

Druckerhöhung und Wärmeleitfähigkeit in einem
unendlich langen, zylindersymmetrischen Was-
serstoffplasma in einem axialen Magnetfeld

Pressure Increase and Thermal Conductivity
in an Infinitely Long Cylindrical Hydrogen
Plasma in an Axial Magnetic Field

J. Raeder, S. Wirtz

IPP 3/65

Dezember 1967

I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K

G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Druckerhöhung und Wärmeleitfähigkeit in einem
unendlich langen, zylindersymmetrischen Was-
serstoffplasma in einem axialen Magnetfeld

Pressure Increase and Thermal Conductivity
in an Infinitely Long Cylindrical Hydrogen
Plasma in an Axial Magnetic Field

J. Raeder, S. Wirtz

IPP 3/65

Dezember 1967

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

December 1967 (in German)

ABSTRACT

The pressure increase and total thermal conductivity are calculated for an infinitely long hydrogen plasma column in an axial magnetic field. The calculations, which are based on the first and third moments of the Boltzmann equations for atoms, ions and electrons, are carried out under the assumption of local thermal equilibrium. Numerical results are given for magnetic fields up to 150 kG, temperatures to 10^6 °K and external pressures ranging from 10^3 to 10^5 dyne/cm². Comparing these results with previous calculations, which neglect thermal forces, shows that they cause an increase of pressure also in the completely ionized plasma and therefore modify the thermal conductivity indirectly.

1. Einleitung

Überlagert man einer zylindersymmetrischen Bogenentladung ein homogenes, axiales Magnetfeld, so verursacht dieses einen Anstieg des Gesamtdruckes vom Bogenrand zu den heißen Zonen im Inneren hin. Die Ursache dafür sind radial nach innen gerichtete Kräfte, die aus der Wechselwirkung des Magnetfeldes mit azimuthalen Strömen resultieren. Diese kann man im Bereich teilweiser Ionisation im wesentlichen auf die gemeinsam nach aussen diffundierenden Ionen und Elektronen (ambipolare Diffusion) zurückführen, die durch das Magnetfeld in zueinander entgegengesetzten Richtungen azimuthal abgelenkt werden. Die Ergebnisse der von Wienecke (1) durchgeführten Rechnungen für diesen Fall werden durch Messungen von Döbele (2) an einem Wasserstoffbogen im Bereich teilweiser Ionisation bestätigt. Bei vollständiger Ionisation ergibt diese Theorie einen konstanten Druck, da dann der ambipolare Diffusionsstrom verschwindet. Dagegen liefern Messungen von Grassmann, Klüber und Wulff (3) an einem Heliumplasma und von Mahn, Ringler und Zankl (4) an einem Wasserstoffplasma auch im Bereich vollständiger Ionisation eine weitere Zunahme des Druckes mit der Temperatur. Der Grund dafür sind wiederum azimuthale Ströme, die im vollionisierten Plasma allerdings durch den Einfluß des Magnetfeldes auf die Thermodiffusion, den Nernsteffekt, (proportional zu $\nabla T \times \vec{B}$) und auf die Reibung zwischen Ionen und Elektronen verursacht werden.

Ziel dieses Berichtes ist die Berechnung des Druckaufbaues und des radialen Wärmestromes in einem unendlich langen, zylindersymmetrischen Wasserstoffplasma unter Berücksichtigung der Thermodiffusionseffekte in den Momentengleichungen der Plasmakomponenten im Temperaturbereich von $6 \cdot 10^3 - 10^6$ OK

2. Grundgleichungen und Annahmen

Als Ausgangspunkt dienen die von Feneberg (5) angegebenen Gleichungen für das erste und dritte Moment der Boltzmann-Gleichungen eines Dreiteilchensystems aus Neutralteilchen, Ionen und Elektronen.

1. Moment

$$\nabla p_0 = -m_0 n_0 v_i (\vec{v}_0 - \vec{v}_i) + m_e n_e v_{e0} (\vec{v}_e - \vec{v}_0) + \frac{m_i}{5kT} v_{i0} \vec{S}_i - \frac{m_e}{5kT} v_{e0} \vec{S}_e + \frac{m_e}{5kT} v_{e0} \vec{S}_e, \quad (1a)$$

$$\nabla p_i - n_i e (\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B}) = -m_i n_i v_{i0} (\vec{v}_i - \vec{v}_0) + m_e n_e v_{ei} (\vec{v}_e - \vec{v}_i) - \frac{3m_e}{5kT} v_{ei} \vec{S}_e - \frac{m_i}{5kT} v_{i0} \vec{S}_i + \frac{m_i}{5kT} v_{i0} \vec{S}_0, \quad (1b)$$

$$\nabla p_e + n_e e (\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}) = -m_e n_e v_{e0} (\vec{v}_e - \vec{v}_0) - m_e n_e v_{ei} (\vec{v}_e - \vec{v}_i) + \frac{3m_e}{5kT} v_{ei} \vec{S}_e - \frac{m_e}{5kT} v_{e0} \vec{S}_e. \quad (1c)$$

3. Moment

$$\frac{5}{2} \frac{p_0}{m_i} \nabla(kT) = -\frac{p_0}{2} v_{i0} (\vec{v}_0 - \vec{v}_i) + \vec{S}_i (0,825 v_{i0}) - \vec{S}_0 (0,8 v_{00} + 0,825 v_{i0}), \quad (2a)$$

$$\frac{5}{2} \frac{p_i}{m_i} \nabla(kT) - \vec{S}_i \times \vec{\Omega} = -\frac{p_i}{2} v_{i0} (\vec{v}_i - \vec{v}_0) - \vec{S}_i (0,4 v_{i0} + 0,825 v_{i0}) + \vec{S}_0 (0,825 v_{i0}), \quad (2b)$$

$$\frac{5}{2} \frac{p_e}{m_e} \nabla(kT) + \vec{S}_e \times \vec{\omega} = -\frac{p_e}{2} v_{e0} (\vec{v}_e - \vec{v}_0) + \frac{3}{2} p_e v_{ei} (\vec{v}_e - \vec{v}_i) - \vec{S}_e (1,3 v_{e0}) - \vec{S}_i (1,866 v_{ei}). \quad (2c)$$

\vec{S}_0 , \vec{S}_i und \vec{S}_e sind die Wärmeströme der einzelnen Sorten, $\vec{\omega} = \frac{e\vec{B}}{m_e} = \frac{e\vec{B}}{m_e} \vec{h} = \omega \vec{h}$ und $\vec{\Omega} = \frac{e\vec{B}}{m_i} = \frac{e\vec{B}}{m_i} \vec{h} = \Omega \vec{h}$.

Diese Gleichungen wurden unter folgenden Voraussetzungen abgeleitet, bzw. enthalten folgende Näherungen:

- Alle Vorgänge sind stationär.
- Die Abweichungen vom thermodynamischen Gleichgewicht sind so klein, daß die Transportgleichungen in guter Näherung linear sind.
- Sie gelten nur für nicht zu kleine $\omega \tau_e$ ($\omega \tau_e > 1$), d.h. stellen nur senkrecht zu einem nicht zu schwachen Magnetfeld eine gute Näherung dar.
- Der Druck wird isotrop angenommen.
- Unelastische Stöße werden in den Momentengleichungen nicht berücksichtigt.
- Für die Stöße zwischen Wasserstoffatomen und -ionen wurde der Stoßquerschnitt, der nur zu

Richtungsänderungen führt, gegen den Umladungsquerschnitt vernachlässigt. Dieser ist für Stöße von Atomen mit ihren Ionen besonders groß, da dabei ein Resonanzeffekt auftritt. Der Umladungsquerschnitt wurde konstant gesetzt. Das ist für den Temperaturbereich, in dem er wesentlich ist (6000 °K - 20 000 °K), eine gute Näherung [6].

g) Der Einfluß des Magnetfeldes auf die Stoßprozesse wird vernachlässigt, d.h. der Larmorradius muß wesentlich größer als die Debyelänge sein.

Die Summe der Gleichungen (1a), (1b) und (1c) ergibt die Bewegungsgleichung des gesamten Plasmas:

$$\nabla p - \vec{j} \times \vec{B} = 0 \quad (3)$$

mit

$$p = p_0 + p_i + p_e = p_0 + p$$

3. Berechnung des Druckverlaufes p(T)

3.1. Elimination der Wärmeströme \vec{S}_0 , \vec{S}_i und \vec{S}_e aus den Momentengleichungen

Um den Druckverlauf p(T) berechnen zu können, werden die Wärmeströme \vec{S}_0 , \vec{S}_i und \vec{S}_e aus den Gleichungen für die dritten Momente (2a), (2b) und (2c) ausgerechnet und in die Impulsbilanzen (1a), (1b), (1c) eingesetzt. Die Gl.(2c) hat die Form:

$$\vec{S}_e \vec{\omega} \times \vec{h} + \frac{1}{\epsilon_e} \vec{S}_e = -\vec{A}$$

oder

$$\omega \epsilon_e \vec{S}_e \times \vec{h} + \vec{S}_e = -\vec{A} \epsilon_e$$

mit

$$\vec{A} = \frac{5}{2} \frac{p_e}{m_e} \nabla(kT) + \frac{p_e}{2} \nu_{e0} (\vec{v}_e - \vec{v}_0) - \frac{3}{2} p_e \nu_{ei} (\vec{v}_e - \vec{v}_i)$$

und

$$\frac{1}{\epsilon_e} = 1,3 \nu_{e0} + 1,866 \nu_{ei}$$

Zerlegt man die Vektoren \vec{S}_e und \vec{A} in ihre Anteile $\vec{S}_{e\parallel}$, $\vec{S}_{e\perp}$ bzw. \vec{A}_{\parallel} , \vec{A}_{\perp} parallel und senkrecht zum Magnetfeld \vec{B} , so erhält man nach kurzer Rechnung:

$$\vec{S}_{e\parallel} = -\epsilon_e \vec{A}_{\parallel} \quad (4a)$$

$$\vec{S}_{e\perp} = -\frac{\epsilon_e}{1+(\omega \epsilon_e)^2} \vec{A}_{\perp} + \frac{\omega \epsilon_e^2}{1+(\omega \epsilon_e)^2} \vec{A}_{\perp} \times \vec{h} \quad (4b)$$

\vec{S}_0 aus Gl.(2a) ausgerechnet und in Gl.(2b) eingesetzt ergibt:

$$\frac{1}{\epsilon_i} \vec{S}_i - \Omega \vec{S}_i \times \vec{h} = -\vec{C}$$

mit

$$\vec{C} = \frac{5}{2} \frac{p_i}{m_i} \left(1 + \frac{\epsilon_i}{\epsilon_0}\right) \nabla(kT) + \frac{p_i}{2} \nu_{i0} \left(1 - \frac{\epsilon_i}{\epsilon_0}\right) (\vec{v}_i - \vec{v}_0)$$

und

$$\frac{1}{\epsilon_i} = 0,4 \nu_{ii} + 0,825 \nu_{i0} - 0,825 \nu_{ei} \frac{\epsilon_i}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_{ii}} + \frac{1}{\epsilon_{i0}} - \frac{\epsilon_i}{\epsilon_0 \epsilon_{ei}}$$

Damit erhält man:

$$\vec{S}_{i\parallel} = -\epsilon_i \vec{C}_{\parallel} \quad (5a)$$

$$\vec{S}_{i\perp} = -\frac{\epsilon_i}{1+(\Omega \epsilon_i)^2} \vec{C}_{\perp} - \frac{\Omega \epsilon_i^2}{1+(\Omega \epsilon_i)^2} \vec{C}_{\perp} \times \vec{h} \quad (5b)$$

Setzt man die Wärmeströme \vec{S}_0 , \vec{S}_i und \vec{S}_e in die Impulsbilanz (1c) der Elektronen ein und verwendet die Zustandsgleichung $p_{\alpha} = n_{\alpha} kT$ ($\alpha = 0, i, e$), so ergibt sich:

Für die Ionen und Neutralteilchen ergeben sich Gleichungen analog zu (5) bzw. (6a), die hier aber nicht wiedergegeben werden, da es für die weitere Rechnung günstiger ist, die Helizitätsgeschwindigkeiten $\vec{v}_0 = \vec{v}_0$, $\vec{v}_i = \vec{v}_i$ und $\vec{v}_e = \vec{v}_e$ durch die Schwerpunktschwindigkeit \vec{V} des Plasmas, durch die Schwerpunktschwindigkeit \vec{V}_0 der Ladungsträger und die Stromdichte auszudrücken.

$$\begin{aligned}
 \nabla p_e + ne(\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}) = & -s_e \nu_{e0} [\alpha_1 (\vec{v}_e - \vec{v}_0)_\parallel + \alpha_2 (\vec{v}_e - \vec{v}_0)_\perp + \alpha_3 (\vec{v}_e - \vec{v}_0) \times \vec{h} \\
 & + \alpha'_1 (\vec{v}_e - \vec{v}_i)_\parallel + \alpha'_2 (\vec{v}_e - \vec{v}_i)_\perp + \alpha'_3 (\vec{v}_e - \vec{v}_i) \times \vec{h}] \\
 & -s_e \nu_{ei} [\delta_1 (\vec{v}_e - \vec{v}_0)_\parallel + \delta_2 (\vec{v}_e - \vec{v}_0)_\perp + \delta_3 (\vec{v}_e - \vec{v}_0) \times \vec{h} \\
 & + \delta'_1 (\vec{v}_e - \vec{v}_i)_\parallel + \delta'_2 (\vec{v}_e - \vec{v}_i)_\perp + \delta'_3 (\vec{v}_e - \vec{v}_i) \times \vec{h}] \\
 & + s_e \nu_{e0} [\alpha''_1 \nabla_\parallel T + \alpha''_2 \nabla_\perp T + \alpha''_3 \nabla T \times \vec{h}] + s_e \nu_{ei} [\delta''_1 \nabla_\parallel T + \delta''_2 \nabla_\perp T + \delta''_3 \nabla T \times \vec{h}]
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

mit den Abkürzungen:

$\alpha_1 = 1 - 0,1 \tau_e \nu_{e0}$	$\alpha'_1 = 0,3 \tau_e \nu_{ei}$	$\alpha''_1 = \frac{1}{2} \frac{k}{m_e} \tau_e$
$\alpha_2 = 1 - 0,1 K_e \nu_{e0}$	$\alpha'_2 = 0,3 K_e \nu_{ei}$	$\alpha''_2 = \frac{1}{2} \frac{k}{m_e} K_e$
$\alpha_3 = 0,1 K_e \nu_{e0} \omega \tau_e$	$\alpha'_3 = -0,3 K_e \nu_{ei} \omega \tau_e$	$\alpha''_3 = \frac{1}{2} \frac{k}{m_e} K_e \omega \tau_e$
$\delta_1 = 0,3 \tau_e \nu_{e0}$	$\delta'_1 = 1 - 0,9 \tau_e \nu_{ei}$	$\delta''_1 = -3 \alpha''_1$
$\delta_2 = 0,3 K_e \tau_e \nu_{e0}$	$\delta'_2 = 1 - 0,9 K_e \nu_{ei}$	$\delta''_2 = -3 \alpha''_2$
$\delta_3 = -0,3 K_e \nu_{e0} \omega \tau_e$	$\delta'_3 = 0,9 K_e \nu_{ei} \omega \tau_e$	$\delta''_3 = -3 \alpha''_3$
$K_e = \frac{\tau_e}{1 + (\omega \tau_e)^2}$		

Führt man ein Zylinderkoordinatensystem (r, φ, z) ein, dessen z -Richtung mit der Richtung des Magnetfeldes (\vec{B}, \vec{h}) zusammenfällt, so kann man Gl.(6) übersichtlicher schreiben:

$$\begin{aligned}
 \nabla p_e + ne(\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}) = & -s_e \nu_{e0} \overline{\alpha} (\vec{v}_e - \vec{v}_0) - s_e \nu_{e0} \overline{\alpha'} (\vec{v}_e - \vec{v}_i) \\
 & -s_e \nu_{ei} \overline{\delta} (\vec{v}_e - \vec{v}_0) - s_e \nu_{ei} \overline{\delta'} (\vec{v}_e - \vec{v}_i) \\
 & + s_e \nu_{e0} \overline{\alpha''} \nabla T + s_e \nu_{ei} \overline{\delta''} \nabla T
 \end{aligned}
 \tag{6a}$$

wobei $\overline{\alpha}, \overline{\alpha'}, \overline{\alpha''}, \overline{\delta}, \overline{\delta'}, \overline{\delta''}$ Tensoren sind.

Beispielsweise lautet die Matrix von $\overline{\alpha}$:

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ -\alpha_3 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Im Plasma mit Magnetfeld gehen die Reibungskräfte zwischen den verschiedenen Teilchenströmen und die Thermokräfte also aus den entsprechenden Relativgeschwindigkeiten bzw. dem Temperaturgradienten durch Multiplikation mit einem Tensor hervor. Deshalb sind sie nicht mehr parallel (oder antiparallel) sondern stehen schief zu den entsprechenden Relativgeschwindigkeiten bzw. dem Temperaturgradienten. Mit verschwindendem Magnetfeld verschwinden in den Matrizen die Glieder ausserhalb der Diagonalen, während alle Diagonalglieder den gleichen Wert annehmen, d.h. der Tensor reduziert sich auf einen skalaren Faktor.

Für die Ionen und Neutralteilchen ergeben sich Gleichungen analog zu (6) bzw. (6a), die hier aber nicht wiedergegeben werden, da es für die weitere Rechnung günstiger ist, die Relativgeschwindigkeiten $\vec{v}_e - \vec{v}_0, \vec{v}_i - \vec{v}_0$ und $\vec{v}_e - \vec{v}_i$ durch die Schwerpunktschwindigkeit \vec{v} des Plasmas, durch die Schwerpunktschwindigkeit \vec{v}_L der Ladungsträger und die Stromdichte auszudrücken.

Aus

$$g_L \vec{v}_L = n_e m_e \vec{v}_e + n_i m_i \vec{v}_i$$

$$g \vec{v} = g_L \vec{v}_L + n_e m_e \vec{v}_e$$

$$n_L = n_e = n_i = n$$

$$m_o = m_e + m_i$$

$$\vec{j} = n_e e (\vec{v}_i - \vec{v}_e)$$

folgen die Gleichungen:

$$\vec{v}_e - \vec{v}_o = \frac{n + n_o}{n} (\vec{v}_L - \vec{v}) - \frac{m_i}{m_o} \frac{\vec{j}}{ne} \quad (7a)$$

$$\vec{v}_i - \vec{v}_o = \frac{n + n_o}{n_o} (\vec{v}_L - \vec{v}) + \frac{m_e}{m_o} \frac{\vec{j}}{ne} \quad (7b)$$

$$\vec{v}_i - \vec{v}_e = \frac{\vec{j}}{ne} \quad (7c)$$

Berücksichtigt man noch $\frac{m_e}{m_o} \approx \frac{m_e}{m_i} \ll 1$, so erhält man die Impulsbilanzen der Ionen und Elektronen in der Form

$$\nabla p_i - ne(\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B}) = g_1 (\vec{v}_L - \vec{v})_{||} + g_2 (\vec{v}_L - \vec{v})_{\perp} + g_3 (\vec{v}_L - \vec{v}) \times \vec{h} + l_1 \vec{j}_{||} + l_2 \vec{j}_{\perp} + l_3 \vec{j} \times \vec{h} + k_1 \nabla_{||} T + k_2 \nabla_{\perp} T + k_3 \nabla T \times \vec{h} \quad (8)$$

$$\nabla p_e + ne(\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}) = d_1 (\vec{v}_L - \vec{v})_{||} + d_2 (\vec{v}_L - \vec{v})_{\perp} + d_3 (\vec{v}_L - \vec{v}) \times \vec{h} + f_1 \vec{j}_{||} + f_2 \vec{j}_{\perp} + f_3 \vec{j} \times \vec{h} + e_1 \nabla_{||} T + e_2 \nabla_{\perp} T + e_3 \nabla T \times \vec{h} \quad (9)$$

Die Koeffizienten d_{α} , e_{α} , f_{α} , g_{α} , k_{α} , l_{α} sind am Ende des Berichtes zusammengefaßt. Addition der Gleichungen (8) und (9) ergibt schließlich:

$$\nabla p_L - \vec{j} \times \vec{B} = a_1 (\vec{v}_L - \vec{v})_{||} + a_2 (\vec{v}_L - \vec{v})_{\perp} + a_3 (\vec{v}_L - \vec{v}) \times \vec{h} + b_1 \vec{j}_{||} + b_2 \vec{j}_{\perp} + b_3 \vec{j} \times \vec{h} + c_1 \nabla_{||} T + c_2 \nabla_{\perp} T + c_3 \nabla T \times \vec{h} \quad (10)$$

mit

$$p_L = p_e + p_i = 2p_e$$

$$a_{\alpha} = d_{\alpha} + g_{\alpha}$$

$$b_{\alpha} = f_{\alpha} + l_{\alpha} \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

$$c_{\alpha} = e_{\alpha} + k_{\alpha}$$

3.2. Aufstellung der Differentialgleichung für den Druckverlauf in einer unendlich langen, zylindersymmetrischen Plasmasäule

Um den Druckverlauf $p(T)$ berechnen zu können, werden die Gleichungen auf den Fall einer unendlich langen ($\partial/\partial z = 0$) zylindersymmetrischen ($\partial/\partial \varphi = 0$) Plasmasäule spezialisiert. In einem Zylinderkoordinatensystem (r, φ, z) besitzen die vorkommenden Vektoren die Komponenten:

$$\begin{aligned} \vec{B} & (0, 0, B), \\ \nabla p & \left(\frac{\partial p}{\partial r}, 0, 0 \right), \\ \vec{v} & (v_r, v_{\varphi}, v_z), \\ \vec{v}_L & (v_{Lr}, v_{L\varphi}, v_{Lz}). \end{aligned}$$

Aus den Maxwell'schen Gleichungen folgt:

$$\vec{E} (E_r, 0, E_z) \quad (\text{rot } \vec{E} = 0 \Rightarrow E_{\varphi} = 0),$$

$$\vec{j} (0, j_{\varphi}, j_z) \quad (\text{div } \vec{j} = 0 \Rightarrow j_r = 0).$$

Mit der r-Komponente von Gl.(10)

$$\frac{\partial P_L}{\partial r} - \int_{\varphi} B_z = a_2(v_{Lr} - v_r) + a_3(v_{L\varphi} - v_{\varphi}) + b_3 \int_{\varphi} + c_2 \frac{\partial T}{\partial r},$$

und

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \int_{\varphi} B_z$$

$$P = P_0 + P_L$$

ergibt sich:

$$-\frac{\partial P_0}{\partial r} = a_2(v_{Lr} - v_r) + a_3(v_{L\varphi} - v_{\varphi}) + b_3 \int_{\varphi} + c_2 \frac{\partial T}{\partial r}. \quad (11)$$

Für die benötigten Geschwindigkeitskomponenten v_{Lr} und $v_{L\varphi}$ ergeben die φ -Komponenten der Gleichungen (8) und (9) die beiden Gleichungen:

$$-neB v_{Lr} = (v_{L\varphi} - v_{\varphi})d_2 - (v_{Lr} - v_r)d_3 + \int_{\varphi} f_2 - e_3 \frac{\partial T}{\partial r},$$

$$neB v_{Lr} = (v_{L\varphi} - v_{\varphi})q_2 - (v_{Lr} - v_r)q_3 + \int_{\varphi} l_2 - k_3 \frac{\partial T}{\partial r} \quad (17)$$

oder

$$(v_{L\varphi} - v_{\varphi})d_2 - (v_{Lr} - v_r)d_3 + neB v_r + \int_{\varphi} f_2 - e_3 \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad d'_3 = d_3 - neB$$

$$(v_{L\varphi} - v_{\varphi})q_2 - (v_{Lr} - v_r)q_3 - neB v_r + \int_{\varphi} l_2 - k_3 \frac{\partial T}{\partial r} = 0. \quad g'_3 = q_3 + neB$$

Aus diesen Gleichungen erhält man:

$$(v_{Lr} - v_r) = \frac{1}{d_2 q'_3 - d'_3 q_2} \left[(l_2 d_2 - f_2 q_2) \int_{\varphi} + (e_3 q_2 - k_3 d_2) \frac{\partial T}{\partial r} - neB (d_2 + q_2) v_r \right] \quad (12a)$$

und

$$(v_{L\varphi} - v_{\varphi}) = \frac{1}{d_2 q'_3 - d'_3 q_2} \left[(l_2 d'_3 - f_2 q'_3) \int_{\varphi} + (e_3 q'_3 - k_3 d'_3) \frac{\partial T}{\partial r} - neB (d'_3 + q'_3) v_r \right]. \quad (12b)$$

Setzt man diese Beziehungen in die Gl.(11) ein und nimmt an, daß kein Massenstrom in r-Richtung fließt ($v_r = 0$), so erhält man die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial P_0}{\partial r} + D \int_{\varphi} + F \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (13)$$

mit

$$D = b_3 + \frac{a_2(l_2 d_2 - f_2 q_2) + a_3(l_2 d'_3 - f_2 q'_3)}{q'_3 d_2 - d'_3 q_2},$$

$$F = c_2 - \frac{a_2(k_3 d_2 - e_3 q_2) + a_3(k_3 d'_3 - e_3 q'_3)}{q'_3 d_2 - d'_3 q_2}.$$

3.3. Berechnung des Druckverlaufs $p(T)$ bei Gültigkeit der Saha-Gleichung

Setzt man in Gl.(13)

$$\int_{\varphi} = \frac{1}{B} \frac{\partial P}{\partial r}$$

ein, so erhält man:

$$\frac{\partial P_0}{\partial r} + \frac{D}{B} \frac{\partial P}{\partial r} + F \frac{\partial T}{\partial r} = 0. \quad (14)$$

Aus Gl.(14) kann man $p(T)$ bestimmen, wenn man p_0 und B als Funktionen von p und T kennt.

Aus der Saha-Gleichung

$$\frac{P_i^2}{P_0} = \frac{2Z_L}{Z_0} \frac{(2\pi m_e)^{3/2} (kT)^{5/2}}{h^3} \exp\left(-\frac{\chi_i}{kT}\right) = S(T) \quad (15)$$

und

$$p = p_0 + 2 p_1$$

folgt:

$$p_0 = p + 2S - 2\sqrt{pS + S^2} = p_0(p, T), \quad (16a)$$

$$p_i = \sqrt{pS + S^2} - S = p_i(p, T). \quad (16b)$$

Daraus erhält man durch Differenziation:

$$\nabla p_0 = \left(\frac{\partial p_0}{\partial p}\right)_T \nabla p + \left(\frac{\partial p_0}{\partial T}\right)_p \nabla T = \frac{p_0}{p_0 + p_i} \nabla p - \frac{p_0^2}{p_i(p_0 + p_i)} \frac{\partial S}{\partial T} \nabla T. \quad (17)$$

Die $j\phi$ -Ströme schwächen das äußere Magnetfeld B_0 . Der dadurch verursachte Abfall von B zur Achse hin sorgt gerade für das Gleichgewicht mit dem nach innen ansteigenden Druck. Aus Gl.(10) und

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (18)$$

folgt

$$\nabla p = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \left(\frac{B^2}{2}\right) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \nabla) \vec{B}. \quad (19)$$

Da der letzte Term der Gl.(19) bei der gegebenen Geometrie verschwindet, kann man die verbleibende Gleichung leicht integrieren und erhält:

$$B^2(p) = B_0^2 + 2\mu_0 (p_A - p), \quad (20)$$

B_0 bedeutet dabei die äußere magnetische Induktion, p_A den Gasdruck außerhalb der leitfähigen Zone.

Da T eine umkehrbar eindeutige Funktion des Radius r ist, kann man schreiben:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{dp}{dT} \frac{\partial T}{\partial r}. \quad (21)$$

Unter Verwendung der Gleichungen (13), (17), (20) und (21) erhält man schließlich für $p(T)$ die Differentialgleichung:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\frac{p + 2S - 2\sqrt{pS + S^2}}{\sqrt{pS + S^2} - S} \frac{dS}{dT} - \frac{p + S - \sqrt{pS + S^2}}{p + 2S - 2\sqrt{pS + S^2}}}{1 + \frac{p + S - \sqrt{pS + S^2}}{p + 2S - 2\sqrt{pS + S^2}} \cdot \frac{D}{\sqrt{B_0^2 + 2\mu_0 (p_A - p)}}} = f(p, T). \quad (22)$$

Bei der numerischen Integration der Gl.(22) soll die Anfangstemperatur einerseits so hoch sein, daß schon alle Wasserstoffmoleküle dissoziiert sind, andererseits sollen die Wasserstoffatome praktisch noch nicht ionisiert sein. Deshalb wird $T_A = 6 \cdot 10^3$ °K gewählt. Aus Gl.(22) folgt für diese Temperatur, da $p_1 \approx 0$:

$$\frac{dp}{dT} = 0.$$

Man erhält also in der Umgebung der Anfangstemperatur T_A für den Druck:

$$p \approx p_A = \text{const} \quad \text{für } T \approx T_A.$$

Aus Gl.(22) kann man den Druckverlauf bis auf eine Integrationskonstante für den Grenzfall vollständiger Ionisation ($\frac{p_0}{p} \rightarrow 0$) und starker Wirkung des Magnetfeldes ($\omega \tau_e \gg 1$) bestimmen:

$$\frac{dP}{P} = \frac{3}{4} \frac{dT}{T} \quad \text{d.h.} \quad P \propto T^{3/4}$$

(23)

Zum gleichen Ergebnis führt die Berücksichtigung der z.B. von Braginsky [7] angegebenen Thermokraft in der Impulsbilanz des Plasmas. Diese Thermokraft ergibt sich aus der Berechnung der Elektronen- und Ionenverteilungsfunktion eines vollionisierten Plasmas im Magnetfeld.

Bei der numerischen Integration wurden folgende Zahlenwerte verwendet:

$$\begin{aligned} Q_{00} &= 4 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2 \\ Q_{10} &= 70 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2 \\ Q_{e0} &= 30 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2 \quad [8] \\ E_1 &= 13,54 \text{ eV.} \end{aligned}$$

Parameter sind:

$$\begin{aligned} B_0 &= 10, 20, 30, 50, 70, 100, 150 \text{ kG bei} \\ p_A &= 10^3, 3 \cdot 10^3, 5 \cdot 10^3, 7 \cdot 10^3, 10^4 \text{ dyn/cm}^2 \text{ und} \\ B_0 &= 50, 70, 100, 150 \text{ kG bei } p_A = 10^5 \text{ dyn/cm}^2 \text{ (für } B_0 < 50 \text{ kG ist } \omega \tau_e < 1). \end{aligned}$$

In den Abbildungen 1 bis 6 sind für verschiedene Aussendrucke p_A die Druckverläufe über der Temperatur mit B_0 als Parameter aufgetragen. Je höher der Aussendruck ist, umso geringer wird die bei gleichem Aussenmagnetfeld und gleicher Endtemperatur erreichte relative Druckerhöhung. Der Grund dafür ist die Abnahme der freien Weglänge mit steigendem Druck, die den Einfluß des Magnetfeldes verringert.

Die Erweiterung der Rechnungen von Wienecke um den Einfluß des Nernsteffektes führt also zu einem weiteren Anstieg des Druckes auch bei vollständiger Ionisation (Temperatur über $2 \cdot 10^4$ °K). Zum Vergleich sind die Druckverläufe für 10 kG und 50 kG bei $p_A = 5 \cdot 10^3$ dyn/cm² nach den beiden Berechnungen in Abb.7 aufgetragen. Die geringen Unterschiede für Temperaturen zwischen 10^4 °K und $2 \cdot 10^4$ °K haben ihre Ursache in der Verwendung eines anderen Zahlenwertes für den Wirkungsquerschnitt Q_{e0} und im Einfluß der Thermokräfte auch im teilweise ionisierten Gas.

Um den Übergang des Druckverlaufes in die asymptotische Abhängigkeit (23) zu zeigen, ist der Druck für 10 kG, 50 kG und 150 kG und $p_A = 10^3$ dyn/cm² über der Temperatur in Abb.8 in doppellogarithmischer Darstellung aufgezeichnet. Die Neigung der Asymptoten nach Gl.(23) wird durch die gestrichelte Kurve angezeigt.



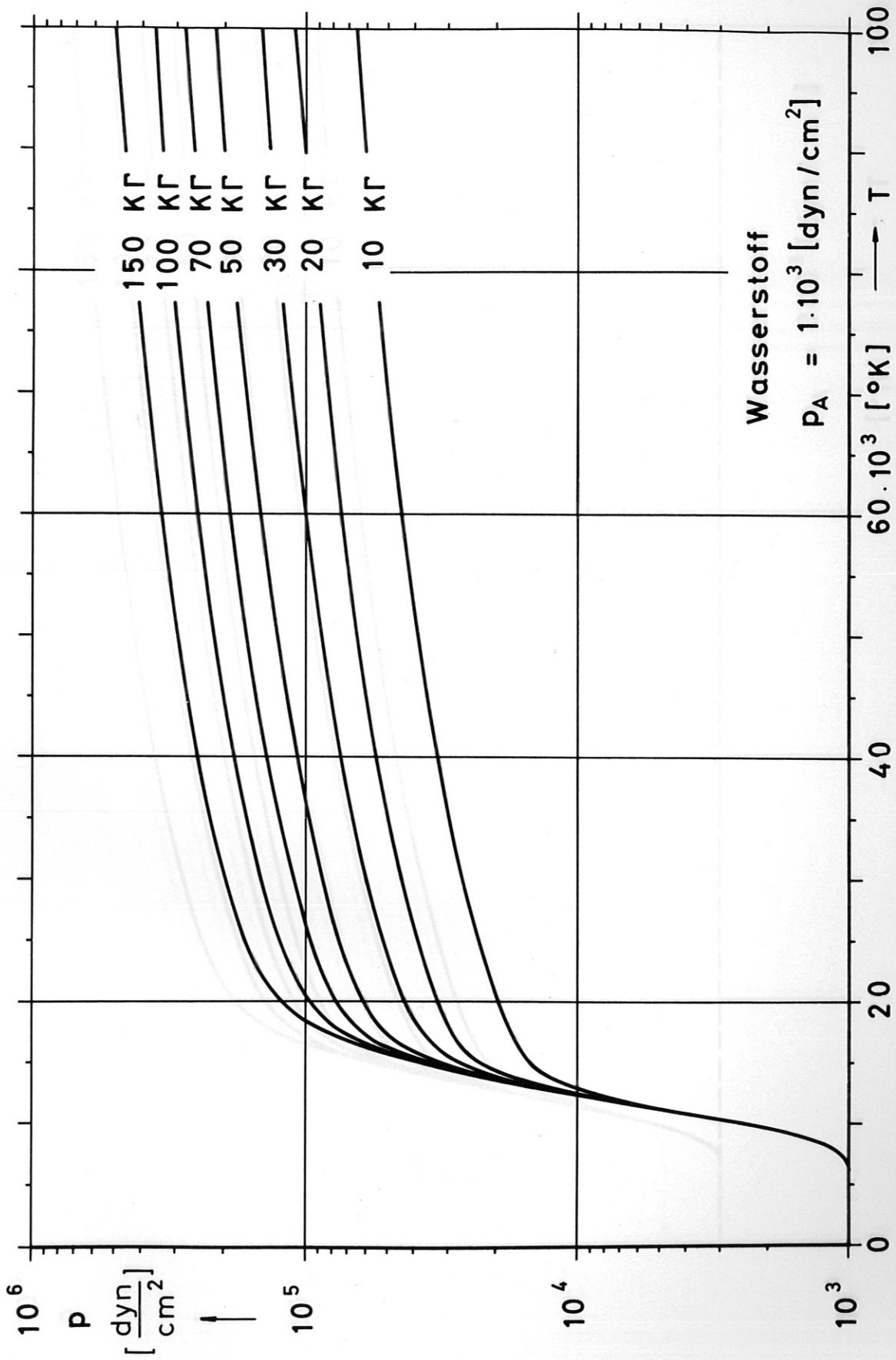


Abb.1 Druckanstieg im Magnetfeld

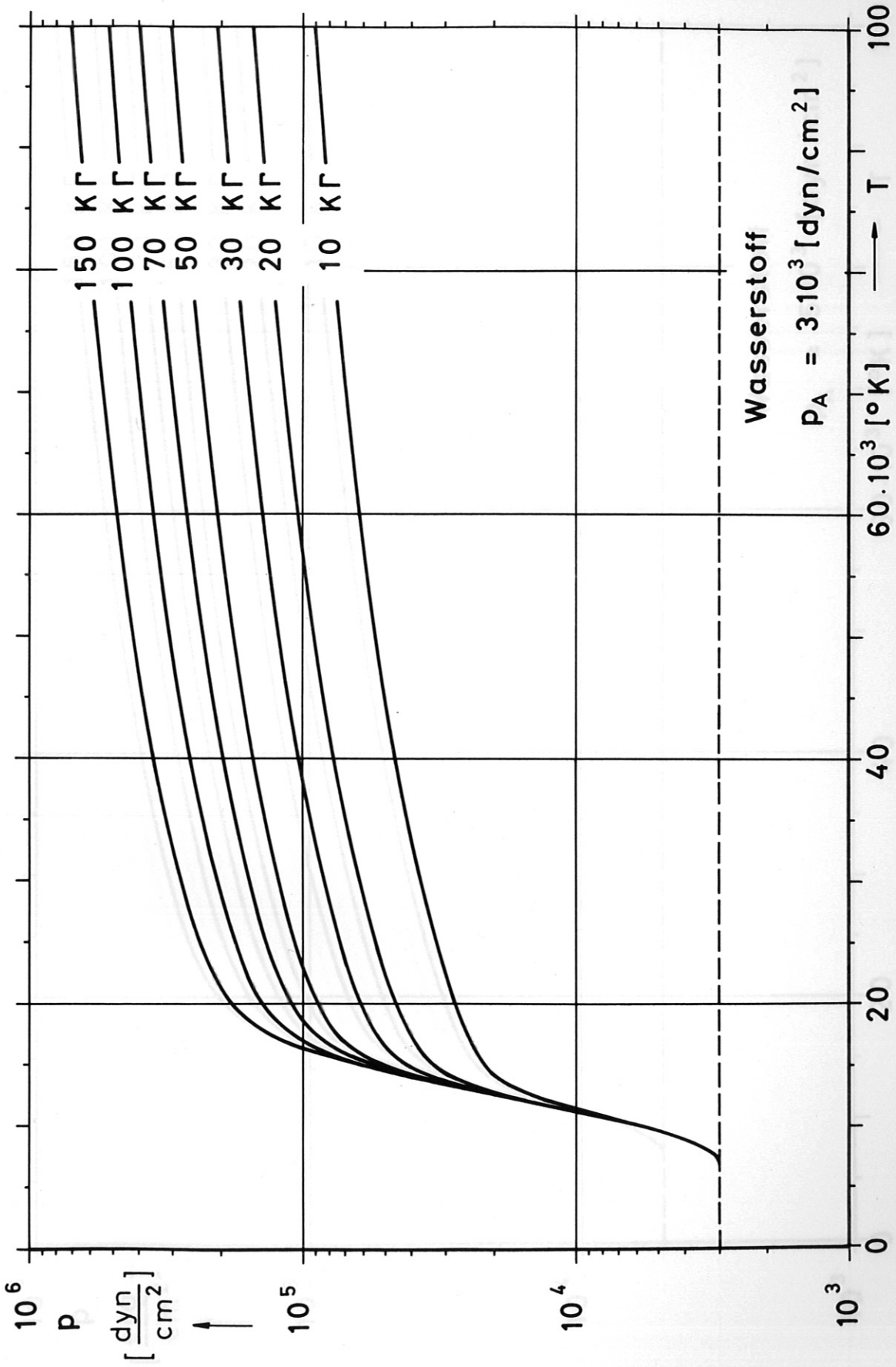


Abb.2 Druckanstieg im Magnetfeld

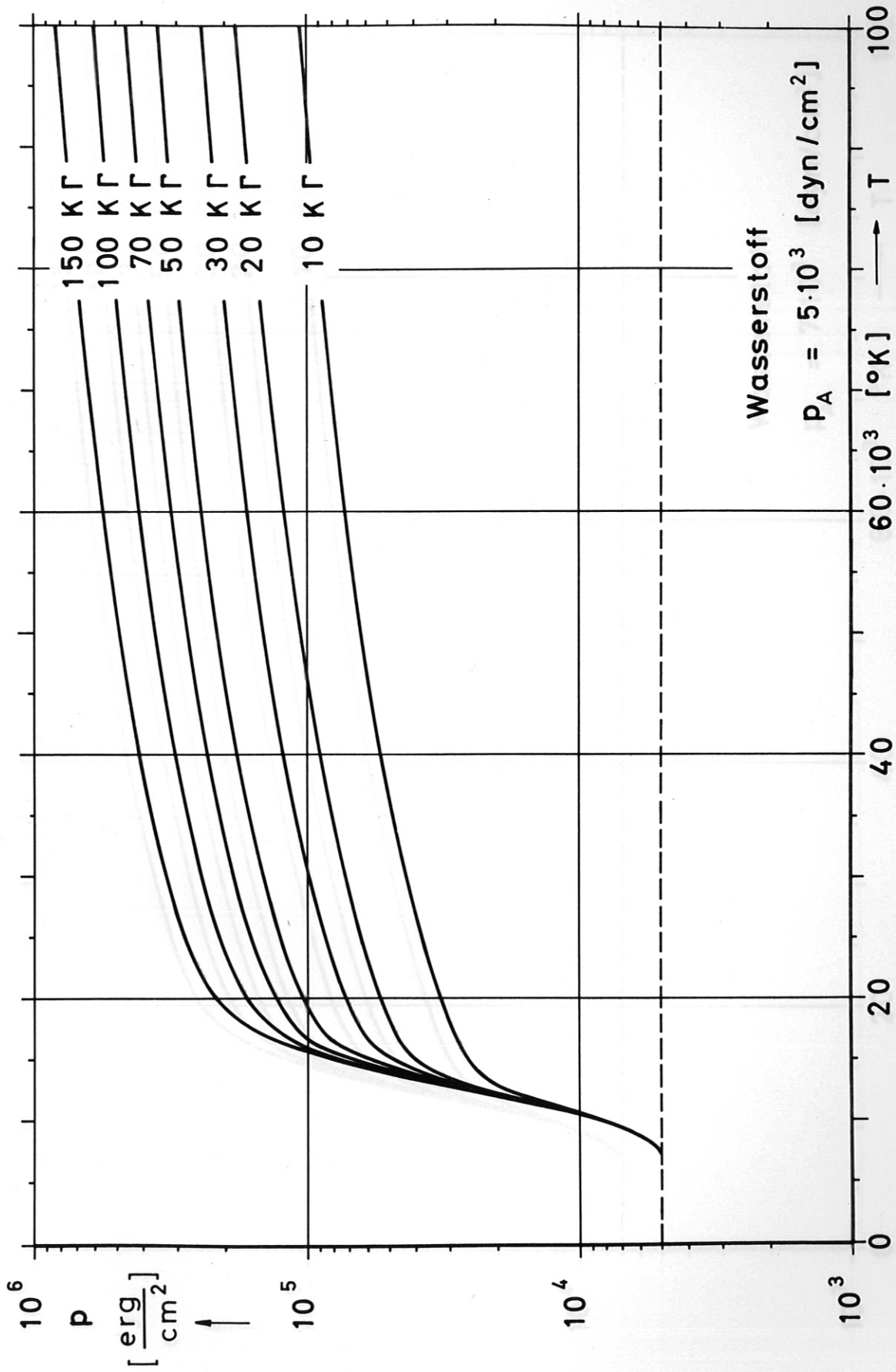


Abb. 3 Druckanstieg im Magnetfeld

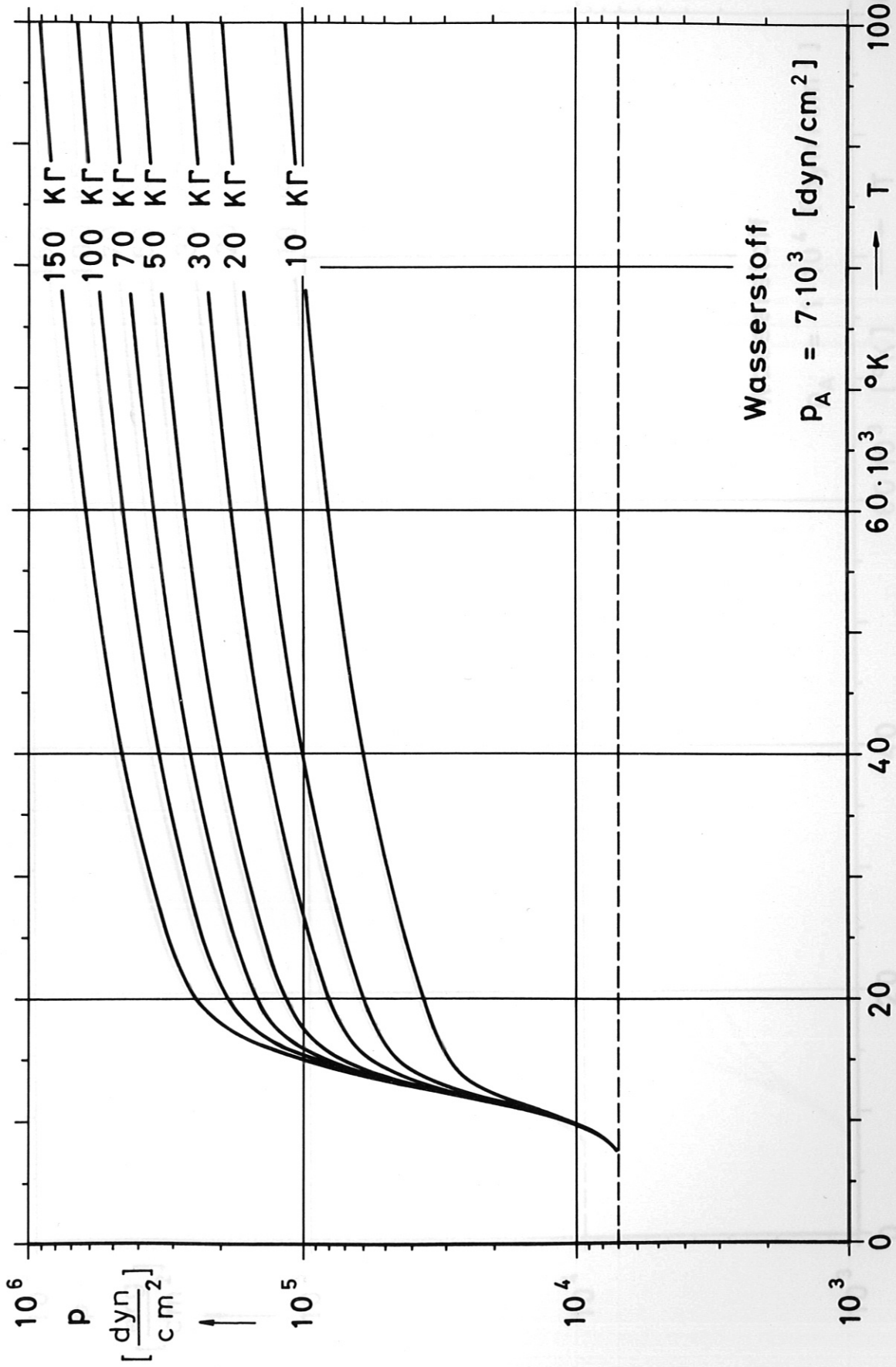


Abb. 4 Druckanstieg im Magnetfeld

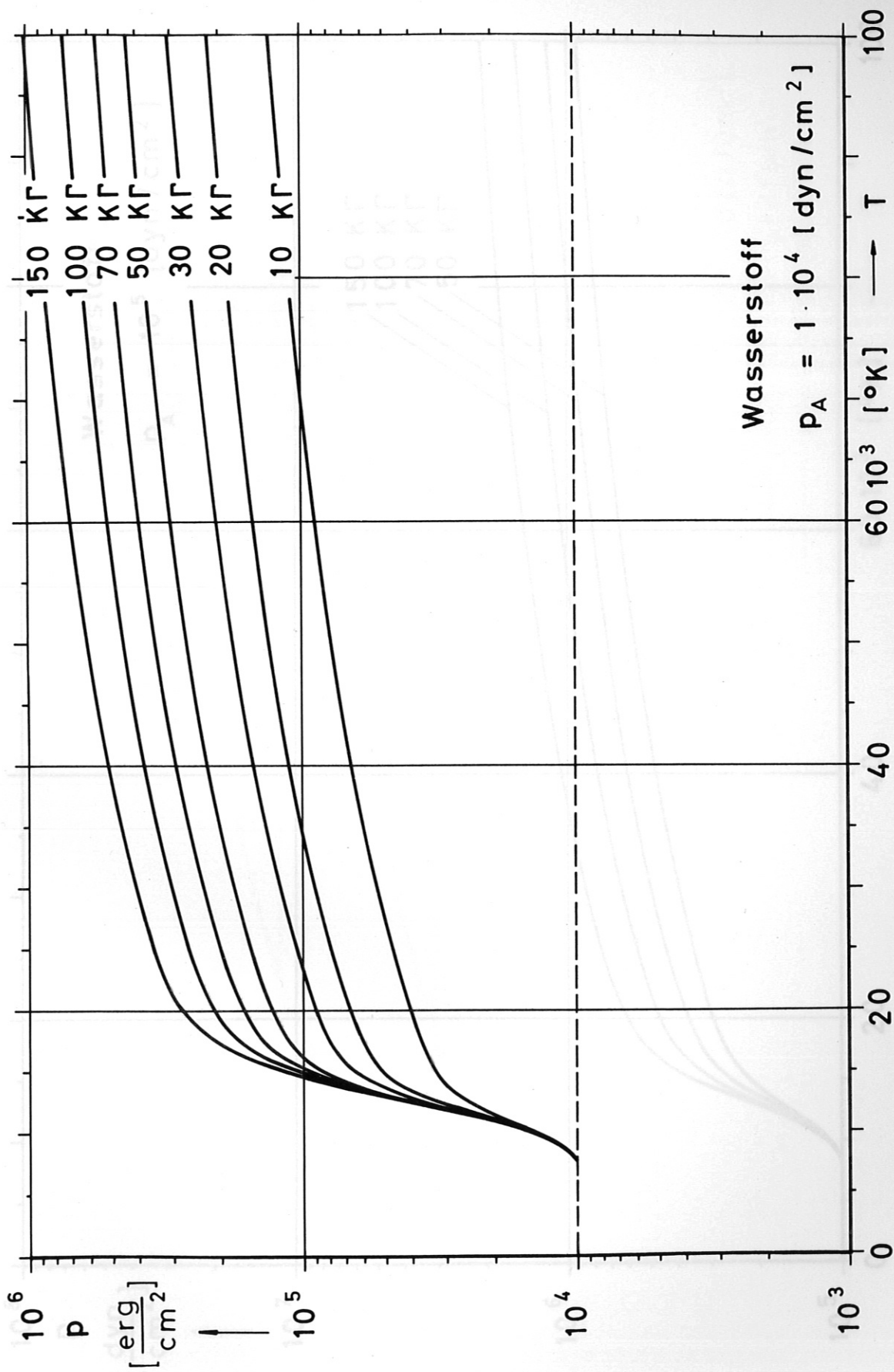


Abb.5 Druckanstieg im Magnetfeld

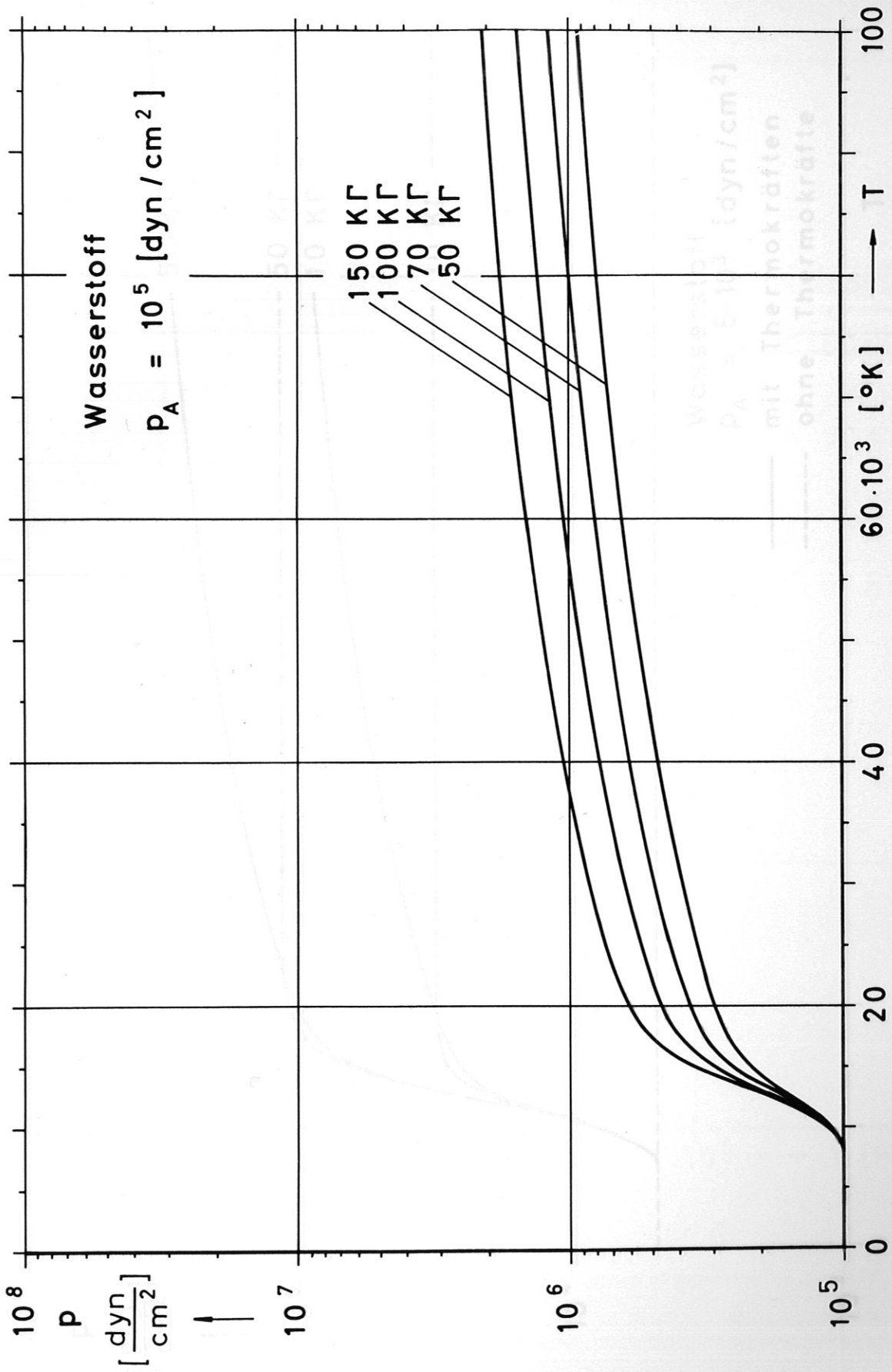


Abb. 6 Druckanstieg im Magnetfeld

Abb. 7 Druckanstieg im Magnetfeld mit Berücksichtigung von Thermokräften

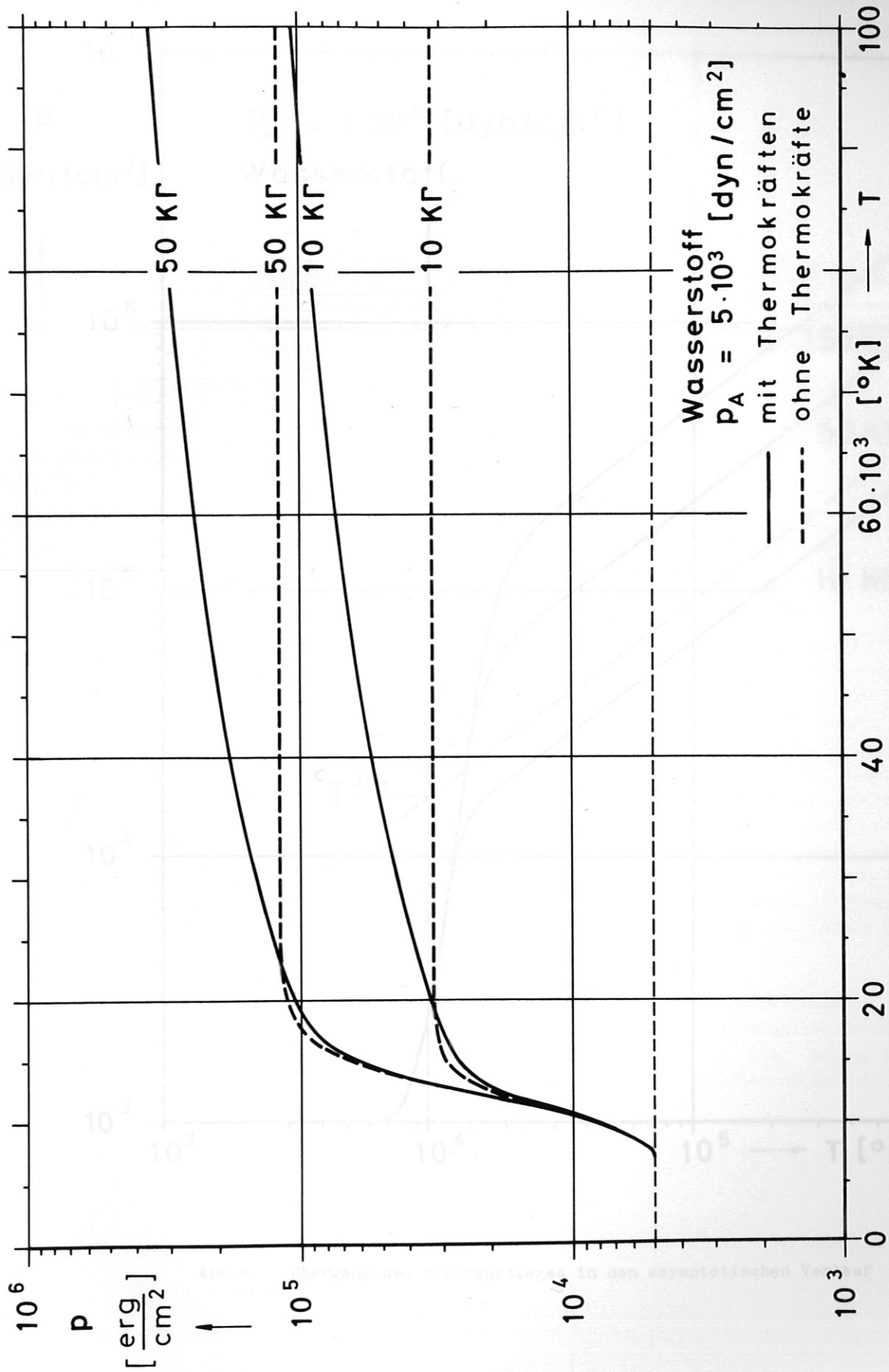


Abb.7 Druckanstieg im Magnetfeld mit und ohne Berücksichtigung von Thermokräften

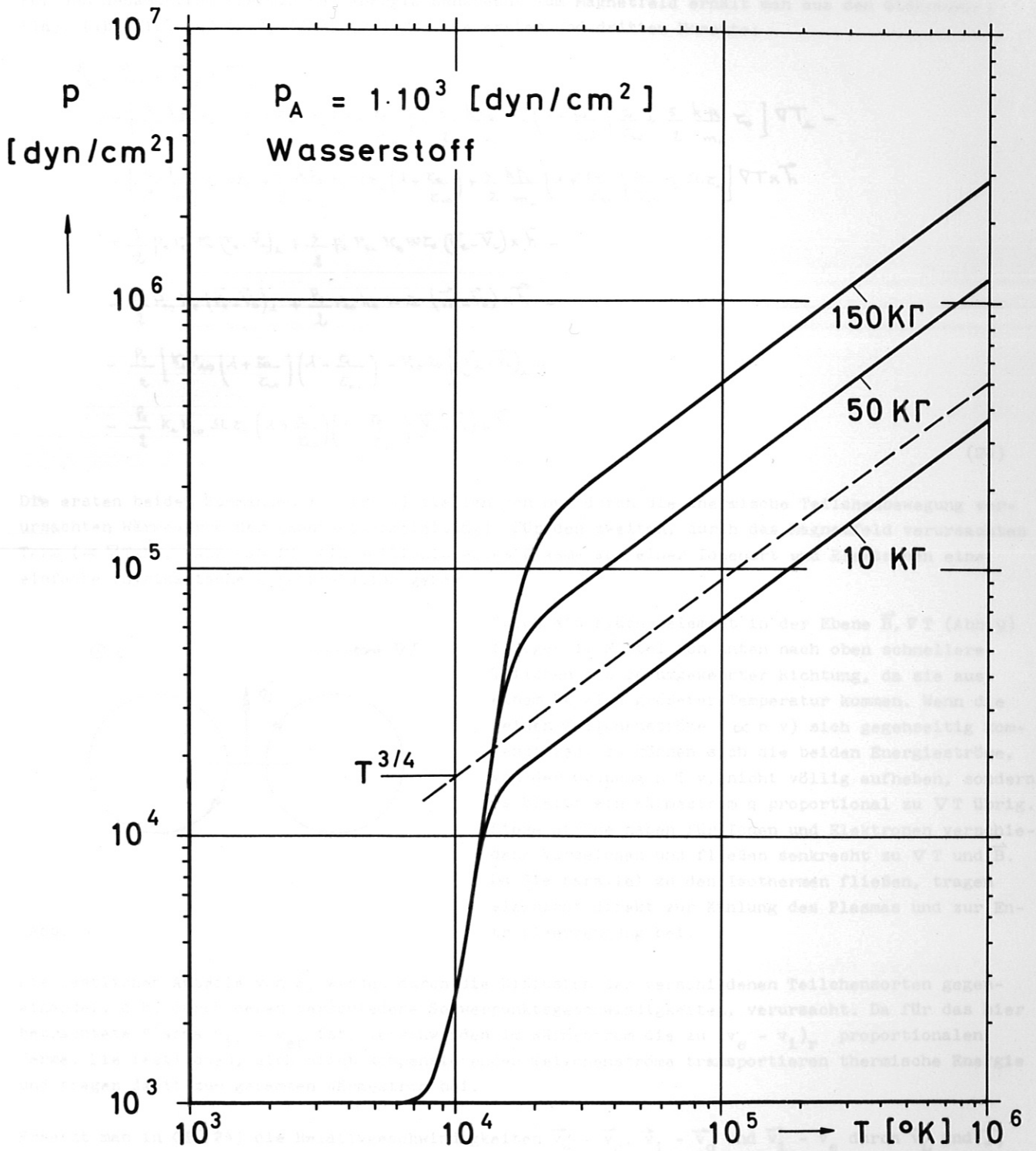


Abb.8 Übergang des Druckanstieges in den asymptotischen Verlauf

4. Berechnung der Wärmeleitfähigkeit

4.1. Der Wärmestrom senkrecht zum Magnetfeld durch Transport von thermischer Energie

Für den Gesamtstrom thermischer Energie senkrecht zum Magnetfeld erhält man aus den Gleichungen (1a), (1b), (1c) und (2a), (2b), (2c) für die ersten und dritten Momente:

$$\begin{aligned}
 \vec{S}_\perp &= \vec{S}_{0\perp} + \vec{S}_{i\perp} + \vec{S}_{e\perp} \\
 &= - \left[\frac{5}{2} \frac{kP_e}{m_e} \kappa_e + \frac{5}{2} \frac{kP_e}{m_i} \kappa_i \left(1 + \frac{z_0}{z_i}\right) + \frac{5}{2} \frac{kP_e}{m_i} \kappa_i \left(1 + \frac{z_0}{z_i}\right) \frac{z_0}{z_i} + \frac{5}{2} \frac{kP_e}{m_o} z_0 \right] \nabla T_\perp - \\
 &\quad - \left[\frac{5}{2} \frac{kP_e}{m_e} \kappa_e \omega z_e + \frac{5}{2} \frac{kP_e}{m_i} \kappa_i \Omega z_i \left(1 + \frac{z_0}{z_i}\right) + \frac{5}{2} \frac{kP_e}{m_i} \left(1 + \frac{z_0}{z_i}\right) \frac{z_0}{z_i} \kappa_i \Omega z_i \right] \nabla T \times \vec{h} \\
 &\quad + \frac{3}{2} p_e \nu_{ei} \kappa_e (\vec{v}_e - \vec{v}_i)_\perp + \frac{3}{2} p_e \nu_{ei} \kappa_e \omega z_e (\vec{v}_e - \vec{v}_i) \times \vec{h} - \\
 &\quad - \frac{p_e}{2} \nu_{e0} \kappa_e (\vec{v}_e - \vec{v}_0)_\perp + \frac{p_e}{2} \nu_{e0} \kappa_e \omega z_e (\vec{v}_e - \vec{v}_0) \times \vec{h} - \\
 &\quad - \frac{p_e}{2} \left[\kappa_i \nu_{i0} \left(1 + \frac{z_0}{z_i}\right) \left(1 - \frac{z_0}{z_i}\right) - \nu_{i0} z_0 \right] (\vec{v}_i - \vec{v}_0)_\perp - \\
 &\quad - \frac{p_e}{2} \kappa_i \nu_{i0} \Omega z_i \left(1 + \frac{z_0}{z_i}\right) \left(1 - \frac{z_0}{z_i}\right) (\vec{v}_i - \vec{v}_0) \times \vec{h}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Die ersten beiden Summanden in Gl.(24) stellen den nur durch die thermische Teilchenbewegung verursachten Wärmestrom dar (Kontaktwärmeleitung). Für den zweiten, durch das Magnetfeld verursachten Term ($\propto \nabla T \times \vec{h}$), kann man für ein vollionisiertes Plasma aus einer Ionenart und Elektronen eine einfache physikalische Interpretation geben.

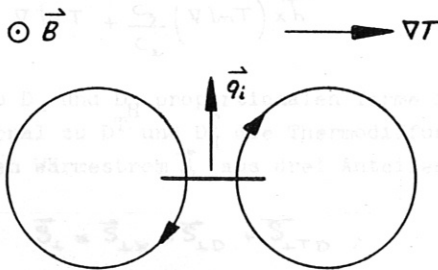


Abb. 9

Durch ein Flächenelement in der Ebene $\vec{B}, \nabla T$ (Abb.9) fliegen im Mittel von unten nach oben schnellere Teilchen als in umgekehrter Richtung, da sie aus einem Bereich größerer Temperatur kommen. Wenn die beiden Teilchenströme ($\propto n v$) sich gegenseitig kompensieren, so können sich die beiden Energieströme, von der Ordnung $n T v$, nicht völlig aufheben, sondern es bleibt ein Wärmestrom q proportional zu ∇T übrig. Diese Ströme haben für Ionen und Elektronen verschiedene Vorzeichen und fließen senkrecht zu ∇T und \vec{B} . Da Sie parallel zu den Isothermen fließen, tragen sie nicht direkt zur Kühlung des Plasmas und zur Entropieerzeugung bei.

Die restlichen Anteile von \vec{S}_\perp werden durch die Diffusion der verschiedenen Teilchensorten gegeneinander, d.h. durch deren verschiedene Schwerpunktsgeschwindigkeiten, verursacht. Da für das hier betrachtete Plasma $v_{1r} = v_{er}$ ist, verschwinden im Wärmestrom die zu $(v_e - v_i)_r$ proportionalen Terme. Die restlichen, sich nicht kompensierenden Teilchenströme transportieren thermische Energie und tragen damit zum gesamten Wärmestrom bei.

Ersetzt man in Gl.(24) die Relativgeschwindigkeiten $\vec{v}_e - \vec{v}_0, \vec{v}_i - \vec{v}_0$ und $\vec{v}_i - \vec{v}_e$ durch \vec{v}_L und \vec{J} , so erhält man:

$$\vec{S}_\perp = - \kappa_{k\perp} \nabla_\perp T - \kappa_{kh} \nabla T \times \vec{h} - R_1 (\vec{v}_L - \vec{v})_\perp - R_2 (\vec{v}_L - \vec{v}) \times \vec{h} - R_3 \vec{J}_\perp - R_4 \vec{J} \times \vec{h} \tag{25}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \kappa_{k\perp} &= \kappa_{ok\perp} + \kappa_{ik\perp} + \kappa_{ek\perp} = \\
 &= \left[\frac{5}{2} \frac{kP_e}{m_o} z_0 + \frac{5}{2} \frac{kP_e}{m_i} \left(1 + \frac{z_0}{z_i}\right) \kappa_i \frac{z_0}{z_i} \right] + \frac{5}{2} \frac{kP_e}{m_i} \left(1 + \frac{z_0}{z_i}\right) \kappa_i + \frac{5}{2} \frac{kP_e}{m_e} \kappa_e
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_{KH} &= \frac{5}{2} \frac{kP_e}{m_i} \left(1 + \frac{z_0}{z_{i0}}\right) \frac{z_0}{z_{i0}} k_i \Omega z_i + \frac{5}{2} \frac{kP_i}{m_i} \left(1 + \frac{z_0}{z_{i0}}\right) k_i \Omega z_i - \frac{5}{2} \frac{kP_e}{m_e} k_e \Omega z_e, \\ R_1 &= \frac{P_e}{2} \frac{P_i + P_e}{P_0} \left[k_e \nu_{e0} + k_i \nu_{i0} \left(1 + \frac{z_0}{z_{i0}}\right) \left(1 - \frac{z_0}{z_{i0}}\right) - \nu_{i0} z_0 \right], \\ R_2 &= \frac{P_e}{2} \frac{P_i + P_e}{P_0} \left[-k_e \nu_{e0} \omega z_e + k_i \nu_{i0} \left(1 + \frac{z_0}{z_{i0}}\right) \left(1 - \frac{z_0}{z_{i0}}\right) \Omega z_i \right], \\ R_3 &= \frac{P_e}{2} \frac{1}{n_e} \left[k_e \nu_{e0} \left(\frac{3\nu_{ei}}{\nu_{e0}} - 1\right) + k_i \nu_{i0} \frac{m_e}{m_0} \left(1 + \frac{z_0}{z_{i0}}\right) \left(1 - \frac{z_0}{z_{i0}}\right) - \nu_{i0} z_0 \frac{m_e}{m_0} \right], \\ R_4 &= -\frac{P_e}{2} \frac{1}{n_e} \left[k_e \nu_{e0} \omega z_e \left(\frac{3\nu_{ei}}{\nu_{e0}} - 1\right) - k_i \nu_{i0} \Omega z_i \left(1 + \frac{z_0}{z_{i0}}\right) \left(1 - \frac{z_0}{z_{i0}}\right) \right]. \end{aligned}$$

Für die in Gl.(25) vorkommende Diffusionsgeschwindigkeit der Ladungsträger $(\vec{v}_L - \vec{v})_{\perp}$ findet man mit der Umformung

$$\nabla P_L = P \left[\nabla \left(\frac{P_L}{P}\right) + \frac{P_L}{P} \nabla \ln P \right]$$

aus Gl.(10):

$$(\vec{v}_L - \vec{v})_{\perp} = D_{\perp} \vec{d}_{\perp}^D - D_H \vec{d}^D \times \vec{h} - D_{\perp}^T \vec{d}_{\perp}^T + D_H^T \vec{d}^T \times \vec{h}. \quad (26)$$

Dabei wurden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$D_{\perp} = \frac{P a_2}{a_2^2 + a_3^2}, \quad D_H = \frac{P a_3}{a_2^2 + a_3^2}, \quad D_{\perp}^T = \frac{c_2 a_2 T}{a_2^2 + a_3^2}, \quad D_H^T = \frac{c_2 a_3 T}{a_2^2 + a_3^2}, \quad (27a)$$

$$\vec{d} = \nabla \left(\frac{P_L}{P}\right) + \frac{P_L}{P} \nabla \ln P - \frac{1}{P} \vec{j} \times \vec{B} - \frac{b_2}{P} \vec{j}_{\perp} - \frac{b_3}{P} \vec{j} \times \vec{h} \quad (27b)$$

$$\vec{d}^T = \nabla \ln T + \frac{c_2}{c_2} (\nabla \ln T) \times \vec{h} \quad (27c)$$

Die zu D_{\perp} und D_H proportionalen Terme in Gl.(26) stellen die normale Diffusion und die Terme proportional zu D_{\perp}^T und D_H^T die Thermodiffusion dar. Entsprechend diesem Ergebnis und der Gl.(25) kann man den Wärmestrom \vec{S}_{\perp} aus drei Anteilen zusammensetzen:

$$\vec{S}_{\perp} = \vec{S}_{\perp K} + \vec{S}_{\perp D} + \vec{S}_{\perp TD}, \quad (28)$$

$\vec{S}_{\perp K}$ ist der Wärmestrom durch Kontaktwärmeleitung,
 $\vec{S}_{\perp D}$ ist der Wärmestrom durch normale Diffusion,
 $\vec{S}_{\perp TD}$ ist der Wärmestrom durch Thermodiffusion.

Da im folgenden nur noch die r-Komponenten der Wärmeströme behandelt werden, wird der Index "r" nicht mehr geschrieben.

Für S_K erhält man aus Gl.(25):

$$S_K = -\kappa_{K\perp} \frac{\partial T}{\partial r} = -\kappa_K \frac{\partial T}{\partial r}. \quad (29)$$

Für S_D ergibt sich aus den Gleichungen (25), (26), (27a) und (27b):

$$S_D = \frac{R_1}{a_2^2 + a_3^2} \left[a_2 \frac{\partial P_0}{\partial r} + (a_2 b_3 - a_3 b_2) \frac{d\varphi}{dr} \right] + \frac{R_2}{a_2^2 + a_3^2} \left[a_3 \frac{\partial P_0}{\partial r} + (a_2 b_2 + a_3 b_3) \frac{d\varphi}{dr} \right] - R_4 \frac{dT}{dr}$$

Mit den Gleichungen (3), (17) und (21) kann man dieses Ergebnis umformen:

$$S_D = -\kappa_D \frac{\partial T}{\partial r} \quad (30)$$

mit

$$\begin{aligned} \kappa_D &= \frac{P_0^2}{P_i(P_0 + P_i)} \frac{R_1 a_2 + R_2 a_3}{a_2^2 + a_3^2} \frac{dS}{dT} + \\ &+ \left[\frac{R_1}{B} \frac{a_3 b_2 - a_2 b_3}{a_2^2 + a_3^2} - \frac{R_2}{B} \frac{a_2 b_2 + a_3 b_3}{a_2^2 + a_3^2} + \frac{R_4}{B} - \frac{P_0}{P_0 + P_i} \frac{a_2 R_1 + a_3 R_2}{a_2^2 + a_3^2} \right] \frac{dP}{dT} \end{aligned} \quad (31)$$

S_{TD} kann man mit Hilfe der Gleichungen (25), (26) und (27c) ebenfalls in der für Wärmeströme gewohnten Form schreiben:

$$S_{TD} = -K_{TD} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (32)$$

mit

$$K_{TD} = -R_1 \frac{a_2 c_2 + a_3 c_3}{a_2^2 + a_3^2} - R_2 \frac{a_3 c_2 - a_2 c_3}{a_2^2 + a_3^2} \quad (33)$$

Es ergibt sich also, daß der gesamte radiale Wärmestrom proportional zu $\frac{\partial T}{\partial r}$ geschrieben werden kann:

$$S = -(K_K + K_D + K_{TD}) \frac{\partial T}{\partial r} \quad (34)$$

4.2. Der Energiestrom senkrecht zum Magnetfeld durch Transport von Enthalpie

Zu dem aus den Momentengleichungen berechneten Strom thermischer Energie tritt im Ionisationsbereich ein weiterer Anteil. Wegen der Aufnahme der Ionisierungsenergie und der Vergrößerung der Teilchenzahl tragen die nach aussen diffundierenden Ladungsträger einen größeren Enthalpiestrom als die nach innen diffundierenden Atome. Für das unendlich lange, zylindersymmetrische Plasma ist auch dieser Energiestrom proportional zu $\frac{\partial T}{\partial r}$:

$$W_R = -K_R \frac{\partial T}{\partial r} \quad (35)$$

Die von Wienecke [9] durchgeführte Berechnung der Reaktionswärmeleitfähigkeit κ_R soll nun noch durch die Berücksichtigung der Thermokräfte in den Momentengleichungen ergänzt werden. Diese üben einen direkten Einfluß durch die Modifizierung der Diffusionsströme aus. Dazu kommt noch ihre indirekte Auswirkung auf den Ionisationsgrad und die freien Weglängen durch die Änderung des Druckverlaufes $p(T)$.

Die Enthalpien pro Masseneinheit sind:

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{5}{2} \frac{kT}{m_0} + \frac{D_m}{2m_0}, \\ h_i &= \frac{5}{2} \frac{kT}{m_i} + \frac{E_i}{m_i} + \frac{D_m}{2m_0}, \\ h_e &= \frac{5}{2} \frac{kT}{m_e}. \end{aligned} \quad (36)$$

D_m = Dissoziationsenergie des Moleküls,
 E_i = Ionisierungsenergie des Atoms.

Mit den Bedingungen der Quasineutralität und der Stromlosigkeit in r-Richtung erhält man für den radialen Enthalpiestrom:

$$W_R = ne \left(\frac{5}{2} kT + E_i \right) (v_L - v) = -K_R \frac{\partial T}{\partial r} \quad (37)$$

Mit den Gleichungen (17), (21), (26), (27a), (27b) und (27c) kann man die Gl.(37) in die gewünschte Form nach Gl.(35) bringen und erhält:

$$K_R = p_0 \left(\frac{5}{2} + \frac{E_i}{kT} \right) \left[\frac{a_2}{a_2^2 + a_3^2} \frac{p_0^2}{p_i(p_0 + p_i)} \frac{dS}{dT} + \left(\frac{1}{B} \frac{a_3 b_2 - a_2 b_3}{a_2^2 + a_3^2} - \frac{a_2 c_2 + a_3 c_3}{a_2^2 + a_3^2} - \frac{a_2}{a_2^2 + a_3^2} \frac{p_0}{p_0 + p_i} \right) \frac{dP}{dT} \right] \quad (38)$$

4.3. Die gesamte Wärmeleitfähigkeit von Wasserstoff

Der gesamte Energiestrom W in radialer Richtung beträgt:

$$W = S + W_R = -(\kappa_k + \kappa_D + \kappa_{TD} + \kappa_R) \frac{\partial T}{\partial r} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial r} \quad (39)$$

Beim Übergang zur praktisch vollständigen Ionisation verschwinden die Wärmeleitkoeffizienten κ_{OK} , κ_{TD} und κ_R . Für Temperaturen oberhalb von $2 \cdot 10^4$ °K gehen κ_{OK} und κ_{TD} wie $p_0 \tau_0$ gegen Null, wobei κ_{OK} immer etwa um eine Zehnerpotenz größer ist als κ_{TD} .

Wenn die Temperatur so hoch ist, dass $\omega \tau_e$ und $\Omega \tau_i$ groß gegen 1 sind, dann dominiert die Kontaktwärmefähigkeit der Ionen über die der Elektronen, da diese wegen ihrer größeren Gyrofrequenz stärker durch das Magnetfeld gebremst werden. Für κ_{IK} und κ_{EK} erhält man folgende asymptotische Verläufe ($\Omega \tau_i, \omega \tau_e \gg 1$):

$$\begin{aligned} \kappa_{IK} &\rightarrow \frac{5}{2} \frac{p_e k}{m_e} \frac{1}{\Omega^2 \tau_e} \propto \frac{1}{\Omega} \frac{\ln \Lambda}{T} \\ \kappa_{EK} &\rightarrow \frac{5}{2} \frac{p_e k}{m_e} \frac{1}{\omega^2 \tau_e} = \frac{m_i \tau_i \Omega^2}{m_e \tau_e \omega^2} \kappa_{IK} = \frac{1}{13} \kappa_{IK} \end{aligned} \quad (40)$$

Für $\omega \tau_e \gg 1$ kann man auch für κ_D einen einfachen asymptotischen Verlauf angeben. Man erhält aus den Gleichungen (23) und (31):

$$\kappa_D = -1,2 \frac{p_e k}{m_e} \frac{1}{\omega^2 \tau_e} = -0,48 \kappa_{EK} \quad (41)$$

Bemerkenswert an Gl.(41) ist das negative Vorzeichen von κ_D , welches ausdrückt, daß die Wechselwirkung der azimuthalen Ströme mit dem axialen Magnetfeld einen Transport von Wärme in Richtung des Temperaturgradienten, d.h. in das Plasma hinein verursacht. Diese Verminderung der gesamten Wärmeleitfähigkeit spielt allerdings nur eine geringe Rolle, da κ_D nur von Größenordnung des κ_{EK} , also klein gegen κ_{IK} , ist.

Aus Gl.(40) erkennt man, dass κ bei hohen Temperaturen schwächer als mit $1/T$ abfällt, da $\ln \Lambda$ langsam mit T zunimmt.

In den Abbildungen 10 bis 15 sind die, unter Verwendung des nach Abschnitt 3.3. bestimmten Druckverlaufes, berechneten Wärmeleitfähigkeiten als Funktion der Temperatur für verschiedene Magnetfelder B_0 und Aussendrucke p_A aufgezeichnet. Bei der Rechnung wurden die schon in Abschnitt 3.3 angegebenen Werte für Q_{00} , Q_{10} , Q_{e0} und E_1 verwendet.

Ein Vergleich der in der Wärmeleitfähigkeit κ enthaltenen Reaktionswärmefähigkeit κ_R mit den Resultaten von Wienecke zeigte, daß Lage und Größe des Maximums von κ_R nach den beiden Rechnungen nur unwesentlich voneinander abweichen, während κ_R zu höheren Temperaturen hin nach den neuen Rechnungen etwas steiler abfällt.

In Abb.16 sind die verschiedenen Anteile von κ für $p_A = 5 \cdot 10^3$ dyn/cm² und $B_0 = 50$ kG aufgezeichnet. Man erkennt den dominierenden Einfluß von κ_R im Ionisationsbereich. Die in den Abbildungen 17 bis 22 dargestellten Kurven für κ bis zu $T = 10^6$ °K durchlaufen ein Maximum. Der Grund dafür ist der geringe Einfluß des Magnetfeldes auf die Bewegung der Ionen für $(\Omega \tau_i)^2 < 1$ und die starke Bremsung für große $\Omega \tau_i$. Jenseits des Maximums mündet die Kurve für κ allmählich in den asymptotischen Verlauf proportional zu $\ln \Lambda / T$ nach Gl.(40) ein.

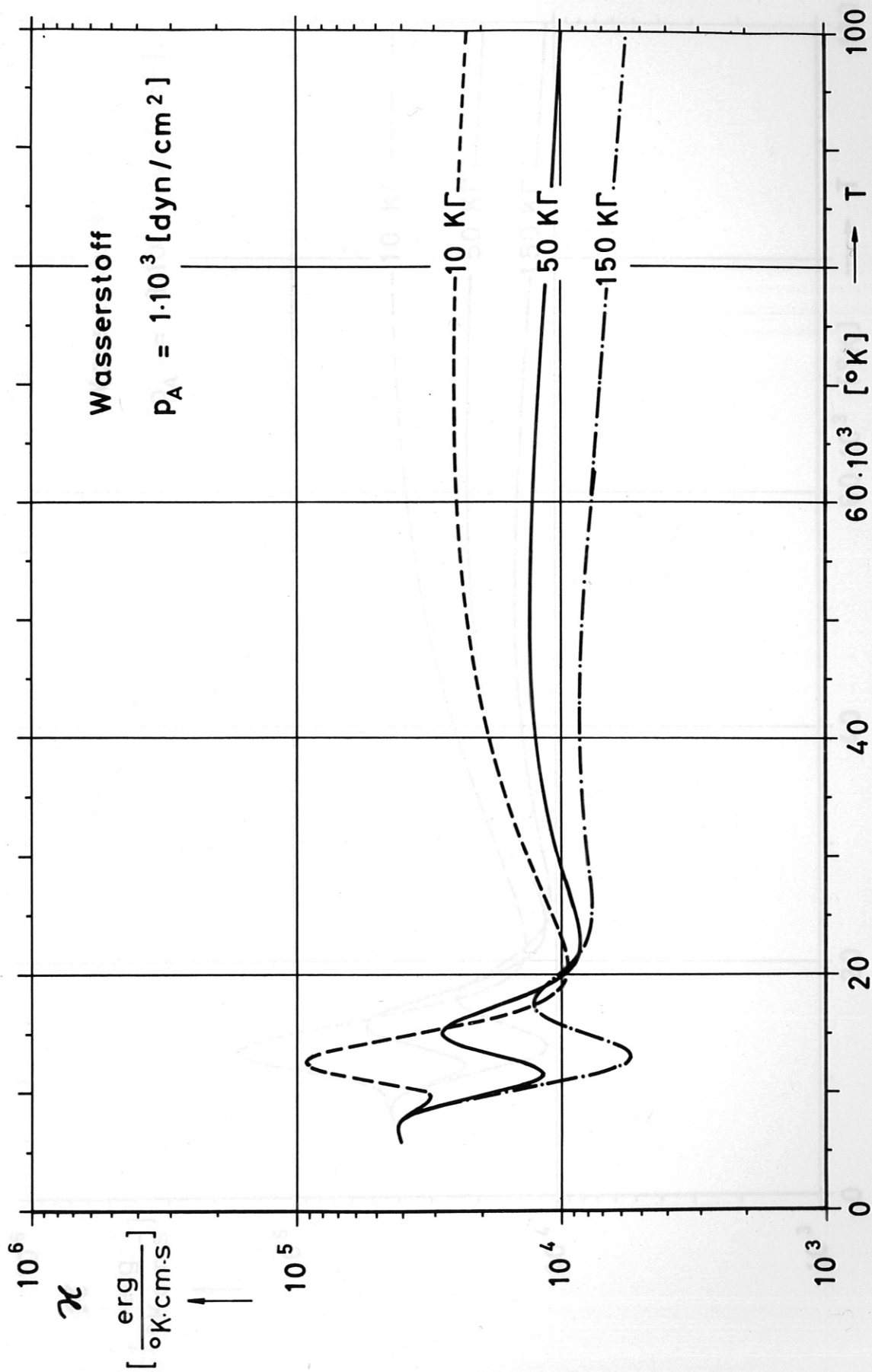


Abb.10 Wärmeleitfähigkeit von Wasserstoff im Magnetfeld

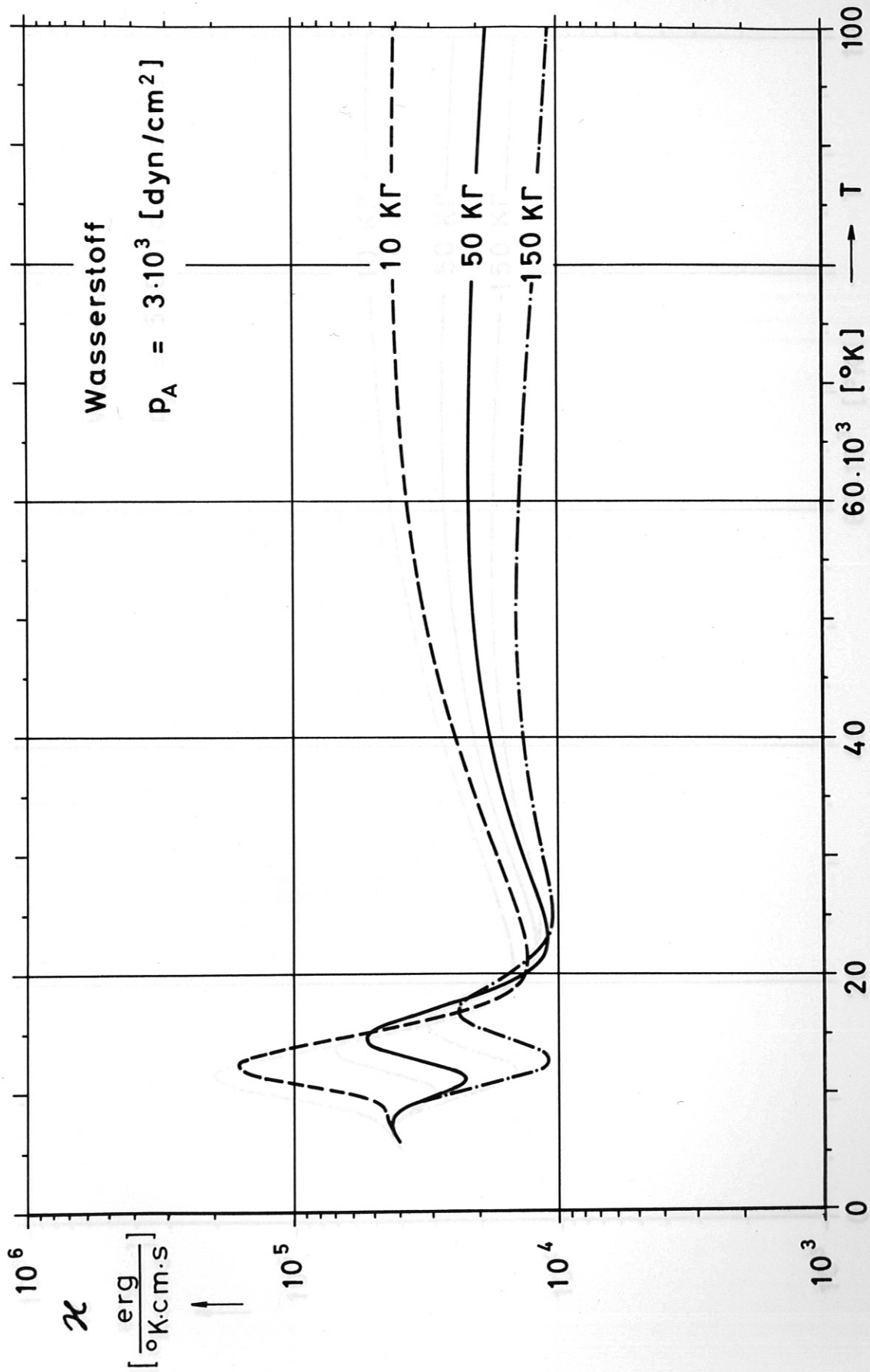


Abb.11 Wärmeleitfähigkeit von Wasserstoff im Magnetfeld

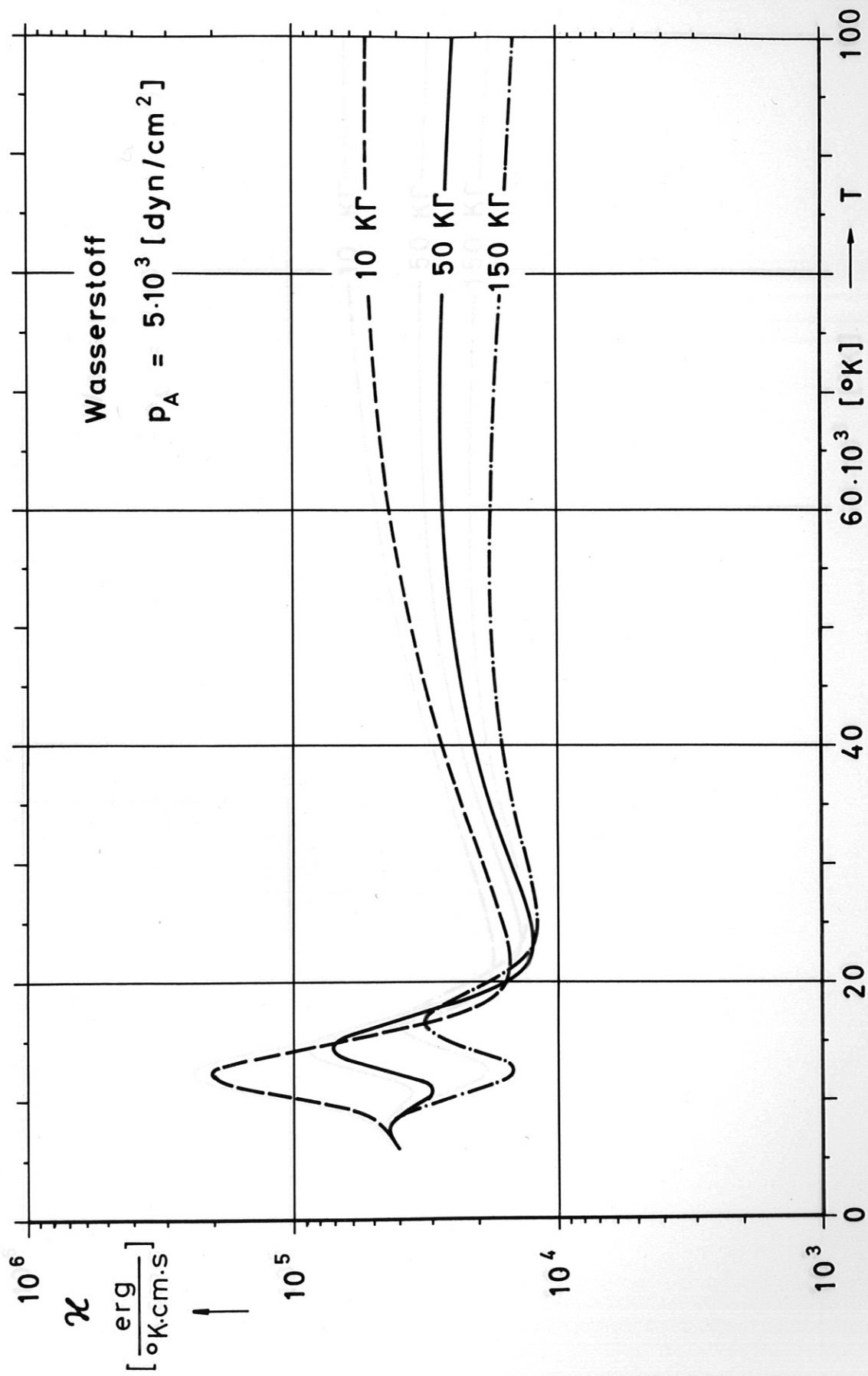


Abb.12 Wärmeleitfähigkeit von Wasserstoff im Magnetfeld

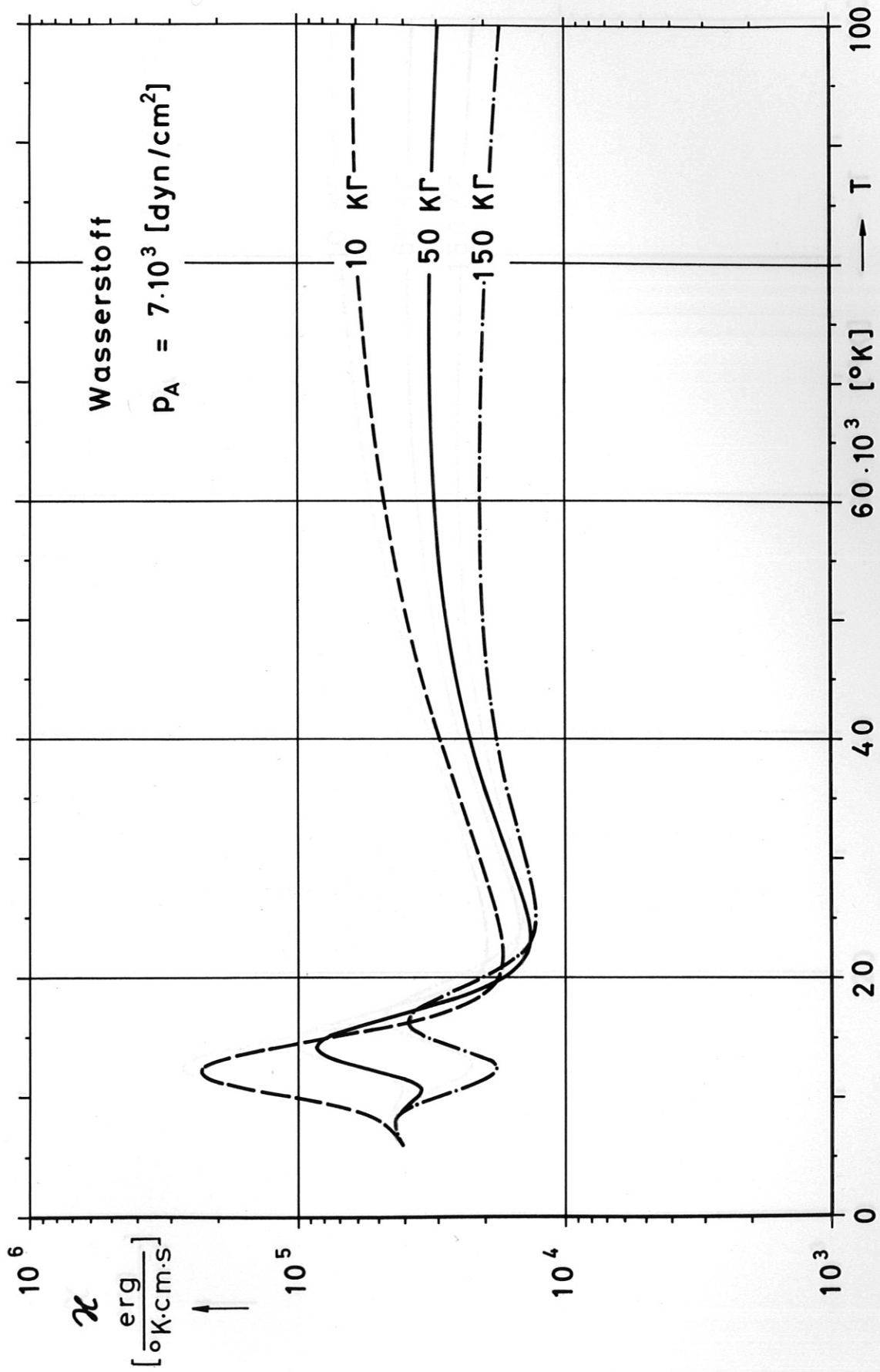


Abb.13 Wärmeleitfähigkeit von Wasserstoff im Magnetfeld

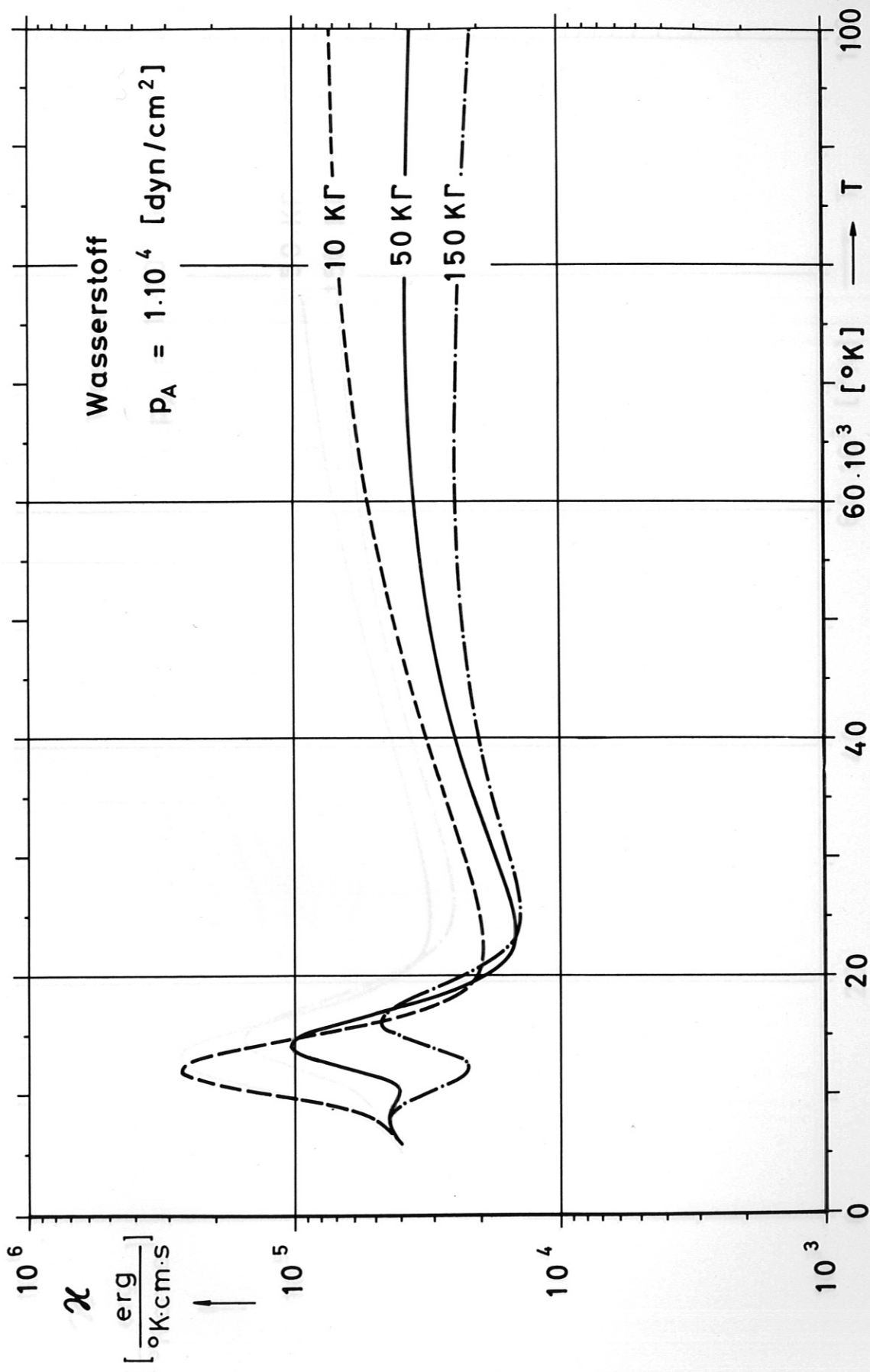


Abb. 14 Wärmeleitfähigkeit von Wasserstoff im Magnetfeld

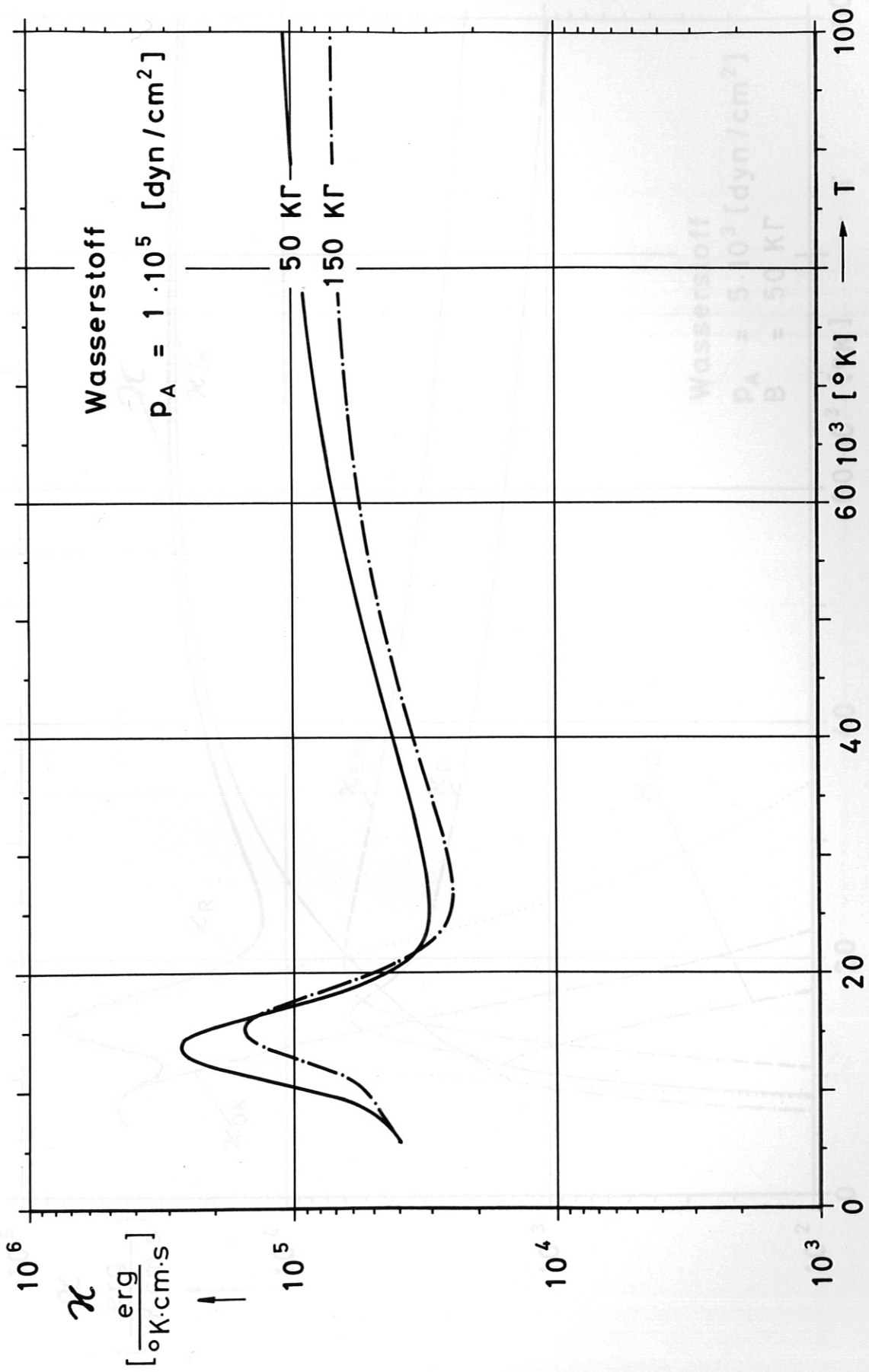


Abb.15 Wärmeleitfähigkeit von Wasserstoff im Magnetfeld

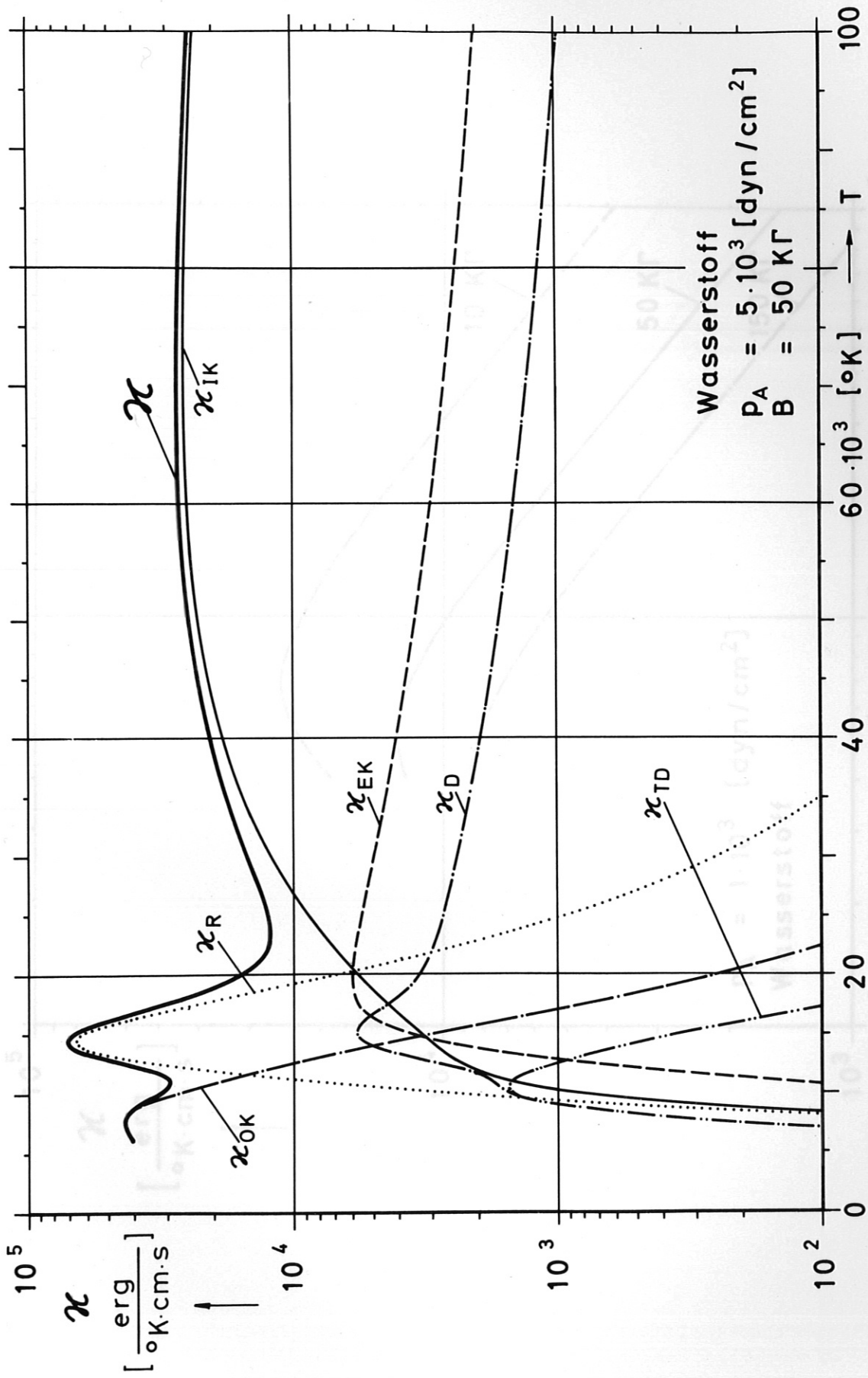


Abb.16 Die verschiedenen Anteile der Wärmeleitfähigkeit von Wasserstoff im Magnetfeld für $P_A = 5 \cdot 10^3$ dyn/cm² für $B = 50$ k

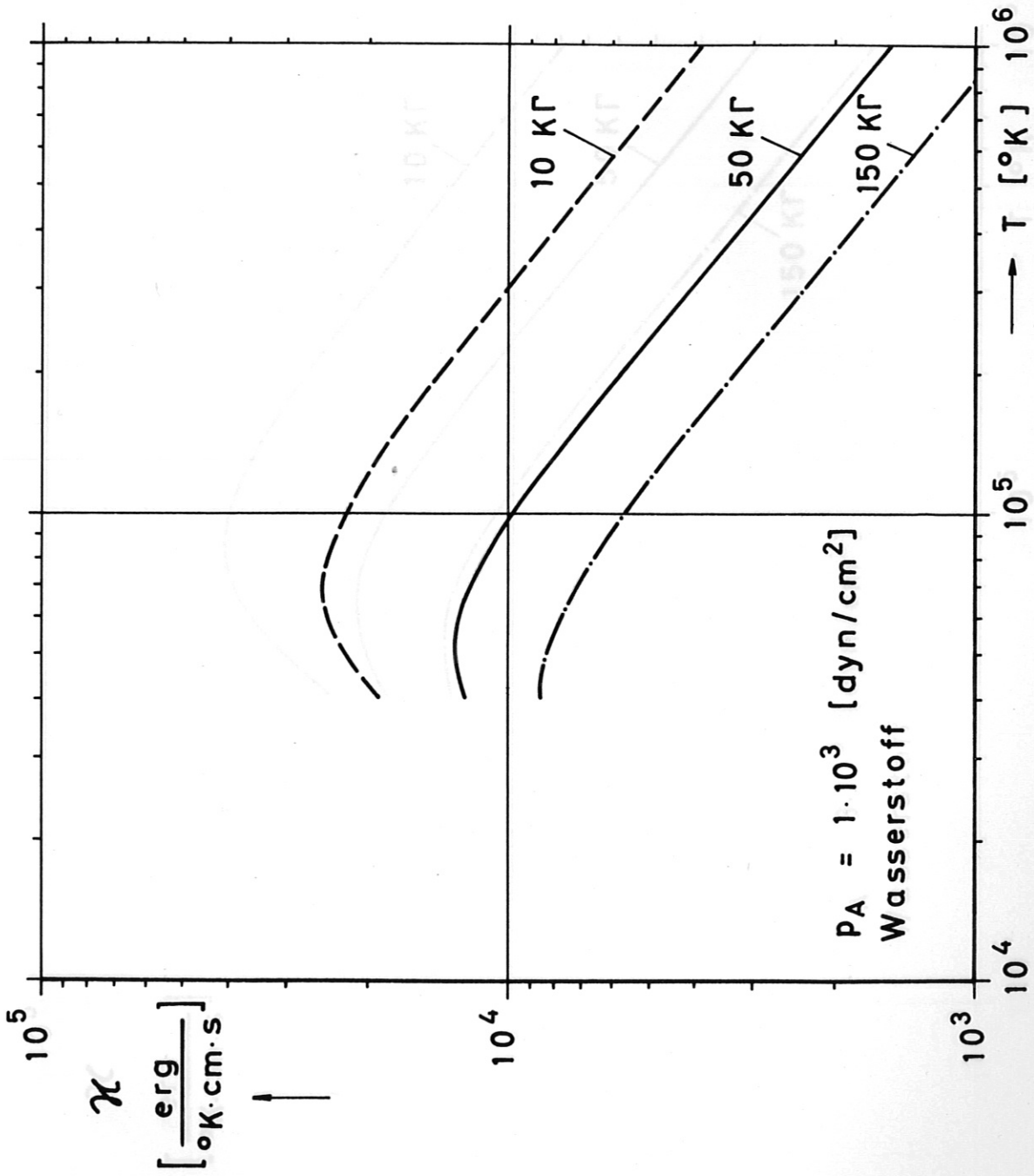


Abb.17 Wärmeleitfähigkeit von Wasserstoff im Magnetfeld bei vollständiger Ionisation

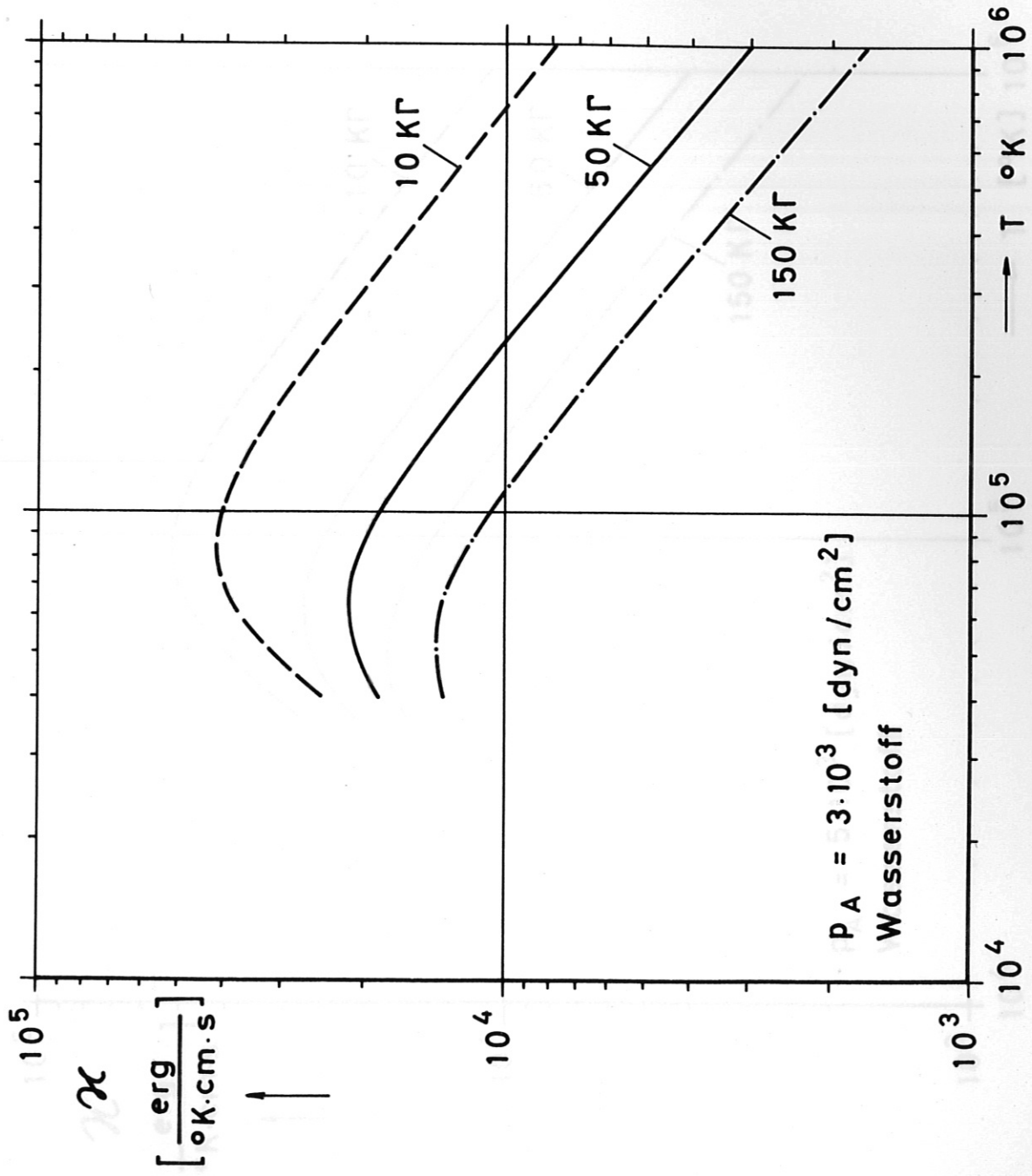


Abb.18 Wärmeleitfähigkeit von Wasserstoff im Magnetfeld bei vollständiger Ionisation

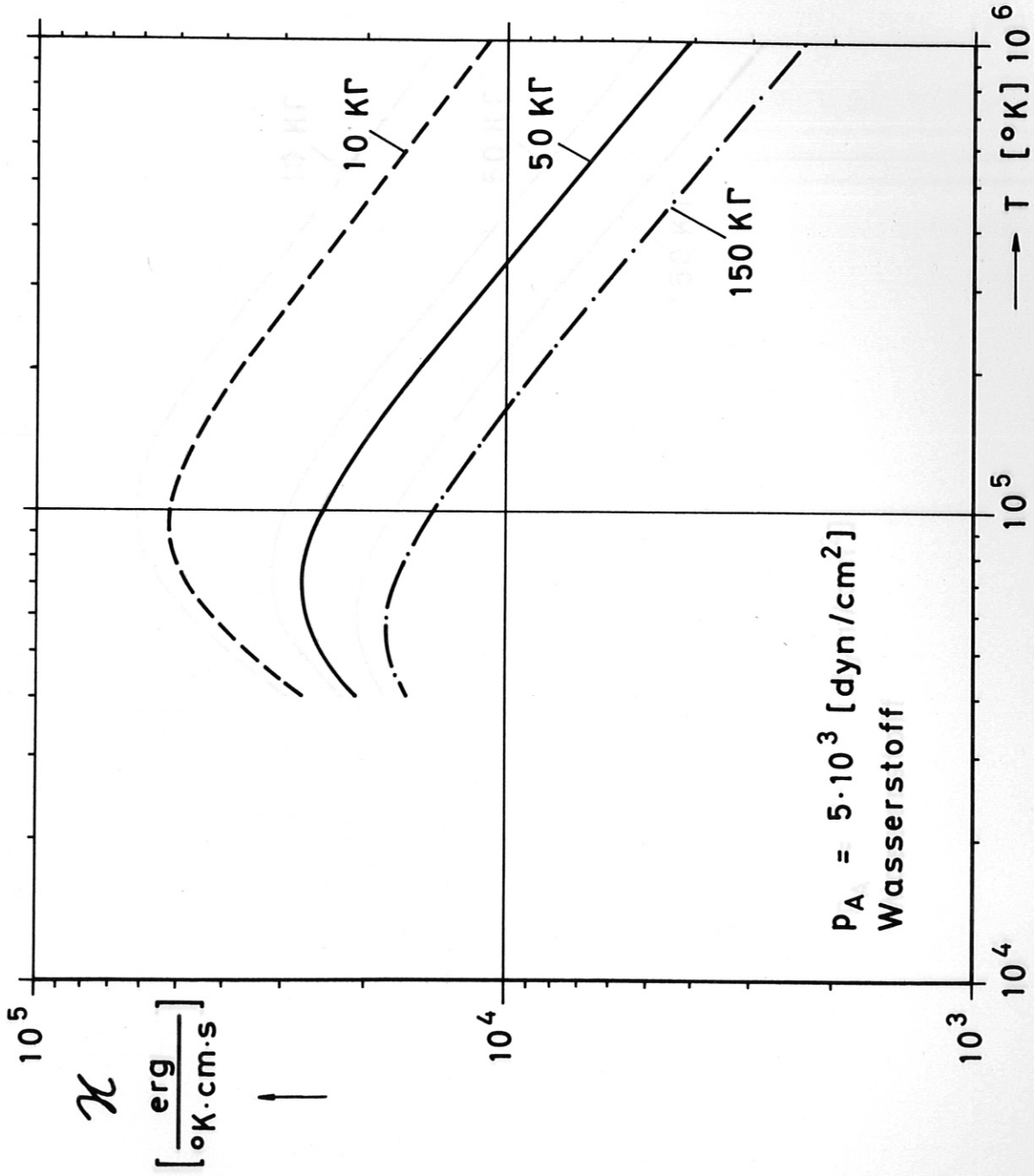


Abb.19 Wärmeleitfähigkeit von Wasserstoff im Magnetfeld bei vollständiger Ionisation

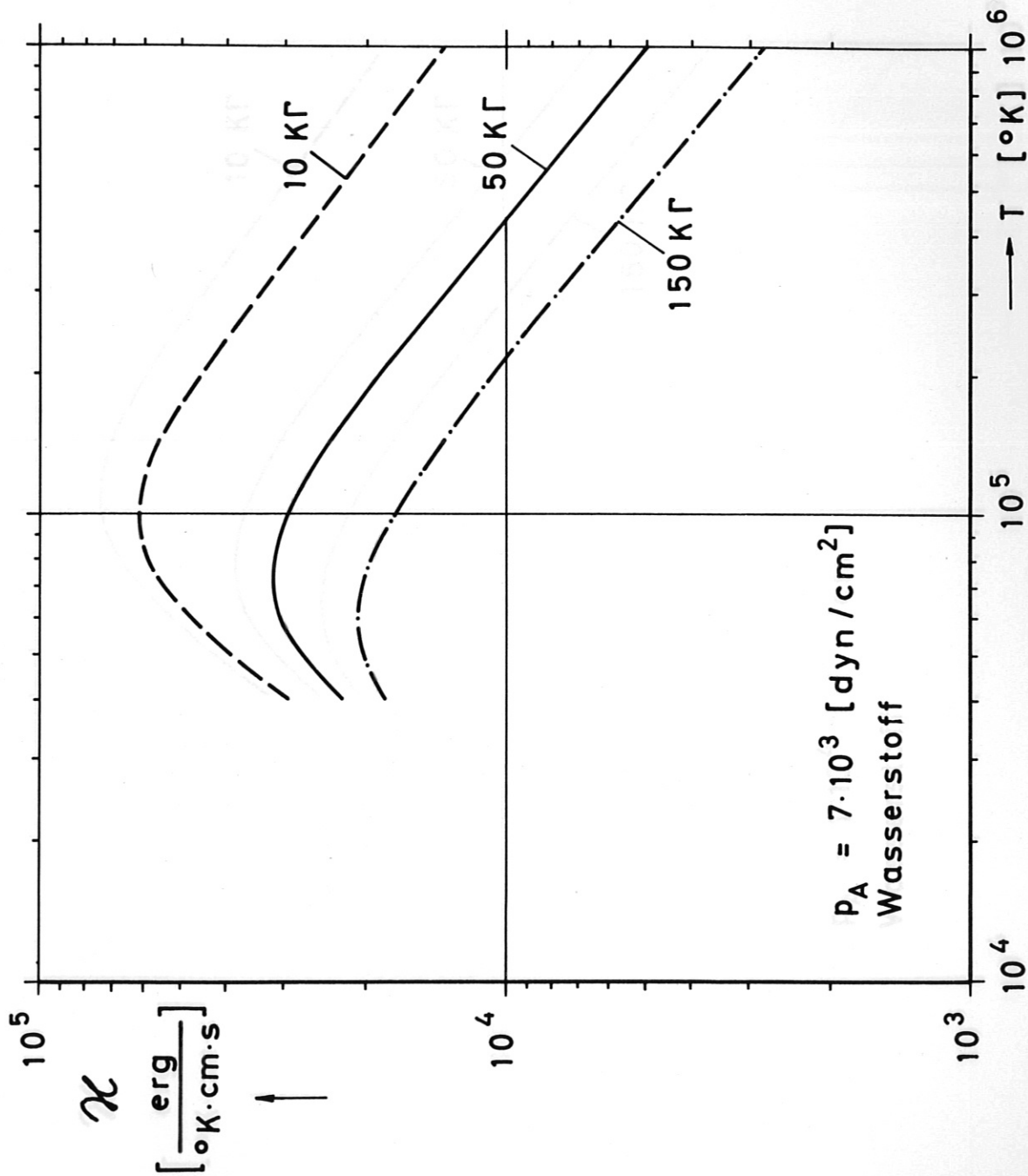


Abb.20 Wärmeleitfähigkeit von Wasserstoff im Magnetfeld bei vollständiger Ionisation

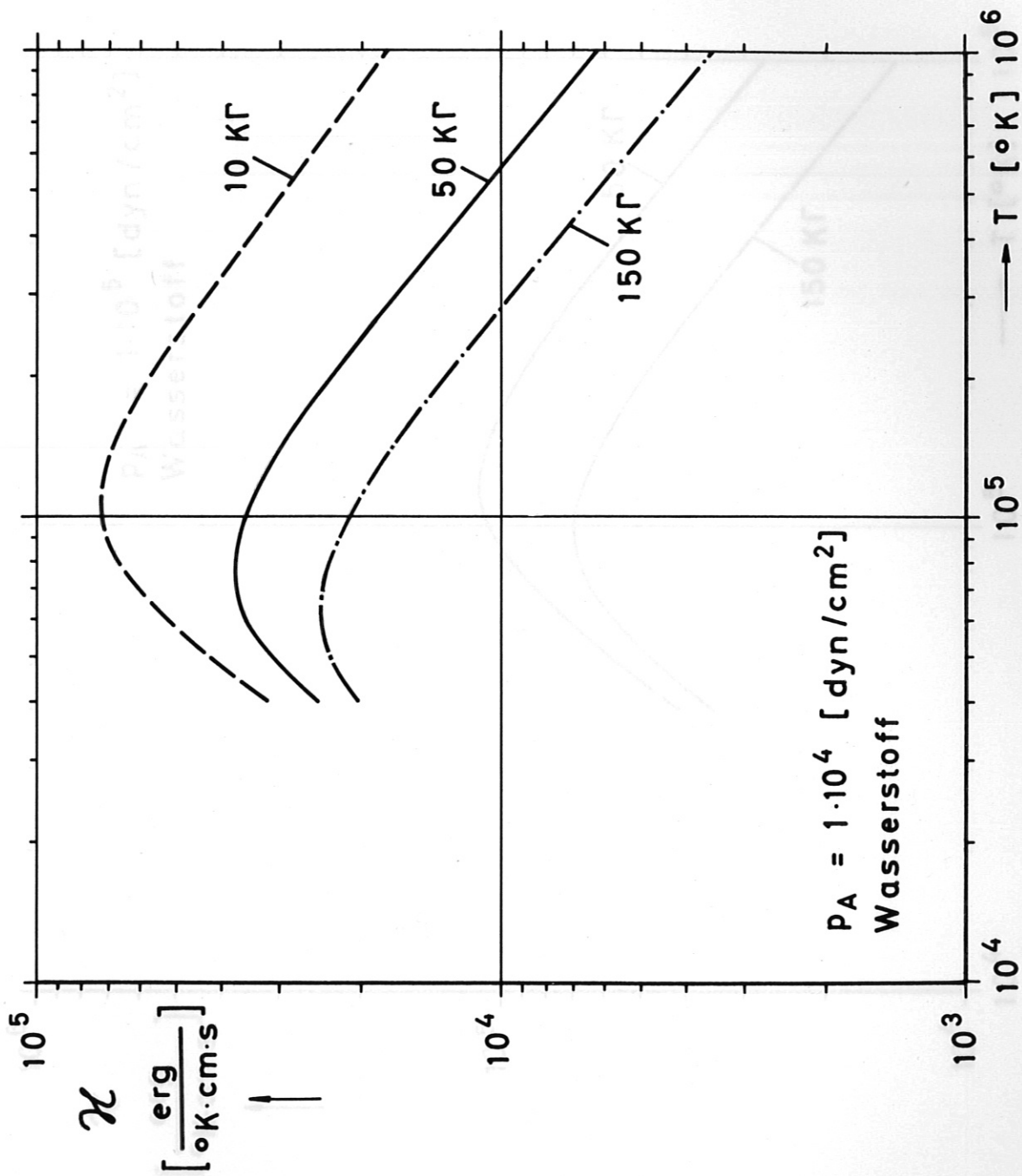


Abb.21 Wärmeleitfähigkeit von Wasserstoff im Magnetfeld bei vollständiger Ionisation

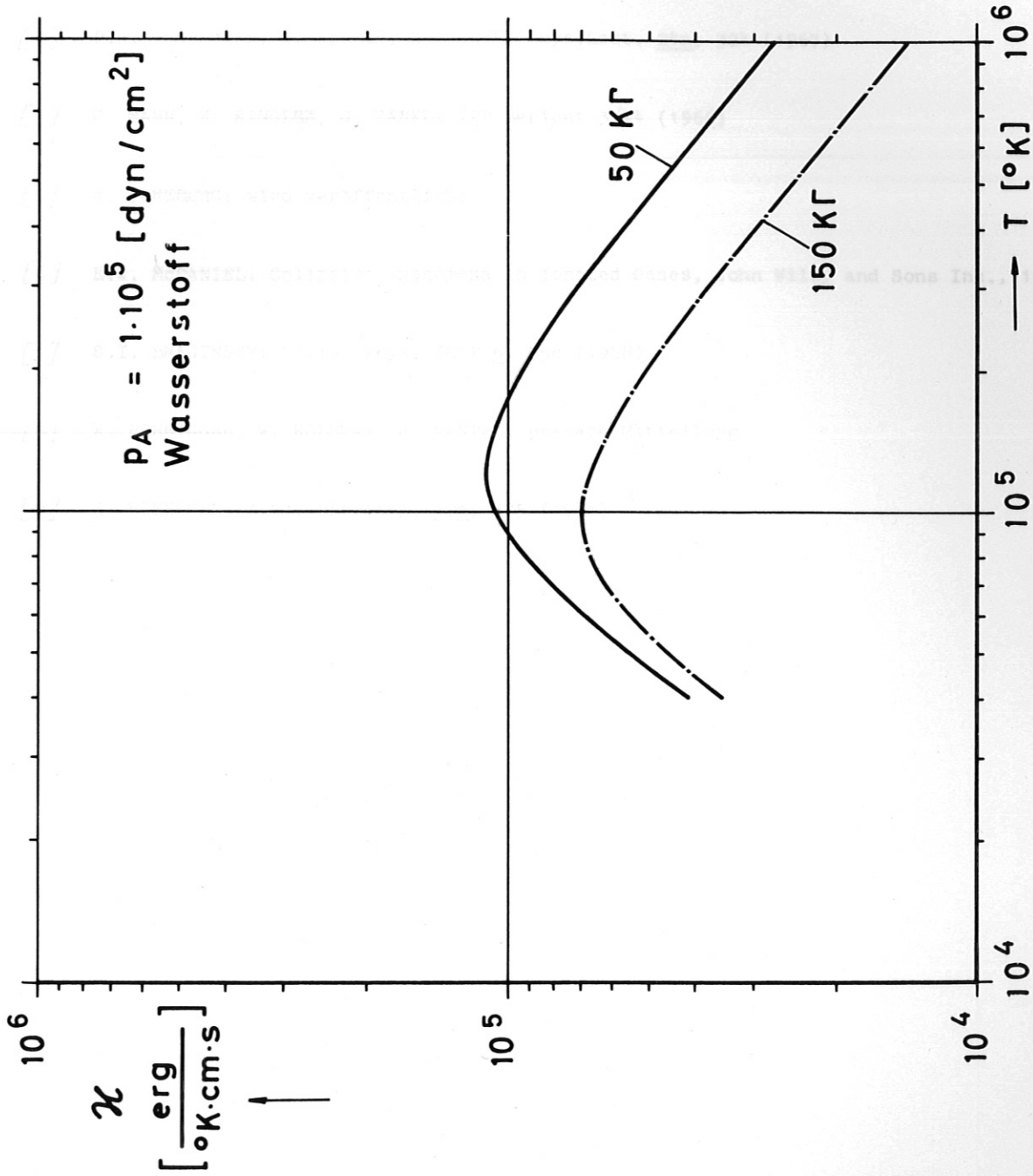


Abb.22 Wärmeleitfähigkeit von Wasserstoff im Magnetfeld bei vollständiger Ionisation

Literaturverzeichnis

- [1] R. WIENECKE: Z.Naturforschg. 18a, 1151 (1963)
- [2] H.F. DOBELE, R. WIENECKE, S. WITKOWSKI: Z.Naturforschg. 21a, 390 (1966)
- [3] P.H. GRASSMANN, O. KLUBER, H. WULFF: Phys.Lett. 24a, 324 (1967)
- [4] C. MAHN, H. RINGLER, G. ZANKL: IPP Bericht 3/44 (1966)
- [5] W. FENEBERG: wird veröffentlicht
- [6] E.W. McDANIEL: Collision Phenomena in Ionized Gases, John Wiley and Sons Inc., 1964
- [7] S.I. BRAGINSKY: Soviet Phys. JETP 6, 358 (1958)
- [8] K. BEHRINGER, W. KOLLMAR, J. MENDEL: private Mitteilung
- [9] R. WIENECKE: Z.Naturforschg. 19a, 675 (1964)

Bezeichnungen

$$\ln \Lambda = \ln \left\{ \frac{3kT}{e^2} \left(\frac{kT}{4\pi e^2 n} \right)^{1/2} \right\}$$

$$\nu_{ei} = \frac{4\sqrt{2}\pi e^4 \ln \Lambda n}{8\sqrt{m_e} (kT)^{3/2}}$$

$$\nu_{xi} = \sqrt{\frac{2m_e}{m_x}} \nu_{ei}$$

$$\nu_{i0} = \frac{16}{3\sqrt{\pi}} n_0 Q_{i0} \left(\frac{kT}{m_i} \right)^{1/2}$$

$$\nu_{e0} = \frac{16}{3\sqrt{2}\pi} n_0 Q_{e0} \left(\frac{kT}{m_e} \right)^{1/2}$$

$$\nu_{00} = \frac{32}{3\sqrt{\pi}} n_0 Q_{00} \left(\frac{kT}{m_i} \right)^{1/2}$$

$$\frac{1}{\tau_{i0}} = 0.825 \nu_{i0}$$

$$\frac{1}{\tau_{e0}} = 1.3 \nu_{e0}$$

$$\frac{1}{\tau_{00}} = 0.8 \nu_{00}$$

$$\frac{1}{\tau_{oi}} = 0.825 \nu_{oi}$$

$$\frac{1}{\tau_{ei}} = 1.866 \nu_{ei}$$

$$\frac{1}{\tau_{ii}} = 0.4 \nu_{ii}$$

$$\frac{1}{\tau_i} = \frac{1}{\tau_{ii}} + \frac{1}{\tau_{oi}} + \frac{\tau_0}{\tau_{io} \tau_i}$$

$$\frac{1}{\tau_0} = \frac{1}{\tau_{oi}} + \frac{1}{\tau_{00}}$$

$$\frac{1}{\tau_e} = \frac{1}{\tau_{ei}} + \frac{1}{\tau_{e0}}$$

$$K_e = \frac{1}{1 + (\omega \tau_e)^2}$$

$$\alpha_1 = 1 - 0.1 \tau_e \nu_{e0}$$

$$\alpha_2 = 1 - 0.1 K_e \nu_{e0}$$

$$\alpha_3 = 0.1 K_e \nu_{e0} \omega \tau_e$$

$$\beta_1 = 0.3 \tau_e \nu_{e0}$$

$$\beta_2 = 0.3 K_e \nu_{e0}$$

$$\beta_3 = -0.3 K_e \nu_{e0} \omega \tau_e$$

$$\alpha'_1 = 0.3 \tau_e \nu_{ei}$$

$$\alpha'_2 = 0.3 K_e \nu_{ei}$$

$$\alpha'_3 = -0.3 K_e \nu_{ei} \omega \tau_e$$

$$\beta'_1 = 1 - 0.9 \tau_e \nu_{ei}$$

$$\beta'_2 = 1 - 0.9 K_e \nu_{ei}$$

$$\beta'_3 = 0.9 K_e \nu_{ei} \omega \tau_e$$

$$\alpha''_1 = \frac{1}{2} \frac{k}{m_e} \tau_e$$

$$\alpha''_2 = \frac{1}{2} \frac{k}{m_e} K_e$$

$$\alpha''_3 = \frac{1}{2} \frac{k}{m_e} K_e \omega \tau_e$$

$$\beta''_1 = -3 \alpha''_1$$

$$\beta''_2 = -3 \alpha''_2$$

$$\beta''_3 = -3 \alpha''_3$$

$$K_i = \frac{\tau_i}{1 + (\Omega \tau_i)^2}$$

$$\beta_1 = 1 - 0,1 \nu_{ei} - 0,1 \nu_{io} \tau_i \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_{oi}}\right)^2$$

$$\beta_2 = 1 - 0,1 \nu_{ei} - 0,1 \nu_{io} K_i \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_{oi}}\right)^2$$

$$\beta_3 = -0,1 \nu_{io} K_i \Omega \tau_i \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_{oi}}\right)^2$$

$$e_1 = \frac{k}{2m_2} \left[\left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_{oi}}\right) \tau_i - \tau_0 \right]$$

$$e_2 = \frac{k}{2m_i} \left[\left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_{oi}}\right) K_i - \tau_0 \right]$$

$$e_3 = \frac{k}{2m_i} K_i \Omega \tau_i \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_{oi}}\right) \left(1 + \frac{\tau_0}{\tau_{io}}\right)$$

$$d_j = - \frac{n_i + n_e}{n_0} \left[g_e \nu_{eo} \alpha_j + g_e \nu_{ei} \delta_j \right]$$

$$f_j = \frac{1}{ne} \left[g_e \nu_{eo} (\alpha_j + \alpha'_j) + g_e \nu_{ei} (\delta_j + \delta'_j) \right]$$

$$e_j = g_e \nu_{eo} \alpha'_j + g_e \nu_{ei} \delta'_j$$

$j = 1, 2, 3$

$$g_j = - \frac{n_i + n_0}{n_0} \left[g_e \nu_{ei} \delta_j + g_i \nu_{io} \beta_j \right]$$

$$f_j = - \frac{1}{ne} \left[\frac{m_e}{m_i} g_i \nu_{io} \beta_j + g_e \nu_{ei} (\delta_j + \delta'_j) \right]$$

$$h_j = - g_e \nu_{ei} \delta'_j + g_i \nu_{io} \epsilon_j$$

$$d'_3 = d_3 - ne B$$

$$g'_3 = g_3 + ne B$$

$$a_j = d_j + g_j$$

$$b_j = f_j + f'_j$$

$$c_j = e_j + k_j$$

$$F = c_2 - \frac{a_2 (k_3 d_2 - e_3 g_2) + a_3 (k_3 d'_3 - e_3 g'_3)}{g'_3 d_2 - d'_3 g_2}$$

$$D = b_3 + \frac{a_e (f_2 d_e - f_2 g_2) + a_3 (f_2 d'_3 - f_2 g'_3)}{g'_3 d_2 - d'_3 g_2}$$

$$R_1 = \frac{P_e}{2} \frac{P_i + P_0}{P_0} \left[K_e \nu_{eo} + K_i \nu_{io} \left(1 + \frac{\tau_0}{\tau_{io}}\right) \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_{oi}}\right) - \nu_{io} \tau_0 \right]$$

$$R_2 = \frac{P_e}{2} \frac{P_i + P_0}{P_0} \left[-K_e \nu_{eo} \omega c_e + K_i \nu_{io} \Omega \tau_i \left(1 + \frac{\tau_0}{\tau_{io}}\right) \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_{oi}}\right) \right]$$

$$R_3 = \frac{P_e}{2} \frac{1}{ne} \left[K_e \nu_{eo} \left(\frac{3\nu_{ei}}{\nu_{eo}} - 1\right) + K_i \nu_{io} \frac{m_e}{m_i} \left(1 + \frac{\tau_0}{\tau_{io}}\right) \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_{oi}}\right) - \nu_{io} \tau_0 \frac{m_e}{m_0} \right]$$

$$R_4 = -\frac{P_e}{2} \frac{1}{ne} \left[K_e \nu_{eo} \omega c_e \left(\frac{3\nu_{ei}}{\nu_{eo}} - 1\right) - K_i \nu_{io} \Omega \tau_i \frac{m_e}{m_0} \left(1 + \frac{\tau_0}{\tau_{io}}\right) \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_{oi}}\right) \right]$$