

Vakuum-Magnetfeld im Theta-Pinch:
Vermeidung von Asymmetrien
(Elimination of Asymmetries in the
Vacuum Magnetic Field of Theta Pinch
Coils)

Frank Pohl

IPP 1/57

Januar 1967

I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K

G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Vakuum-Magnetfeld im Theta-Pinch:
Vermeidung von Asymmetrien
(Elimination of Asymmetries in the
Vacuum Magnetic Field of Theta Pinch
Coils)

Frank Pohl

IPP 1/57

Januar 1967

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

Abstract

Deviations from rotational symmetry of the magnetic field in theta pinch coils are always due to the fact that the current does not flow vertically from the adapter to the coil, if the end planes are assumed to be infinitely small. By means of numerical calculations it is shown that:

1. The influence of the current feed can largely be eliminated by making the adapter sufficiently long in the direction perpendicular to the coil axis.
2. The current at the coil ends can be made to flow almost perpendicularly to the slot by extending the adapter in the axial direction about half a coil radius larger than the coil itself.
3. It is also possible in corrugated (Limbus) coils to make the current flow perpendicularly to the slot by including inductive lenses in the adapter.

<u>Inhalt</u>	Seite
Einleitung	1
Kapitel 1 Magnetfeld-Inhomogenitäten und ihre Ursache	1
A End-Effekt	1
B Schlitz-Effekt	1
C Kollektorflächen-Effekt	3
D Effekte bei gewellten Spulen	4
E Effekte bei gewellten Spulen	5
Kapitel 2 Voraussetzungen für die numerische Rechnung	6
§1 Berechtigung der Voraussetzungen	6
§2 Konsequenzen aus der Vernachlässigung der Stirnflächen	6
Kapitel 3 Überstehender Adapter bei einer geraden Spule mit konstantem Querschnitt	8
§1 Methode	8
§2 SCHLÜTER's Gütemass	9
§3 Azimutale Stromverteilung auf der Spule	10
§4 Zur numerischen Berechnung von U aus der Laplace-Gleichung	11
Kapitel 4 Gewellte Spulen und induktive Linsen	12
§1 Mathematische Formulierung des Problems	14
§2 Zusammenhang zwischen Spulenradius und dem Feld im Spuleninnern	15
§3 Lösung der Gleichung $\text{div}(\mathbf{S}\mathcal{L}) = 0$	16
§4 Gültigkeitsgrenzen der Gleichung $\text{div}(\mathbf{S}\mathcal{L}) = 0$	16
§5 Resultate	18



Bei dem Schlitz-Effekt ist die Verteilung der Feldlinien, besonders in unmittelbarer Nähe, wie die Abb. 3 zeigt, unendlich dicht, weil der Phasenwert in der unmittelbaren Nähe sehr viel größer ist als im Innern und daher die Stromdichte an großen Werten, wie Stromfäden III in Abb. 2 sowie die in Abb. 4a dargestellten Stromfäden.

Einleitung

In einer Theta-Pinch Spule ist das Magnetfeld nicht homogen. Inhomogenitäten des Magnetfeldes stören aber den Ablauf von Theta-Pinch Experimenten: z.B. führen Abweichungen von der Rotationssymmetrie dazu, dass der Plasmaschlauch gekrümmt wird und Driftbewegungen ausführt, unter Umständen bis an die Spulenzwand. Man wird daher versuchen, diese Inhomogenitäten möglichst klein zu halten. Beim linearen Theta-Pinch ist es wohl kaum möglich, Endverluste zu vermeiden. Aber man kann durch geeignete Formung der Zuleitungsplatten das Magnetfeld in guter Näherung rotationssymmetrisch zu gestalten, sogar dann, wenn der Spulenzradius veränderlich ist, wie beim Limpus-Experiment. Wie dies im einzelnen geschehen kann, ist Thema dieser Arbeit.

Kapitel 1 Die Ursachen für die Entstehung von Feldgradienten beim Theta-Pinch

Wir stellen in diesem Kapitel die wichtigsten Ursachen für die Entstehung von Feldinhomogenitäten zusammen und werden hieran die Fragestellung für die folgenden Kapitel herausarbeiten.

ALDRIDGE et al. erwähnen in ihrer Arbeit "Plasma Drift in the Thetatron" [1] A) den "End-Effekt", B) den "Schlitz-Effekt", und C) den "Kollektorflächeneffekt".

A) Der End-Effekt ist die Feldinhomogenität, welche beim Übergang vom nahezu homogenen Feld im Spulenzinnern zum feldfreien Aussenraum entsteht (s. Abb. 1). Der End-Effekt bewirkt ein starkes Ansteigen der Stromdichte in Kantennähe; diesen Zusatzstrom nenne ich "Endeffekt-Strom" (s. Abb. 1a). Der Endeffekt-Strom in der Spule verhält sich zum Endeffekt-Strom im Adapter genähert wie der Spulenzdurchmesser zur Schlitzbreite, d.i. in praxi etwa wie 50:1. Wir berücksichtigen in dieser Arbeit daher nur den End-Effekt am Spulenzrand und vernachlässigen den End-Effekt am Adapterrand.

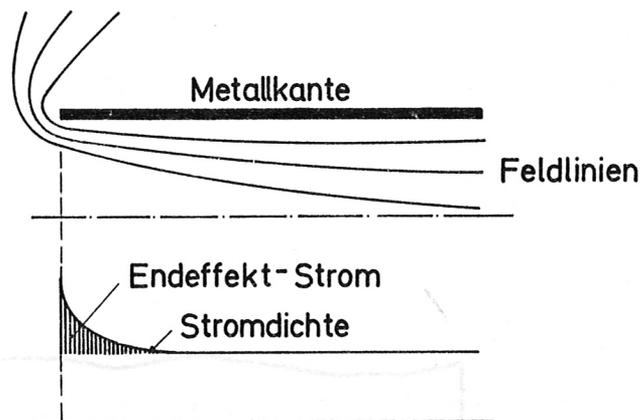


Abb. 1

B) Der Schlitz-Effekt ist die Verbiegung der magnetischen Feldlinien, besonders in Kantennähe, wie sie Abb. 3 zeigt. Er entsteht deshalb, weil der Endeffekt-Strom im Spulenzrandgebiet sehr viel grösser ist als im Adapterrand und daher die Stromfäden so gebogen werden, wie Stromfäden III in Abb. 2 sowie die in Abb. 18a dargestellten Stromfäden.

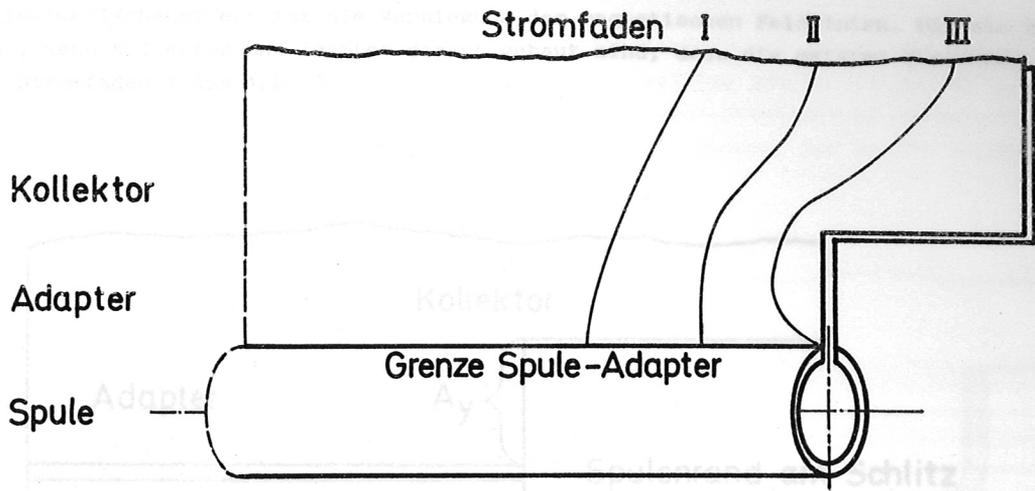


Abb. 2 Halbe Theta-Pinch-Spule

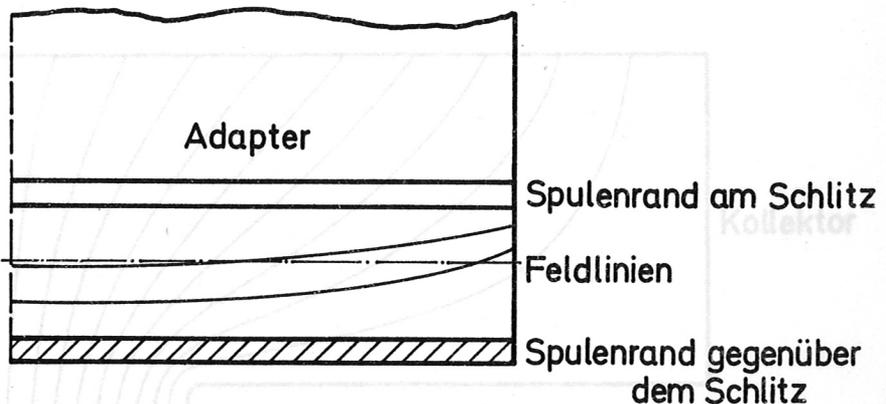


Abb. 3 Zum Schlitz-Effekt

c) Der Kollektorflächeneffekt ist die Verbiegung der magnetischen Feldlinien, wie sie Abb. 4 zeigt. Er entsteht, wenn Kollektor und Adapter derart gebaut sind, dass die meisten Stromfäden so verbogen werden wie Stromfaden I aus Abb. 2.

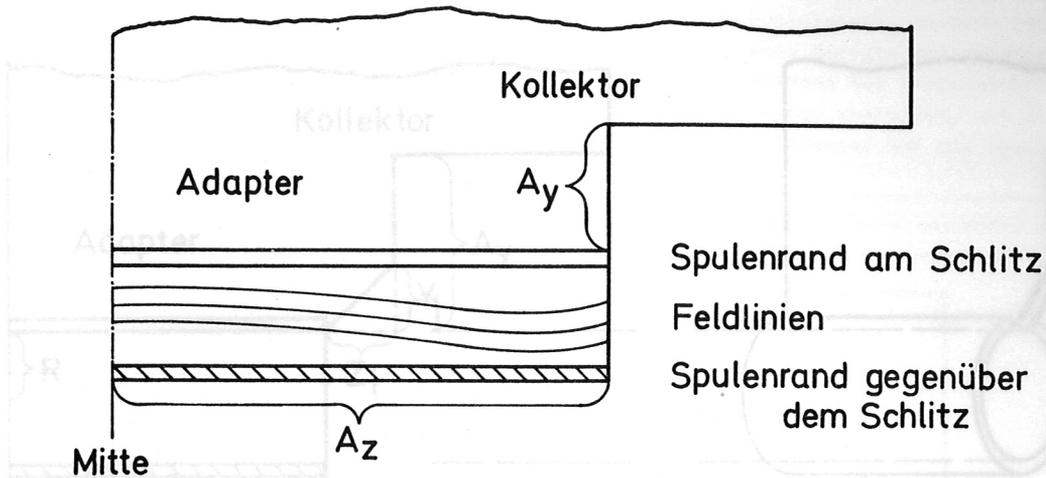


Abb. 4 Kollektorflächen-Effekt

Der Kollektorflächeneffekt ist also dem Schlitzeffekt entgegengerichtet. Daraus resultiert die Fragestellung für Kapitel 3: wie müssen die Zuleitungsplatten geformt werden, damit sich die beiden Effekte gegenseitig aufheben? Die Antwort sei hier vorweggenommen.

1. Der Adapter muss in Richtung senkrecht zur Spulenachse so lang sein, dass der Kollektorflächeneffekt praktisch 0 wird (s. Green [5]), dies ist bei $A_y \geq A_z$ der Fall (A_y und $A_z \rightarrow$ Abb. 5). Als Beweis hierfür dient die Abb. 6, welche die Lage der Stromfäden quantitativ wiedergibt.

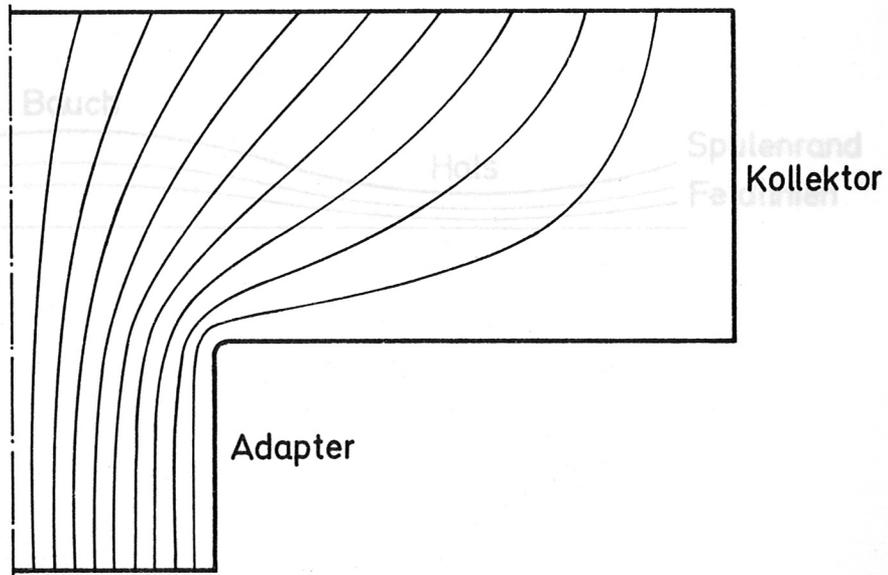


Abb. 7

Abb. 6

2. Der Adapter muss etwas länger gebaut werden in Achsenrichtung als die Spule, wie dies Abb. 5 zeigt; hierdurch entsteht ein "Adapterflächeneffekt", welcher bei $Z_1 = 0,4R$ bis $0,5 R$ den Schlitzeffekt nahezu aufhebt. Allerdings müssen die Adapter-Stirnflächen vernachlässigbar klein sein, da letztere sonst die Magnetfeldlinien von sich wegdrücken, was starke Asymmetrien zur Folge haben kann.

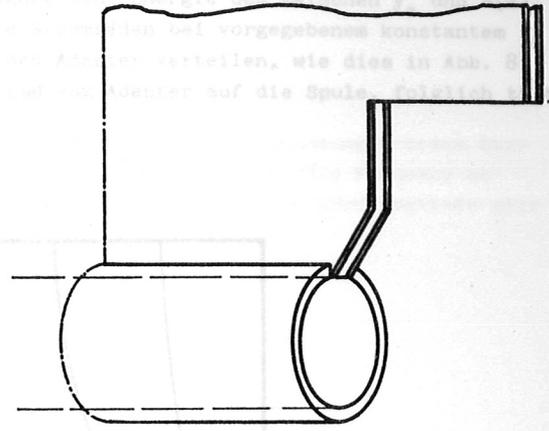
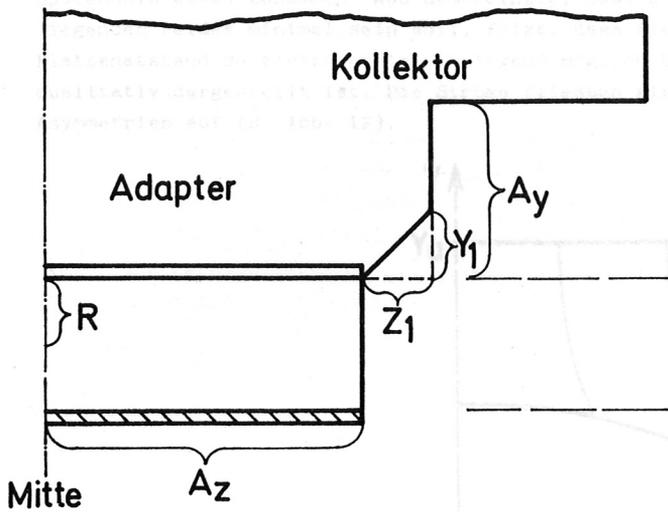


Abb. 5a Überstehender Adapter:
Stromführende Schicht, die
in der Rechnung berücksichtigt ist

Abb. 5b Überstehender Adapter:
Schema der Ausführung

Zu diesen Effekten kommt ausserdem bei gewellten Spulen, d.h. Spulen mit z-abhängigem Radius: D) das Ab- und Zunehmen des Magnetfeldes infolge der Wellung (s. Abb. 7).

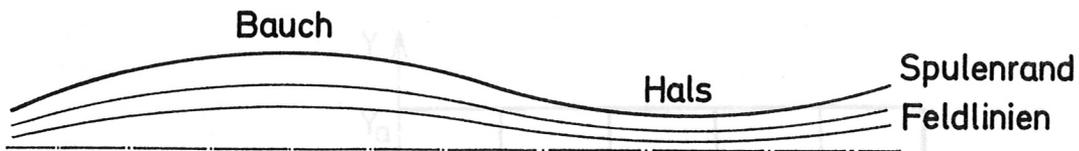


Abb. 7

E) Schiefes Einfließen des Stromes unabhängig von Kollektor- und Schlitz-Effekt, falls die Zu-
 leitungsplatten überall gleichen Abstand voneinander haben. Dies folgt aus dem Prinzip, dass die
 Stromfäden sich stets so anordnen, dass die magnetische Energie minimal ist.

Abb. 8 zeigt eine Halbperiode. Bei $y = y_a$ seien Strom und Magnetfeld homogen, die Stromfäden liegen
 daher äquidistant und parallel zur y -Achse. An der Grenze des Adapters gegen die Spule, beschrieben
 durch $y = R(z)$, liegen wegen Effekt D) die Stromfäden nicht äquidistant, sondern drängen sich am
 Spulenhals etwas zusammen. Aus dem Prinzip, dass die magnetische Energie des zwischen y_a und $R(z)$
 liegenden Feldes minimal sein soll, folgt, dass sich die Stromfäden bei vorgegebenem konstantem
 Plattenabstand so gleichförmig wie irgend möglich über den Adapter verteilen, wie dies in Abb. 8
 qualitativ dargestellt ist. Die Ströme fließen also schief vom Adapter auf die Spule, folglich treten
 Asymmetrien auf (s. Abb. 12).

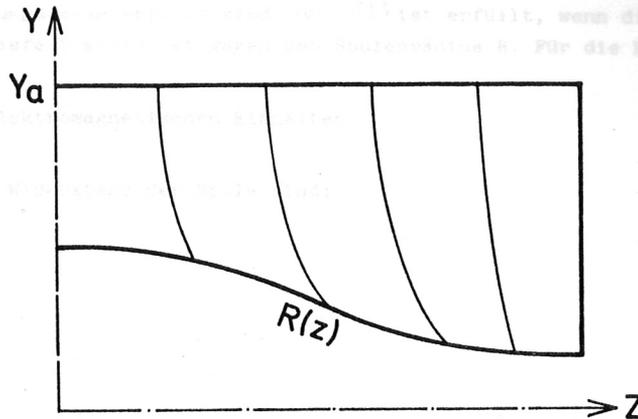


Abb. 8

Daraus resultiert die Fragestellung für Kapitel 4:

Was muss man tun, damit die Stromfäden senkrecht auf $R(z)$ auftreffen, wie dies Abb. 9 zeigt?

Wir sehen qualitativ schon bei Betrachtung von Abb. 9: die Stromfäden können zu dem Umweg um das
 über dem Spulenbauch liegende Gebiet nur dadurch gezwungen werden, dass man in diesem Gebiet eine
 Zone erhöhter Induktivität einbaut, d.h. den Adapterplattenabstand S variiert. Daraus folgt als
 Fragestellung für Kapitel 4:

Wie muss man den Plattenabstand S als Funktion von z und y wählen, damit die Stromfäden senkrecht
 auf $R(z)$ stehen?

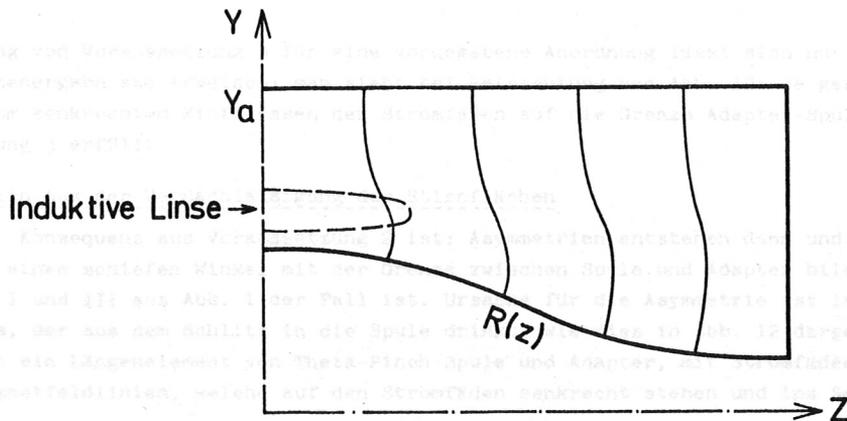


Abb. 9

Kapitel 2 Voraussetzung zur numerischen Rechnung

Die wichtigsten Voraussetzungen, die für die numerischen Rechnungen gemacht wurden, sind:

1. Vernachlässigung der Ohmschen Widerstände
Eindringtiefe = 0
Alle Ströme sind Flächenströme
2. Vernachlässigung von Stirnflächen und Aussenzyklindern
3. Rein azimutale Stromverteilung auf der Spule

§1 Berechtigung der Voraussetzungen

Wir wollen in diesem Paragraphen untersuchen, unter welchen physikalischen Bedingungen diese Voraussetzungen wenigstens näherungsweise erfüllt sind. Vor. (1) ist erfüllt, wenn die Frequenz so gross ist, dass die Eindringtiefe D klein ist gegen den Spulenradius R . Für die Eindringtiefe gilt

$$D = \frac{1}{2\pi\sqrt{\epsilon V}} \quad (\text{cm})$$

wobei ϵ = Leitfähigkeit in elektromagnetischen Einheiten
 V = Frequenz in Hertz

Der Ohmsche und der induktive Widerstand der Spule sind:

$$R_{\text{ohm}} = \frac{2\pi R}{\ell D \cdot \epsilon}$$
$$R_{\text{ind}} = 4\pi \frac{\pi R^2}{e} \cdot 2\pi V$$

folglich ist

$$\frac{R_{\text{ohm}}}{R_{\text{ind}}} = \frac{D}{R}$$

wobei ℓ = Spulenlänge.

Bei V = mehrere kHz ist D knapp 1 mm; bei den üblichen Theta-Pinch Spulen ist $R = 3 - 5$ cm, R_{ind} ist daher etwa 50 mal grösser als R_{ohm} .

Voraussetzung 2 ist bei den meisten Theta-Pinch-Spulen nicht erfüllt. Die Stirnflächen am Spulenende übertreffen den Spulenquerschnitt πR^2 um ein Mehrfaches. Die Konsequenz ist, dass der Endeffekt-Strom zum grössten Teil auf der Stirnfläche fliesst und die Stromfäden bei der in Abb. 18b gezeigten Anordnung sich nicht der Adapterform anpassen, sondern genähert parallel zur Vertikalen verlaufen; die Stromfäden, welche die schiefe Kante unten rechts erreichen, treten auf die Stirnfläche über. Zwar ist der Endeffekt-Strom bei azimutalen Stromverteilungen nahezu unabhängig von der Wandstärke (4), so dass auch bei einer Anordnung wie der in Abb. 5b gezeigten, Flusskonstanz vorliegt, falls man den überstehenden Adapter gemäss Tab. 1 konstruiert. Aber die Stirnflächen des überstehenden Adapters drängen die Magnetfeldlinien von der Achse weg, in Abb. 5b nach unten, wodurch schlimmere Asymmetrien entstehen als bei einer Anordnung ohne überstehenden Adapter (s. Abb. 10), wie dies KNOBLOCH's Messungen am elektrolytischen Analogmodell gezeigt haben [6].

Die Berechtigung von Voraussetzung 3 für eine vorgegebene Anordnung lässt sich nur nachträglich anhand der Rechenergebnisse erweisen: man sieht bei Betrachtung von Abb. 12: je geringer die Abweichungen vom senkrechten Einfließen der Stromfäden auf die Grenze Adapter-Spule, desto besser ist Voraussetzung 3 erfüllt.

§2 Konsequenzen aus der Vernachlässigung der Stirnflächen

Die wichtigste Konsequenz aus Voraussetzung 2 ist: Asymmetrien entstehen dann und nur dann, wenn die Stromfäden einen schiefen Winkel mit der Grenze zwischen Spule und Adapter bilden, wie dies bei den Stromfäden I und III aus Abb. 1 der Fall ist. Ursache für die Asymmetrie ist in diesen Fällen der Zusatzfluss, der aus dem Schlitz in die Spule dringt, wie dies in Abb. 12 dargestellt ist. Die Abbildung zeigt ein Längenelement von Theta-Pinch Spule und Adapter, mit Stromfäden auf dem Adapter und Magnetfeldlinien, welche auf den Stromfäden senkrecht stehen und ins Spuleninnere gelangen.

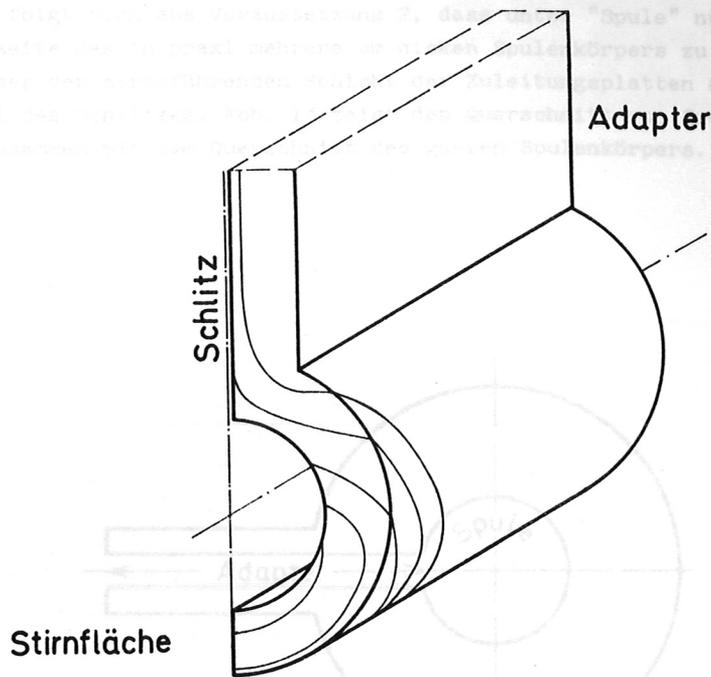


Abb. 10

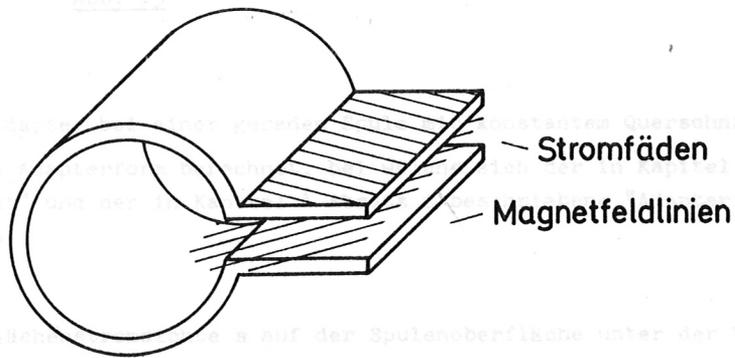


Abb. 12 Zur Entstehung von Asymmetrien
Längenelement von Theta-Pinch Spule
und Adapter

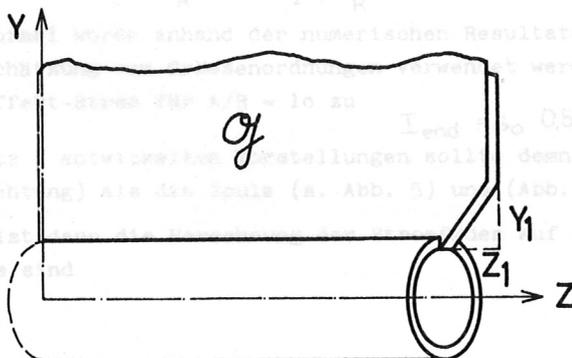


Abb. 15

Schliesslich folgt noch aus Voraussetzung 2, dass unter "Spule" nur die stromführende Schicht an der Innenseite des in praxi mehrere cm dicken Spulenkörpers zu verstehen ist; ferner unter "Adapter" ausser der stromführenden Schicht der Zuleitungsplatten auch der in der Spulenkörperwand gelegene Teil des Schlitzes. Abb. 13 zeigt den Querschnitt von Spule und Adapter im Sinne dieser Definition zusammen mit dem Querschnitt des ganzen Spulenkörpers.

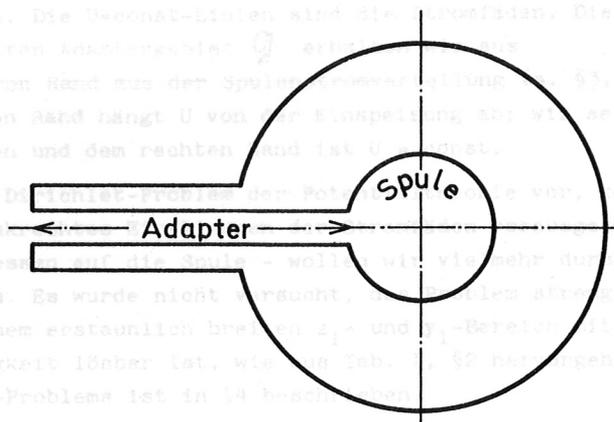


Abb. 13

Kapitel 3 Überstehender Adapter bei einer geraden Spule mit konstantem Querschnitt

In diesem Kapitel wird eine Adapterform berechnet, bei welcher sich der in Kapitel 1, Absatz B beschriebene "Schlitz-Effekt" und der in Kapitel 1 Absatz C beschriebene "Adapterflächeneffekt" gegenseitig nahezu aufheben.

§1 Methode

Wir berechnen zuerst die Flächenstromdichte s auf der Spulenoberfläche unter der Voraussetzung azimuthaler Stromverteilung nach der in §3 dargestellten Methode. Das Resultat dieser Rechnung lässt sich genähert durch die Formel

$$(1) s = s_0 \left[1 + C_1 \cdot \left\{ -\frac{2R}{A} + \frac{1}{C_2 + \frac{A-z}{R}} - \frac{1}{C_2 + \frac{A+z}{R}} \right\} \right] \quad \text{wobei} \quad \begin{array}{c|cc} A/R & C_1 & C_2 \\ \hline 2 & 0.08 & 0.004 \\ 4 & 0.1 & 0.008 \\ 10 & 0.1 & 0.01 \end{array}$$

beschreiben. Diese Formel wurde anhand der numerischen Resultate von §3 durch Probieren gefunden und soll nur zur Abschätzung von Grössenordnungen verwendet werden. Z.B. folgt hieraus durch Integration der Endeffekt-Strom für $A/R = 10$ zu

$$I_{\text{end}} = s_0 \cdot 0,56R$$

Nach den in §1, Absatz C entwickelten Vorstellungen sollte demnach der Adapter um $z_1 \approx 0,5 - 0,6 R$ länger sein (in z-Richtung) als die Spule (s. Abb. 5) und (Abb. 15).

Der nächste Schritt ist dann die Berechnung der Stromfäden auf dem Adapter. Die Gleichungen für die Flächen-Stromdichte s sind

$$(2) \operatorname{div} \vec{s} = 0$$

$$(3) \operatorname{rot} \vec{s} = 0$$

Gleichung 2 beschreibt die Ladungsfreiheit der Adapterplatten.

In der Gleichung 3 steckt die Voraussetzung, dass das Magnetfeld zwischen den Adapterplatten keine Normalkomponente besitzt. Das bedeutet, dass z.B. der Endeffekt-Strom in den Plattenrändern vernachlässigt wird. Dies ist nicht gravierend, da die Endeffekt-Ströme am Adapterrand und am Spulenrand sich etwa wie Plattenabstand zu Spulendurchmesser verhalten.

Wir lösen (2) durch

$$(4a) \quad s_z = - \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$(4b) \quad s_y = \frac{\partial U}{\partial z}$$

(5) Dann hat (3) die Form $\Delta U = 0$.

U bedeutet dabei bis auf einen Masstabsfaktor das magnetische Skalarpotential des Feldes zwischen den Adapterplatten. Die U=const-Linien sind die Stromfäden. Die Randbedingungen für U im dem in Abb. 15 dargestellten Adaptergebiet G erhalten wir aus

(6a) für den unteren Rand aus der Spulenstromverteilung (s. §3, Gl. (10)).

(6b) Für den oberen Rand hängt U von der Einspeisung ab; wir setzen $U \sim z$ voraus.

(6c) Auf dem linken und dem rechten Rand ist $U = \text{const}$.

Es liegt also ein Dirichlet-Problem der Potentialtheorie vor, kein gemischtes Problem, denn wir haben nirgends senkrechtes Einfließen der Stromfäden vorausgesetzt. Dieses Ziel - nämlich das senkrechte Einfließen auf die Spule - wollen wir vielmehr durch geschickte Wahl der Parameter z_1, y_1, R erreichen. Es wurde nicht versucht, das Problem streng zu lösen, denn es ergab sich, dass das Problem in einem erstaunlich breiten z_1 - und y_1 -Bereich mit für praktische Anwendungen ausreichender Genauigkeit lösbar ist, wie aus Tab. 1, §2 hervorgeht. Die Behandlung des oben erwähnten Dirichlet-Problems ist in §4 beschrieben.

§2 Das Schlütersche Gütemass

Wenn es aus irgendeinem Grund zweckmässig ist, ein Problem durch Probieren zu lösen, dann benötigt man eine Zahl, welche angibt, wie gut bzw. schlecht man geraten hat. SCHLÜTER schlägt für das vorliegende Problem folgende Grössen vor, die wir als SCHLÜTER sche Gütemasse bezeichnen wollen:

$$(7a) \quad g_1 = \int_0^A G_1^2(x) dx \quad \text{wobei} \quad G_1(x) = \int_0^x B_y(z) dz$$

$$(7b) \quad g_2 = \int_0^A G_2^2(x) dx \quad \text{wobei} \quad G_2(x) = \int_x^A B_y(z) dz$$

$B_y(z)$ bedeutet dabei die y-Komponente des Magnetfeldes am Schlitz.

Diese Wahl der Gütemasse bewirkt, dass der langsam veränderliche Anteil von B_y einen grösseren Einfluss auf die Gütemasse erhält als der schnell veränderliche Anteil. Die Fourier-Entwicklung von B_y sei

$$B_y = \int_0^\infty b(k) \sin kz dk$$

Dann ist z.B.

$$g_1 = \int_0^A dx \left[\int_0^\infty dk \frac{b(k)}{k} (1 - \cos kx) \right]^2$$

d.h. die Anteile mit grösseren Wellenlängen bzw. kleinerem k liefern den grössten Beitrag zu g_1 . Die Anteile mit grossem k hingegen verursachen einen Fluss, welcher rasch das Vorzeichen wechselt und sich daher vom Schlitz aus nicht weit in der Spule ausbreitet.

Ferner ersehen wir aus der Definition: falls man die exakte Lösung des Problems hat, ist $B_y(z) = 0$ und damit auch $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$. Folglich: je kleiner die Gütemasse, desto besser die Lösung.

Die Resultate sind in Tab. 1 und Abb. 18 zusammengefasst; g_1 ist auf 100 normiert.

Tabelle I

	z_1/r	y_1/R	ϵ_1	ϵ_2
Gütemasse für eine Spule mit $A = 4R$	0	0	100	500 (unkorrigierter Fall)
	0,4	0,4	5,8	26,7
	0,48	0,48	1,6	11,5
	0,6	0,6	0,1	1,3
	0,6	0,0	0,4	0,5
	0,72	0,72	2,8	1,7
	0,6	2,4	3,3	58,0

Es sei bemerkt, dass die Zahlenwerte von g_1 und g_2 stark davon abhängen, ob man die Integrale in Gl. (7) bis A oder bis A - ϵ erstreckt, wobei $\epsilon \approx 1 - 3$ mm ein Bereich ist, in welchem man auf die Forderung nach senkrechtem Einfließen verzichtet, um festzustellen, welcher Beitrag zum Gütemass nur vom Bereich ϵ herrührt. In Tab. 1 ist $\epsilon = 0,6$ cm gewählt.

Schliesslich sei noch daran erinnert, dass wir am oberen Adapterrand $U \sim z$ angenommen haben, was einer Einspeisung aus einem unendlich langen Adapter nahekommt; in Wahrheit ist aber auch der längste Adapter nur endlich lang, so dass ein wenn auch sehr kleiner Kollektorflächen-Effekt besteht. Bei der in Abb. 6 dargestellten Anordnung z.B. ist das allein vom Kollektorflächen-Effekt erzeugte Gütemass, bezogen auf einen Spulenabschnitt der Länge $4R$, von der Grössenordnung 5, so dass die beste Lösung für diese Anordnung $z_1 \approx 0,3 R$ sein dürfte.

§3 Stromverteilung auf der Spule

Wir denken uns die Spule aufgeteilt in N isolierte Kreisringe der Breite DZ (s. Abb. 16). Die Ringe haben die Selbstinduktion L_{JJ} und die Gegeninduktion L_{JK} . Die Forderung, dass der magnetische Fluss durch die Spule unabhängig von z sein soll, ersetzen wir durch die Forderung, dass der Fluss durch den Ring Nr. J unabhängig von J sein soll. Für $N \rightarrow \infty$ sind diese beiden Forderungen identisch. Die Flusskonstanz-Forderung liefert das Gleichungssystem

$$(9) \sum_{k=1}^N L_{JK} I_k = F = \text{const} \quad ; \quad J = 1, 2, \dots, N$$

Dies ist ein System von N Gleichungen für die N Unbekannten I_k , wobei I_k die Stromstärke in Ring Nr. K bedeutet.

Nun interessieren wir uns für das magnetische Skalarpotential U im Schlitz, d.i. an der Grenze Adapter-Spule. Die zu Gl. (4b) analoge Beziehung für die Spule lautet

$$s_\psi = \frac{\partial u}{\partial z}$$

hieraus folgt

$$(10) u_k \approx \sum_{j=1}^k I_j$$

Schliesslich seien noch die Induktivitäten in Nano-Henry angegeben: (s. z.B. [2] und [3])

$$L_{JK} = 4\pi \sqrt{r_j r_k} \left\{ \left[\frac{z}{L_k} - k \right] K(k) - \frac{z}{k} E(k) \right\}$$

$$L_{JJ} = 4\pi r_j \cdot \left\{ -0.5 + \ln \left(\frac{8r_j}{DZ} \right) \right\}$$

wobei r_j = Radius von Ring Nr. J

$K(k)$, $E(k)$ \rightarrow vollständige elliptische Integrale 1. und 2. Art

$$k^2 = \frac{4r_j r_k}{(r_j + r_k)^2 + (z_j - z_k)^2}$$

$z_j - z_k$ = Abstand der Ringe Nr. J und Nr. K.

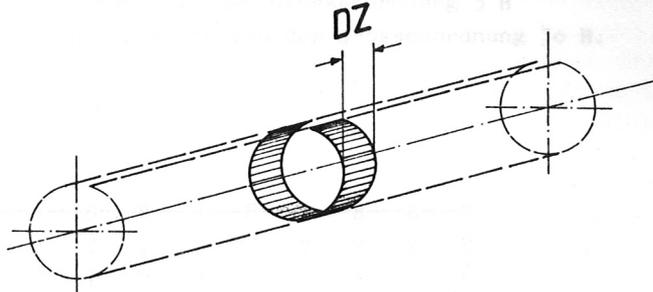


Abb. 16

§4 Zur Berechnung von U aus der Laplace-Gleichung

$$(11) \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

Wir überziehen das Gebiet \mathcal{Q} , in welchem U gesucht ist (s. Abb. 17) mit einem Maschennetz; dessen Gitterpunkte sollen die Koordinaten $z_J = J \cdot DZ$, $y_K = K \cdot DY$ besitzen; $U(z_J, y_K) \equiv U_{J,K}$. Für den Fall, dass $DZ = DY$ ist, lautet die Differenzgleichung zu (11)

$$(12) U_{J,K} = \frac{1}{4} (U_{J+1,K} + U_{J-1,K} + U_{J,K+1} + U_{J,K-1})$$

welche durch das Overrelaxationsverfahren, einem Iterationsverfahren, lösbar ist: wir bilden aus einem beliebigen mit den Randbedingungen (Gl. 6) verträglichen Zahlenfeld $U_{J,K}^{(0)}$ die Zahlenfelder

$$(13) U_{J,K}^{(n+1)} = \frac{\omega}{4} (U_{J+1,K}^{(n)} + U_{J-1,K}^{(n)} + U_{J,K+1}^{(n)} + U_{J,K-1}^{(n)}) + (1-\omega) U_{J,K}^{(n)}$$

Wenn der Overrelaxationsfaktor ω zwischen 1 und 2 liegt, konvergieren die $U_{J,K}^{(n)}$ gegen die Lösung von (12), da das System (12) diagonal-dominant ist, d.h. die Summe der Koeffizienten der nicht-diagonalen Glieder auf der rechten Seite von (12) ist ≤ 1 . Die Konvergenz erfolgt am schnellsten für $\omega \approx 1,8$ bis $1,85$.

Zur Rechentechnik: wir teilen jedem Punkt, der innerhalb von \mathcal{Q} liegt eine Zahl zu, z.B. 7, und jedem Punkt des Maschennetzes, welcher ausserhalb oder auf dem Rand liegt, eine andere Zahl, z.B. 8, so wie dies Abb. 17 zeigt.

Wenn dann das Rechenprogramm einen Punkt J,K mit der Zuordnungszahl 8 trifft, bleibt $U_{J,K}$ ungeändert.

Wenn das Programm einen Punkt mit der Zuordnungszahl 7 trifft, wird gemäss (13) iteriert. Wir sehen an Abb. 17: aus einem geraden, aber schrägliegenden Rand, z.B. der Ecke rechts unten, wird dabei eine Treppe mit Stufenlänge der Grössenordnung DZ und Stufenhöhe der Grössenordnung DY. Der hierdurch

entstehende Fehler greift allerdings nicht weit ins Innengebiet hinein (etwa $2 \cdot \text{DZ}$) und ist bedeutungslos.

Sehr viel schwieriger ist die Feststellung des Fehlers, welcher durch Abbruch der Iteration entsteht. Sei $H = \text{Maximum von } U_{J,K}^{(n+1)} - U_{J,K}^{(n)}$, dann ist bei einem Zahlenfeld mit 50×100 U-Werten der Fehler in der Bestimmung von U erfahrungsgemäss

am Rand von der Grössenordnung $3 H$
 in der Mitte von der Grössenordnung $30 H$.

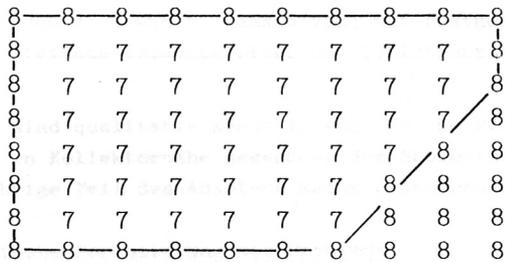


Abb. 17 Maschennetz mit Zuordnungszahlen
 Die Linien bezeichnen den Rand des Gebietes

Kapitel 4 Vermeidung von Magnetfeld-Asymmetrien in gewellten Spulen durch induktive Linsen in den Zuleitungsplatten

Wie in Kapitel 1 erwähnt, kann man bei gewellten Spulen senkrecht einfließen der Stromfäden vom Adapter auf die Grenze zwischen Adapter und Spule dadurch erreichen, dass man den Plattenabstand S variiert (s. Abb. 20 und 21). In diesem Kapitel wird S berechnet als Funktion des Ortes z, y aus der Bedingung, dass die Stromfäden senkrecht stehen auf der Grenze Adapter-Spule sowie einigen anderen Bedingungen (s. Gl. (20) und (26)).

Die Voraussetzungen, die dabei zusätzlich zu den in Kapitel 2 genannten Voraussetzungen gemacht werden, sind:

1. die Spule ist unendlich lang,
2. für das Magnetfeld im Spuleninnern wird eine periodische Funktion vorgegeben (Gl. 27) und die Spulenform daraus berechnet (Gl. 30),
3. der Zusammenhang zwischen dem Magnetfeld \mathcal{B} zwischen den Zuleitungsplatten und deren Abstand S sei beschreibbar durch

$$(15) \quad \frac{\partial}{\partial z} (S B_z) + \frac{\partial}{\partial y} (S B_y) = 0$$

Damit diese Gleichung gilt, muss S Bedingungen erfüllen, die in §4 zusammengestellt sind.

Für die Stromfäden (d.h. die Feldlinien der Stromdichte) wird ein Ansatz gemacht, welcher die Bedingung des senkrechten Einmündens vom Kollektor auf den Adapter sowie vom Adapter auf die Spule sowie noch einige weitere Bedingungen (s. Gl. (20) - (26)) erfüllt. In diesem Zusammenhang sei unter "Kollektor" derjenige Teil der Stromzuführung verstanden, bei welchem der Plattenabstand S konstant bleiben soll; der "Adapter" sei das Stück zwischen Kollektor und der stromführenden Innenseite der Spule. Die oben erwähnten Bedingungen für die Stromfäden beziehen sich nur auf die Grenzen des Adapters gegen Kollektor und Spule; der Ansatz für die Stromfäden ist daher weitgehend willkürlich. Der weitere Verlauf der Rechnung ist dann:

1. Aus dem Ansatz für die Stromfäden wird das Magnetfeld \mathcal{B} berechnet.
2. Aus \mathcal{B} wird dann mittels Gl. (15) der Plattenabstand S berechnet. Dabei besteht noch eine Freiheit: die Wahl der Randbedingungen oder damit äquivalenter Bedingungen für S (s. Gl.(18)). Diese Bedingungen wurden so gewählt, dass $s(y,z)$ bei festgehaltenem z einen vorgeschriebenen Minimumwert S_0 - die kleinste erlaubte Dicke der Isolationsschicht - zwar erreicht, aber nicht unterschreitet.

Die Resultate sind qualitativ schon in Abb. 20 und 21 dargestellt: in Nachbarschaft des Spulenbauches sowie in Kollektornähe gegenüber dem Spulen-Hals befindet sich je eine induktive Linse, während der übrige Teil des Adapters keine grösseren S -Schwankungen aufweist.

§1 Mathematische Formulierung des Problems

Zwischen einer Spule mit periodisch veränderlichem Radius $y = R(z)$ und einem Kollektor, dessen Rand beschrieben sei durch $y = y_a$ (S. Abb. 20,21) liegt ein Adapter mit variablem Plattenabstand $S(z,y)$, welcher aus folgenden Bedingungen zu bestimmen ist:

1. Bei $y = y_a$ besitzt das Magnetfeld die Komponenten
2. $S(z, y_a)$ ist unabhängig von z
3. Das Minimum von $S(z,y)$ bei festgehaltenem y soll einer vorgegebenen Konstante (der kleinsten zulässigen Dicke des Isoliermaterials) sein:

$$(16) \quad B_z = a \quad B_y = 0$$

$$(17) \quad S(z, y_a) \text{ ist unabhängig von } z$$

$$(18) \quad \min_{y=const.} S(z,y) = S_0$$

4. den Bedingungen für die Stromfäden. Sei

$$(19) \quad z = Z(y)$$

die Gleichung eines Stromfadens. Dann muss gelten

$$(20) \quad Z(y_a) = Z_a, \quad (Z_a \text{ sei diejenige Stelle, wo der Stromfaden in den Kollektor einmündet, s. Abb. 21})$$

$$(21) \quad \frac{dZ}{dy}(y_a) = 0 \quad (\text{der Stromfaden soll senkrecht auf der Grenze Adapter-Kollektor stehen})$$

$$(22) \quad \frac{d^2Z}{dy^2}(y_a) = 0 \quad (S(z,y) \text{ soll bei } y = y_a \text{ stetig sein})$$

$$(23) \quad Z(y_1) = Z_1 \quad (\text{Erläuterung s.u.})$$

$$(24) \quad \frac{dZ}{dy}(y_1) = - \frac{dR}{dz}(Z_1) \quad (\text{der Stromfaden soll senkrecht auf der Grenze Adapter-Spule stehen})$$

Hierbei sind y_1 und Z_1 definiert als derjenige Punkt auf der Spulenoberfläche, auf welchem dasselbe Potential U herrscht wie am Punkt Z_a, y_a . Nach Gl. (16) ist

$$U(z, y_a) = a \cdot z$$

folglich ist

$$U(Z_1, y_1) = a \cdot Z_a \quad \text{und} \quad y_1 = R(Z_1)$$

$$(25) \quad a \cdot R^2 = R^2 \left[a \cdot \cos^2 \left(\frac{z}{R} \right) \left(1 + \frac{(zR)'}{R} \right)^2 \right]$$

welches die implizite Darstellung der gesuchten Funktion $R(z)$ ist.

Es sei bemerkt, dass Bedingung 1 bzw. Gl. (16) in praxi sicher nicht erfüllt ist, da die Stromfäden bereits auf dem Kollektor verbogen werden; sie "spüren", wo auf dem Adapter induktive Linsen liegen. Wenn wir die Untersuchungen von Green et al. [5] über die Stromverteilungsinhomogenitäten im Adapter des linearen Theta-Pinches auf unser Problem übertragen dürfen, dann ist der Fehler infolge Benutzung von Gl. (16) von der Grössenordnung

$$\exp(-\pi(y_0 - R)/A)$$

Die Stromfäden sind durch die Gl. (16) - (24) nicht definiert. Wir benutzen daher einen willkürlichen Ansatz für $Z(y)$, nämlich

$$(25) \quad Z(y) = Z_a + c_1 (y - y_a)^3 (y^2 + c_2 y + c_3) + c_4 (y - y_a)^3 (y - y_1)^3$$

Dieser Ansatz befriedigt automatisch die Bedingungen (20), (21) und (22). Die Koeffizienten c_1, c_2, c_3 folgen sodann, indem man den Ansatz (25) in die Bedingungen (23), (24) und (26) einsetzt. Bedingung (26) lautet

$$(26) \quad \frac{d^2 Z}{dy^2} (y_1) = 0$$

und bewirkt, dass die induktive Linse in Nähe des Spulenbauches qualitativ so aussieht, wie dies in Abb. 20 dargestellt ist. Verzichtet man auf Bedingung (26), so liegt das Maximum von $S(z, y)$ direkt am Spulenrand. Der Adapter hat dann einen trompetenartigen Querschnitt, der Schlitz ist also sehr breit. Dies ist deswegen ungünstig, weil der die Asymmetrien verursachende Zusatzfluss (s. Abb. 12) proportional zur Schlitzbreite ist.

Das Glied mit c_4 in Gl. (25) ist so gebaut, dass es auch bei beliebiger Wahl von c_4 die Bedingungen (20) - (24) und (26) nicht stört. Es wurde benutzt, um einen Wendepunkt von $Z(y)$ an eine beliebige vorgegebene Stelle zu legen. Hierdurch lässt sich die Form der induktiven Linsen (gegenüber dem Spulenhals und in Nähe des Spulenbauches) beeinflussen. Doch geschieht dies stets so, dass, wenn man die eine Linse abflacht oder verbreitert, man dafür die andere Linse überhöht bzw. verschmälert.

§2 Zusammenhang zwischen dem Skalarpotential im Spuleninneren und dem Spulenradius

Das magnetische Skalarpotential im Spuleninneren sei $U(z, r)$, der Spulenradius sei $R(z)$. Wir berechnen $R(z)$ aus einem willkürlichen Ansatz für U , welcher genähert sinusförmige Feldlinien liefert:

$$(27) \quad U = az + b \sin(kz) \cdot J_0(ikr)$$

Hierbei bedeuten:

- a genähert die Stärke des homogenen Magnetfeldanteils
- b eine Konstante, die genähert proportional der Wellungsamplitude der Spule ist
- k die Wellenzahl π/A
- A die halbe Periodenlänge in z-Richtung
- J_0 Besselfunktion 0. Ordnung

Wir berechnen nun diejenige Feldlinie $R(z)$, welche einen mittleren Radius R_0 besitzt. Die so berechnete Funktion $R(z)$ beschreibt dann den Radius der Spule, in welcher das durch (27) beschriebene Magnetfeld herrscht.

Sei $2\pi F$ der Fluss durch die Feldlinienröhre $R(z)$, dann ist

$$(28) \quad F = \frac{a}{2} R_0^2$$

und

$$(29) \quad F = \int_0^R dr \, r \frac{dU}{dz}$$

Setzt man in Gl. (27) für die Besselfunktion die Entwicklung

$$J_0(ikr) = 1 + \left(\frac{kr}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{kr}{2}\right)^4$$

ein, so erhält man aus (28) und (29)

$$(30) \quad a R_0^2 = R^2 \left\{ a + bk (\cos kz) \cdot \left[1 + \frac{(kR)^2}{8} \left(1 + \frac{(kR)^2}{24} \right) \right] \right\}$$

welches die implizite Darstellung der gesuchten Funktion $R(z)$ ist.

§3 Lösung der Differentialgleichung $\text{div}(S \mathcal{L}) = 0$

Man unterteilt einen rechteckigen Bereich, welcher die Spule enthält, z.B.

$$0 \leq z \leq A \quad 0.9 R_0 \leq y \leq y_a$$

in Teilrechtecke mit den Gitterpunkten J,K (vgl. Abb. 22) und berechnet \mathcal{L} an diesen Gitterpunkten durch Interpolation. Ziel ist es, auch S an diesen Gitterpunkten zu bestimmen.

Die allgemeine Lösung zu

$$\text{div}(S \mathcal{L}) \cdot \frac{\partial}{\partial z}(SB_z) + \frac{\partial}{\partial y}(SB_y) = 0$$

ist

$$(32) \quad SB_z = \frac{\partial G}{\partial y} \quad SB_y = -\frac{\partial G}{\partial z}$$

wobei G eine Funktion von z und y bedeutet, welche auf den durch

$$(33) \quad \frac{dy}{dz} = \frac{B_y}{B_z}$$

definierten Magnetfeldlinienprojektionen in die z-y-Ebene konstant ist. Daraus resultiert folgendes numerische Lösungsverfahren: man bilde eine (möglichst grosse) Anzahl Feldlinienprojektionen $y = f_i(z)$. Dann ist G eine beliebige Funktion des Kurvenindex i. Um S am Punkt J,K zu finden, suchen wir den Kurvenindex L mit folgender Eigenschaft:

$$(34) \quad f_{L+1}(z_j) > y_K \geq f_L(z_j) \quad (\text{vgl. Abb. 23})$$

Dann lautet Gl. (32a) in Differenzenform:

$$(35) \quad S_{J,K} = \frac{\Delta G_L}{B_{z_{J,K}}(f_{L+1}(z_j) - f_L(z_j))}$$

G_L ist dabei so zu wählen, dass Bedingung (18) erfüllt ist. Dies geschieht folgendermassen: Wir suchen bei festgehaltenem L das Maximum D_L des Nenners von Gl. (35):

$$D_L = \text{Max} (B_{z_{J,K}} (f_{L+1}(z_j) - f_L(z_j)))$$

wobei K durch $y_K \leq f_L < y_{K+1}$

definiert ist. Dann ist

$$\Delta G_L = S_0 D_L$$

§4 Gültigkeitsgrenzen der Gleichung $\text{div}(S \mathcal{L}) = 0$

Wir betrachten das zwischen den Adapterplatten gelegene Volumelement mit den Eckpunkten P_1, P_2, \dots, P_8 , welches in Abb. 24 dargestellt ist. Die s-Koordinaten der Eckpunkte seien $s_1 \dots s_8$;

deren Mittelwerte seien: $s_{ik} = \frac{1}{2}(s_i + s_k)$ (s sei die Koordinate senkrecht zu z,y)

Die Gleichung für die Flussbilanz lautet dann:

$$dy \left[\int_{s_{26}}^{s_{48}} B_z(z+dz; y + \frac{1}{2} dy; s) ds - \int_{s_{15}}^{s_{37}} B_z(z; y + \frac{1}{2} dy; s) ds \right] + dz \left[\int_{s_{56}}^{s_{78}} B_y(z + \frac{1}{2} dz; y + dy; s) ds - \int_{s_{12}}^{s_{34}} B_y(z + \frac{1}{2} dz; y; s) ds \right] = 0 \quad dz'$$

Nur wenn die s-Abhängigkeit bei B_z und B_y vernachlässigt werden darf, lässt sich die Integration ausführen und führt wegen

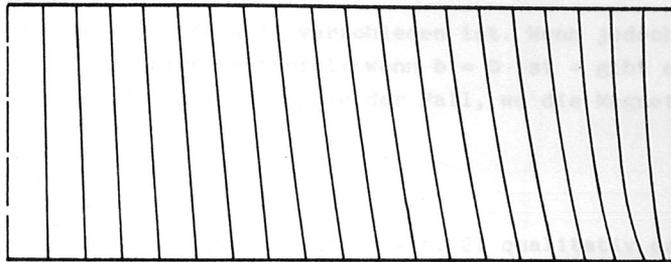
$$s_{48} - s_{26} = S(z + dz; y + \frac{1}{2} dy) \quad (\text{vgl. Abb. 25})$$

$$s_{37} - s_{17} = S(z; y + \frac{1}{2} dy) \quad \dots\dots\dots$$

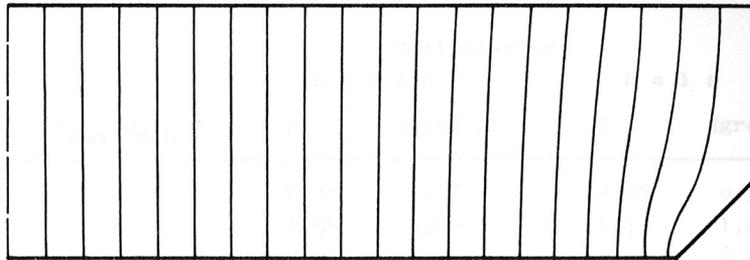
auf die zu untersuchende Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial z}(SB_z) + \frac{\partial}{\partial y}(SB_y) \equiv \text{div}(S \mathcal{L}) = 0$$

Wir haben also zu untersuchen, wann die s-Abhängigkeit bei B_z und B_y vernachlässigt werden darf



a)



b)

Abb. 18 Teil des Adapters mit Stromfaden

oben: ohne Ende

unten: überstehender Adapter

Die Spule schliesst sich an der Stelle,
wo R eingetragen ist.

und tun dies für den Spezialfall, dass die Adapterplatten beschrieben seien durch $s = qy$ und $s = -qy$, was in praxi in guter Näherung stückweise erfüllt ist. Die exakte Lösung für diesen Spezialfall lautet

$$U = az + b \ln(y^2 + s^2) \quad B_z = a \quad B_y = \frac{2by}{y^2 + s^2} \quad B_s = \frac{2bs}{y^2 + s^2}$$

Wir sehen hieran, dass $s \ll y$ bzw. $q \ll 1$ oder $|\text{grad } S| \ll 1$

sein muss, falls B_y merklich von Null verschieden ist. Wenn jedoch \mathcal{H} und grad S senkrecht zueinander stehen - d.h. in obigem Beispiel: wenn $b = 0$ ist - gibt es keine Bedingungen für grad S. Dies ist z.B. im Grenzgebiet Adapter-Spule der Fall, wo die Magnetfeldlinien nahezu parallel zu $R(z)$ verlaufen.

§5 Resultate

Wie bereits in der Einleitung erwähnt und in Abb. 21 qualitativ dargestellt, kann man senkrecht einfließen der Stromfäden vom Adapter auf die Spule wenigstens theoretisch erreichen, indem man in der Nähe des Spulen-Bauches sowie gegenüber dem Spulenhals je eine induktive Linse einbaut. Quantitative Rechenergebnisse sind in Abb. 24 sowie in Tabelle 2 zusammengestellt.

Zu Tabelle 2: Sämtliche Längen sind in mm angegeben. Bei allen hier vorgeführten Rechnungen ist $S_0 = 1,2$ mm, $R_{\min} = 53$ mm, $A = 100$ mm. Abb. 27 zeigt die Verhältnisse in natürlicher Grösse.

Tabelle 2

y_a	$R_{\max} - R_{\min}$	Maximalwerte			
		B a u c h		H a l s	
		S	$ \text{grad } S $	S	$ \text{grad } S $
91,5	2	2,38	0,17	2,25	0,36
91,5	4	4,55	0,6	4,15	1,0
91,5	6	7,7	1,5	7,2	2,4
112,9	6	4,1	0,3	3,0	0,3
140	6	3,2	0,15	2,11	0,17
160	6	2,84	0,1	1,8	0,1
180	6	2,67	0,06	1,63	0,07

Das Wort "Maximalwerte Hals" soll dabei "Maximalwerte bei der gegenüber dem Spulenhals gelegenen Linse" bedeuten, welche in Abb. 20 oben rechts eingetragen ist.

Bei der Berechnung (siehe Ansatz Gl. (21)) wurde c_4 so gewählt, dass $Z(y)$ bei

$$(41) \quad y_2 = R(z) + 0,3 - 0,2z \text{ (cm)} = R(z) + 3 - 0,2 \cdot z \text{ (mm)}$$

einen Wendepunkt hat. Abb. 26 zeigt die $Z(y)$ als ausgezogene Kurven sowie $R(z)$ und $y_2(z)$ als gestrichelte Kurven, allerdings, um die Kurvenformen deutlich hervortreten zu lassen, für die Wellung $R_{\max} - R_{\min} = 13$. Auch Abb. 26 ist - wie Abb. 27 - Resultat quantitativer Rechnungen.

Auffallend ist die starke Abhängigkeit von y_a : verbreitert man den Adapter von $y_a - R(z) \approx 40$ mm nur um gut 2 cm auf 61 mm, so sinkt grad S von 2,4 auf 0,3.

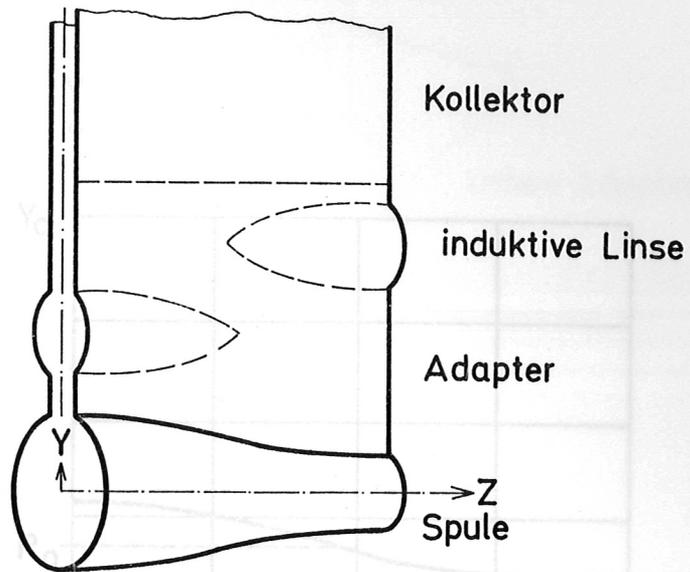


Abb. 20 Eine Halbperiode der Anordnung

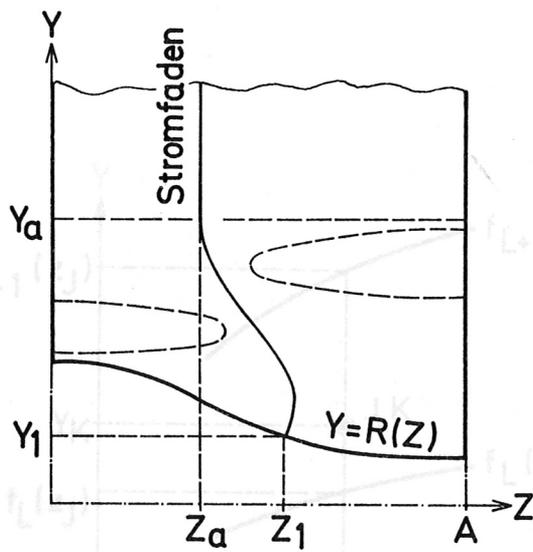


Abb. 21 Projektion von Abb. 1 in die z-y-Ebene
Darstellung eines Stromfadens

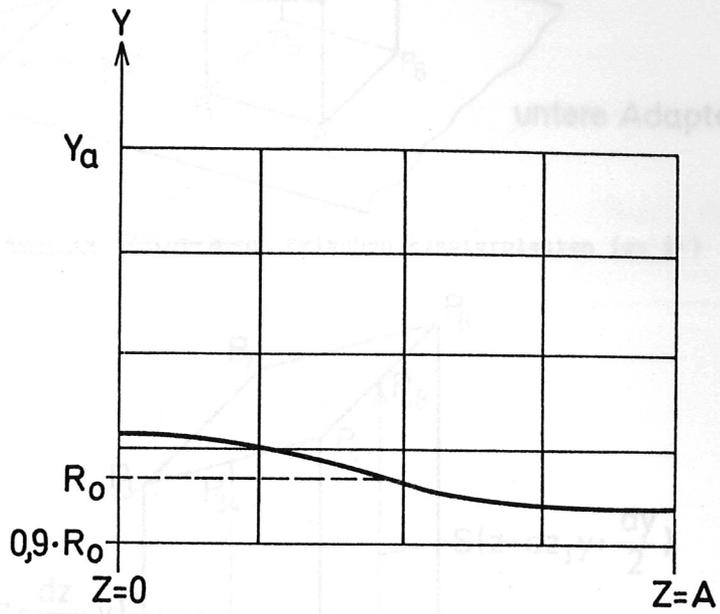


Abb. 22

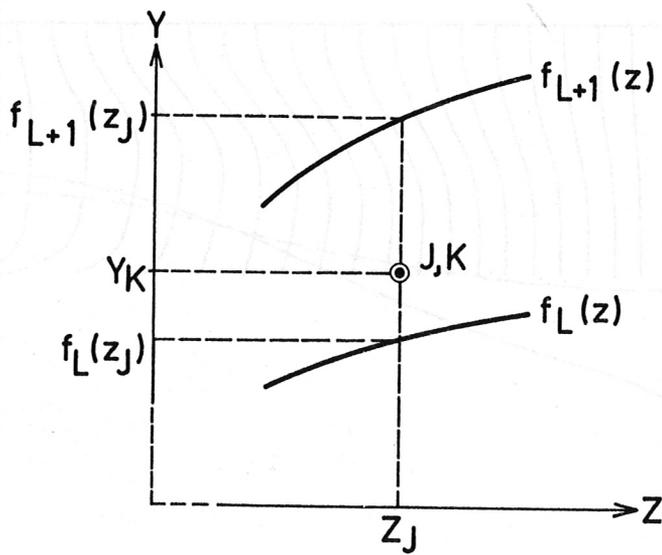


Abb. 23

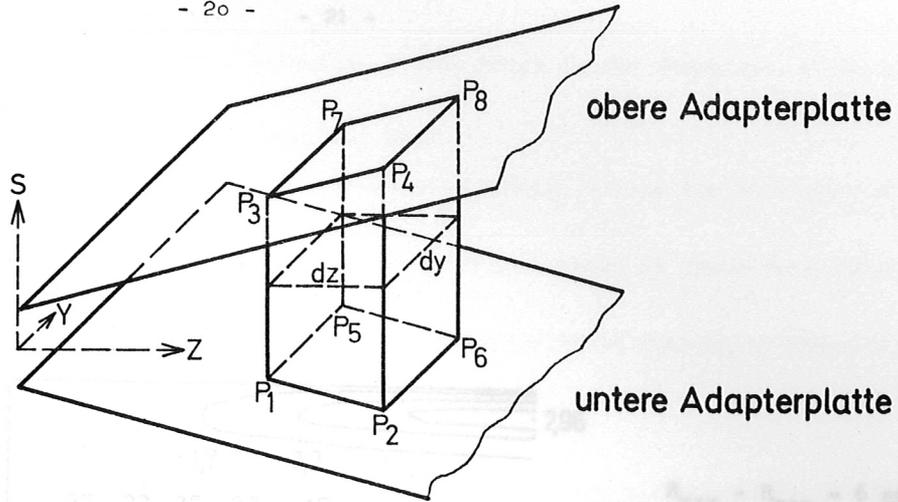


Abb. 24 Volumelement zwischen Adapterplatten (zu §4)

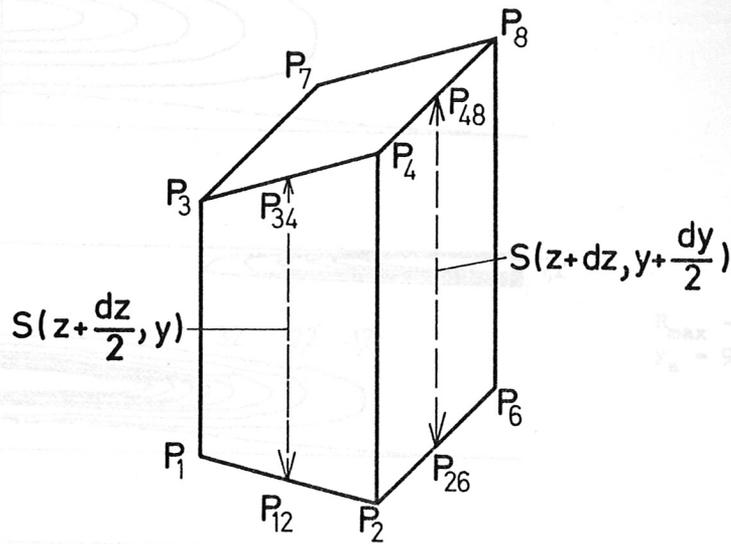


Abb. 25 Volumelement zwischen Adapterplatten

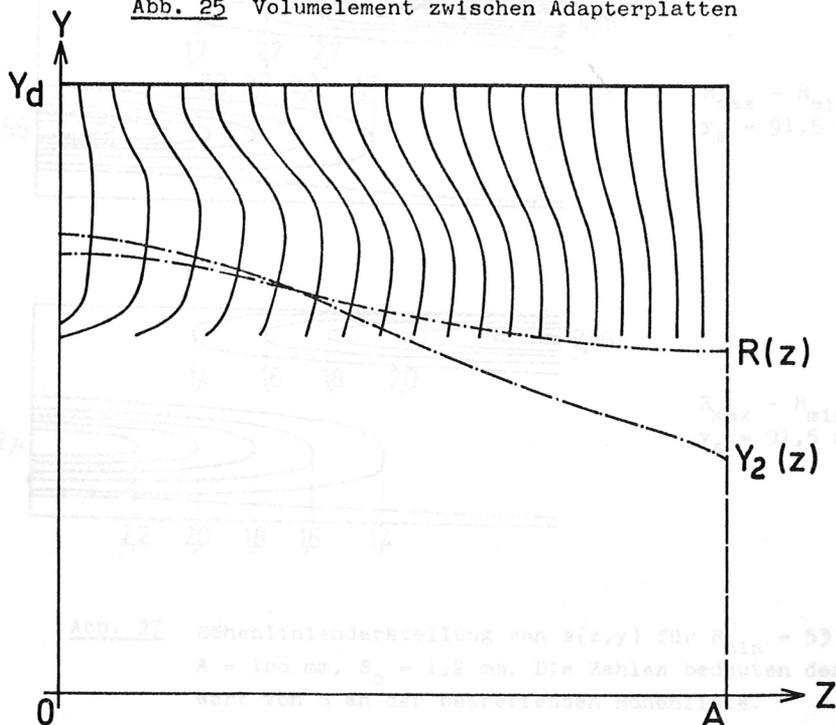


Abb. 26

Referenzen

- 1) K. G. G. Kell, Kell, Niblett, Reynolds, Plasma Drift in the Thermos, Phys. of Fluids 5, 1962, 1120
- 2) Decker, Theorie der Elektrizität, Band 1
- 3) G. G. G. Kell, Handbuch der Hochfrequenz- und Elektrotechnik, Verlag für Radio- und Fernstudien, Berlin, 1961, S. 100
- 4) G. G. G. Kell, Handbuch der Hochfrequenz- und Elektrotechnik, Verlag für Radio- und Fernstudien, Berlin, 1961, S. 100
- 5) G. G. G. Kell, Handbuch der Hochfrequenz- und Elektrotechnik, Verlag für Radio- und Fernstudien, Berlin, 1961, S. 100

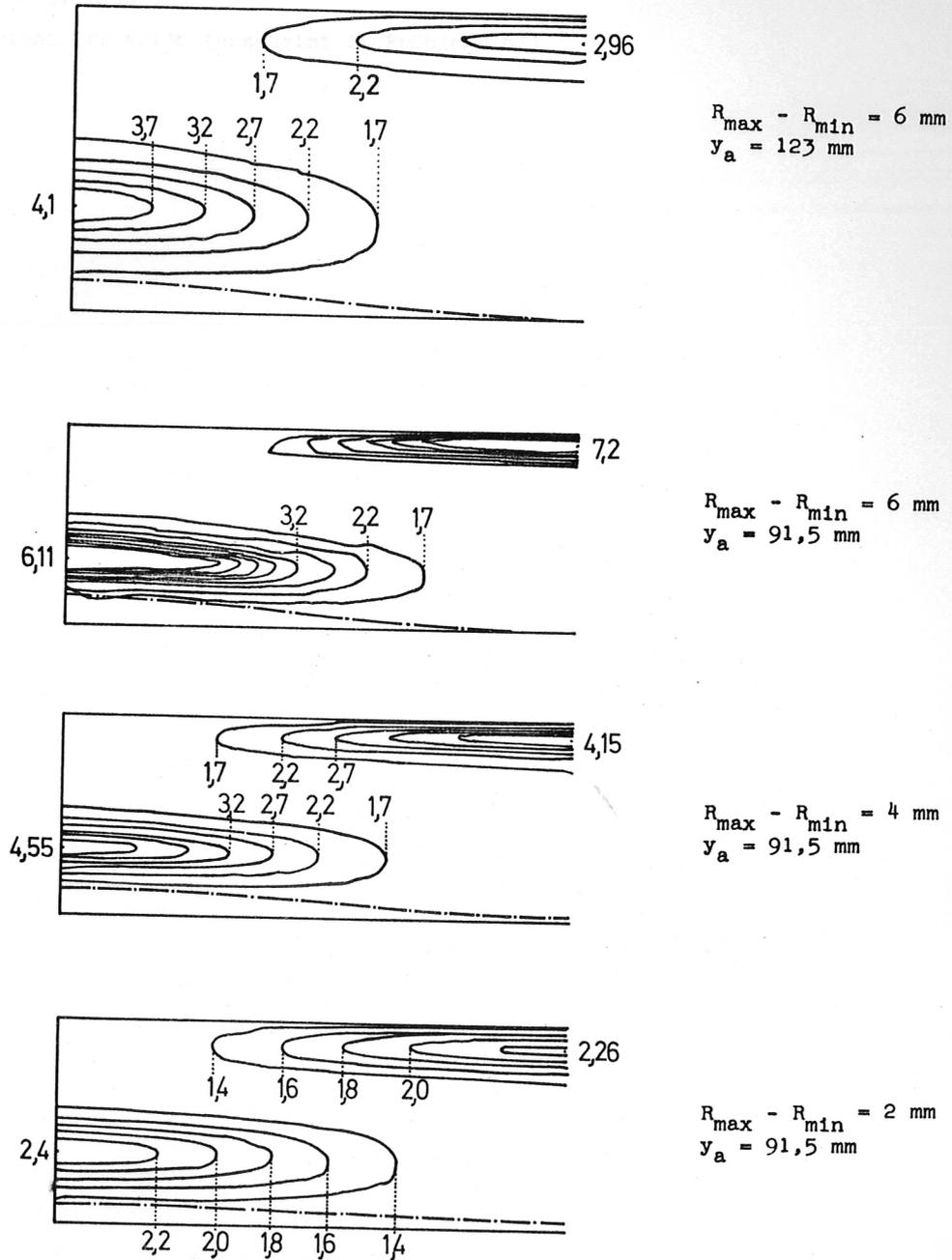


Abb. 27 Höhenliniendarstellung von $s(z,y)$ für $R_{\min} = 53 \text{ mm}$, $A = 100 \text{ mm}$, $S_0 = 1,2 \text{ mm}$. Die Zahlen bedeuten den Wert von S an der betreffenden Höhenlinie.

References

- [1] Aldridge, Keilhacker, Niblett, Reynolds, Plasma Drift in the Thetatron, Phys. of Fluids 8, Nr. 3 (1965)
- [2] Becker-Sauter, Theorie der Elektrizität, Band I
- [3] Hertwig, Handbuch für Hochfrequenz- und Elektrotechnik, Verlag für Radio-Foto-Kinotechnik, Berlin, Band 1. S. 248
- [4] Pohl, Herold, Numerische Berechnung des Vakuum-Magnetfeldes in Theta-Pinch-Spulen, IPP 1/31 (1964)
- [5] Green, Hill, Newton, Segre, Some Comments on Magnetic Field shaping in Theta Pinch Coils, Culham M 43, (1965)
- [6] Laborbericht IPP 4/138 (erscheint im Frühjahr 67)

This report is to be treated as strictly confidential.

The Institut für Plasmaphysik holds the exclusive rights of publication, reproduction, investigation and translation into foreign languages of the original text, drawings, tables, etc., wholly or partially, also of excerpts or summaries, as well as of the technical and scientific contents of this report. Exceptions in these restrictions require written permission.

Furthermore, the Institut für Plasmaphysik reserves the right of exclusive exploitation of the information contained in this report, for the purpose of obtaining protective industrial rights, particularly patent and utility patent rights at home and abroad. Actions of this nature taken on the basis of the knowledge gained from this report cannot be regarded as regards for violating the right of prior use ("Verbotswidrigkeit") according to article 1 paragraph 1, last sentence of the German Patent Law. The reader is referred to article 1 of the Patent Law. For reasons stipulated by the Patent Law, the report must not be disclosed to public libraries, or lent out indiscriminately.

The Institut für Plasmaphysik does not guarantee that the information given in this report is free from protective rights such as patent rights, utility patent rights or trade-mark rights.

No guarantee is given in respect of the accuracy, completeness or usefulness of the information contained in this report. Thus, no liability can be accepted for damage resulting from use of the information, or of the apparatus, methods and procedures described.