

Ein 90° -Laser-Streuexperiment zur
Messung von Temperatur und Dichte
der Ionen und Elektronen eines
kalten, dichten Theta Pinch Plasmas

H. Röhr

IPP 1/58

August 1967

I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K

G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Ein 90° -Laser-Streuexperiment zur
Messung von Temperatur und Dichte
der Ionen und Elektronen eines
kalten, dichten Theta Pinch Plasmas

Abstract

H. Röhr

IPP 1/58

August 1967

Temperature and density of the ions and electrons were determined from the 90° laser scattering experiment. In some cases the plasma data were chosen so that only two particles are contained in the Debye volume. Though the scattering theory is derived for the case of many particles in the Debye volume, no deviation from the calculated spectra could be observed. The values of the electron density were confirmed by measurements of the satellite peaks.

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

Abstract

Temperature and density of the ions and electrons were determined from the ion line in a 90° laser scattering experiment. In some cases the plasma data were chosen so that only two particles are contained in the Debye-volume. Though the scattering theory is derived for the case of many particles in the Debye volume, no deviation from the calculated spectra could be observed. The values of the electron density were confirmed by measurements of the satellite peaks.

V. Zusammenfassung des Ergebnisses	22
VI. Literatur	30
Anhang I. Erläuterungen zur Relativierung der Messkanäle	24
Anhang II. Anschauliche Herleitung der allgemeinen Streuformel	30

Inhaltsverzeichnis

Seite

I. Einleitung

1

II. Zusammenfassung der Ergebnisse der Streutheorie

4

III. Experimentelles zur Messung des Ionenspektrums

8

1. Erzeugung des Plasmas

8

2. Auswahl des Lasers

8

3. Massnahmen gegen Falschlicht

9

4. Monochromatoren und Detektoren

10

5. Relativeichung der Messkanäle

11

6. Bestimmung der Mitte der Laserlinie

11

7. Absoluteichung

11

8. Auswertung der Oszillogramme

12

9. Ergebnisse

13

IV. Kontrolle der Ergebnisse durch Messung an den Satellitenlinien

17

1. Formeln

17

2. Monochromator zur Messung der Satelliten

18

3. Ergebnisse

19

V. Zusammenfassung der Ergebnisse

22

VI. Literatur

30

Anhang I Erläuterungen zur Relativeichung der Messkanäle

24

Anhang II Anschauliche Herleitung der allgemeinen Streuformel

30

I. Einleitung und Problemstellung

Ein wichtiges Ergebnis der Theorie der Lichtstreuung an Plasmen [1,2] besagt, dass im gestreuten Licht Information über die Elektronen und die Ionen enthalten ist, obwohl die Streuung wegen der viel grösseren Ionenmasse praktisch ausschliesslich an den Elektronen erfolgt. Die Information ist in der Spektralverteilung und in der Totalintensität des Streulichts enthalten.

Die Spektralverteilung des Streulichts ist von einem einzigen Parameter abhängig, nämlich von

$$\alpha = \frac{1}{k|D|}$$

Der Vektor $|\bar{k}|$ ist der Streuvektor (die Differenz von den Wellenvektoren des gestreuten und einfallenden Lichts), dessen Betrag

$$|\bar{k}| \approx \frac{4\pi \sin \theta/2}{\lambda_0}$$

nur von der Wellenlänge λ_0 des eingestrahnten Lichts (Laserwellenlänge) und dem Streuwinkel θ zwischen eingestrahlttem und gestreutem Licht abhängt.

Die Grösse D ist die Debye-Länge und hängt nur von den Plasmagrössen Elektronentemperatur T_e und Elektronendichte n ab:

$$D = \sqrt{\frac{k T_e}{4\pi n e^2}}$$

(e = Elementarladung, k = Boltzmannkonstante)

In den beiden Grenzfällen $\alpha \ll 1$ und $\alpha \gg 1$ sind die Streuspektren qualitativ völlig verschieden (wie in Abschnitt II näher erläutert wird.)

Bei dem in der vorliegenden Arbeit behandelten Experiment handelt es sich um den Fall $\alpha \gg 1$. Das Streuspektrum weist in diesem Fall eine schmale, relativ intensitätsstarke Linie bei der Wellenlänge des eingestrahnten Lichts auf, deren Profil fernerhin als Ionenspektrum bezeichnet wird (bei $\alpha \ll 1$, ist diese Linie nicht vorhanden). Ausserdem treten bei $\alpha \gg 1$ zwei symmetrisch zur eingestrahnten Frequenz liegende, sehr intensitätsschwache, schmale, von der Zentrallinie völlig getrennte Satellitenlinien, das Elektronenspektrum, auf.

Der Fall $\alpha \gg 1$ ist nun für die Plasmaphysik deshalb von besonders grossem Interesse, da aus dem Ionenspektrum unter anderem die Ionen-temperatur bestimmt werden kann. Es hat daher nicht an Versuchen gefehlt, Experimente mit $\alpha \gg 1$ zu verwirklichen.

Wie der Definitionsgleichung für α zu entnehmen ist, kann der Fall $\alpha \gg 1$ auf zwei prinzipiell verschiedene Weisen erreicht werden: Entweder ist das zu untersuchende Plasma und damit die Debye-Länge, vorgegeben. Dann kann nur durch Variation des Streuwinkels (oder ggf. der Laserwellenlänge) α verändert werden. Oder man gibt einen Streuwinkel, der z.B. experimentell günstig ist, vor. Dann muss das Plasma kleine Temperatur und grosse Dichte aufweisen, damit die Debye-Länge klein und damit α gross wird. Bei allen bisher veröffentlichten Streuexperimenten an Laboratoriumsplasmen wurde der Fall $\alpha \gg 1$ durch kleine Streuwinkel bei entsprechend grosser Debye-Länge erreicht [7,8,9,13, 14,15].

Obwohl die Streutheorie bei allen Experimenten an Plasmen grosser Debye-Länge bestätigt wurde [3 - 17], ist noch nicht gezeigt worden, in welchem Masse Theorie und Experiment bei Plasmen mit kleiner Debye-Länge übereinstimmen.

In der vorliegenden Arbeit soll daher der Fall $\alpha \gg 1$ bei einem grossen Streuwinkel (90°) durch ein Plasma mit einer entsprechend kleinen Debye-Länge erreicht werden. An einem solchen Plasma, das demzufolge Dichten von fast 10^{18} Elektronen pro cm^3 bei Temperaturen von nur $3 \cdot 10^4$ °K aufweist, wurden bisher keine Streuexperimente ausgeführt. +)

Bei Plasmen mit derart kleinen Debye-Längen begibt man sich in einen Parameterbereich, für den die Voraussetzungen der Streutheorie nicht mehr gut erfüllt sind. Eine wesentliche Bedingung für die Gültigkeit der Theorie ist, dass die Anzahl der Elektronen im Debye-Volumen gross sein muss:

$$nD^3 \gg 1$$

Im vorliegenden Experiment wird ein Parameterbereich überstrichen, bei dem die Anzahl der Elektronen im Debye-Volumen von 2 bis 10 variiert.

+) In [17] wurde bei einem $\alpha \approx 1$ unter 90° ein Ionenspektrum gemessen.

In dem einen Fall (10) ist die Bedingung noch recht gut erfüllt, während man das im anderen Fall (2) nicht mehr behaupten kann. Das Experiment liefert daher nicht nur die Aussage, ob die Streutheorie in einem bestimmten, bisher nicht untersuchten Parameterbereich von den Messungen bestätigt wird, sondern darüber hinaus die viel stärkere Aussage, ob sie auch noch anwendbar ist in Bereichen, in denen die Voraussetzungen nur noch mangelhaft erfüllt sind.

Bei den zitierten Vorwärtsstreuexperimenten kann diese Aussage nicht gemacht werden, weil bei ihnen immer $nD^3 \gg 1$ erfüllt ist.

Um ein Urteil bezüglich Übereinstimmung mit theoretisch berechneten Spektren fällen zu können, muss natürlich das Spektrum mit einer genügend kleinen Unsicherheit gemessen werden können. Allen bisher veröffentlichten Experimenten bei grossem α (Vorwärtsstreuexperimenten) haften Nachteile an, die keine sehr grosse Messgenauigkeit gestatten:

Bei einigen Arbeiten war die spektrale Auflösung zu gering [7,12], sodass über die Form des Ionenspektrums keine Aussage gemacht werden konnte. Demgegenüber ist das Spektrum bei einem 90° -Streuexperiment selbst bei kleinen Temperaturen genügend breit, dass es mit einem lichtstarken Gittermonochromator aufgelöst werden kann.

Bei den Experimenten, deren Auflösung genügend hoch war, konnte das Spektrum nur nacheinander bei mehreren Pinch-Entladungen gemessen werden [8,14,15]. Dabei muss man die schlechte Reproduzierbarkeit des Plasmas als Unsicherheit des Spektrums berücksichtigen. In der vorliegenden Arbeit wird unter Verwendung von Glasfaserspalten das ganze Profil bei einer Entladung gemessen. In einer weiteren Arbeit [13] konnte zwar im Prinzip bei einer Entladung das ganze Spektrum mit genügender Auflösung gemessen werden, jedoch war die Streuleistung so gering, dass über eine grosse Zahl von Entladungen gemittelt werden musste, was natürlich wieder Unsicherheit infolge der schlechten Reproduzierbarkeit des Plasmas bedeutet.

Bei dem vorliegenden 90° -Streuexperiment kann das Streulicht auf jedem Messkanal mit einer Unsicherheit von nur ca $\pm 5\%$ gemessen werden.

Im zweiten Teil der Arbeit soll gleichzeitig (bei einer Entladung) die Totalintensität des Ionenspektrums und eine spektral aufgelöste, intensitätsschwache Satellitenlinie des Elektronenspektrums gemessen werden.

Aus dieser Messung erhält man erstens drei voneinander unabhängige Werte für die Elektronendichte, die sich gegenseitig bestätigen, falls sie übereinstimmen:

Ein Wert folgt aus der Totalintensität des Ionenspektrums, der zweite aus dem Frequenzabstand des Satelliten vom Zentrum des Ionenspektrums, der dritte aus dem Verhältnis von Totalintensität des Ionenspektrums zur Totalintensität der Satellitenlinie (siehe Abschnitt IV). Ein Vergleich dieser drei Werte ist bisher noch nicht veröffentlicht worden. Zum zweiten soll die Halbwertsbreite der Satellitenlinie bestimmt werden. Diese Messung gibt Aufschluss darüber, ob ausser der Landau-Dämpfung, die in der Streutheorie enthalten ist, andere Mechanismen (z.B. Zweierstösse) die Linie verbreitern. Auch eine solche Messung ist bisher an Pinch-Plasmen noch nicht durchgeführt worden ⁺).

II. Zusammenfassung der Ergebnisse der Streutheorie

Die Theorie der Lichtstreuung an Plasmen ist von mehreren Autoren behandelt worden und soll hier nicht wiedergegeben werden. Hier sollen nur kurz in Anlehnung an Salpeter und Kegel [1, 2, 18] die wichtigsten Ergebnisse für ein stossfreies Plasma, dessen Ionen und Elektronen Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilungen haben, aufgeführt werden.

Die über den ganzen Frequenzbereich integrierte Streulichtintensität kann unter der Voraussetzung, dass die mittlere thermische Geschwindigkeit der Elektronen viel grösser ist als die der Ionen in guter Näherung in zwei Anteile zerlegt werden:

$$(1) \quad S_G(\alpha) = S_e(\alpha) + S_i(\alpha)$$

Dabei bedeutet

$$(1a) \quad S_x(\alpha) = \int_0^{\infty} S_x(\alpha, \omega) d\omega$$

die Streuintensität je Raumwinkeleinheit, integriert über das gesamte Frequenzgebiet.

($S_G(\alpha)$ = Gesamtstreuintensität pro Raumwinkeleinheit, α = Streuparameter).

⁺) In [16] wurden die Satelliten an einem Plasmastrahl mit relativ geringer Spektralauflösung gemessen.

Welcher der beiden Teile dominiert hängt von dem Streuparameter

$$(2) \quad \alpha = \frac{1}{|\bar{k}| \cdot D}$$

ab (\bar{k} = Streuvektor, D = Debyelänge).

Ist $\alpha \ll 1$, so kann $S_i(\alpha)$ gegenüber $S_e(\alpha)$ vernachlässigt werden. Das Spektrum $s_e(\alpha, \omega)$, im folgenden auch als Elektronenspektrum bezeichnet, ist eine Glockenkurve symmetrisch zur Laserfrequenz mit einer Halbwertsbreite entsprechend der mittleren thermischen Geschwindigkeit der Elektronen (Abb. 1a). Ist $\alpha \approx 1$, so weist das Elektronenspektrum im Zentrum eine Einsattelung auf. Zusätzlich tritt $s_i(\alpha, \omega)$ in Form einer schmalen Linie im Zentrum in Erscheinung, deren Halbwertsbreite der mittleren thermischen Geschwindigkeit der Ionen entspricht (Ionenspektrum, Abb. 1b). Bei $\alpha \gg 1$ wird die über ω integrierte Intensität des Elektronenspektrums $S_e(\alpha)$ näherungsweise proportional zu $1/\alpha^2$ immer kleiner. Das Elektronenspektrum $s_e(\alpha, \omega)$ verwandelt sich in zwei scharfe Linien (auch Satelliten genannt), die symmetrisch zur Frequenz des eingestrahlten Lichts in einem Abstand von $\pm \Delta\omega \approx \omega_p$ liegen (ω_p = Plasmafrequenz, Abb. 1c).

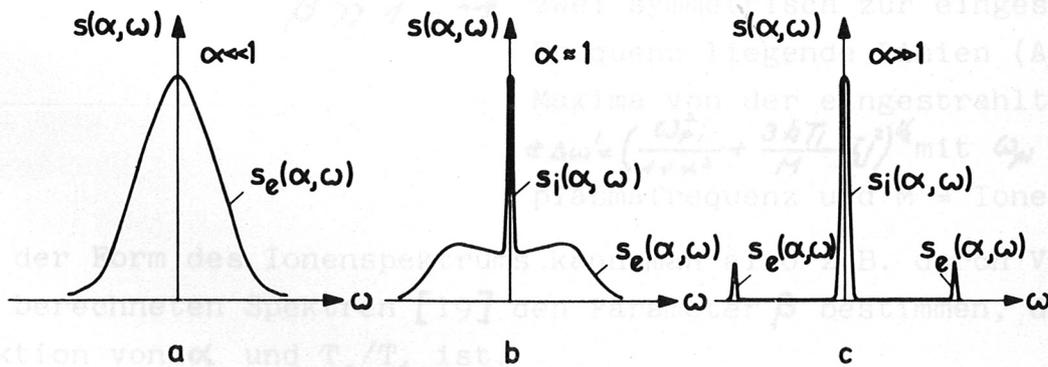


Abb. 1 Typische Streuspektren für verschiedene α

Der Hauptanteil des Streulichts wird bei $\alpha \gg 1$ durch $s_i(\alpha, \omega)$, das Ionenspektrum repräsentiert.

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, enthält $s_i(\alpha, \omega)$ Information

sowohl über die Ionen als auch über die Elektronen. In welcher Form diese Informationen im Ionenspektrum enthalten sind, soll im folgenden erläutert werden.

Das Ionenspektrum $s_i(\alpha, \omega)$ ist proportional einer Funktion $\Gamma(\beta, \frac{\omega}{\omega_i})$ während das Elektronenspektrum $s_e(\alpha, \omega)$ durch die Funktion $\Gamma(\alpha, \frac{\omega}{\omega_e})$ beschrieben werden kann [1, 2]:

$$(3) \quad s_i(\alpha, \omega) = C_1(\alpha) \Gamma(\beta, \frac{\omega}{\omega_i})$$

$$(4) \quad s_e(\alpha, \omega) = C_2 \Gamma(\alpha, \frac{\omega}{\omega_e})$$

Die Bedeutung des Parameters α , der die Form des Elektronenspektrums bestimmt (s. Abb. 1a - 1c), übernimmt beim Ionenspektrum der Parameter

$$(5) \quad \beta = \left(\frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} \cdot \frac{T_e}{T_i} \cdot Z \right)^{1/2}$$

der für grosse Werte von α den Wert $\beta \approx \frac{T_e}{T_i} \cdot Z$ annimmt.

(T_e bzw. T_i = Elektronen- bzw. Iontemperatur, Z = Kernladungszahl).

Es gilt daher für die Form des Ionenspektrums auch

$$\beta \ll 1 \rightarrow \text{Glockenkurve}$$

$$\beta \approx 1 \rightarrow \text{Profil mit zentraler Einsattelung}$$

$$\beta \gg 1 \rightarrow \text{zwei symmetrisch zur eingestrahnten}$$

Frequenz liegende Linien (Abstand der Maxima von der eingestrahnten Frequenz $\pm \Delta\omega' = \left(\frac{\omega_{pi}^2}{1 + \alpha^2} + \frac{3kT_i}{M} |k|^2 \right)^{1/2}$ mit ω_{pi} = Ionenplasmafrequenz und M = Ionenmasse).

Aus der Form des Ionenspektrums kann man also z.B. durch Vergleich mit berechneten Spektren [19] den Parameter β bestimmen, der eine Funktion von α und T_e/T_i ist.

Die Grössen ω_i und ω_e (in Gl. (3) und (4)) sind die Dopplerverschiebungen, die den mittleren thermischen Geschwindigkeiten der Ionen bzw. der Elektronen entsprechen. Sie bestimmen die Halbwertsbreite der Spektren, die aus diesem Grund ein Mass für die Ionentemperatur (im Fall des Ionenspektrums) bzw. der Elektronentemperatur ist. Im thermischen Gleichgewicht ($T_e = T_i$) ist das Ionenspektrum ungefähr um den Faktor $(m/M)^{1/2}$ schmäler als das Elektronenspektrum (m, M = Elektronen- bzw. Ionenmasse). $C_1(\alpha)$ und C_2 sind von ω unab-

hängige Faktoren.

Die dritte Grösse, die man dem Ionenspektrum entnehmen kann, ist die Totalintensität

$$(6) \quad S_i(\alpha) = \int_0^{\infty} s_i(\alpha, \omega) d\omega$$

Sie ist proportional der Zahl der streuenden Elektronen, d.h. bei bekanntem Streuvolumen proportional der Elektronendichte n . Der Streutheorie entnimmt man [2, 18]:

$$(7) \quad n = S_i(\alpha) \frac{B}{Z} \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} + Z \cdot \frac{T_e}{T_i}\right)$$

was für Wasserstoff ($Z = 1$) in

$$(7a) \quad n = S_i(\alpha) \cdot B \cdot \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} + Z \cdot \frac{T_e}{T_i}\right)$$

übergeht. B ist eine Konstante, die man z.B. durch Eichung der Messanordnung mittels Rayleighstreuung an einem Testgas mit bekanntem Streuquerschnitt erhält.

Da α vor einem Streuexperiment nicht bekannt ist und auch nicht mit Sicherheit als $\alpha \gg 1$ angenommen werden kann, muss es mit Hilfe der Definitionsgleichung

$$(8) \quad \alpha^2 = \frac{1}{|k|^2 \cdot D^2} = \frac{A \cdot n}{k \cdot T_e}$$

aus den Gleichungen für β (5) und n (7a) eliminiert werden. A ist eine Konstante, die ausser dem Streuwinkel und der Wellenlänge des eingestrahlichten Lichts nur Naturkonstanten enthält.

Mit den drei Grössen β , T_i und $S_i(\alpha)$, die man allein aus dem Ionenspektrum entnehmen kann, lassen sich also für Wasserstoffplasma über die drei Gleichungen (5), (7a) und (8) für β , α und n die Grössen T_e , n und α eindeutig berechnen.

III. Experimentelles zur Messung des Ionenspektrums

1. Erzeugung des Plasmas

Für das Streuexperiment wird, wie bereits aus der Einleitung hervorgeht, ein Plasma benötigt, in dem die Debye-Länge so klein ist, dass bei einem Streuwinkel von 90° der Parameter α gross gegenüber 1 wird. Ein solches Plasma muss relativ dicht und kalt sein. Die Plasmadaten sollen sich ausserdem so variieren lassen, dass im einen Grenzfall die Bedingung für die Gültigkeit der Streutheorie $nD^3 \gg 1$ gut, im anderen nur schlecht erfüllt ist. Ein möglicher Bereich, der diese Anforderungen erfüllt, reicht von $n = 2,5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, $T = 5 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$ mit $\alpha \approx 2,5$ und $nD^3 \approx 9$ bis $n = 8 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, $T_e = 2 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$ mit $\alpha \approx 6$ und $nD^3 \approx 2$. Bei derart dichten Plasmen sollte $T_e = T_i$ sein (Äquipartitionszeiten von $\approx 10^{-9} \text{ s}$). Das Ionenspektrum sollte daher vom Typ $\beta \approx 1$ sein (Profil mit schwacher Einsattelung in der Mitte) und eine Halbwertsbreite von 2 - 3 Å haben.

Diese Daten konnten mit einem Theta-Pinch mit einer gespeicherten Energie von 7,5 kJ bei einer Ladespannung von 18 kV erreicht werden. Die Länge der Spule betrug 19 cm, ihr Durchmesser 5,5 cm. Zur Vorionisierung wurde eine Kabelentladung verwendet. Bei einem Fülldruck von 0,3 - 0,5 Torr Wasserstoff wurde das Plasma während der ersten Halbwelle der Entladung beobachtet.

2. Auswahl des Lasers

Um das Ionenspektrum auflösen zu können, musste der Laser eine Linie mit einer Halbwertsbreite von weniger als 0,3 Å emittieren. Ein Rubinlaser im Q-switch-Betrieb mit Pockelszelle als Schaltelement erfüllt diese Bedingung. (Bei Verwendung einer Kerrzelle wird die Laserlinie durch Brillouin-Streuung am Nitrobenzol auf 0,5 - 2 Å verbreitert).

Die Leistung des Lasers konnte bei diesem Experiment nicht beliebig hoch gewählt werden, da die Aufheizung des Plasmas durch absorbiertes Laserlicht klein gegen die an sich schon niedrige Temperatur des Plasmas bleiben musste. Eine Abschätzung anhand der Formel für inverse Bremsstrahlung [20] ergibt für ein Plasma mit einer Dichte $n = 5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, einer Elektronentemperatur $kT_e = 1 \text{ eV}$, einem Durchmesser des Laserfokus von 3 mm, einer Laserleistung von 25 MW bei einer Impulsdauer von 15 ns eine Aufheizung um $\Delta kT_e \approx 0,1 \text{ eV}$.

Es wurde schliesslich ein Laser verwendet, der eine Leistung von $\ll 25 \text{ MW}$ bei einem Fokusbereich von 3 mm ins Plasma strahlte.

Der Fehler durch Laser-Aufheizung war somit immer $< 10\%$. Um trotz der relativ geringen Laserleistung möglichst viel Streulicht beobachten zu können, wurde mittels eines Hohlspiegels auch das Streulicht der Messung zugänglich gemacht, das auf der der Messanordnung gegenüberliegenden Seite aus dem Plasma austrat (Abb. 2).

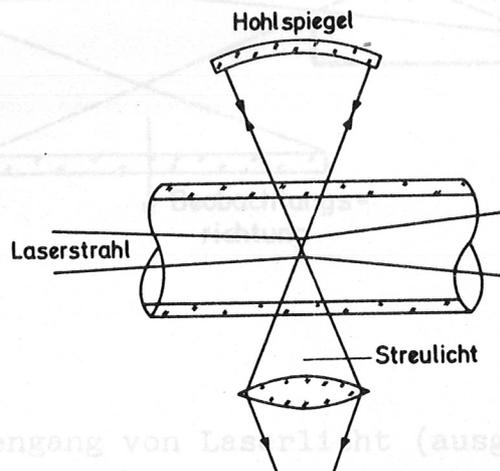


Abb. 2 Anordnung des Hohlspiegels zur Verdoppelung des Streulichts

3. Massnahmen gegen Falschlicht

Um das Falschlicht, das durch Streuung an Fenstern, Linsen, Wänden usw. auftritt, vernachlässigbar klein gegenüber dem zu messenden Streulicht zu machen, wurden folgende Vorkehrungen getroffen:

1. Am Ein- und Austritt des Laserstrahls ins Entladungsgefäß wurden je zwei Blenden angebracht, die der Bedingung genügten, dass das Streulicht der Endfenster nicht auf direktem Weg die Glaswände des Entladungsgefäßes treffen kann (Abb. 3).
2. Das Austrittsende des Entladungsgefäßes wurde mit einem Brewsterfenster versehen, so dass das polarisierte Laserlicht nicht wieder zum Teil in das Entladungsgefäß zurückgespiegelt werden und dort Falschlicht verursachen konnte.

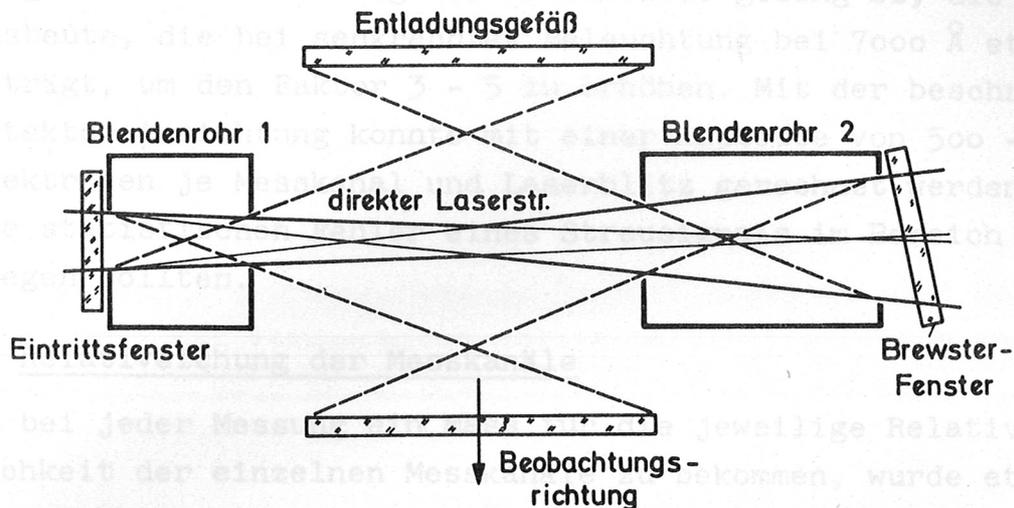


Abb. 3 Strahlengang von Laserlicht (ausgezogen) und Falschlicht (gestrichelt)

3. Der gesamte Laserstrahl ausserhalb des Vakuums wurde in Rohre verlegt, die innen mit schwarzem Papier ausgekleidet waren. Dadurch konnte vagabundierendes Licht verhindert werden, das über Linsen und Zimmerwände hätte in den Messteil gelangen können.

4. Monochromator und Detektoren

Um das gesamte Ionenspektrum bei einer Entladung messen zu können, wurde ein Gittermonochromator in Verbindung mit einem Glasfaser-Spaltpaket benutzt, wie er bereits von Glock [21] beschrieben wurde. Ein Faserspalt des Pakets diente als Eintrittsspalt während 7 weitere Spalte zur Aufnahme des Spektrums benutzt wurden. Das Auflösungsvermögen des Monochromators betrug $0,36 \text{ \AA}$ je Kanal bei einer Lichtstärke von $1/7$. Das Gitter wurde in der 4. Ordnung betrieben und musste gegen die höheren Ordnungen des kurzwelligen Plasmalichts durch ein RG 2-Filter (Schott) abgeblockt werden.

Das Streulicht eines jeden Kanals wurde mit je einem Fotomultiplier RCA 7265 in Verbindung mit Tektronix-Oszillogratiern 551 nachgewiesen.

Durch eine gemeinsam mit B. Kronast entwickelte Vorrichtung für tangentielle Beleuchtung der Fotokathode gelang es, die Quantenausbeute, die bei senkrechter Beleuchtung bei 7000 \AA etwa 2% beträgt, um den Faktor 3 - 5 zu erhöhen. Mit der beschriebenen Detektoreinrichtung konnte mit einer Ausbeute von 500 - 1000 Fotoelektronen je Messkanal und Laserblitz gerechnet werden, so dass die statistischen Fehler eines Streusignals im Bereich von 3 - 5% liegen sollten.

5. Relativeichung der Messkanäle

Um bei jeder Messung ein Mass für die jeweilige Relativempfindlichkeit der einzelnen Messkanäle zu bekommen, wurde etwa $0,5 - 2 \mu\text{s}$ nach dem Laserblitz ein Eichlichtsignal durch die Messapparatur geschickt. Es wurde das Licht eines elektrischen Funkens in Luft benutzt, nachdem sichergestellt worden war, dass er im Wellenlängenbereich des Ionenspektrums ein Kontinuum mit praktisch wellenlängenunabhängiger Intensität emittiert hat. (Nähere Einzelheiten über die Relativeichung werden in Anhang I gebracht.)

6. Bestimmung der Mitte der Laserlinie

Da die Mitte der Laserlinie oder die Justierung des Monochromators von Entladung zu Entladung etwas schwankte, wurde das direkte Laserlicht (nicht dopplerverbreitert), nachdem es mit einem Lichtleiter um etwa 70 ns gegenüber dem Streulicht verzögert worden war, ebenfalls auf einen Eintrittsspalt des Monochromators geleitet. Dieses verzögerte Signal gab die jeweilige Lage der Laserlinie an und war gleichzeitig (nach Summation über alle getroffenen Kanäle) ein Mass für die Laserleistung.

7. Absoluteichung

Um die Totalintensität $S_1(\alpha)$ der Ionenlinie zu ermitteln, ist entweder eine Absoluteichung der Streuapparatur sowie eine Bestimmung des Streuvolumens und der Laserleistung erforderlich, oder man misst die Rayleighstreuung eines Gases mit bekanntem Streuquerschnitt, das man ins Entladungsgefäß einfüllt.

Letzteres Verfahren hat den Vorteil, dass keinerlei absolute Leistungsmessung und auch keine Bestimmung des Streuvolumens erforderlich sind, da es bei der Rayleighstreuung genau so gross ist, wie bei der Streuung am Plasma. Es hebt sich daher beim Vergleich beider Streuintensitäten heraus.

In der vorliegenden Arbeit wurde Propan als Testgas benutzt. Propan hat einen relativ hohen Streuquerschnitt, so dass man bei der Eichung mit Drücken bis zu 50 Torr auskommt. Das hat den Vorteil, dass das Vakuum nicht völlig belüftet werden muss. Es treten daher auch keine Bewegungen an den Dichtungen auf, was wiederum Dejustierungen zur Folge hätte.

Der Rayleigh-Streuquerschnitt wurde aus dem Brechungsindex berechnet, der aus der Literatur entnommen werden kann. (Der durch optische Anisotropie der Propanmoleküle herrührende Anteil kann vernachlässigt werden [22]) Da jedoch nicht sicher war, ob völlig reines Propan vorlag, wurde der Brechungsindex des benutzten Gases interferometrisch kontrolliert.

Beim Einfüllen des Testgases ins Entladungsgefäss besteht die Gefahr, dass Staub aufgewirbelt wird, der dann die Eichung verfälscht. Um diesen Fehler auszuschliessen, wurde bei jeder Eichung der lineare Zusammenhang von Streuintensität und Propandruck kontrolliert. Bei zu hohen Einströmgeschwindigkeiten des Testgases wurden tatsächlich grobe Abweichungen von der Linearität beobachtet.

8. Auswertung der Oszillogramme

Das Oszillogramm eines Messkanals i enthält nach dem bisher Gesagten im allgemeinen 3 Signale (Abb. 4).

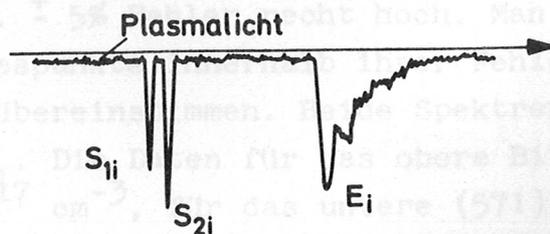


Abb. 4 Typisches Oszillogramm (schematisch)

S_{1i} ist das eigentliche Streusignal. S_{2i} ist das Signal der unverbreiterten Laserlinie (das praktisch immer nur auf 2 oder 3 Kanälen zu sehen ist). E_i ist das Signal des Eichfunkens.

Um aus den Streusignalen der 7 Kanäle das Spektrum zusammenzusetzen, sind jeweils die Werte S_{1i}/E_i zu bilden. Damit man ausserdem die Spektren verschiedener Entladungen miteinander vergleichen kann, muss noch mit einer Grösse, die proportional der Laserleistung bei der betreffenden Entladung ist, dividiert werden. Diese Grösse ist (wie bereits oben erwähnt)

$$(9) \quad \sum_{j=1}^7 S_{2j} / E_j$$

Bezüglich der Relativempfindlichkeiten der einzelnen Kanäle stellte sich heraus, dass sie im Verlauf der gesamten Messzeit (mehrere Tage) um weniger als 3% geschwankt hat (s. auch Anhang I). Es war daher sinnvoll, anstatt mit E_i , das ja statistische Fehler der Grössenordnung 5% aufweist (das Signal ist etwa von derselben Grösse wie S_{1i} , das, wie bereits erwähnt, 3-5% Fehler aufweist), mit einem Mittelwert \bar{E}_i über etliche Entladungen zu dividieren. Die endgültige Streuintensität des Kanals i , $J(\lambda_i)$ wurde schliesslich berechnet zu

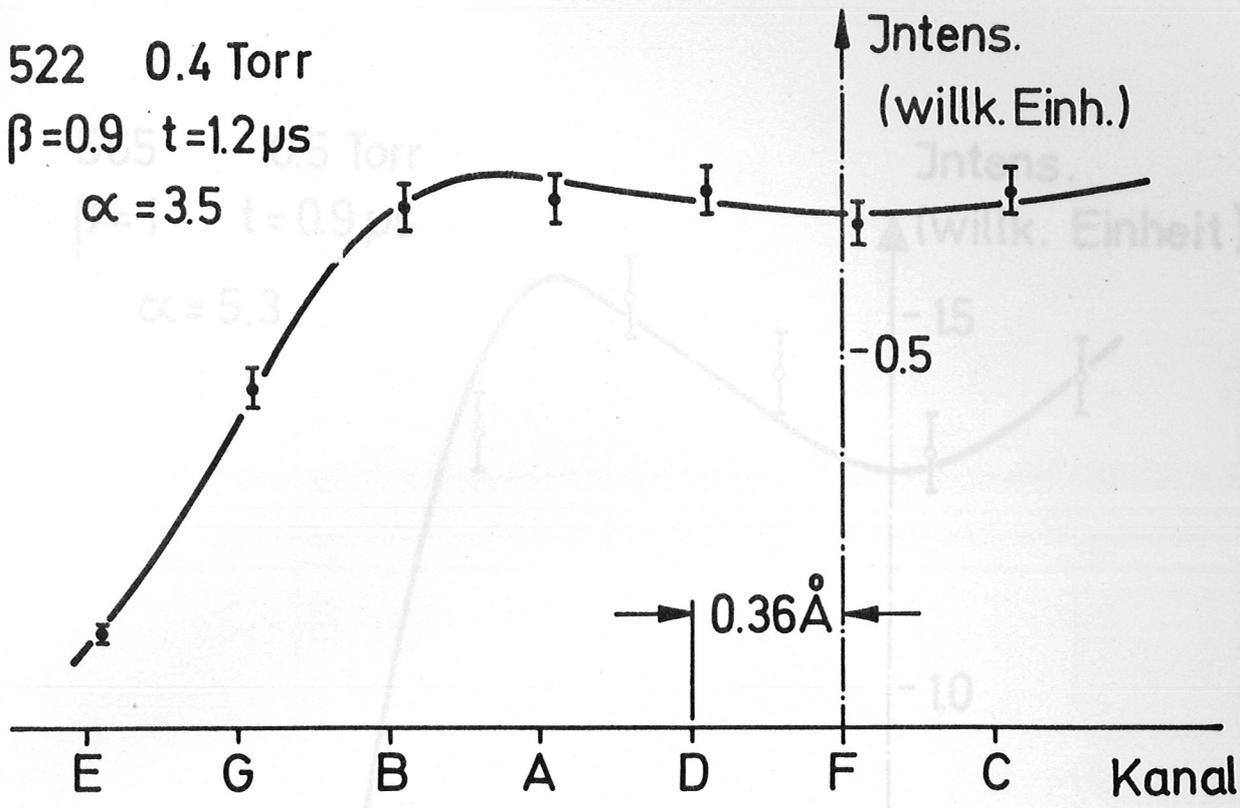
$$(10) \quad J(\lambda_i) = \frac{S_{1i}}{\bar{E}_i \cdot \sum_{j=1}^7 S_{2j} / \bar{E}_j}$$

9. Ergebnisse

Nachdem festgestellt worden war, dass die Ionenspektren im Rahmen der Messgenauigkeit symmetrisch zur unverschobenen Laserlinie waren, wurde nur noch die eine Hälfte und ein Punkt der anderen Hälfte des Spektrums gemessen.

Abb. 5 zeigt als Beispiel zwei Ionenspektren mit verschiedenen Plasmaparametern. Die ausgezogene Kurve ist in beiden Fällen das am besten passende berechnete Spektrum. Die Messgenauigkeit ist für ein Streuexperiment mit ca. $\pm 5\%$ Fehler recht hoch. Man entnimmt der Abbildung, dass fast alle Messpunkte innerhalb ihrer Fehlergrenzen mit den theoretischen Kurven übereinstimmen. Beide Spektren entsprechen einem Plasma mit $T_e = T_i$. Die Daten für das obere Bild (522) sind $T_e = T_i = 4,5$ eV, $n_e = 5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, für das untere (571) $T_e = T_i = 3,2$ eV, $n_e = 5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$. Bei Spektrum 522 ist die Zahl der Elektronen im Debye-Volumen $nD^3 \approx 5$, bei Spektrum 571 ca. 3.

522 0.4 Torr
 $\beta=0.9$ $t=1.2\mu s$
 $\alpha=3.5$



571 0.5 Torr
 $\beta=1.0$ $t=1.6\mu s$
 $\alpha=4.2$

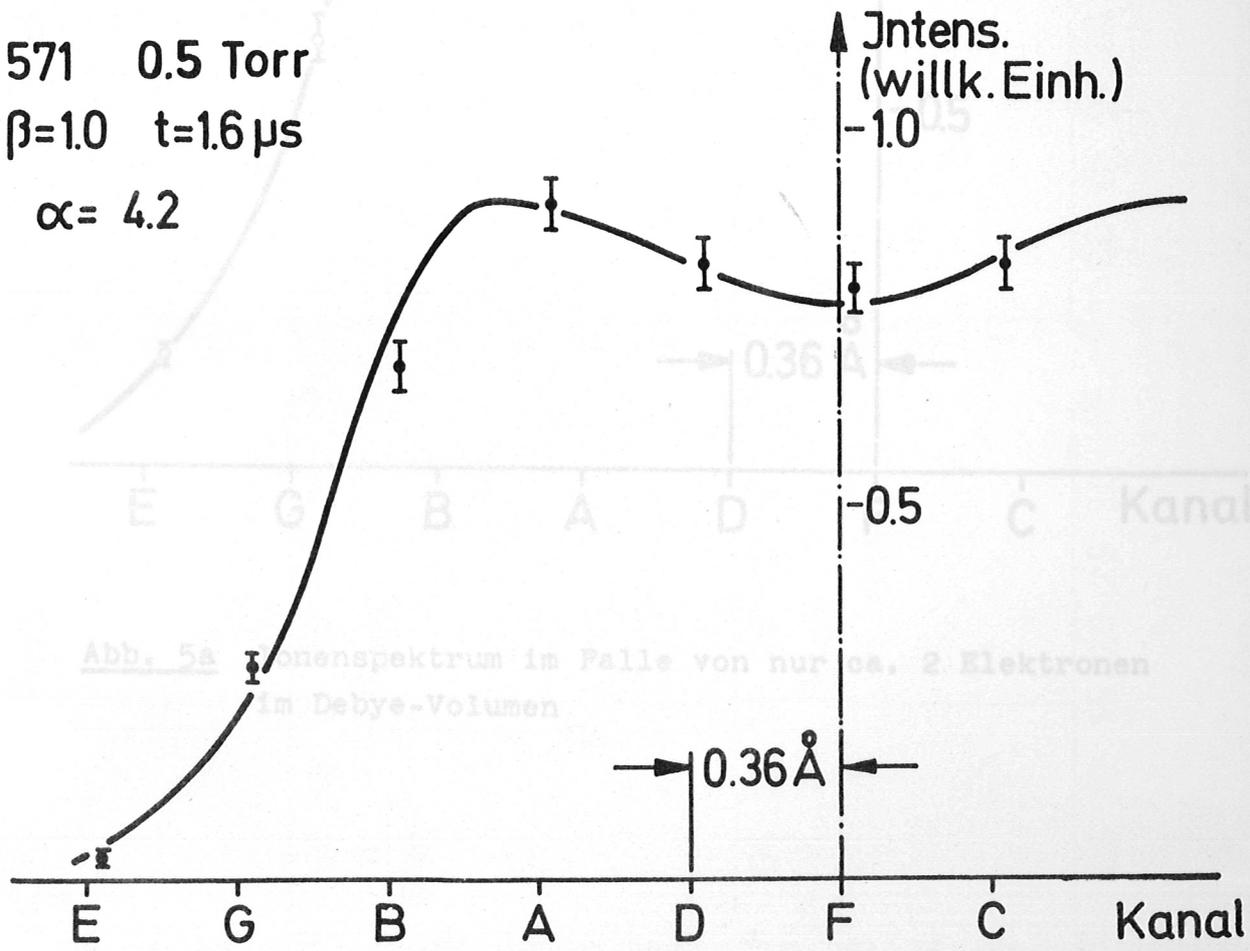


Abb. 5a Ionenspektrum im Falle von nur ca. 2 Elektronen im Debye-Volumen

Abb. 5 Zwei Ionenspektren bei verschiedenen Plasmaparametern

565 0.5 Torr
 $\beta = 1$ $t = 0.9 \mu\text{s}$
 $\alpha = 5.3$

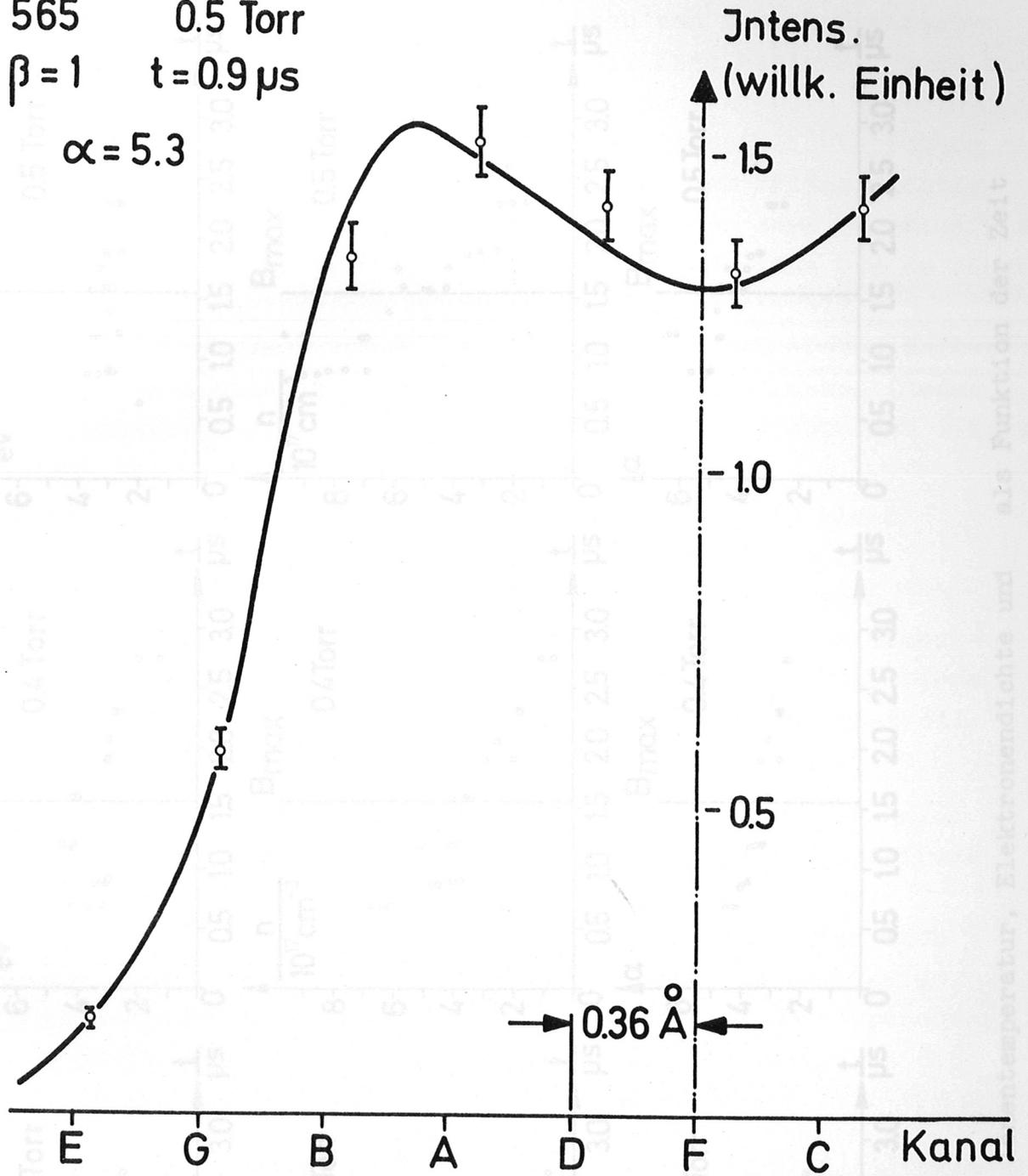


Abb. 5a Ionenspektrum im Falle von nur ca. 2 Elektronen im Debye-Volumen

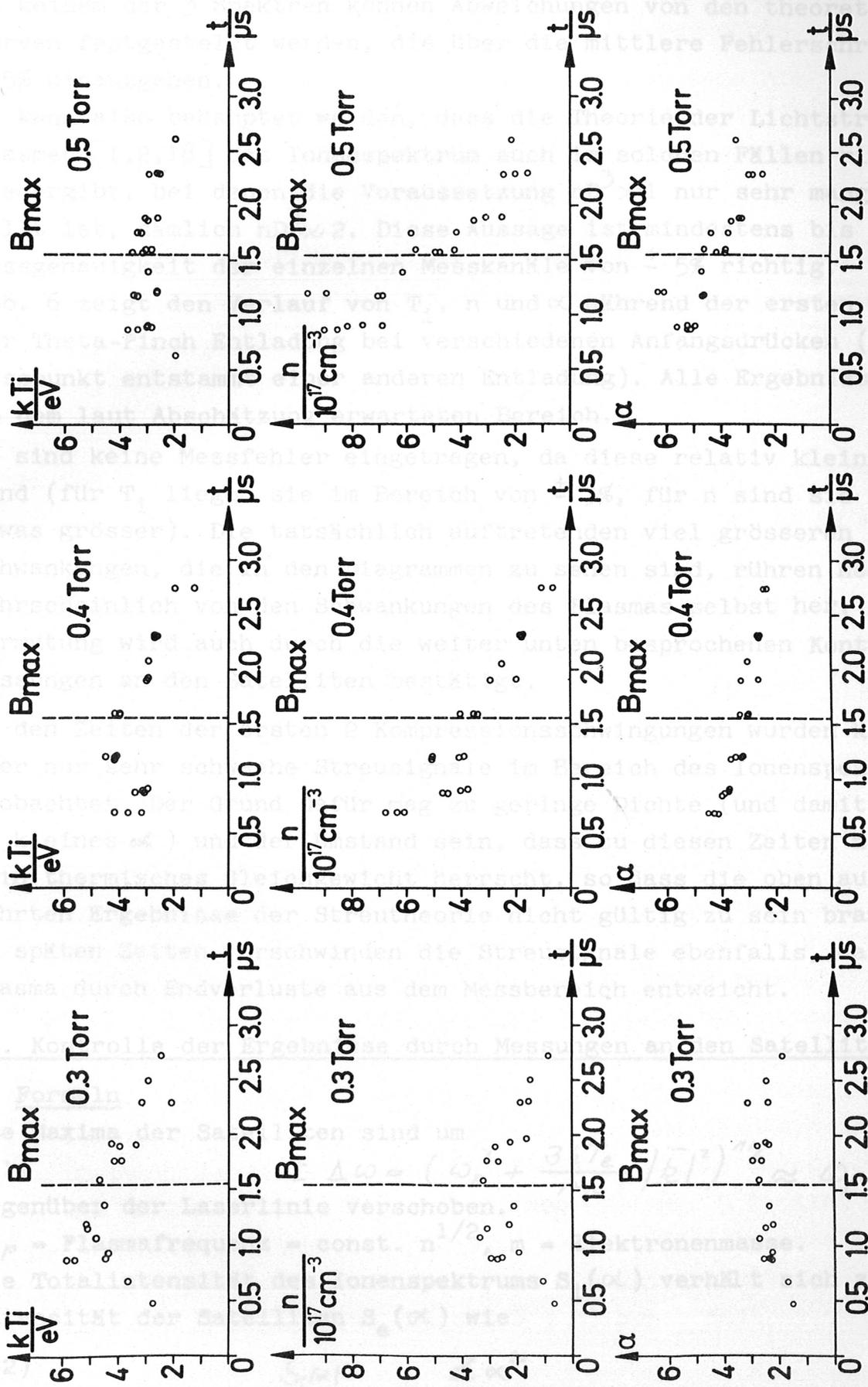


Abb. 6 Ionentemperatur, Elektronendichte und α als Funktion der Zeit

Ein Spektrum eines Plasmas mit nur ca. 2 Elektronen pro Debye-Volumen zeigt Abb. 5a ($T_e = T_i = 3,3$ eV, $n_e = 8,6 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$).

In keinem der 3 Spektren können Abweichungen von den theoretischen Kurven festgestellt werden, die über die mittlere Fehlerschranke von $\pm 5\%$ hinausgehen.

Es kann also behauptet werden, dass die Theorie der Lichtstreuung an Plasmen [1,2,18] das Ionenspektrum auch in solchen Fällen richtig wiedergibt, bei denen die Voraussetzung $nD^3 \gg 1$ nur sehr mangelhaft erfüllt ist, nämlich $nD^3 \approx 2$. Diese Aussage ist mindestens bis zu einer Messgenauigkeit der einzelnen Messkanäle von $\pm 5\%$ richtig.

Abb. 6 zeigt den Verlauf von T_i , n und α während der ersten Halbwelle der Theta-Pinch Entladung bei verschiedenen Anfangsdrücken (jeder Messpunkt entstammt einer anderen Entladung). Alle Ergebnisse liegen in dem laut Abschätzung erwarteten Bereich.

Es sind keine Messfehler eingetragen, da diese relativ klein sind (für T_i liegen sie im Bereich von $\pm 3\%$, für n sind sie etwas grösser). Die tatsächlich auftretenden viel grösseren Schwankungen, die in den Diagrammen zu sehen sind, rühren höchstwahrscheinlich von den Schwankungen des Plasmas selbst her. Diese Vermutung wird auch durch die weiter unten besprochenen Kontrollmessungen an den Satelliten bestätigt.

Zu den Zeiten der ersten 2 Kompressionsschwingungen wurden keine oder nur sehr schwache Streusignale im Bereich des Ionenspektrums beobachtet. Der Grund dafür mag zu geringe Dichte (und damit zu kleines α) und der Umstand sein, dass zu diesen Zeiten noch kein thermisches Gleichgewicht herrscht, so dass die oben aufgeführten Ergebnisse der Streutheorie nicht gültig zu sein brauchen. Zu späten Zeiten verschwinden die Streusignale ebenfalls, da das Plasma durch Endverluste aus dem Messbereich entweicht.

IV. Kontrolle der Ergebnisse durch Messungen an den Satellitenlinien

1. Formeln

Die Maxima der Satelliten sind um

$$(11) \quad \pm \Delta \omega = \left(\omega_p^2 + \frac{3kT_e}{m} |k|^2 \right)^{1/2} \approx \omega_p$$

gegenüber der Laserlinie verschoben.

ω_p = Plasmafrequenz = const. $n^{1/2}$, m = Elektronenmasse.

Die Totalintensität des Ionenspektrums $S_i(\alpha)$ verhält sich zur Totalintensität der Satelliten $S_e(\alpha)$ wie

$$(12) \quad \frac{S_i(\alpha)}{S_e(\alpha)} = \frac{Z \alpha^4}{1 + \alpha^2 \left(1 + \frac{T_e}{T_i} Z \right)}$$

Aus der Lage des Maximums eines Satelliten lässt sich bei ungefährem Kenntnis von T_e die Plasmafrequenz ω_p und damit ein zusätzlicher, unabhängiger Wert für die Elektronendichte n berechnen.

Das Verhältnis $S_i(\alpha)/S_e(\alpha)$ erfordert nur die Kenntnis von T_e/T_i für eine Bestimmung von α . Kennt man ausserdem die Elektronentemperatur allein, so liefert auch diese Messung einen weiteren, unabhängigen Wert für die Elektronendichte.

2. Monochromator zur Messung der Satelliten

Abschätzungen mit Hilfe der aus dem Ionenspektrum gefundenen Plasmaparameter ergeben:

für den Abstand der Satelliten von der Laser-Wellenlänge:

$$\Delta\lambda \approx \pm 90 \text{ \AA}$$

für die Halbwertsbreite eines Satelliten bei $\alpha = 3$: $\delta\lambda \approx 4 \text{ \AA}$

für das Verhältnis $S_i(\alpha)/S_e(\alpha)$ bei $\alpha = 3$: $S_i(\alpha)/S_e(\alpha) \approx 5$

Wird das Spaltpaket des Monochromators so dimensioniert, dass die Satellitenlinie auf einen einzigen Messkanal von 4 \AA Breite fällt, so sollte sie etwa gleich grosse Signale liefern wie bisher im Mittel ein Kanal des Ionenspektrums. Natürlich wird der Untergrund, die Bremsstrahlung des Plasmas, entsprechend höher sein. Es erscheint aber nach den Abschätzungen noch möglich, die Lage des Maximums eines Satelliten zu ermitteln. Damit die Lage des Satelliten und die Totalintensität des Ionenspektrums gleichzeitig bei einer Entladung gemessen werden konnten, wurde der in Zusammenhang mit dem Ionenspektrum erwähnte Monochromator mit einem anderen Spaltpaket versehen. Da bei dieser Messung keine spektrale Auflösung des Ionenspektrums gefordert wurde, konnte der Eintrittsspalt auf $0,5 \text{ mm}$ (gegenüber $0,05 \text{ mm}$ beim Ionenspektrum) verbreitert werden. Damit war die Auflösung des Satelliten mit 3 \AA je Kanal festgelegt. Um für die Suche des Satellitenmaximums nicht dauernd den Monochromator verstellen zu müssen, wurde ein Spaltpaket mit einigen $0,5 \text{ mm}$ Spalten zur Beobachtung des Elektronenspektrums $s_e(\alpha, \omega)$ beweglich in Bezug auf den Eintrittsspalt angebracht (Abb. 7). Mit 5 Kanälen dieses Pakets konnte gleichzeitig gemessen werden. Für die Totalintensität $S_i(\alpha)$ des Ionenspektrums wurde fest mit dem Eintrittsspalt verbunden ein $1,5 \text{ mm}$ breiter Spalt ($\approx 9 \text{ \AA}$) angebracht.



Abb. 7 Anordnung der Glasfaserpalte zur Beobachtung der Satellitenlinie

3. Ergebnisse

Mit dem so umgebauten Monochromator konnten die Satelliten bei den Fülldrücken 0,3 und 0,4 Torr gut, bei 0,5 Torr wegen des hohen α nur mässig gut beobachtet werden (Abb. 8). Die Lage der Maxima der Satelliten ergab Dichten, die mit den aus $S_1(\alpha)$ gleichzeitig bestimmten in allen Fällen besser als auf 18% übereinstimmen. Das verleiht den aus dem Ionenspektrum gewonnenen Ergebnissen erhebliche Zuverlässigkeit. Bei gleichen Ausgangsdaten schwankten jedoch die Dichten (sowohl die aus dem Ionenspektrum als auch die aus der Satellitenlage bestimmten) von Entladung zu Entladung um zum Teil weit grössere Beträge als 18%. Dies ist eine Bestätigung dafür, dass die Schwankungen der Ergebnisse, die aus dem Ionenspektrum allein gewonnen worden sind (Abb. 6) auch auf tatsächliche Schwankungen des Plasmas und nicht nur auf Messfehler zurückzuführen sind.

Die Halbwertsbreite der Satellitenlinie war in allen Fällen wesentlich grösser als erwartet. Es erhob sich natürlich sofort die Frage, inwieweit Stösse für die Verbreiterung verantwortlich sind. Bei dem untersuchten Plasma war die Bedingung für die Zulässigkeit der stossfreien Streutheorie [1, 2, 18] ($nD^3 \gg 1$) nur näherungsweise erfüllt ($2 < nD^3 < 10$). Abschätzungen ergaben jedoch, dass Stossverbreiterung im vorliegenden Fall noch zu vernachlässigen ist [23, 24]. Dafür spricht auch, dass die Ionenspektren in allen Fällen gut mit den nach der stossfreien Theorie berechneten übereinstimmen. Eine viel einfachere Erklärung für die Breite der Satelliten ist die

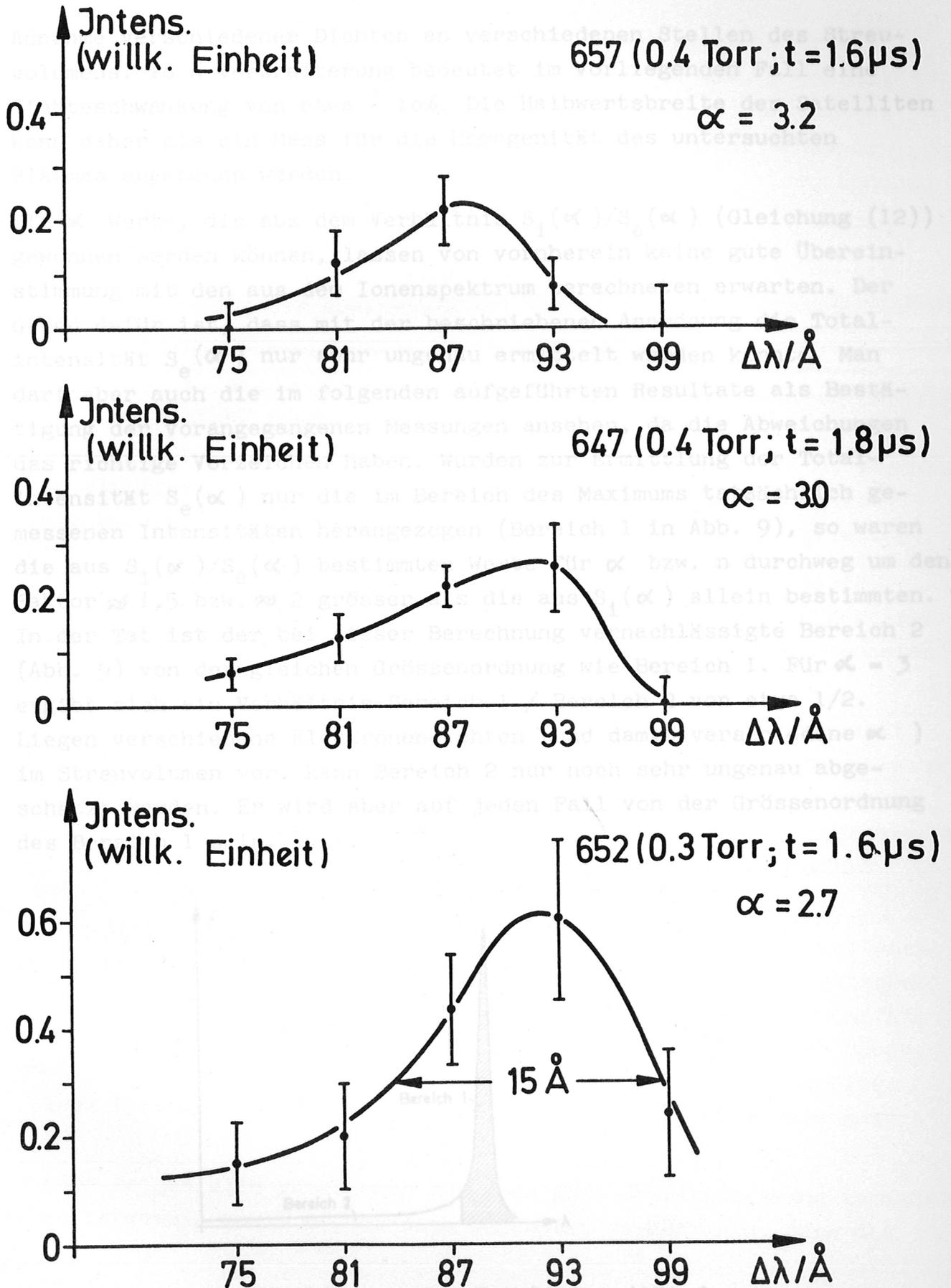


Abb. 8 3 Beispiele für Satellitenlinien bei verschiedenen Plasma-
parametern.

Annahme verschiedener Dichten an verschiedenen Stellen des Streuvolumens. 10 \AA Verbreiterung bedeutet im vorliegenden Fall eine Dichteschwankung von etwa $\pm 10\%$. Die Halbwertsbreite der Satelliten kann daher als ein Mass für die Homogenität des untersuchten Plasmas angesehen werden.

Die α Werte, die aus dem Verhältnis $S_1(\alpha)/S_e(\alpha)$ (Gleichung (12)) gewonnen werden können, lassen von vornherein keine gute Übereinstimmung mit den aus dem Ionenspektrum berechneten erwarten. Der Grund dafür ist, dass mit der beschriebenen Anordnung die Totalintensität $S_e(\alpha)$ nur sehr ungenau ermittelt werden konnte. Man darf aber auch die im folgenden aufgeführten Resultate als Bestätigung der vorangegangenen Messungen ansehen, da die Abweichungen das richtige Vorzeichen haben. Wurden zur Ermittlung der Totalintensität $S_e(\alpha)$ nur die im Bereich des Maximums tatsächlich gemessenen Intensitäten herangezogen (Bereich 1 in Abb. 9), so waren die aus $S_1(\alpha)/S_e(\alpha)$ bestimmten Werte für α bzw. n durchweg um den Faktor $\approx 1,5$ bzw. ≈ 2 grösser als die aus $S_1(\alpha)$ allein bestimmten. In der Tat ist der bei dieser Berechnung vernachlässigte Bereich 2 (Abb. 9) von der gleichen Grössenordnung wie Bereich 1. Für $\alpha = 3$ ergibt sich ein Verhältnis Bereich 1 / Bereich 2 von etwa $1/2$. Liegen verschiedene Elektronendichten (und damit verschiedene α) im Streuvolumen vor, kann Bereich 2 nur noch sehr ungenau abgeschätzt werden. Er wird aber auf jeden Fall von der Grössenordnung des Bereich 1 sein.

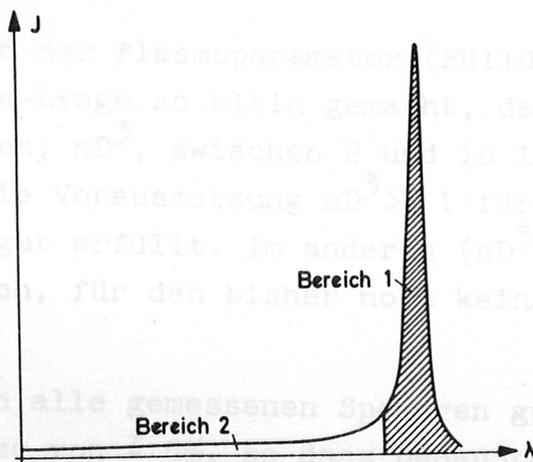


Abb. 9 Zur Abschätzung der Totalintensität der Satellitenlinie (J = Streuintensität)

Berücksichtigt man, dass $S_e(\alpha)$ in Wirklichkeit grösser ist als der gemessene Wert, der oben zu Berechnung von α bzw. n benutzt wurde, so wird die Übereinstimmung mit den aus $S_i(\alpha)$ bestimmten Werten besser. Es ist wahrscheinlich, dass bei genauer Kenntnis von Bereich 2 auch diese Messung in Einklang mit den beiden anderen ist.

V. Zusammenfassung der Ergebnisse

Es wurde ein Laser-Streuexperiment durchgeführt, bei dem die Bedingung $\alpha \gg 1$, die erfüllt sein muss, wenn das Ionenspektrum beobachtet werden soll, nicht durch die Wahl eines kleinen Streuwinkels (wie bei allen bisher veröffentlichten Arbeiten bei grossem α), sondern durch ein Plasma mit entsprechend kleiner Debye-Länge realisiert wurde. Das Streulicht wurde bei einem Streuwinkel von 90° gemessen.

Die erstmals mit einer Genauigkeit von ca. $\pm 5\%$ pro Messkanal ermittelten Ionenspektren wurden bei je einer Pinch-Entladung gemessen und zeigen sehr gute Übereinstimmung mit den theoretisch berechneten Profilen.

Aus der Gestalt, der Halbwertsbreite und der integralen Intensität des Ionenspektrums wurden die Grössen Elektronen- und Iontemperatur, sowie Elektronendichte und α bestimmt. Die Messgenauigkeit war so gross, dass Schwankungen der Messergebnisse eindeutig auf Schwankungen des Plasmas selbst und nicht auf Messfehler allein zurückgeführt werden konnten.

Durch Variation der Plasmamparameter (Fülldruck, Beobachtungszeitpunkt) wurde die Debye-Länge so klein gemacht, dass die Zahl der Elektronen im Debye-Volumen, nD^3 , zwischen 2 und 10 lag. In dem einen Grenzfall $nD^3 = 10$ ist die Voraussetzung $nD^3 \gg 1$ für die Gültigkeit der Streutheorie noch gut erfüllt. Im anderen ($nD^3 = 2$) liegt man bereits in einem Bereich, für den bisher noch kein Streuspektrum berechnet wurde.

Trotzdem zeigen alle gemessenen Spektren gute Übereinstimmung innerhalb der Fehlergrenze von $\pm 5\%$, so dass behauptet werden kann, dass die

Streutheorie auch bei nur zwei Elektronen im Debye-Volumen das Ionenspektrum noch richtig wiedergibt.

Im zweiten Teil des Experiments wurde gleichzeitig die Totalintensität des Ionenspektrums und spektral aufgelöst eine Satellitenlinie des Elektronenspektrums gemessen.

Die aus der Totalintensität des Ionenspektrums und die aus dem Frequenzabstand des Satelliten von der Laserfrequenz ermittelten Dichtewerte stimmten in allen Fällen gut überein. Die Abweichungen waren nie grösser als 18%.

Der dritte, unabhängige Dichtewert, der aus dem Verhältnis von Totalintensität des Ionenspektrums zur Totalintensität des Elektronenspektrums berechnet werden kann, wies systematische Fehler auf, da die Totalintensität des Elektronenspektrums nicht vollständig gemessen werden konnte. Eine Abschätzung derselben lässt auch in diesem Fall gute Übereinstimmung mit den anderen Werten erkennen.

Die allein aus dem Ionenspektrum gewonnenen Ergebnisse sind daher gestützt durch zwei zusätzliche unabhängige Methoden als recht zuverlässig zu betrachten.

Die spektrale Auflösung der Satellitenlinie, die erstmals an einem Theta-Pinch Plasma vorgenommen wurde, ergab eine Halbwertsbreite, die weit über der lag, die nach der stossfreien Streutheorie berechnet werden kann. Selbst der Einfluss von Stößen kann die grosse Halbwertsbreite nicht erklären. Die Annahme, dass die Elektronendichte im Streuvolumen örtlich um ca. $\pm 10\%$ schwankt, lässt jedoch die gemessenen Halbwertsbreiten erwarten.

Benutzte man jedoch die so gewonnenen Eichsignale zur Bestimmung des Spektrums, so stellten man auf einigen Kanälen systematische Abweichungen von den berechneten Spektren fest, die grösser waren, als die statistischen Fehler und die eindeutig einem bestimmten Messkanal, nicht einer bestimmten Stelle des Spektrums zugeordnet werden konnten (Prüfung durch Verdrehen des Gitters).

Eine Erklärung dafür schien die von der Richtung des Messlichts abweichende Richtung des Eichlichts zu sein (σ in Abb. I.1), zumal

Anhang I

Erläuterungen zur Relativeichung der Messkanäle

Die bei der Messung des Ionenspektrums bereits auf Seite 9 erwähnte Relativeichung der 7 Messkanäle warf insbesondere wegen der Benutzung von Glasfaserspalt und der auf erhöhte Quantenausbeute umgebauten Fotomultiplier einige Probleme auf, über die hier berichtet werden soll.

Um bei jeder Entladung ein Mass für die Relativempfindlichkeit der einzelnen Messkanäle zu erhalten, wurden zunächst alle Austrittspalte des Monochromators durch das Licht eines elektrischen Funken, der in einem Abstand von ca. 30 cm vom Spaltpaket angebracht war, gleichmässig beleuchtet (Abb. I.1).

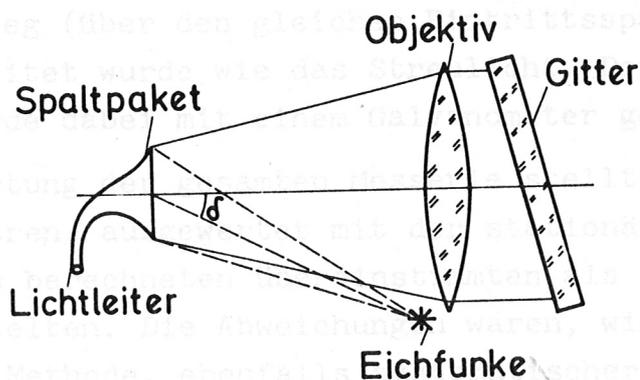


Abb. I.1 Monochromator und Eichfunke (schematisch)

Benutzte man jedoch die so gewonnenen Eichsignale zur Bestimmung des Spektrums, so stellte man auf einigen Kanälen systematische Abweichungen von den berechneten Spektren fest, die grösser waren, als die statistischen Fehler und die eindeutig einem bestimmten Messkanal, nicht einer bestimmten Stelle des Spektrums zugeordnet werden konnten (Prüfung durch Verdrehen des Gitters).

Eine Erklärung dafür schien die von der Richtung des Messlichts abweichende Richtung des Eichlichts zu sein (δ in Abb. I.1), zumal

die durch den Umbau der Multiplier erreichte höhere Quantenausbeute stark von der Richtung des einfallenden Lichts abhängt.

Als Gegenmassnahme wurde künftig das Eichlicht über einen zweiten Eintrittsspalt in den Monochromator geleitet. Es wurde sichergestellt, dass der Funke in dem interessierenden Wellenlängenbereich (etwa 3 \AA breit) ein Kontinuum von praktisch konstanter Intensität emittiert. Mit diesem Kontinuum wurden alle Messkanäle gleichmässig beleuchtet.

Die mit dieser Eichung gewonnenen Spektren wiesen geringere Abweichungen auf als die nach der ersten Methode bestimmten. Diese Art der Relativeichung wurde daher auch während der gesamten Messerie benutzt.

Um zusätzliche Sicherheit zu bekommen, wurde vor der Messerie eine stationäre Eichung mit Licht einer Glühlampe vorgenommen, das auf dem gleichen Weg (über den gleichen Eintrittsspalt) in den Monochromator geleitet wurde wie das Streulicht. Der Fotostrom der Multiplier wurde dabei mit einem Galvanometer gemessen.

Bei der Auswertung der gesamten Messerie stellte sich dann heraus, dass die Spektren, ausgewertet mit der stationären Eichung, durchweg besser mit den berechneten übereinstimmten als die mit der dynamischen Eichung ermittelten. Die Abweichungen waren, wie bei der zuerst beschriebenen Methode, ebenfalls systematischer Natur.

Die Suche nach einer Erklärung führte zu folgendem Ergebnis:

In dem Monochromator wurden Glasfaserspalte verwendet, die aus je einer einzigen Lage von $50 \mu\text{m}$ -Fasern bestanden. Der Monochromator bildet nun den Eintrittsspalt in der einen Dimension sehr scharf auf die Austrittsspalte ab (in der anderen Dimension ist das Spaltbild je nach Spektrum mehr oder weniger verschmiert). Er entwirft, genauer gesagt, von jeder Glasfaser des Eintrittsspalts ein eigenes Spektrum. Nun kann man bei derartigen Faserspaltpaketen nicht erwarten, dass ein Spalt völlig dem anderen gleicht. Man muss im Gegenteil mit Versetzungen der Fasern der verschiedenen Spalte gegeneinander rechnen (Abb. I.2). Die Folge davon ist, dass z.B. das Spektrum der Faser x bei Spalt 1 genau in eine Lücke zwischen zwei

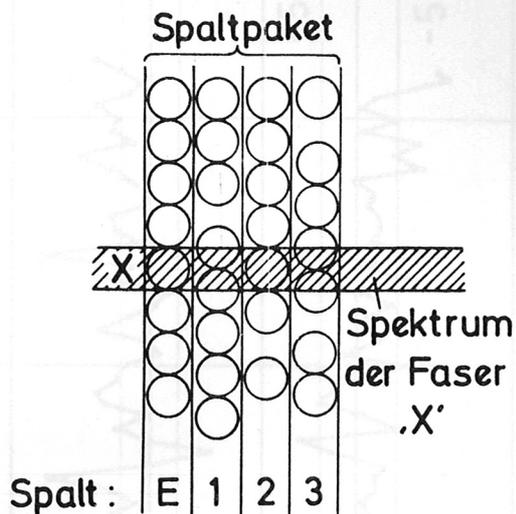


Abb. I.2 Lage des Spektrums einer Faser des Eintrittsspalts bezüglich der Fasern des Austrittsspalts

Fasern fällt, während es bei Spalt 2 die Faser voll trifft. Benutzt man als Eintrittsspalt nicht E sondern einen anderen, so wird die Verteilung des Lichts auf die übrigen Spalte anders sein. Damit ist bewiesen, dass im allgemeinen nur die Eichung richtig sein kann, bei der das Eichlicht über den gleichen Eintrittsspalt in den Monochromator gelangt wie das Messlicht.

Um nun die gesamte Messerie nicht wiederholen zu müssen, was aus verschiedenen für diese Arbeit uninteressanten Gründen nicht sinnvoll gewesen wäre, wurde überprüft, ob die stationäre Eichung vor der Messerie zur Auswertung für die ganze Serie herangezogen werden darf, oder ob langzeitige Schwankungen der Multiplier Korrekturen, insbesondere der späteren Messungen, erforderlich machen. Aus diesem Grunde wurden die aus den dynamischen Eichsignalen berechneten, fehlerhaften Relativempfindlichkeiten über die gesamte Messzeit aufgetragen (Abb. I.3). Grössere Empfindlichkeitsschwankungen hätte man einem solchen Diagramm entnehmen und zur Korrektur der stationären Eichwerte benutzen können. Es stellte sich jedoch heraus, dass 70% aller dynamischen Empfindlichkeitswerte innerhalb der $\pm 5\%$ Fehlergrenze um den Mittelwert lagen. Das war

Relativempfindlichkeit der Multiplier

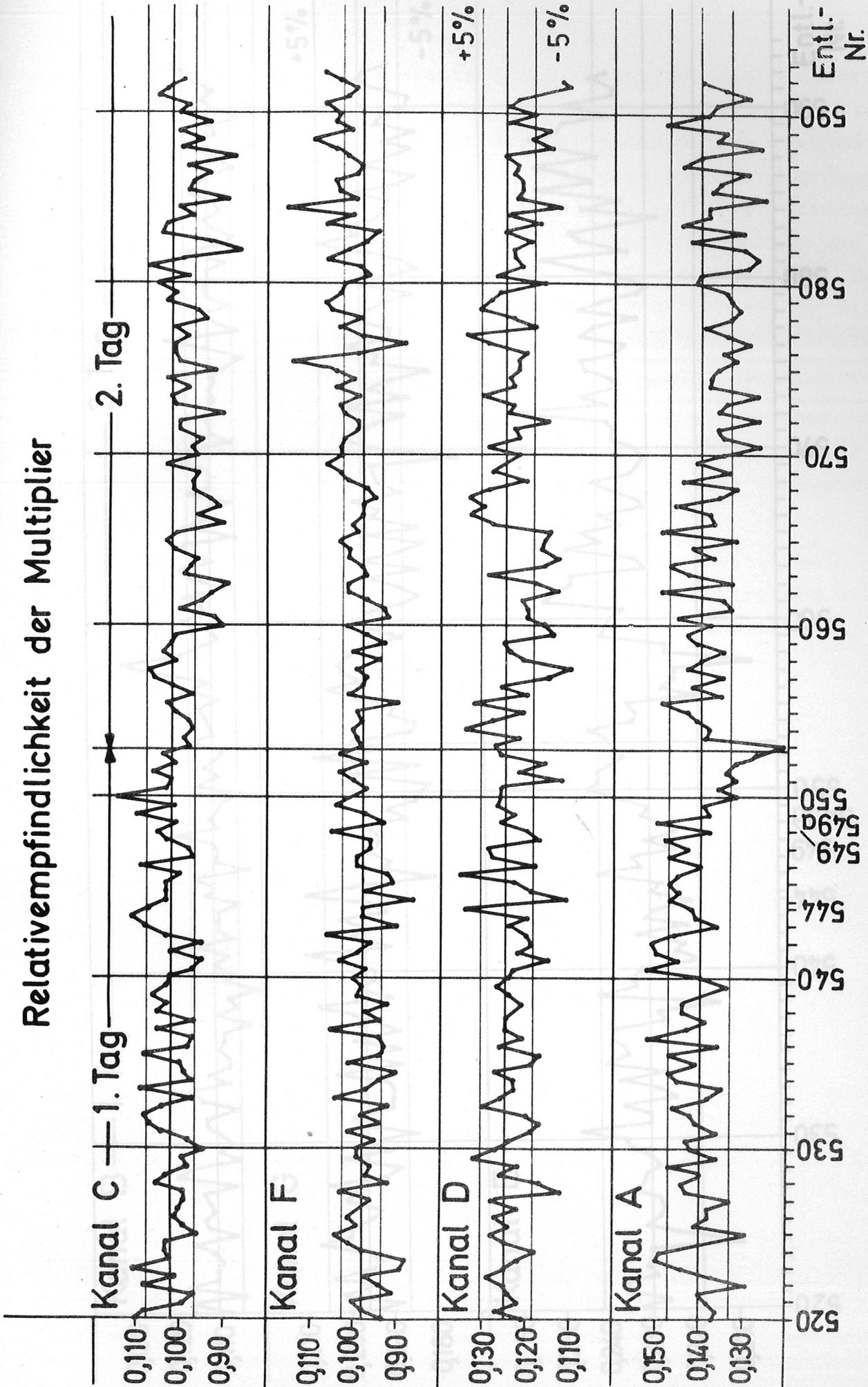
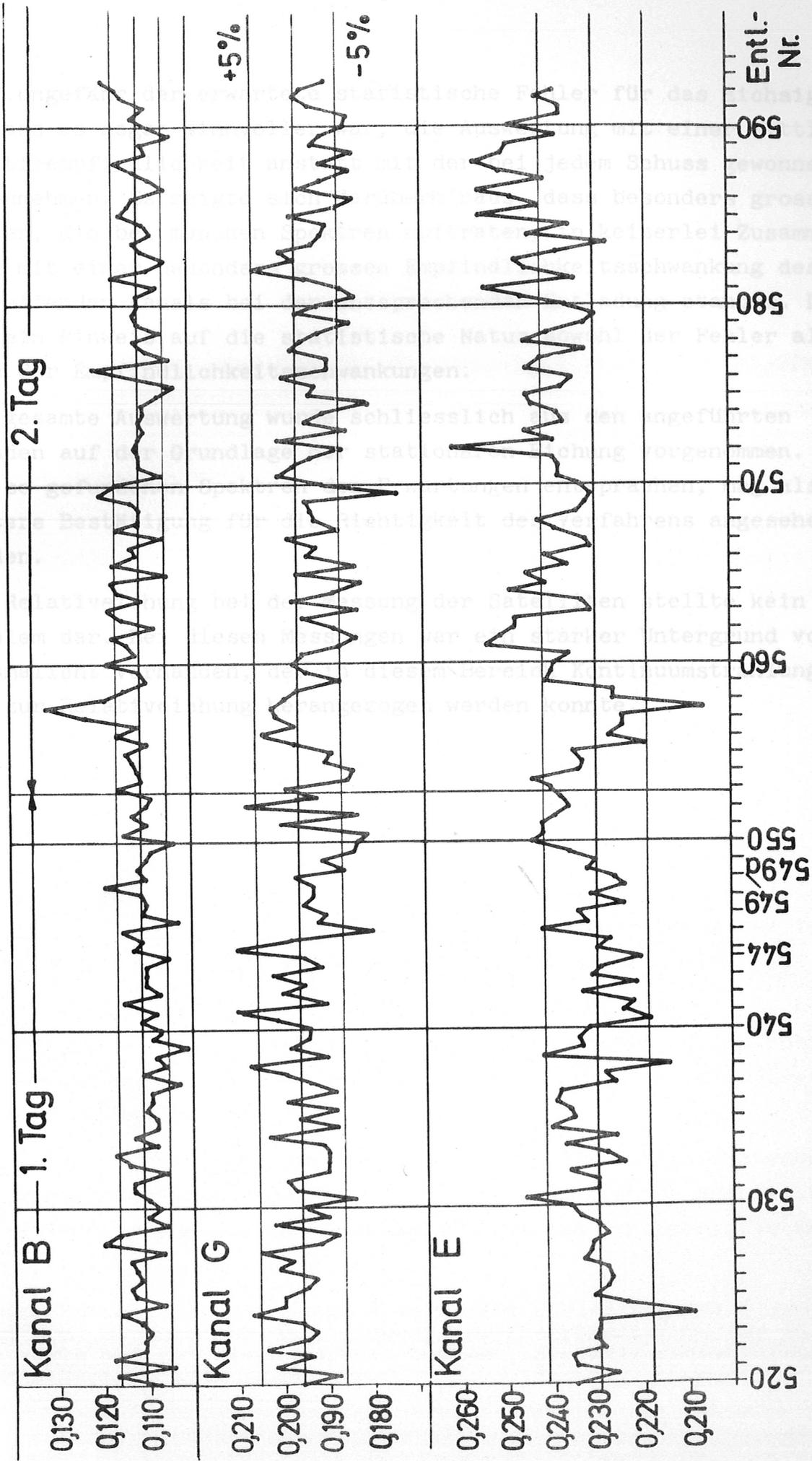


Abb. I.3 Relativempfindlichkeit der 7 Multiplier über der Entladungnummer aufgetragen



Entl.-
Nr.

590
580
570
560
550
549
549
549
544
540
530
520

2. Tag

1. Tag

Kanal B

Kanal G

Kanal E

0,130

0,120

0,110

0,210

0,200

0,190

0,180

0,260

0,250

0,240

0,230

0,220

0,210

+5%

-5%

aber ungefähr der erwartete statistische Fehler für das Eichsignal, so dass es sogar sinnvoller war, die Auswertung mit einer mittleren Relativempfindlichkeit anstatt mit der bei jedem Schuss gewonnenen vorzunehmen. Es zeigte sich darüberhinaus, dass besonders grosse Fehler, die bei manchen Spektren auftraten, in keinerlei Zusammenhang mit einer besonders grossen Empfindlichkeitsschwankung des betreffenden Kanals bei der entsprechenden Entladung standen. Das ist ein Hinweis auf die statistische Natur sowohl der Fehler als auch der Empfindlichkeitsschwankungen.

Die gesamte Auswertung wurde schliesslich aus den angeführten Gründen auf der Grundlage der stationären Eichung vorgenommen. Dass die so gefundenen Spektren den Erwartungen entsprachen, mag als weitere Bestätigung für die Richtigkeit des Verfahrens angesehen werden.

Die Relativeichung bei der Messung der Satelliten stellte kein Problem dar. Bei diesen Messungen war ein starker Untergrund von Plasmalicht vorhanden, der in diesem Bereich Kontinuumstrahlung ist und zur Relativeichung herangezogen werden konnte.

* Dieser Anhang soll keineswegs eine exakte Herleitung der Streutheorie ersetzen, sondern nur dazu dienen, dem Experimentator, der sich das erste Mal mit diesem Gebiet befasst, die allgemeine Streuformel anschaulich zu erläutern.

Anhang II

Anschauliche Herleitung der allgemeinen Streuformel ⁺

Um die Streuung an einem Ensemble von Streuzentren zu berechnen, geht man häufig so vor, dass man zunächst die Streuung an einem Streuzentrum (z.B. einem Elektron) berechnet und dann die Amplituden aller streuenden Zentren unter Berücksichtigung ihrer Phasen aufsummiert [2]. Das Ergebnis lautet dann: die Streuintensität ist proportional dem Quadrat der raum-zeitlichen Fourier-Transformierten der Elektronendichte.

Hier soll versucht werden, dieses auf den ersten Blick etwas unanschaulich wirkende Ergebnis auf einem Weg zu erzielen, dessen einzelne Schritte alle der Anschauung zugänglich sind.

Um die Streuung an einem kompliziert zusammengesetzten Ensemble von Streuzentren zu berechnen, soll auch hier von der Behandlung einer einfachen, gut überschaubaren Konfiguration ausgegangen werden, aus der sich das ganze Ensemble eindeutig additiv zusammensetzen lässt.

Diese Grundkonfiguration sei eine hypothetische, ebene, monochromatische Ladungswelle der Form

$$(A \text{ II.1}) \quad n(t, \vec{r}) = n e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

Eine ebene harmonische Welle wird deshalb gewählt, weil sich jede beliebige Ladungsverteilung eindeutig mittels Fourier-Analyse in ein Spektrum solcher Wellen zerlegen lässt.

Um die Streuung an einer Sinuswelle zu berechnen, wird die Vereinfachung zunächst noch einen Schritt weiter getrieben, indem zuerst die Streuung an einer Ebene betrachtet wird, die dicht mit Streuzentren (Ladung) belegt ist.

(Unter Ladung wird hier immer ein Kontinuum verstanden, insbesondere keine einzelnen Elektronen. Ein Elektron lässt sich ja ebenfalls mittels Fourier-Analyse in hypothetische Wellen zerlegen, die kontinuierlich mit Ladung belegt sind).

⁺ Dieser Anhang soll keineswegs eine exakte Herleitung der Streutheorie ersetzen, sondern nur dazu dienen, dem Experimentator, der sich das erste Mal mit diesem Gebiet befasst, die allgemeine Streuformel anschaulich zu erläutern.

An einer solchen ebenen Ladungsverteilung wird das ankommende Licht mit dem Wellenvektor \vec{k}_1 nur in die Richtung gestreut, für die das Reflexionsgesetz erfüllt ist (Huygenssches Prinzip, Abb. II.1).

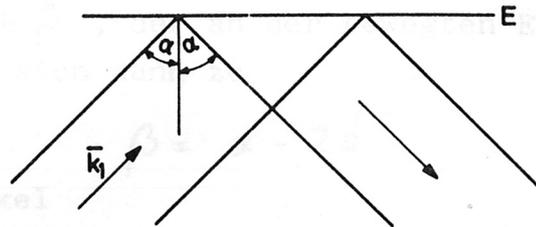


Abb. II.1 Streuung einer ebenen Welle (\vec{k}_1) an einer ladungsbesetzten Ebene (E)

Bewegt sich die ladungsbehaftete Ebene mit einer Geschwindigkeit \vec{v} in Richtung ihrer Normalen, so wird das ankommende Licht (\vec{k}_1) in eine andere Richtung gestreut als im Fall der ruhenden Ebene. Anhand von Abb. II.2 kann diese Richtung elementar berechnet werden:

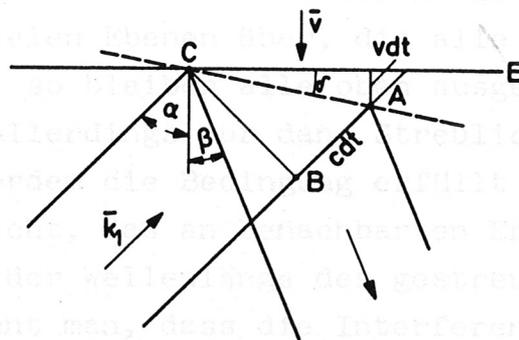


Abb. II.2 Streuung an einer bewegten Ebene

1) das im Punkt A die gleiche Phase hat wie Teilbündel I im Punkt C

Das an der bewegten Ebene gestreute Licht hat dieselbe Richtung, als wäre es an einer um den Winkel δ gedrehten, ruhenden Ebene gestreut worden. Der Winkel δ kommt dadurch zustande, dass der Punkt B der Wellenfront BC nach der Zeit dt die Ebene in einer um die Strecke $v dt$ verschobenen Lage trifft.

Der Ausfallswinkel β , der an der bewegten Ebene gestreuten Lichtwelle ergibt sich dann zu

$$(A II.2) \quad \beta = \alpha - 2\delta$$

α = Einfallswinkel

Während im Fall der Streuung an der ruhenden Ebene die Wellenlänge von einfallendem und gestreutem Licht die gleiche ist, tritt im Fall der bewegten Ebene eine Wellenlängenänderung infolge des Doppler-Effekts auf. Hatte das einfallende Licht die Wellenlänge λ_1 , so beträgt die Wellenlänge des gestreuten Lichts für einen ruhenden Beobachter

$$(A II.3) \quad \lambda_2 = \lambda_1 \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c} \cos \alpha} \cdot \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c} \cos \beta}$$

(im folgenden werden alle Grössen der Ordnung $(v/c)^2$ und kleiner gegen v/c vernachlässigt).

Geht man von einer einzelnen streuenden Ebene zu einer Schar von sehr vielen parallelen Ebenen über, die alle den gleichen Abstand voneinander haben, so bleiben alle oben ausgeführten Überlegungen gültig. Man kann allerdings nur dann Streulicht in Richtung β erwarten, wenn ausserdem die Bedingung erfüllt ist, dass der Gangunterschied von Licht, das an benachbarten Ebenen gestreut wird, ein ganzes Vielfaches der Wellenlänge des gestreuten Lichts beträgt. In Abb. II.3 erkennt man, dass die Interferenzbedingung ebenfalls elementar herzuleiten ist: nachdem Teilbündel I am Punkt C der Ebene E_1 gestreut wurde, muss Teilbündel II ¹⁾ noch die Zeit dt laufen, bis es auf die Ebene E_2 trifft. Diese ist in der gleichen Zeit aus der Lage E_2 nach E_2 gerückt. Das Streulicht von Punkt C

¹⁾ das im Punkt A die gleiche Phase hat wie Teilbündel I im Punkt C

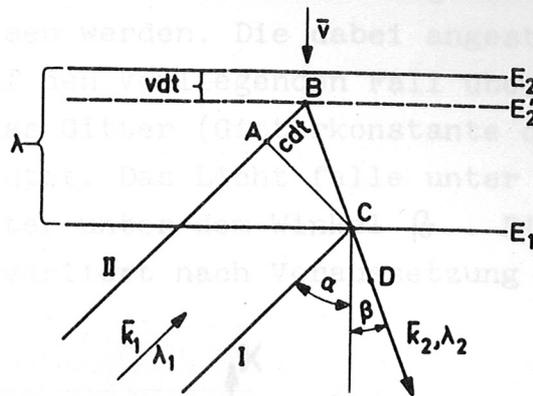


Abb. II.3 Streuung an vielen äquidistanten Ebenen

hat sich inzwischen um die Strecke cdt bis zum Punkt D fortbewegt. Die Punkte B und D besitzen also nach dem Streuprozess die gleiche Phase. Damit sich Bündel I und Bündel II verstärken muss daher gelten

$$(A II.4) \quad \overline{BD} = N \cdot \lambda_2$$

wobei N eine ganze Zahl ist. Damit lässt sich der Abstand λ der streuenden Ebenen ausrechnen, wenn α und β oder \bar{v} gegeben sind:

$$(A II.5) \quad \lambda = N \cdot \frac{\lambda_1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \cos \alpha}}$$

Es gibt natürlich beliebig viele verschiedene, wenn auch diskrete Abstände der Ebenen, für die die Interferenzbedingung erfüllt ist (N kann jede ganze Zahl sein). Geht man jedoch von Ebenen, zwischen denen sich definitionsgemäss keine Streuzentren befinden, zu einer ebenen sinusförmigen Ladungswelle über, bei der die Streuzentren kontinuierlich über den ganzen Raum verteilt sind, so lässt sich leicht zeigen, dass die Bedingung für positive Interferenz nur für die erste Ordnung ($N = 1$) erfüllt werden kann. Anhand von einem

Gitter, dessen Transmission sinusförmig variiert, soll diese Behauptung bewiesen werden. Die dabei angestellten Überlegungen können direkt auf den vorliegenden Fall übertragen werden. In Abb. II.4 ist das Gitter (Gitterkonstante d) durch Punkte im Abstand d angedeutet. Das Licht falle unter dem Winkel α ein und verlasse das Gitter unter dem Winkel β . Die Amplitude des gestreuten Lichts variiert nach Voraussetzung sinusförmig mit x :

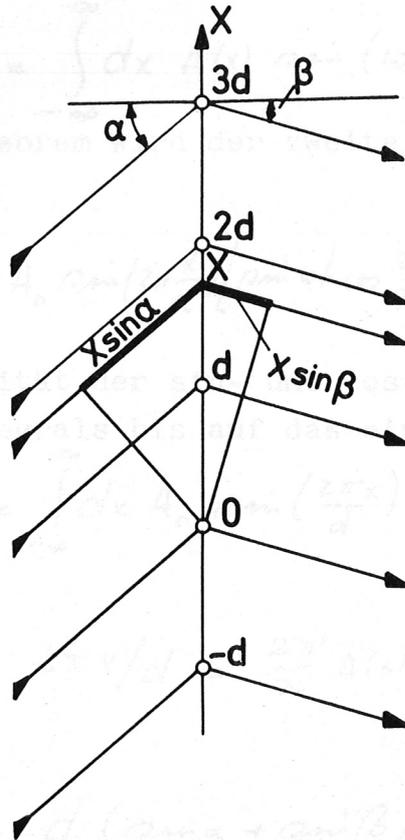


Abb. II.4 Streuung an einem Gitter mit sinusförmig variierender Transmission

(A II.6)

$$A(x) = A_0 \sin(2\pi x/d)$$

Der Gangunterschied gegenüber dem durch den Koordinatenursprung gehenden Bündel beträgt

(A II.14)

$$\lambda = \frac{2d}{\sqrt{1 + \cos \alpha}}$$

(A II.7)
$$\Delta(x) = x (\sin \alpha + \sin \beta)$$

Die am Punkt x gestreute Lichtwelle hat daher die Form

(A II.8)
$$A(x) \cdot \sin(\omega t + 2\pi \Delta(x)/\lambda)$$

Die gesamte unter dem Winkel β gestreute Intensität erhält man durch Integration aller gestreuten Amplituden unter Berücksichtigung ihrer Phasen und anschließender Quadratur:

(A II.9)
$$A_g = \int_{-\infty}^{\infty} dx A(x) \sin(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} \Delta(x))$$

Nach dem Additionstheorem wird der zweite Faktor zerlegt und es folgt mit (A II.6)

(A II.10)
$$A_g = \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot A_0 \sin(\frac{2\pi x}{d}) \left[\sin \omega t \cos \frac{2\pi}{\lambda} \Delta(x) + \cos \omega t \sin \frac{2\pi}{\lambda} \Delta(x) \right]$$

Wegen der Orthogonalität der sin- und cos-Funktionen verschwinden alle Glieder des Integrals bis auf das eine

(A II.11)
$$A_g = \int_{-\infty}^{\infty} dx A_0 \sin(\frac{2\pi x}{d}) \cos \omega t \sin(\frac{2\pi}{\lambda} \Delta(x))$$

falls gilt

(A II.12)
$$2\pi x/d = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta(x)$$

woraus folgt

(A II.13)
$$d (\sin \alpha + \sin \beta) = \lambda$$

Das ist aber gerade die Bedingung für positive Interferenz in der ersten Ordnung.

Damit ist also bewiesen, dass es im Fall der Streuung an einer ebenen, sinusförmigen Ladungswelle mit gegebener Phasengeschwindigkeit \bar{v} bei gegebenem Einfallswinkel α des Primärlichts nur eine einzige Wellenlänge λ der Ladungswelle gibt, bei der man Streulicht in der zugehörigen Richtung beobachten kann, nämlich

(A II.14)
$$\lambda = \frac{\lambda_1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{c + \cos \alpha}}$$

Führt man zu den bisher benutzten Grössen $\bar{k}_1, \bar{v}, \lambda_1, \lambda, \lambda_2$ noch die entsprechenden Wellenvektoren

(A II.15a)

$$|\bar{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$$

mit der Richtung parallel zur Ausbreitungsrichtung der Ladungswelle,

(A II.15b)

$$|\bar{k}_2| = \frac{2\pi}{\lambda_2}$$

mit der Richtung parallel zur Ausbreitung der gestreuten Welle und die entsprechenden Frequenzen

(A II.16)

$$\omega_1 = 2\pi \frac{c}{\lambda_1}$$

$$\omega_2 = 2\pi \frac{c}{\lambda_2}$$

$$\omega = 2\pi \frac{v}{\lambda}$$

ein, so gehen das Reflexionsgesetz und die Bedingung für positive Interferenz in der ersten Ordnung in die sehr einfachen Gleichungen über

(A II.17)

$$\bar{k}_2 = \bar{k}_1 + \bar{k}$$

und

(A II.18)

$$\omega_2 = \omega_1 + \omega$$

Die bisher gewonnenen Ergebnisse sagen schliesslich folgendes aus: Streulicht von einerebenen, sinusförmigen Ladungswelle kann nur dann beobachtet werden, wenn sowohl die Reflexionsbedingung als auch die Bedingung für positive Interferenz in der ersten Ordnung erfüllt ist. Mit anderen Worten ausgedrückt, bedeutet das: in einem vorgegebenen Streuexperiment, bei dem ja $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \lambda_1$ und λ_2 festgelegt sind, kann man nur dann Streulicht erwarten, wenn das Fourierspektrum des untersuchten Systems von Streuzentren eine von Null verschiedene Komponente mit Wellenvektor \bar{k} und der Frequenz ω enthält, die die Bedingungen (A II.17) und (A II.18) erfüllt.

Als anschauliches Beispiel sei die Streuung von Röntgenstrahlung an einem Einkristall aufgeführt. Da die streuenden Elektronen des Kristalls infolge der Gitterstruktur räumlich periodisch angeordnet sind, besteht das Fourierspektrum der Elektronendichte nur aus Komponenten mit diskreten k -Vektoren. Die Folge davon ist, dass bei Beleuchtung des Kristalls mit Röntgenlicht aus einer bestimmten Richtung die obige Bedingung nur für einige wenige Richtungen erfüllt ist. Man beobachtet das bekannte Laue-Diagramm.

Bisher ist klar geworden, dass Streulicht mit einer bestimmten Frequenz (ω_2) in einer bestimmten Richtung (\bar{k}_2) bei vorgegebenem ω_1 und \bar{k}_1 nur von einer einzigen Komponente des gesamten Fourier-spektrums der Elektronendichte herrührt. Die Amplitude des Streulichts ist proportional der Amplitude dieser Fourier-Komponente. Sie werde der Übersicht halber mit $n(\bar{k}, \omega)$ gekennzeichnet. Die Intensität des Streulichts ist daher

$$(A II.19) \quad J \sim n(\bar{k}, \omega)^2$$

Das ist aber genau das Ergebnis, was man nach der üblichen Herleitung der Streutheorie findet: die Streuintensität ist proportional dem Quadrat der Fourier-Transformierten der Elektronendichte. (Die exakte Theorie liefert $|n(\bar{k}, \omega)|^2$, weil n wegen hier nicht berücksichtigter Phasen der Fourierwellen komplex sein kann.)

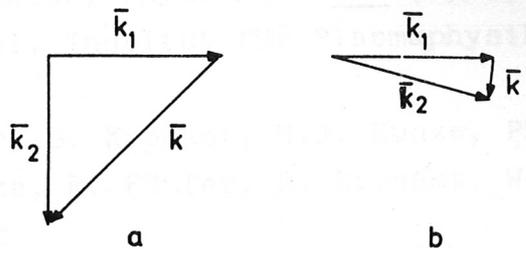
Zum Schluss sei das wesentliche Ergebnisse der Streutheorie noch einmal zusammenfassend wiedergegeben.

Beobachtet man Streulicht, das von einem Ensemble von Streuzentren erzeugt wird, so beobachtet man nicht die Streuzentren schlechthin. Man denke sich vielmehr das Ensemble in ein Spektrum von ebenen Sinuswellen zerlegt. Das beobachtete Streulicht rührt dann bei einer bestimmten Streuanordnung nur von einer oder von einer kleinen Anzahl von Sinuswellen her, die durch den Aufbau des Experiments festgelegt ist.

Etwas spezieller kann man dazu sagen, dass man bei Experimenten mit grossen Streuwinkeln (z.B. 90° -Streuung) Streuung an den Fourier-Wellen beobachtet, die im allgemeinen k -Vektoren bzw. Wellenlängen in der Grössenordnung der k -Vektoren bzw. Wellenlängen des einfallenden Lichts besitzen (Abb. II.5a). Bei Kleinwinkel- oder Vorwärtsstreuexperimenten wird dagegen das Licht im allgemeinen an Fourier-Wellen mit viel kleineren k -Vektoren und daher viel grösseren Wellenlängen als das einfallende Licht gestreut (Abb. II.5b). Das ist auch der Grund dafür, dass man bei Streuexperimenten an ein und demselben Plasma in der Vorwärtsrichtung völlig andere Streuspektren (z.B. Ionenlinie) erhalten kann als unter 90° (Elektronenspektrum).

Literatur

- [1] R. F. Schuler, Phys. Rev. 126 (1960) 1520
- [2] W. H. Kegel, Phys. Abstr., Ser. 2, Astrophysik, Garching, Laborbericht 179 6/74
- [3] E. Pfeifer, Phys. Rev. 133 (1963) 105
- [4] E. Pfeifer, Phys. Rev. 133 (1963) 105
- [5] W. H. Kegel, Phys. Lett. 6 (1964) 179
- [6] H. J. Kunze, A. Ederhagen, E. Pfeifer, Phys. Lett. 13 (1964) 32
- [7] E. deSilva, D. E. Evans, Nature 203 (1964) 1381
- [8] U. Ascoli, Abb. II.5 Streuvektoren (\vec{k}) bei 90° - (a) und Vorwärtsstreuung (b) (1964) 672
- [9] U. Ascoli-Barbali, J. Katzenstein, G. Govinetti, Nature 207 (1965) 63
- [10] H. J. Kunze, Z. Naturf. 20a (1965) 11
- [11] H. J. Kunze, E. Pfeifer, H. Bohn, Phys. Lett. 19 (1965) 11
- [12] S. A. Hammad, W. H. Kegel, Phys. Lett. 8 (1966) 303
- [13] H. Kragels, H. Föhler, E. Glock, E. Pfeifer, E. Pfeifer, Phys. Rev. Lett. 16 (1966) 1085
- [14] S. A. Hammad, H. Föhler, W. H. Kegel, J. J. John, J. J. of Quant. Electron. 9 (1966) 254
- [15] D. E. Evans, M. J. Forrest, J. J. J. of Phys. 211 (1966) 23
- [16] Z. W. Qian, H. A. M. J. J. of Phys. 15 (1966) 122
- [17] O. K. Anderson, Phys. Rev. 137 (1966) 228
- [18] E. E. Salpeter, J. of Geophys. Res. 67 (1962) 1321
- [19] J. A. Pejer, Canad. J. Phys. 38 (1960) 1114
- [20] W. H. Kegel, Abstr. des Physophysik, Garching, Laborbericht 179 6/74 (1965)
- [21] I. Seltzer, Jr., Physics of Fully Ionized Gases, Interscience Publishers, New York 1962
- [22] E. Glock, Proc. VII. Int. Conf. on Phys. Ion. Gas., Beograd III (1966) 194
- [23] M. Born, Optik, 2. Aufl., Springer 1965, S. 371 ff.
- [24] D. P. DuBois, Phys. Rev. 133 (1964) A 1317
- [25] T. J. M. Boyd, Culham Report CLM-R 52



Literatur

- [1] E.E. Salpeter, Phys. Rev. 120 (1960) 1528
- [2] W.H. Kegel, Institut für Plasmaphysik, Garching, Laborbericht IPP 6/21
- [3] E. Fünfer, B. Kronast, H.J. Kunze, Phys. Let. 5 (1963) 125
- [4] H.J. Kunze, E. Fünfer, B. Kronast, W.H. Kegel, Phys. Let. 11 (1964) 42
- [5] W.E.R. Davies, S.A. Ramsden, Phys. Let. 8 (1964) 179
- [6] H.J. Kunze, A. Eberhagen, E. Fünfer, Phys. Let. 13 (1964) 38
- [7] A.W. DeSilva, D.E. Evans, M.J. Forrest, Nature 203 (1964) 1321
- [8] U. Ascoli-Bartoli, J. Katzenstein, L. Lovisetto, Nature 204 (1964) 672
- [9] U. Ascoli-Bartoli, J. Katzenstein, L. Lovisetto, Nature 207 (1965) 63
- [10] H.J. Kunze, Z.f.Naturf. 20a (1965) 801
- [11] H.J. Kunze, E. Fünfer, H. Röhr, Phys. Let. 19 (1965) 11
- [12] S.A. Ramsden, W.E.R. Davies, Phys. Rev. Let. 8 (1966) 303
- [13] B. Kronast, H. Röhr, E. Glock, H. Zwicker, E. Fünfer, Phys. Rev. Let. 16 (1966) 1082
- [14] S.A. Ramsden, R. Benesch, W.E.R. Davies, P.K. John, JEEE J. of Quant. Electr. QE-2 (1966) 267
- [15] D.E. Evans, M.J. Forrest, J. Katzenstein, Nature 211 (1966) 23
- [16] P.W. Chan, R.A. Nodwell, Phys. Rev. Let. 16 (1966) 122
- [17] O.A. Anderson, Phys. Rev. Let. 16 (1966) 978
- [18] E.E. Salpeter, J. of Geophys. Res. 68 (1963) 1321
J.A. Fejer, Canad. J. Phys. 38 (1960) 1114
- [19] W.H. Kegel, Institut für Plasmaphysik, Garching, Laborbericht IPP 6/34 (1965)
- [20] L. Spitzer, Jr., Physics of Fully Ionized Gases, Interscience Publishers, New York 1962
- [21] E. Glock, Proc. VII Int. Conf. on Phen. Ion. Gas., Beograd III (1966) 194
- [22] M. Born, Optik, 2. Aufl. Springer 1965, S. 371 ft.
- [23] D.F. DuBois, Phys. Rev. 133 (1964) A 1317
- [24] T.J.M. Boyd, Culham Report CLM-R 52