll g^2 \gg$, der nun als

$$(74) \quad \ll g^2 \gg = \frac{\int_0^{2u_0} \frac{A(g) g^3}{\sqrt{u_0^2 - \frac{g^2}{4}}} dg}{\int_0^{2u_0} \frac{A(g) g}{\sqrt{u_0^2 - \frac{g^2}{4}}} dg}$$

definiert ist, anzunähern durch

$$(75) \quad \ll g^2 \gg \approx 4u_0^2$$

Damit ist

$$(76) \quad V = 1 + \left(0,155 + 0,0058 \cdot 2 \cdot \frac{m u_0^2}{2} \right) \sin^2 \alpha$$

wo die Deuteronenenergie $m u_0^2 / 2$ wiederum in keV auszudrücken ist. Wiederum bestätigen die numerischen Rechnungen diese Betrachtung sehr gut, was folgende Tabelle zeigt.

$\frac{m u_0^2}{2}$ (keV)	V (90°) Gl. (76)	V (90°) numerisch
1	1,17	1,17
2	1,18	1,18
3	1,19	1,19
4	1,20	1,20
5	1,21	1,21
6	1,23	1,22
7	1,24	1,23
8	1,25	1,24
9	1,26	1,25
10	1,27	1,26

Die numerischen Werte liegen etwas unter den angenäherten (für die kleinen Energien macht sich dies erst in den hier nicht mehr gegebenen Stellen bemerkbar). Dies muss auch so sein, da unsere Näherung eine obere Grenze darstellt. Die Anisotropie ist kleiner als im Falle einer zwei-dimensionalen Maxwellverteilung gleicher mittlerer Energie. Dies liegt am kleineren Wert von $\langle\langle g^2 \rangle\rangle$, d.h. daran, dass bei einer Maxwellverteilung die Mehrzahl der Neutronen von Deuteronen überdurchschnittlicher Relativenergie herrührt.

6. Schlussbemerkung

Wir haben die Gesamtausbeute an Neutronen, ihre Energie- und Winkelverteilung für verschiedene Geschwindigkeitsverteilungen der Ionen eines Deuteriumplasmas diskutiert und gesehen, welche Informationen darin stecken. Es wäre also sehr nützlich, die entsprechenden Grössen experimentell zu bestimmen und für die Plasmadiagnostik auszunutzen. Versuche in dieser Richtung sind bereits im Gange, es kann aber im Augenblick noch nicht beurteilt werden, ob bzw. mit welcher Genauigkeit die verschiedenen Messungen durchführbar sind.

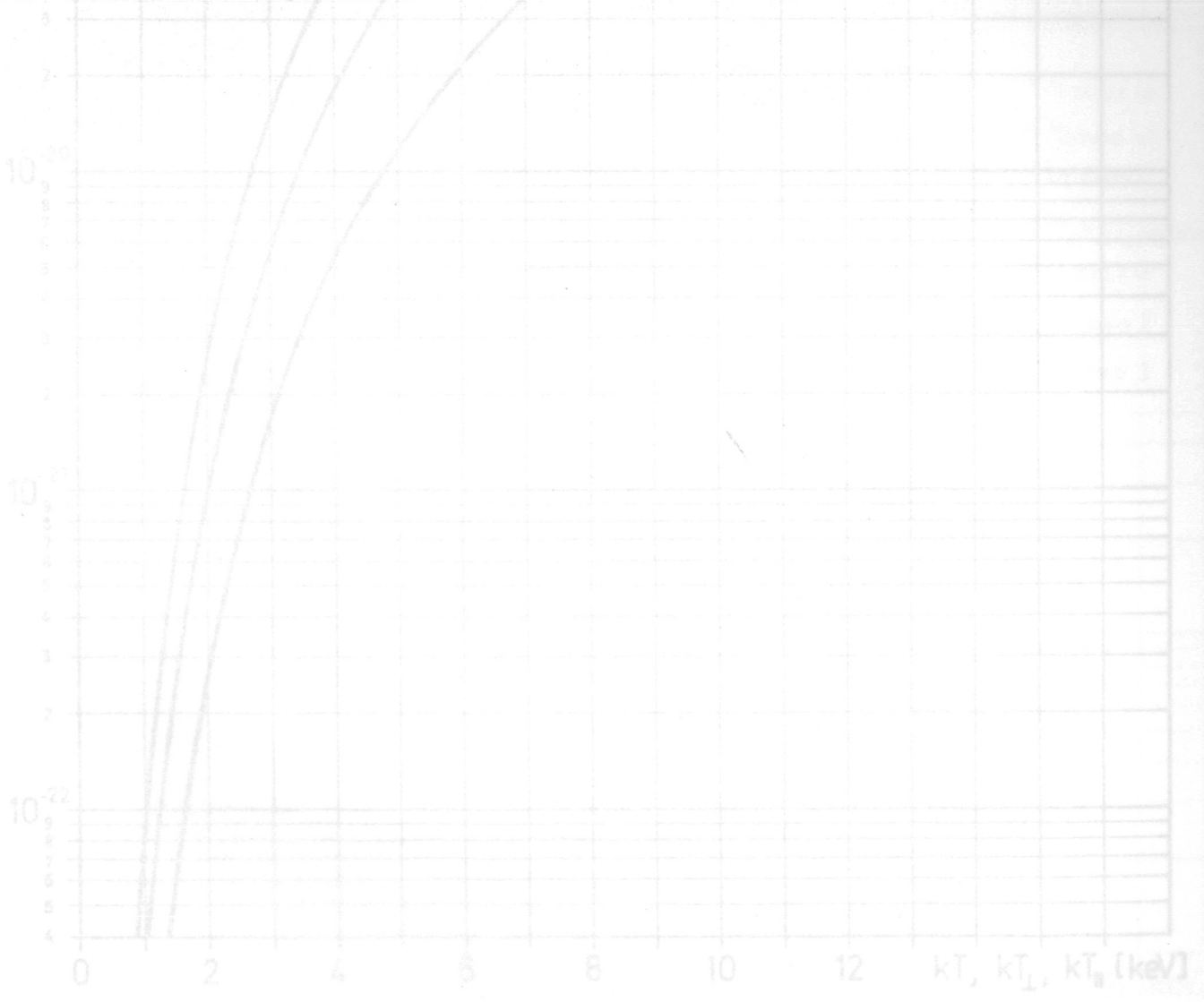


Abb. 2) Gesamtausbeute für 3-, 2- und 1-dimensionale Maxwellverteilung als Funktion von T , T_{\perp} bzw. T_{\parallel} .

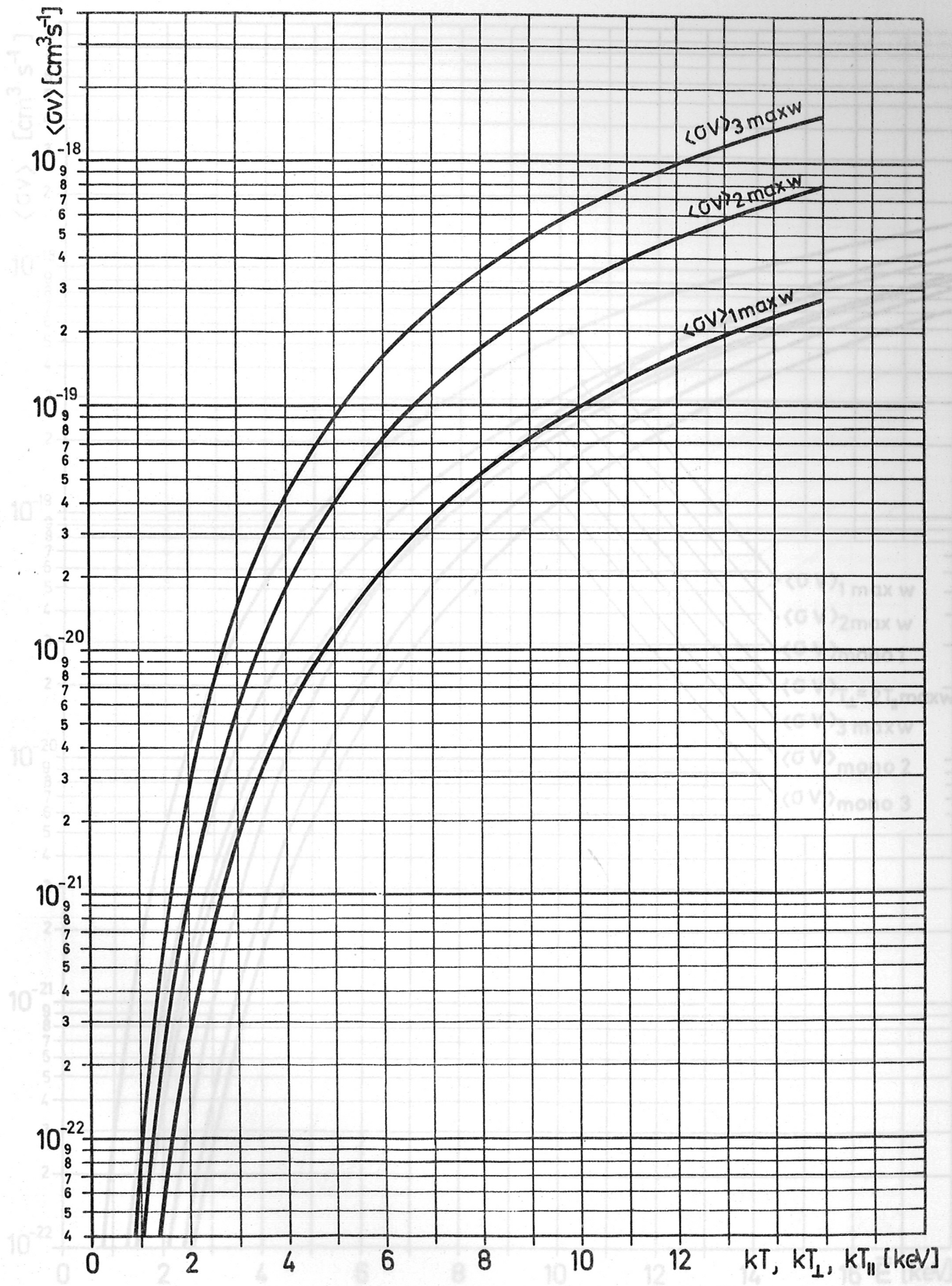


Abb. 1 Gesamtausbeuten für 3-, 2- und 1-dimensionale Maxwellverteilung als Funktion von T, T_{\perp} bzw. T_{\parallel} .

$$E = \begin{cases} 0 & \text{für Maxwellverteilungen} \\ 1/2 kT_{\perp} & \text{für maxwellähnliche Verteilungen} \end{cases}$$

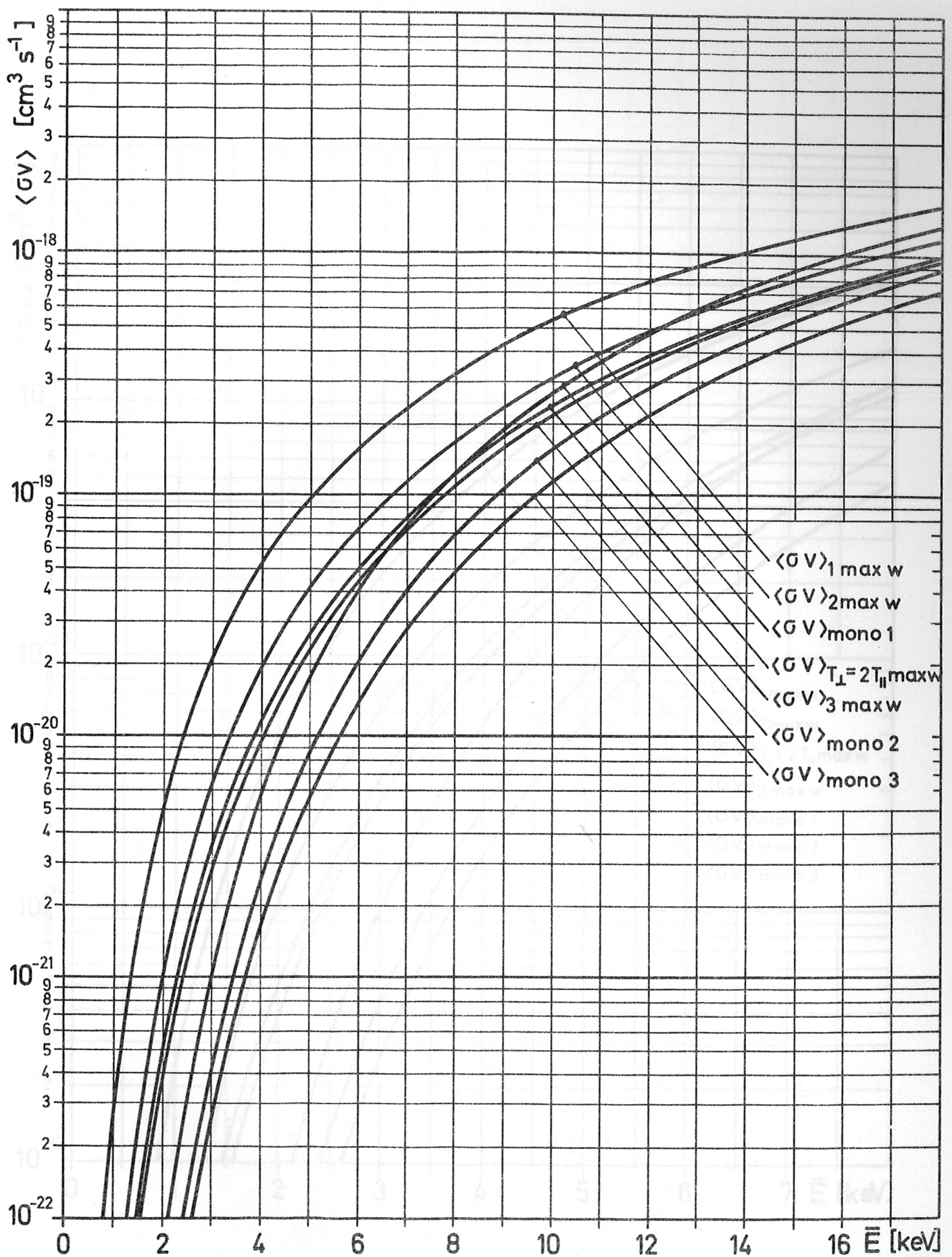


Abb. 2 Gesamtausbeute für verschiedene Geschwindigkeitsverteilungen der Deuteronen als Funktion der mittleren Energie \bar{E}

$$\bar{E} = \begin{cases} 1/2 m_D u_0^2 & \text{für monoenergetische Verteilungen} \\ kT_{\perp} + 1/2 kT_{\parallel} & \text{für maxwellähnliche Verteilungen} \end{cases}$$

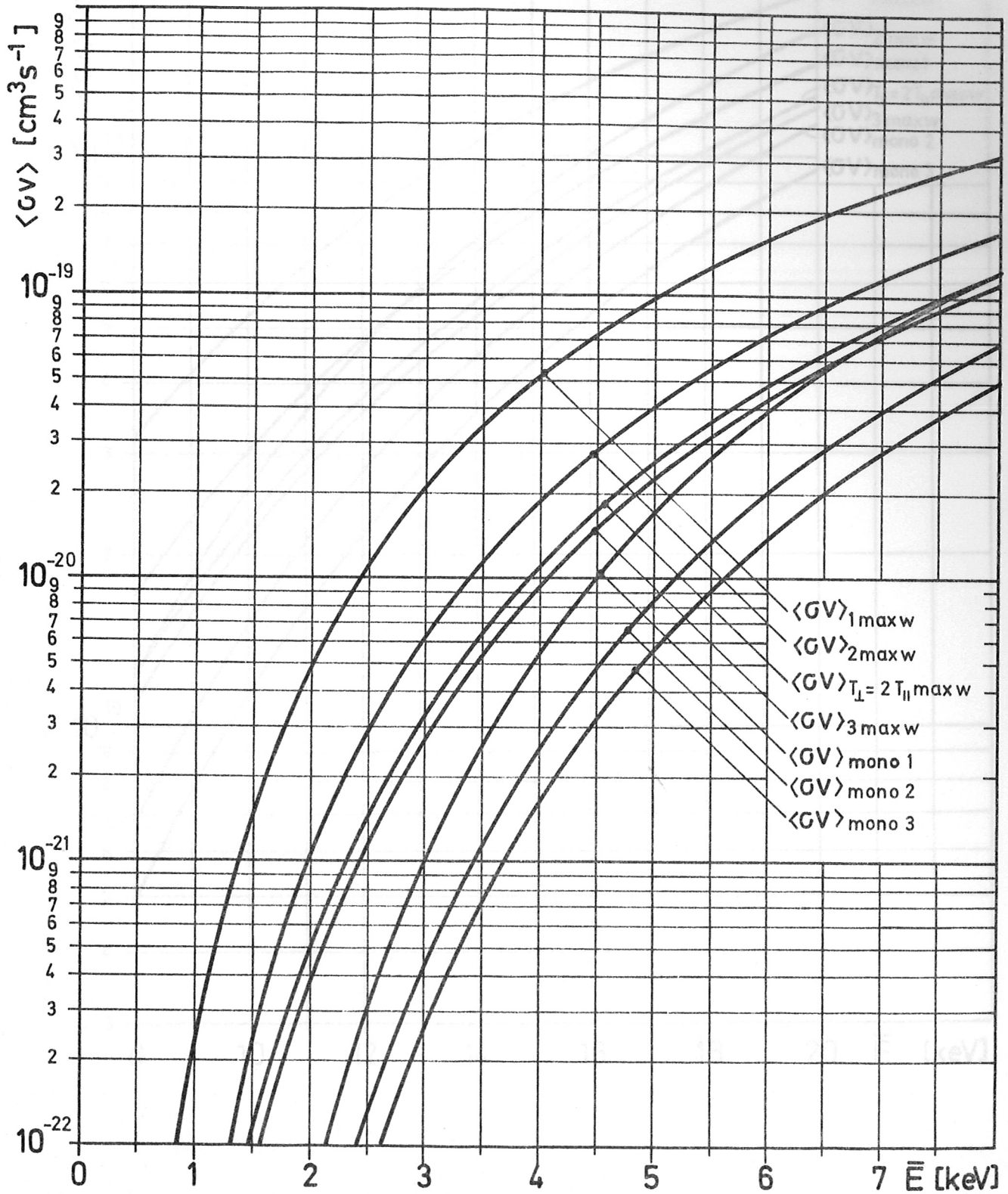


Abb. 2a Ausschnitt aus Abb. 2

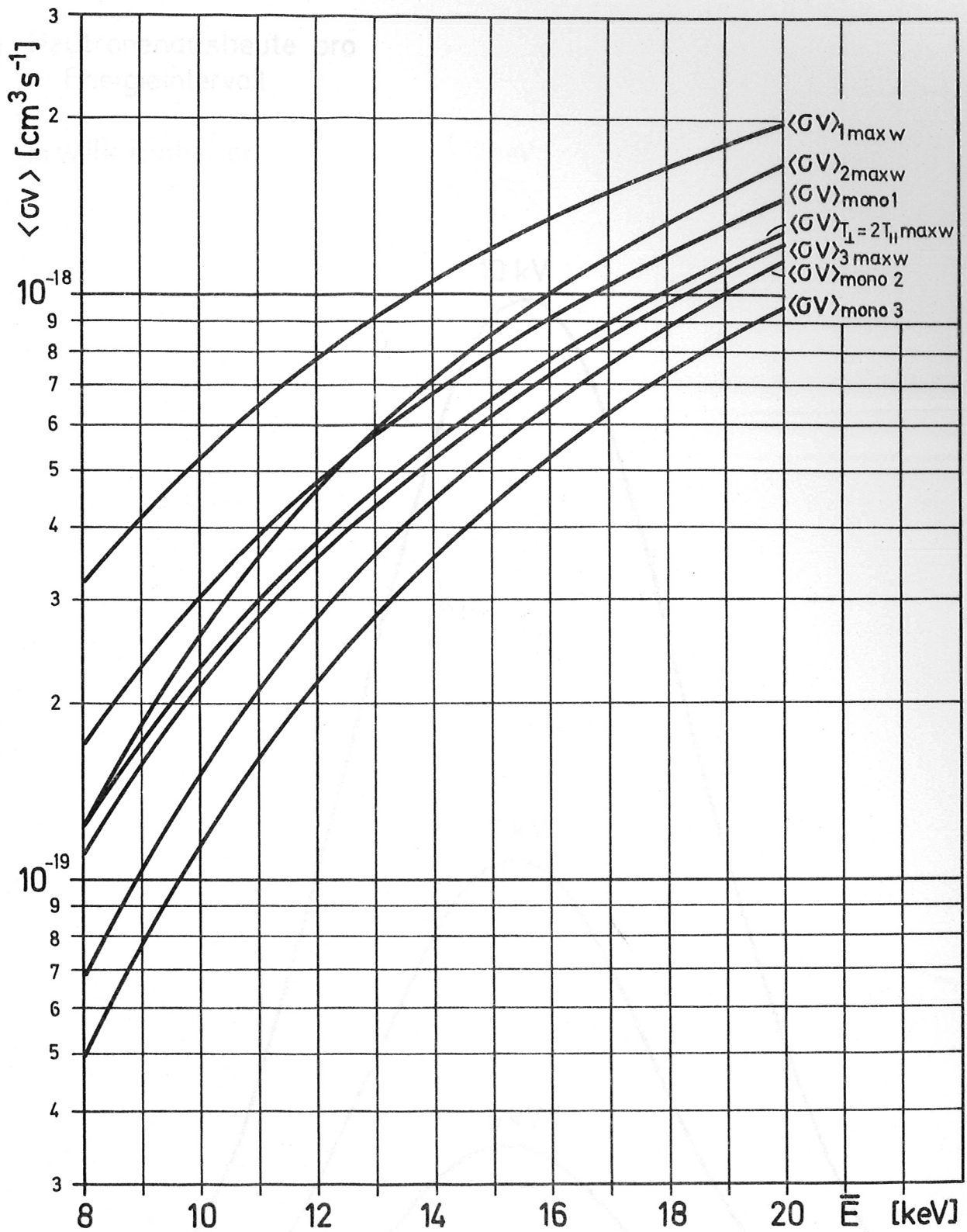


Abb. 2b Ausschnitt aus Abb. 2

Neutronenergie in MeV

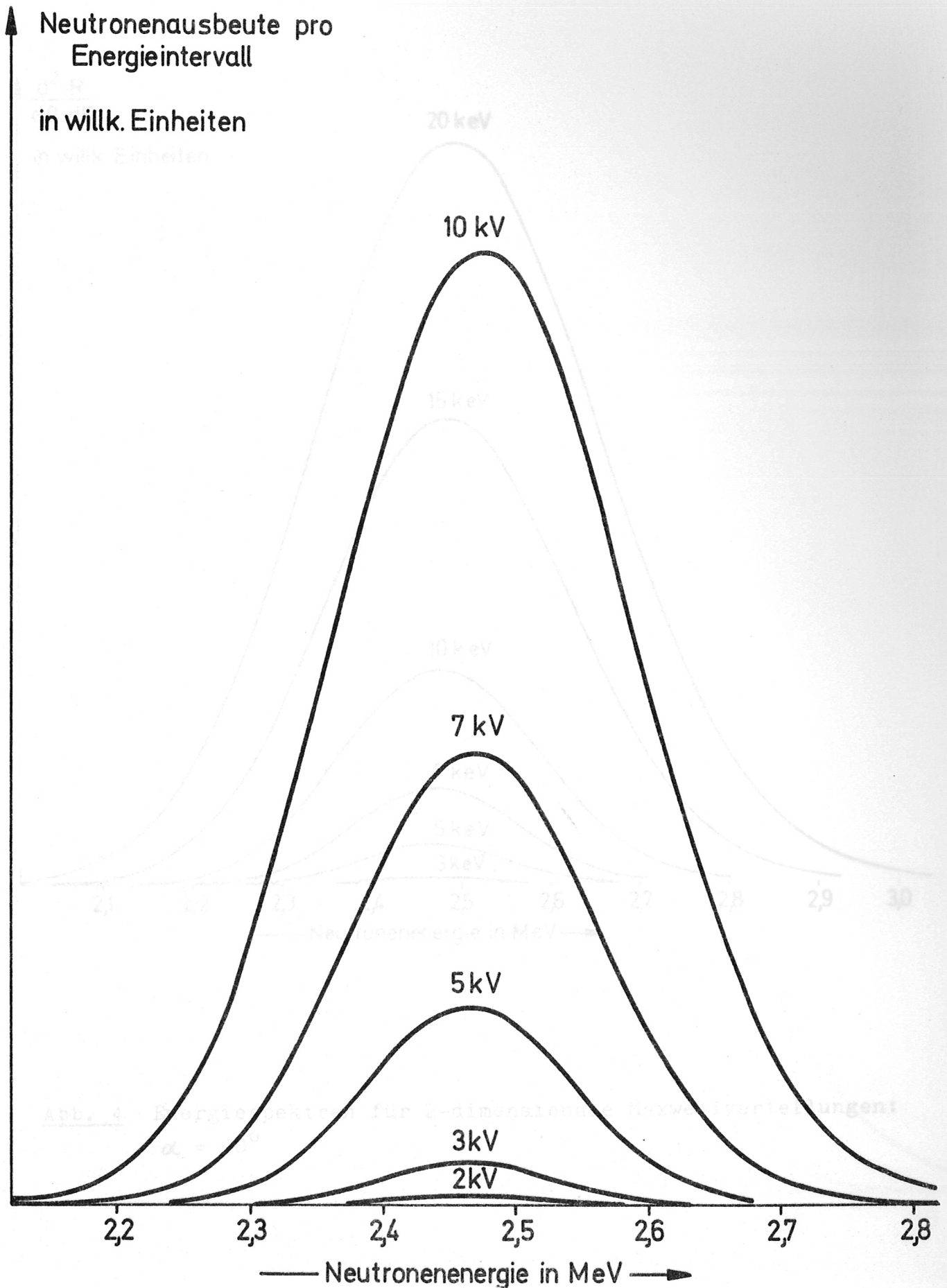


Abb. 3 Energiespektren für 3-dimensionale Maxwellverteilungen

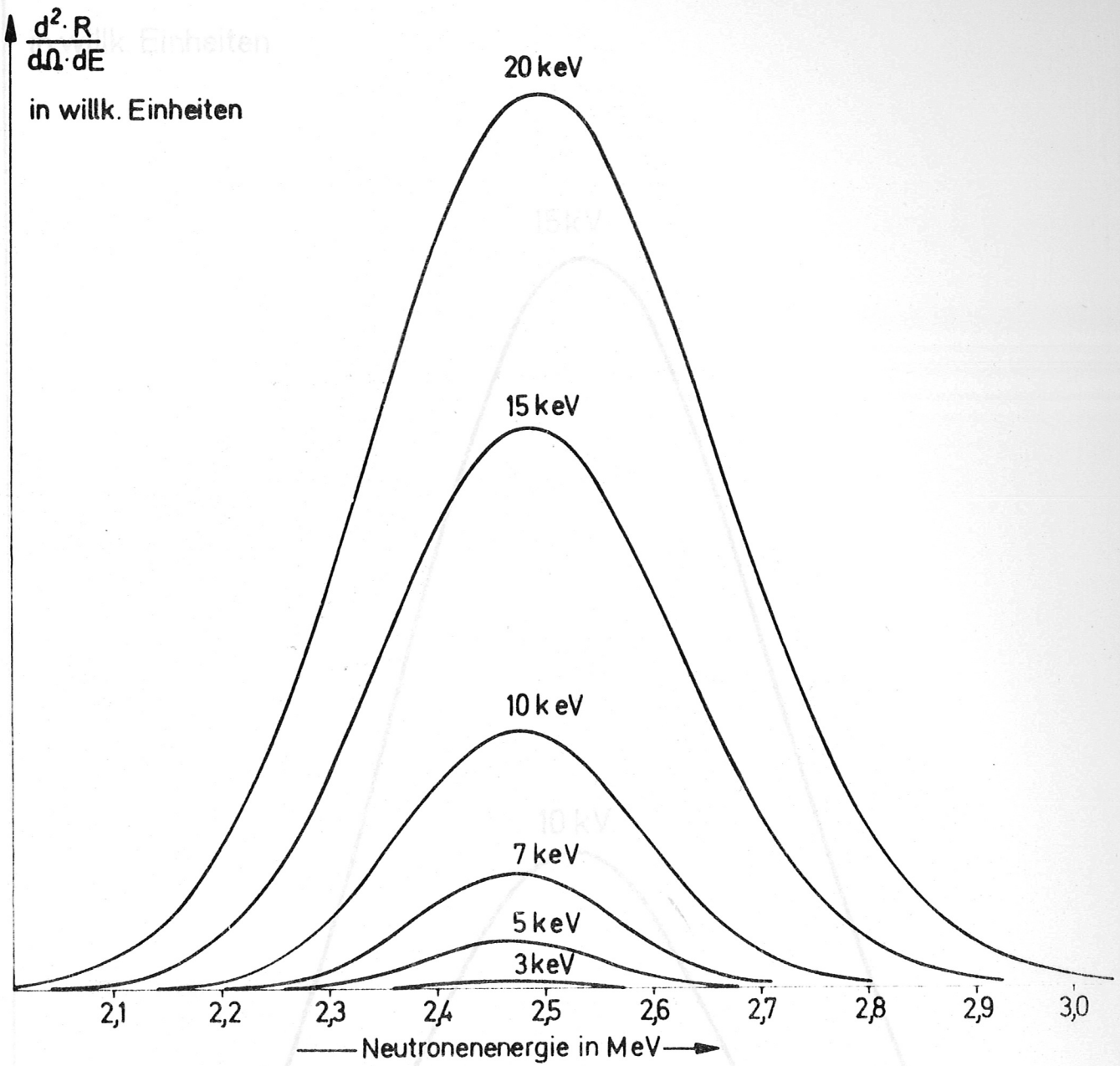


Abb. 4 Energiespektren für 2-dimensionale Maxwellverteilungen:
 $\alpha = 90^\circ$

Abb. 5 Energiespektren für 2-dimensionale Maxwellverteilungen:
 $\alpha = 60^\circ$

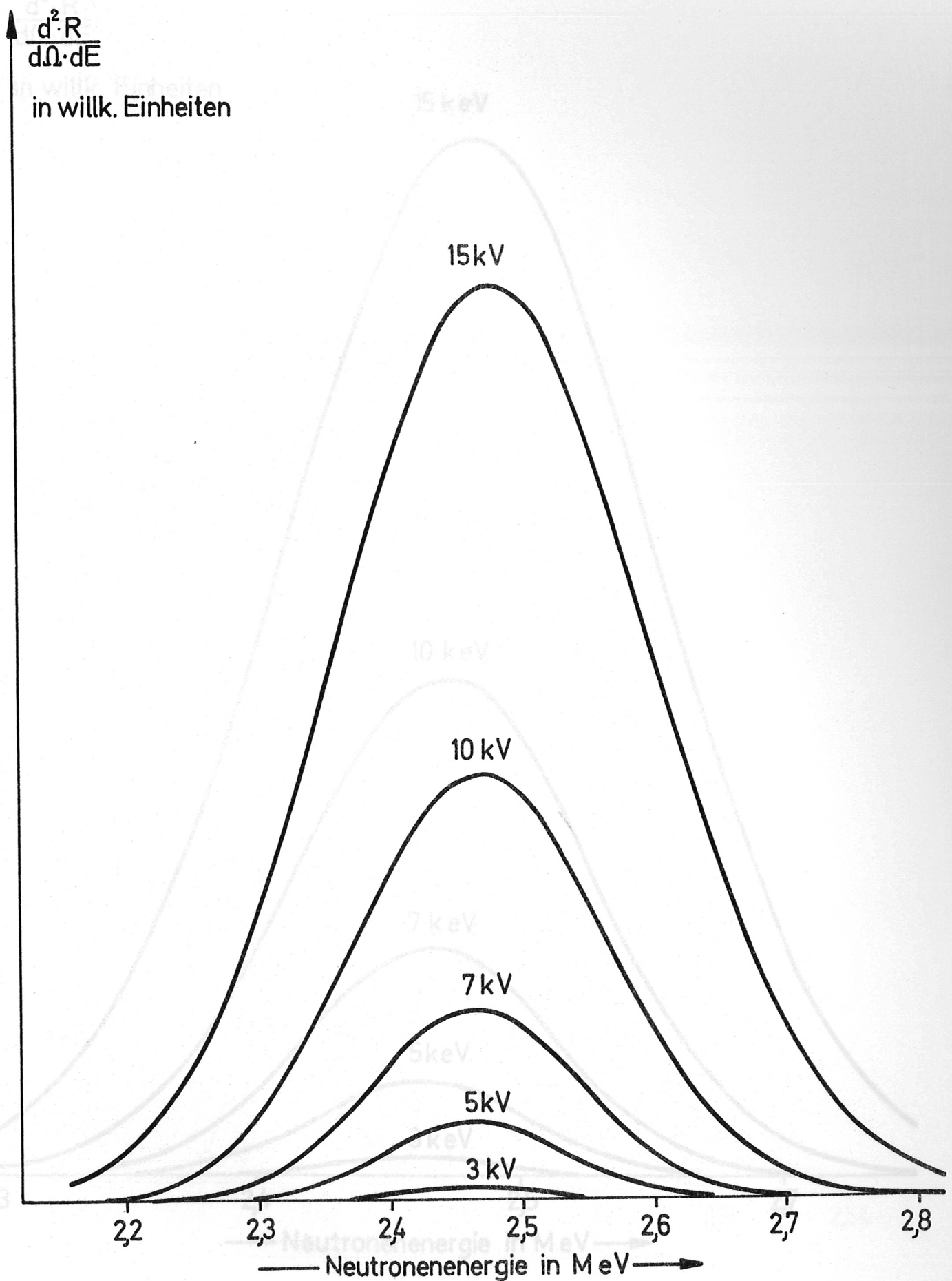


Abb. 5 Energiespektren für 2-dimensionale Maxwellverteilungen:
 $\alpha = 60^\circ$

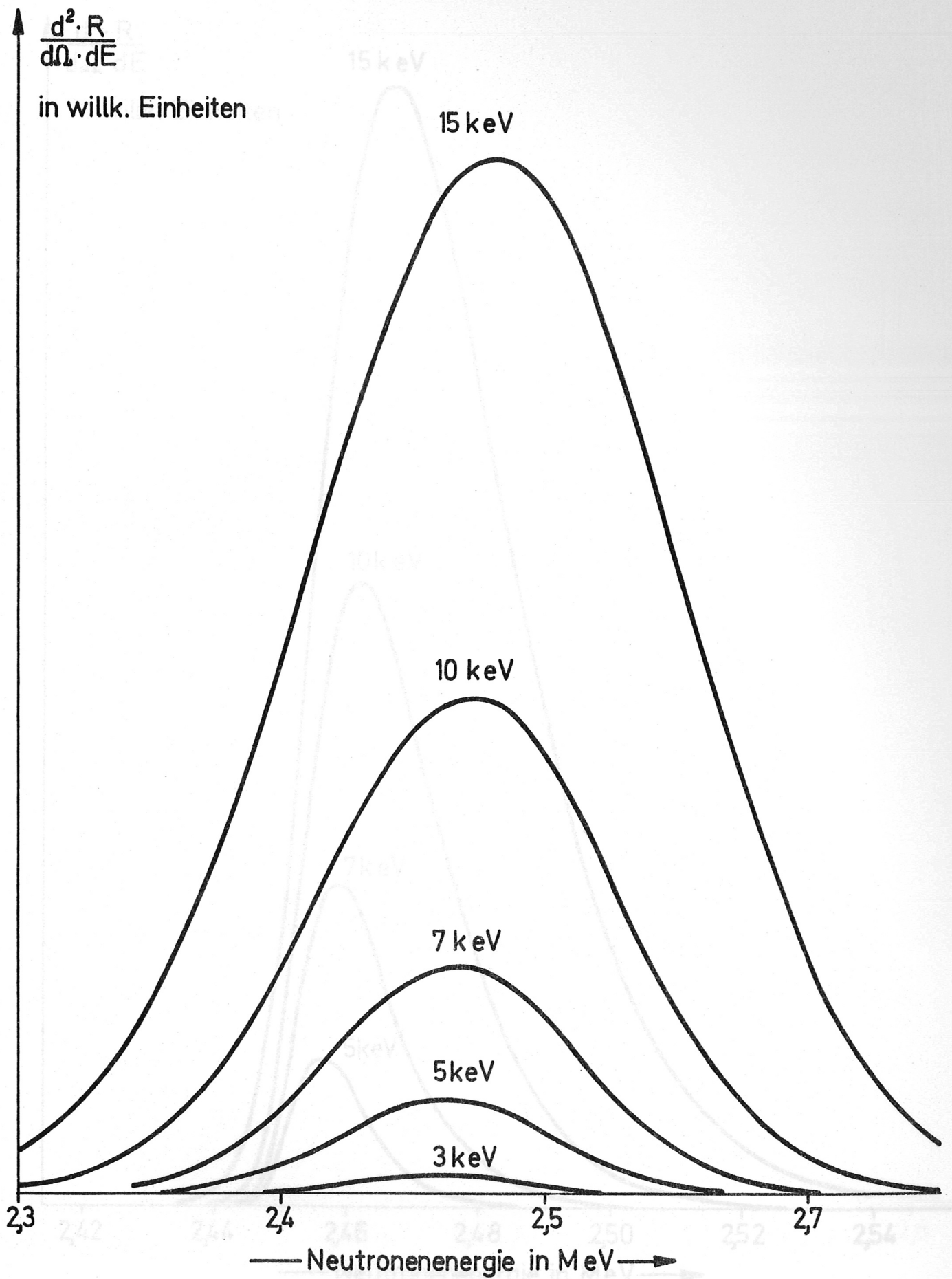


Abb. 6 Energiespektren für 2-dimensionale Maxwellverteilungen:
 $\alpha = 30^\circ$

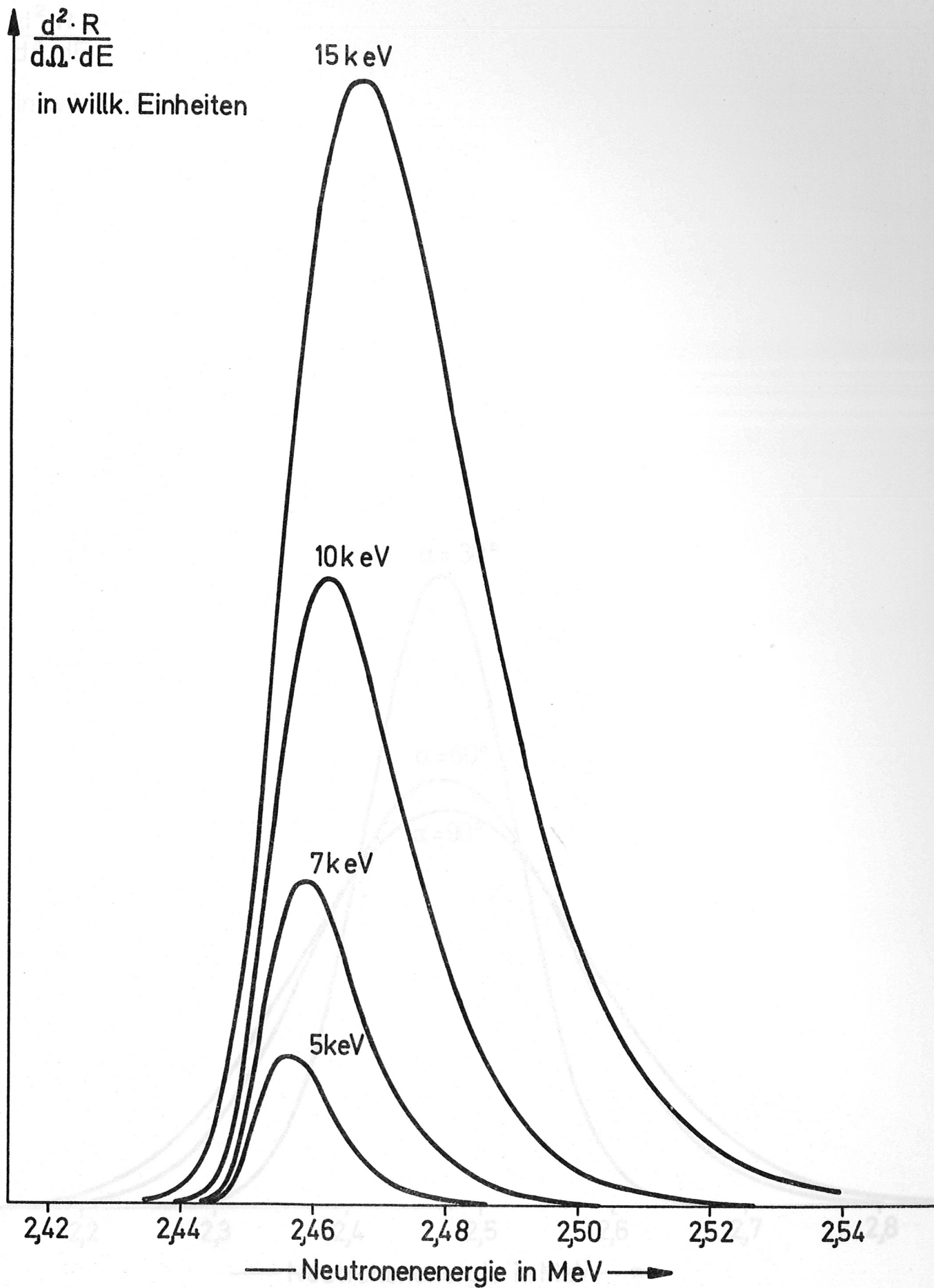


Abb. 7 Energiespektren für 2-dimensionale Maxwellverteilungen:
 $\alpha = 0^\circ$

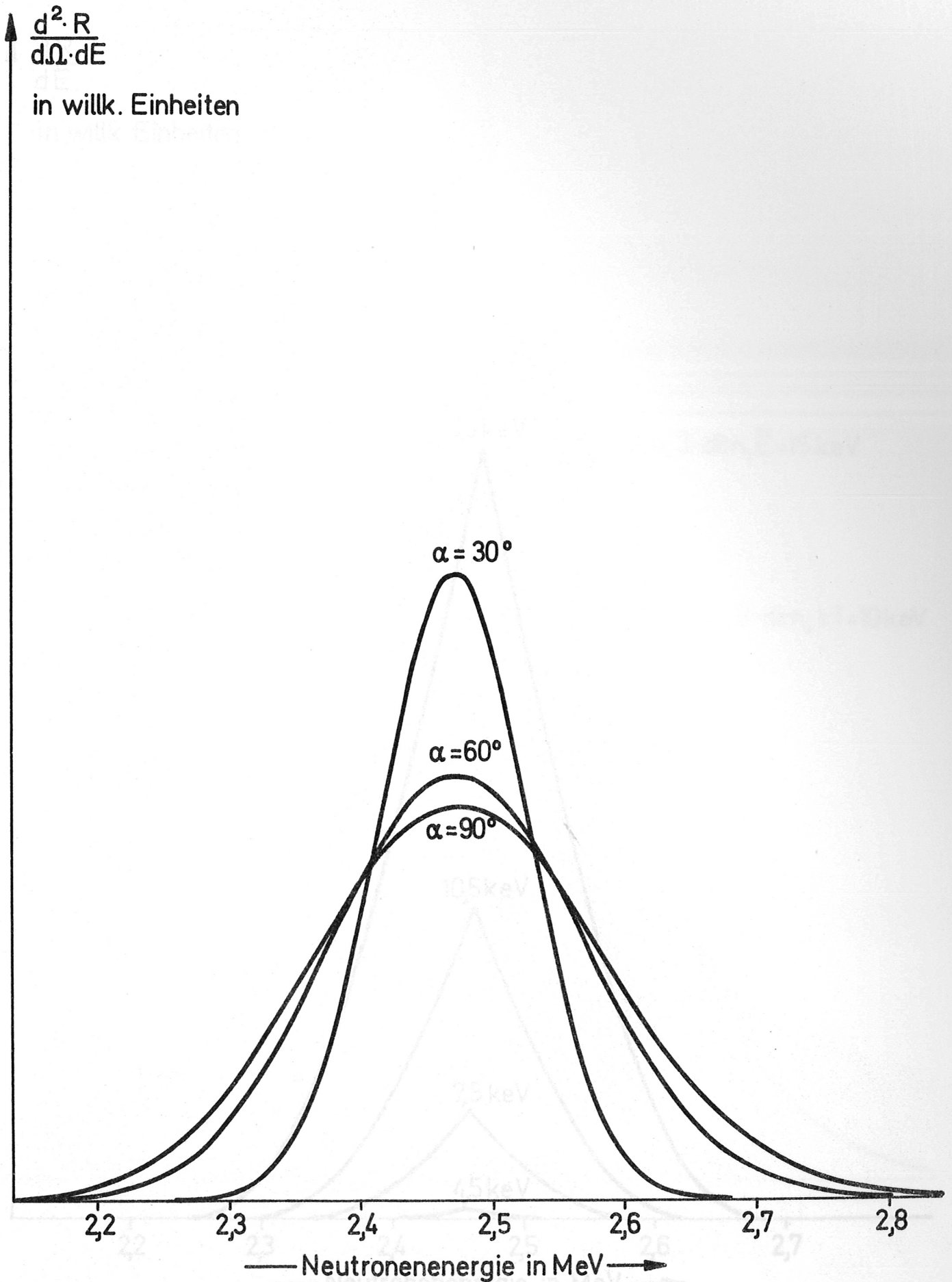


Abb. 8 Energiespektren 2-dimensionaler Maxwellverteilungen gegebener Temperatur ($kT = 10 \text{ keV}$) für verschiedene Beobachtungswinkel

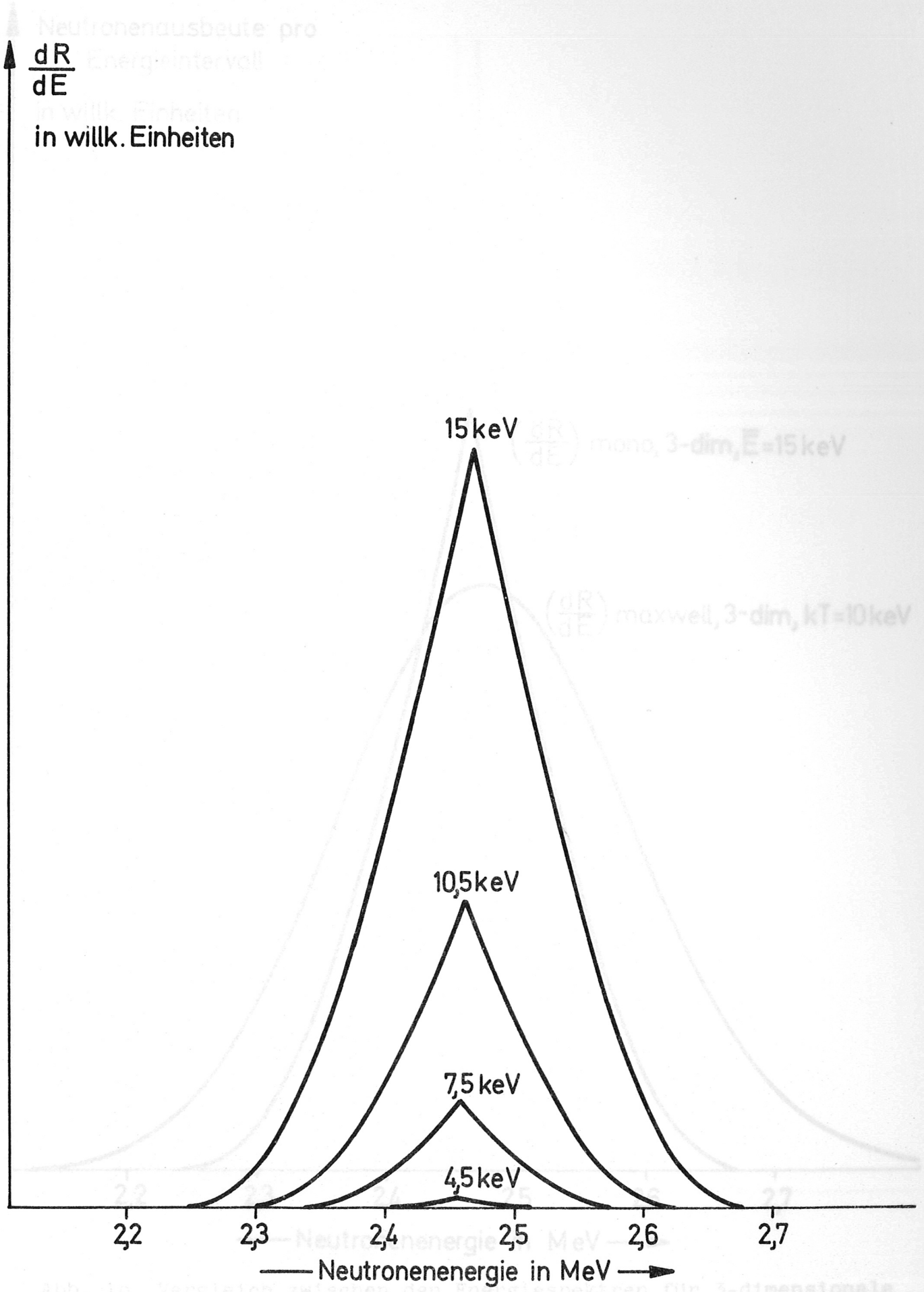


Abb. 9 Energiespektren für 3-dimensionale monoenergetische Verteilungen

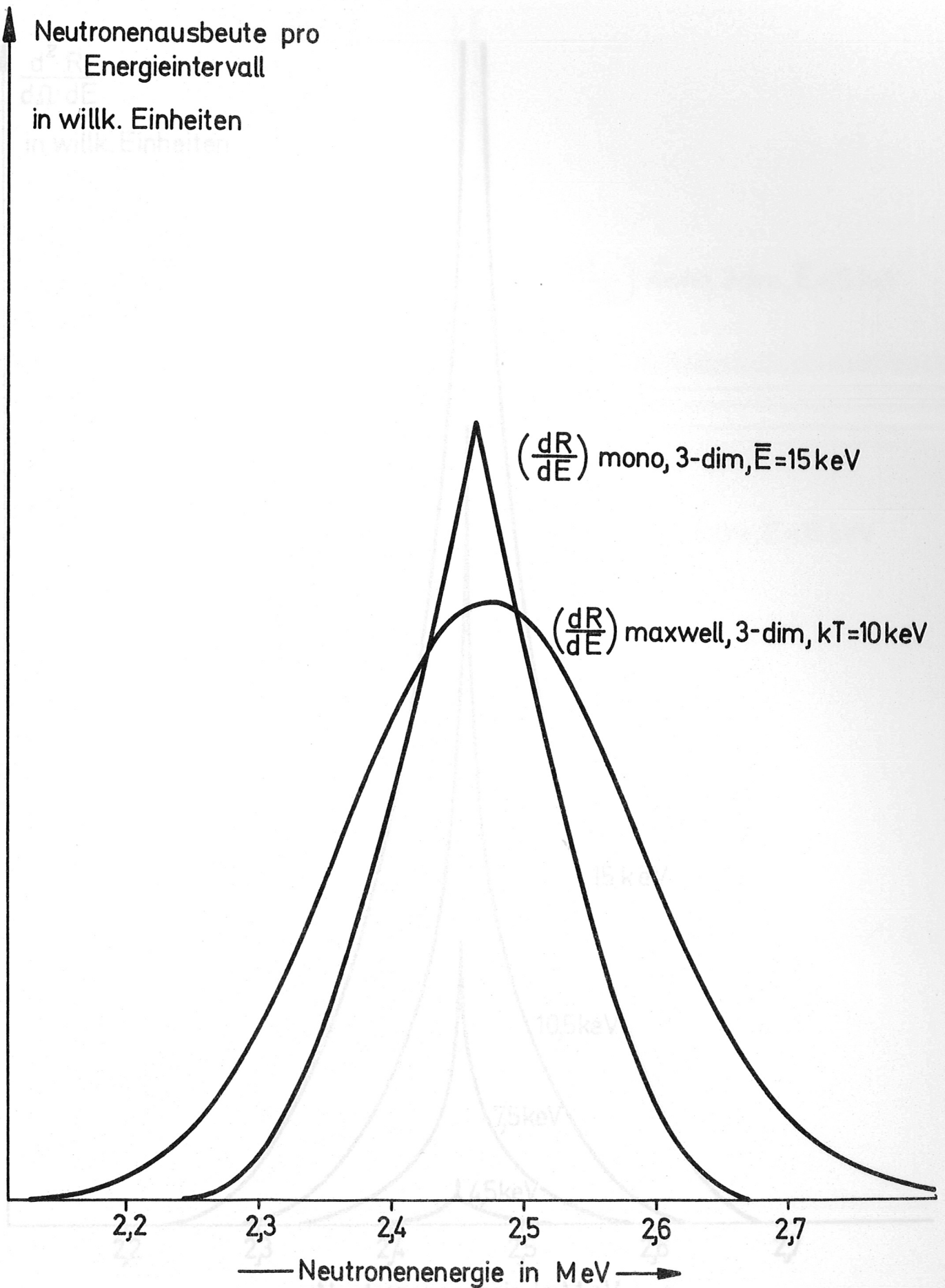


Abb. 10 Vergleich zwischen den Energiespektren für 3-dimensionale Maxwellverteilungen und für 3-dimensionale monoenergetische Verteilungen gleicher mittlerer Energie
 $1/2 m_D u_0^2 = 15\text{ keV}$ entspricht $kT = 10\text{ keV}$

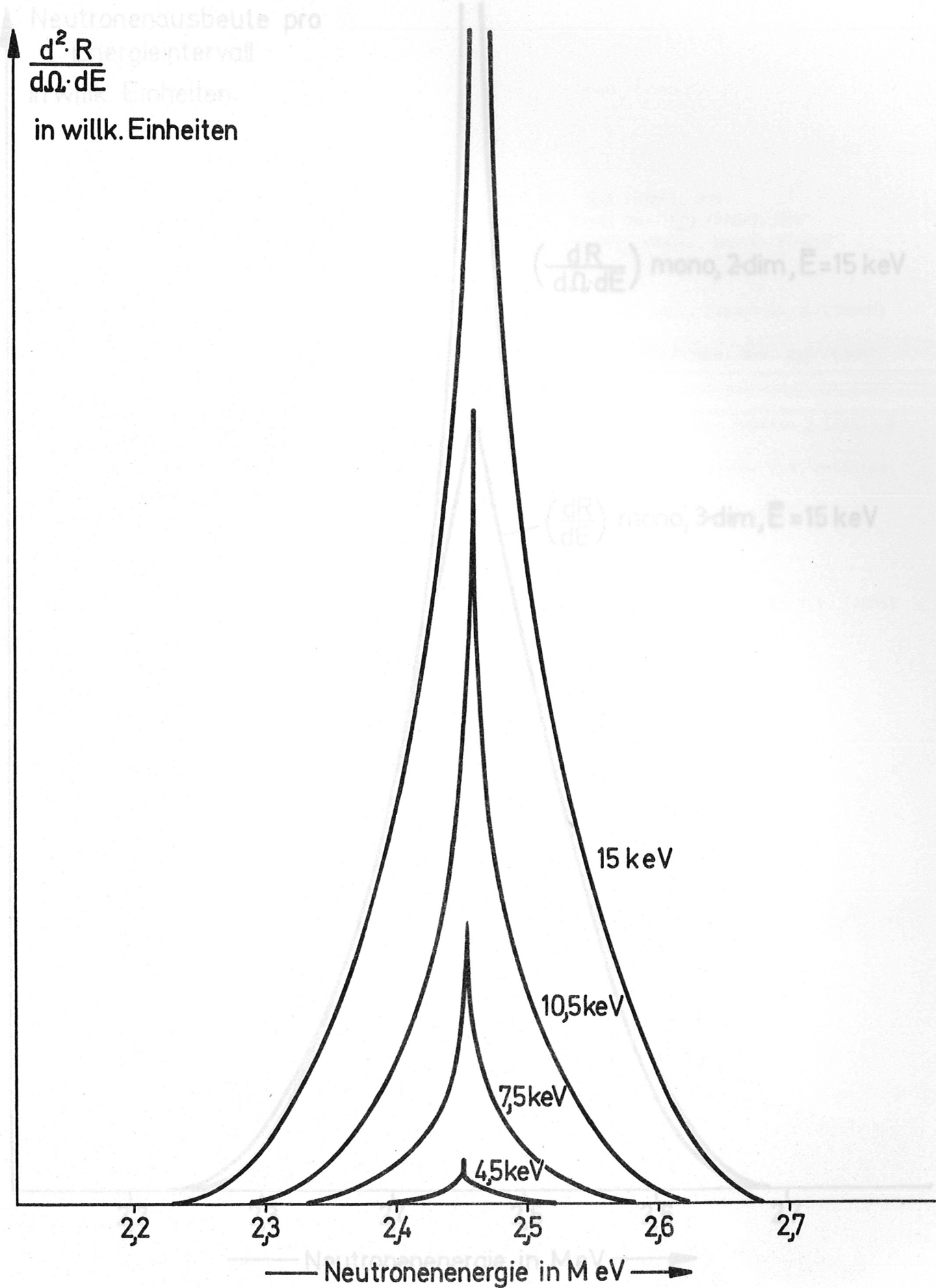


Abb. 11 Energiespektren für 2-dimensionale monoenergetische Verteilungen für $\alpha = 90^\circ$

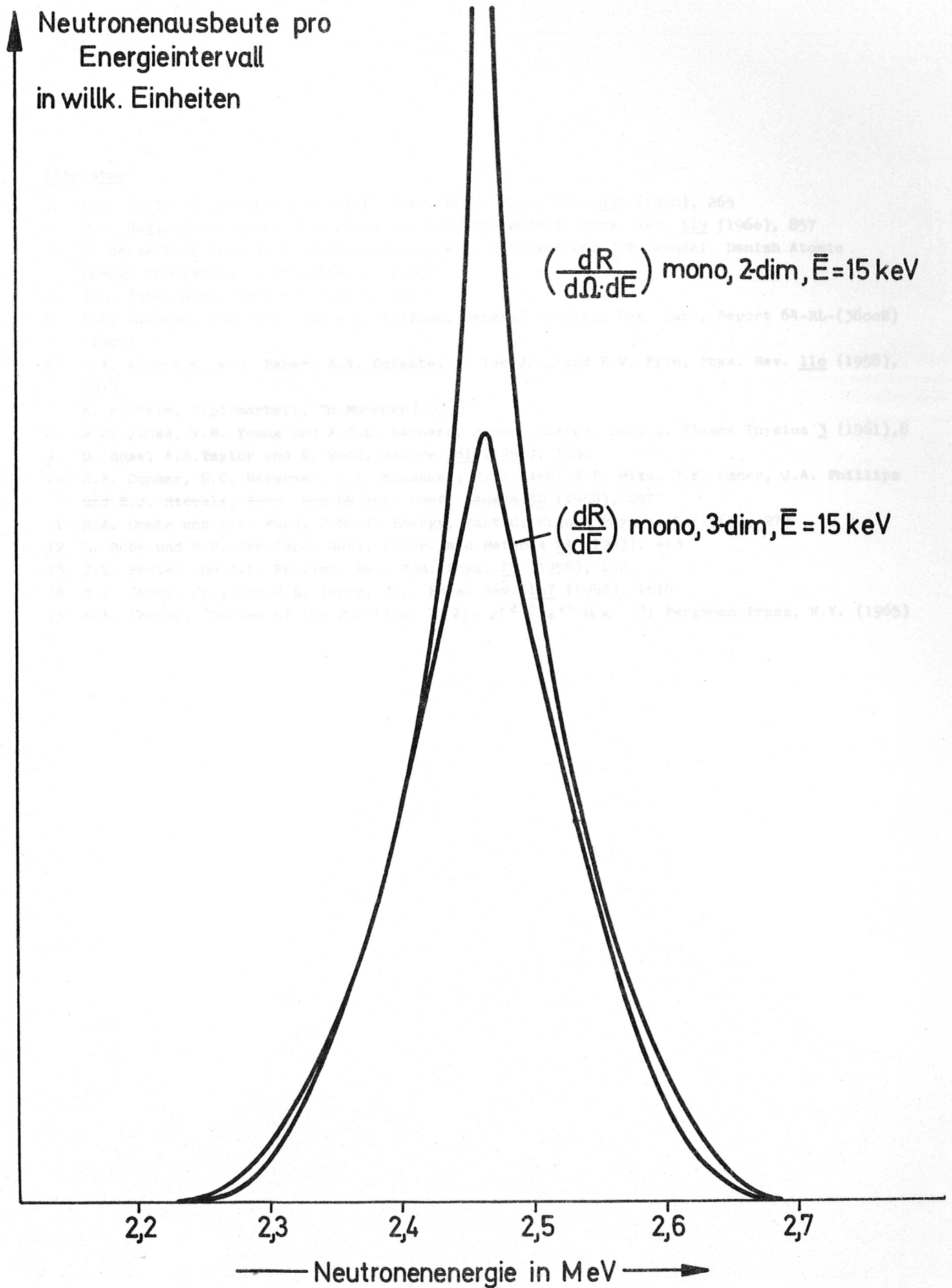


Abb. 12 Vergleich zwischen den Energiespektren für 2- und 3-dimensionale monoenergetische Verteilungen (2-dim.: $\alpha = 90^\circ$)

Literatur

- 1 D.L. Booth, G. Preston und P.F.D. Shaw, Proc. Phys. Soc. 69A (1956), 265
- 2 D.E. Nagle, W.E. Quinn, F.L. Ribe und W.B. Riesenfeld, Phys. Rev. 119 (1960), 857
- 3 T. Hesselberg Jensen, O. Kofoed-Hansen, A.H. Sillesen und C.F. Wandel, Danish Atomic Energy Commission, Risø Report 2 (1958)
- 4 J.L. Tuck, Nucl. Fusion 1 (1961), 201
- 5 L.M. Goldman, R.W. Kilb und H.C. Pollock, General Electric Res. Lab., Report 64-RL-(3600E) (1964)
- 6 O.A. Anderson, W.R. Baker, S.A. Colgate, J. Ise, Jr., und R.V. Pyle, Phys. Rev. 110 (1958), 1375
- 7 H. Wilhelm, Diplomarbeit, TH München (1959)
- 8 W.M. Jones, V.M. Young und A.C.L. Barnard, J.Nucl. Energy, Part C, Plasma Physics 3 (1961), 8
- 9 B. Rose, A.E. Taylor und E. Wood, Nature 181 (1958), 1630
- 10 J.P. Conner, D.C. Hagerman, J.L. Honsaker, H.J. Karr, J.P. Mize, J.E. Osher, J.A. Phillips und E.J. Stovall, Proc. 2nd UN Int. Conf. Geneva 32 (1958), 297
- 11 R.A. Combe und B.A. Ward, J.Nucl. Energy, Part C, Plasma Physics 5 (1963), 273
- 12 L. Ruby und R.B. Crawford, Nucl. Instr. and Methods 24 (1963), 413
- 13 J.L. Fowler und J.E. Brolley, Rev. Mod. Phys. 28 (1956), 102
- 14 S.J. Bonne, Jr., und J.E. Perry, Jr., Phys. Rev. 107 (1957), 1616
- 15 K.A. Karpov, "Tables of the Function $u(z) = e^{-z^2} \int_0^z e^{x^2} dx$ "; Pergamon Press, N.Y. (1965)

This report is to be treated as strictly confidential.

The Institut für Plasmaphysik holds the exclusive rights of publication, dissemination, propagation and translation into foreign languages of the official text, including drawings, wholly or partially also of articles or sections, as well as of the technical or scientific content of this report. Exceptions to these restrictions require written permission.

Furthermore, the Institut für Plasmaphysik reserves the right of exclusive exploitation of the information contained in this report for the purpose of obtaining protective measures under patent law, utility model rights and design rights. Actions or measures taken in the field of the knowledge gained from this report cannot be regarded as a violation of the right of utility model or design rights according to article 1 paragraph 1 and article 2 of the German Patent Law. The reader is referred to article 1 of the German Patent Law, paragraph 1 according to the Patent Law, the report must not be published in any form or by any means.

The Institut für Plasmaphysik guarantees that the information given in this report is true, correct and complete to the best of its knowledge, while patent rights or trademark rights are not guaranteed.

The Institut für Plasmaphysik is not liable for damages or consequences of the use of the information given in this report, which may be caused by third parties. The Institut für Plasmaphysik is not liable for damages or consequences of the use of the information given in this report, which may be caused by third parties.