

Schwingungen eines homogenen Plasmazylinders

Oscillations of a Homogeneous Plasma Cylinder

R. Remmers

IPP 3/62

November 1967

I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K

G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Schwingungen eines homogenen Plasmazylinders

Oscillations of a Homogeneous Plasma Cylinder

R. Remmers

IPP 3/62

November 1967

The electromagnetically oscillations of a cylindrical homogeneous plasma column have been investigated. The plasma cylinder is of infinite length and exposed to a static, homogeneous, axial magnetic field. The plasma is supposed to be collisionless, but pressure terms in the equations of motion are considered. The two possible types of oscillation are distinguished by the direction of the induced electric currents. For axial currents the oscillations are characterized by Bessel's refractive index. For currents perpendicular to the magnetic field the refractive index for Alfvén-waves with a pressure-term correction is obtained.

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

Abstract

The electromagnetically excited oscillations of a cylindrical, homogeneous plasma column have been investigated. The plasma cylinder is of infinite length and exposed to a static, homogeneous, axial magnetic field. The plasma is supposed to be collisionless, but pressure terms in the equations of motion are considered. The two possible types of oscillation are distinguished by the direction of the induced electric currents. For axial currents the oscillations are characterized by Eccles' refractive index. For currents perpendicular to the magnetic field the refractive index for Alfvén-waves with a pressure-term correction is obtained.

| | |
|--|----|
| 1. Integration der Bewegungsgleichungen | 27 |
| 2. Die Grenzfläche Plasma - Vakuum (stationärer Grenzfall) | 28 |
| 3. Die Grenzfläche Plasma - Vakuum (stationärer Grenzfall) | 30 |
| 4. Die Grenzfläche Vakuum - Stromschicht - Vakuum | 32 |
| 5. Bestimmung der Integrationskonstanten | 33 |
| <u>Zusammenfassung</u> | |
| 1. Einleitung | 38 |
| 2. Die Bewegungsgleichungen | 38 |
| 3. Die Grenzflächenbedingungen | 39 |
| 4. Die Integrationskonstanten | 41 |
| 5. Die stationäre Lösung | 42 |
| <u>VII. Zusammenfassung</u> | |
| 1. Zusammenfassung | 43 |
| 2. Literaturverzeichnis | 47 |

Inhaltsverzeichnis

| | Seite |
|--|-------|
| <u>I. Einleitung</u> | |
| I. <u>Einleitung</u> | 1 |
| II. <u>Grundgleichungen</u> | 4 |
| III. <u>Linearisierte Gleichungen</u> | |
| 1. Stationäres Plasma | 9 |
| 2. Linearisierung | 10 |
| 3. Vereinfachung des Ohmschen Gesetzes | 12 |
| 4. Berücksichtigung der Geometrie der Anordnung | 14 |
| IV. <u>Lösung des Gleichungssystems</u> | |
| 1. Lösung der Plasmagleichungen | 17 |
| 1.1. Aufspaltung des Gleichungssystems | 17 |
| 1.2. Lösung des Systems I | 18 |
| 1.3. Lösung des Systems II | 20 |
| 2. Lösungen im inneren Vakuumbereich | 23 |
| 3. Lösungen im Bereich der Stromschicht | 24 |
| 4. Lösungen im äusseren Vakuumbereich | 25 |
| V. <u>Grenzbedingungen</u> | |
| 1. Integration über eine Grenzfläche | 27 |
| 2. Die Grenzfläche Plasma - Vakuum im stationären Fall . | 28 |
| 3. Die Grenzfläche Plasma - Vakuum im instationären Fall | 30 |
| 4. Die Grenzfläche Vakuum - Stromschicht - Vakuum | 32 |
| 5. Bestimmung der Integrationskonstanten | 33 |
| VI. <u>Der Brechungsindex</u> | |
| 1. Die elektromagnetische Welle | 38 |
| 2. Das Amplitudenverhältnis der Lösungen | 38 |
| 3. Die Alfvénsche Welle | 39 |
| 4. Der Brechungsindex bei der Hybridfrequenz | 41 |
| 5. Der thermische Anteil der Lösung | 42 |
| VII. <u>Zusammenfassung</u> | 43 |
| <u>Literaturverzeichnis</u> | 47 |

I. Einleitung

Ein ionisiertes Gas, dessen Eigenschaften von den durch die Ionisation freigesetzten Ladungsträgern wesentlich mitbestimmt werden, bezeichnet man als ein Plasma [1].

Neben den hydrodynamischen Eigenschaften des Plasmas existieren die elektromagnetischen Wechselwirkungen der geladenen Teilchen untereinander und mit äusseren Feldern. Die Beschreibung der Vorgänge in einem Plasma durch Verbindung von Hydrodynamik und Elektrodynamik bezeichnet man als Magnetohydrodynamik [2].

Ein vollständig ionisiertes Plasma besteht im einfachsten Fall aus zwei Komponenten: den negativ geladenen Elektronen und den positiven Ionen. Ein solches Plasma wird durch das Zweiflüssigkeitsmodell der Magnetohydrodynamik beschrieben [3].

Im Gegensatz zu reibungslosen Flüssigkeiten und Gasen, in denen nur longitudinale (hydrodynamische) Schallschwingungen möglich sind, kann in einem Plasma eine Vielzahl von Schwingungsformen auftreten. Das wird durch die hydrodynamischen und elektrodynamischen Wechselwirkungen und deren Verkoppelung, insbesondere durch magnetische Felder, bedingt.

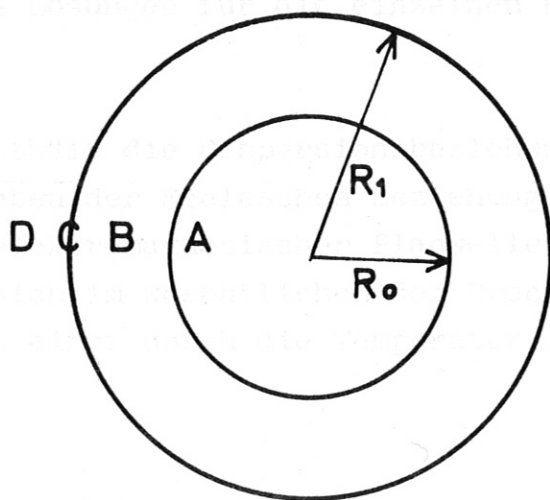
Um ein Bild von der Struktur der Schwingungen und Wellen in einem Plasma zu erhalten, geht man von einem angenommenen Gleichgewichtszustand des Plasmas aus, bei dem seine Eigenschaften - wie z.B. Ladungsträgerdichte, Temperatur, Magnetfeld usw. - bekannt sind, und untersucht dann, wie kleine Störungen dieses Gleichgewichts sich zeitlich und räumlich verhalten. Während in der Elektrodynamik für das elektrische und magnetische Feld exakte Wellengleichungen abgeleitet werden können, erhält man im Plasma stets nichtlineare Gleichungen. Für Wellen kleiner Amplitude können diese Gleichungen linearisiert werden. Das ist für Wellen grosser Amplitude nicht möglich, deshalb ergeben sich in diesem Falle keine reinen Wellentypen.

Diese "Theorie der kleinen Amplituden" wird im folgenden auf einen homogenen, unendlich langen Plasmazylinder angewandt, der sich in einem axialen Magnetfeld befindet. Dieses Problem wurde bereits von Körper [4] für ein "kaltes" Plasma behandelt, d.h. Druckterme wurden

vernachlässigt. Im Unterschied dazu soll hier die Temperatur des Plasmas berücksichtigt werden; Stösse werden dagegen vernachlässigt.

Ein solches Plasma kann Schwingungen ausführen, bei denen das elektrische Feld und die Störungen der makroskopischen Geschwindigkeit sich senkrecht zum Magnetfeld ausbreiten [5]. Beispiele für solche Schwingungen sind die hydromagnetischen Wellen von Alfvén [6] und Åström [7].

Die Anregung des Plasmazylinders erfolgt durch elektromagnetische Wellen, die von einem koaxialen, in azimuthaler Richtung fliessenden Flächenstrom erzeugt werden und radial nach innen laufen. Das hier zugrunde gelegte System besteht also aus vier Bereichen:



| | |
|-----------------------------------|-----------------|
| Bereich A: Plasmazylinder | $r \leq R_0$ |
| Bereich B: innerer Vakuumbereich | $R_0 < r < R_1$ |
| Bereich C: Stromschicht | $r = R_1$ |
| Bereich D: äusserer Vakuumbereich | $R_1 < r$ |

Die Grundgleichungen des magnetohydrodynamischen Zweiflüssigkeitsmodells für das Plasma werden in Abschnitt II hergeleitet. Dabei wird zusätzlich zu den bei Stix [4], [8] und Körper [7] für ein "kaltes" Plasma gemachten Voraussetzungen eine endliche, über den Radius des Plasmas konstante Temperatur angenommen. Diese Grundgleichungen werden in Abschnitt III für Wellen kleiner Amplitude linearisiert.

Abschnitt IV enthält die Lösungen der Gleichungssysteme für die einzelnen Bereiche. Im Bereich A sind die linearisierten Plasma-

gleichungen zu lösen. Ausser dem oszillierenden Anteil $J_1(f_1 \cdot r)$ des Feldes ergibt sich eine exponentiell abklingende Komponente $I_1(f_2 \cdot r)$, die durch die endliche Temperatur des Plasmas hervorgerufen wird. Ausserhalb des Plasmas gelten die Maxwell'schen Gleichungen mit $j \neq 0$ in der Stromschicht bzw. $j = 0$ in den beiden Vakuumbereichen. Randbedingungen des Lösungssystems sind die Regularitätsbedingung für $r = 0$ und die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung [9] für $r \rightarrow \infty$, die die Eindeutigkeit der Lösung für ins Unendliche divergierende Wellen garantiert.

Die Grenzbedingungen für den Übergang der physikalischen Grössen zwischen verschiedenen Medien werden nach der von Stix [8] angegebenen Methode in Abschnitt V hergeleitet. Über diese Grenzbedingungen lassen sich die Lösungen für die einzelnen Bereiche aneinander anschliessen.

Abschnitt VI enthält die Dispersionsbeziehungen der verschiedenen Wellenmoden. Neben der Eccleschen Beziehung für die Ausbreitung transversaler elektromagnetischer Planwellen im magnetfeldfreien Plasma ergibt sich im wesentlichen der Brechungsindex für Alfvén'sche Wellen mit einer durch die Temperatur des Plasmas bedingten Korrektur.

$$\rho \frac{dv}{dt} + \frac{\rho \cdot v}{\rho \cdot v} v(\omega - \omega_c) = e m_e \left(E + \frac{v \times B}{c} \right) - \nabla p$$
$$\rho_e \frac{dv_e}{dt} + \frac{\rho_e \cdot v_e}{\rho_e \cdot v_e} v(\omega - \omega_c) = - e m_e \left(E + \frac{v \times B}{c} \right) - \nabla p_e$$

Die substantiellen Ableitungen sind dabei durch

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (v \cdot \nabla)$$

definiert [3]. In diesen Gleichungen sind die Gravitationsterme vernachlässigt; ausserdem wurde angenommen, dass Ionen- und Elektronenladung gleich gross sind. Die Gleichungen gelten also nur für einfach geladene Ionen, beispielsweise für ein Wasserstoffplasma. Die Bewegungsgleichungen für die einzelnen Komponenten sind durch Reibungsterme miteinander verknüpft, in denen unelastische Stösse zwischen den Teilchen der selben Komponente mit der Stossfrequenz berücksichtigt sind. Die innere Reibung jeder Komponente für sich

II. Grundgleichungen

Es sollen nun zunächst die hydrodynamischen Gleichungen für das Zweiflüssigkeitsmodell angegeben werden [10], [11].

Bezeichnet man die Massen bzw. die Teilchendichten der Ionen und Elektronen mit m_i , n_i und m_e , n_e , so sind

$$\rho_i = m_i n_i \quad (2.1)$$

$$\rho_e = m_e n_e$$

die entsprechenden Massendichten. Mit den mittleren (hydrodynamischen) Geschwindigkeiten w_i , w_e der Ionen und Elektronen erhält man als Kontinuitätsgleichungen

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i w_i) = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_e w_e) = 0$$

Die Bewegungsgleichungen der Ionen- bzw. Elektronenkomponente der Flüssigkeit lauten mit den skalaren Partialdrücken p_i , p_e

$$\rho_i \frac{d_i w_i}{dt} + \frac{\rho_i \rho_e}{\rho_i + \rho_e} \nu (w_i - w_e) = e n_i \left(E + \frac{w_i}{c} \times B \right) - \nabla p_i \quad (2.3)$$

$$\rho_e \frac{d_e w_e}{dt} + \frac{\rho_i \rho_e}{\rho_i + \rho_e} \nu (w_e - w_i) = -e n_e \left(E + \frac{w_e}{c} \times B \right) - \nabla p_e \quad (2.6)$$

Die substantiellen Ableitungen sind dabei durch

$$\frac{d w}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + (w \cdot \nabla) w \quad (2.4)$$

definiert [3]. - In diesen Gleichungen sind die Gravitationsterme vernachlässigt; ausserdem wurde angenommen, dass Ionen- und Elektronenladung gleich gross sind. Die Gleichungen gelten also nur für einfach geladene Ionen, beispielsweise für ein Wasserstoffplasma. Die Bewegungsgleichungen für die einzelnen Komponenten sind durch Reibungsterme miteinander verkoppelt, in denen unelastische Stösse zwischen den Teilchen der beiden Komponenten mit der Stossfrequenz ν berücksichtigt sind. Die innere Reibung jeder Komponente für sich

ist darin nicht enthalten.

Führt man die makroskopischen Größen

| | |
|-------------------|--|
| Gesamtdruck | $p = p_i + p_e$ |
| Massendichte | $\rho = \rho_i + \rho_e$ |
| Raumladungsdichte | $\sigma = e(n_i - n_e)$ |
| Stromdichte | $\vec{j} = e(n_i v_i - n_e v_e)$ |
| Geschwindigkeit | $v = \frac{1}{\rho} (\rho_i v_i + \rho_e v_e)$ |

ein, so erhält man durch Addition der Gleichungen (2.3) die Bewegungsgleichung des Plasmas [11]:

$$\rho \frac{d_i v}{dt} + \rho \gamma_{G_1} = -\nabla p + \frac{1}{c} \vec{j} \times \mathcal{L} + \sigma \mathcal{E} \quad (2.5)$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung stehen die Kräfte, die auf das Plasma ausgeübt werden: die Lorentzkraft, der Gradient des Gesamtdruckes p und die Kraft des elektrischen Feldes, die wegen der Raumladungsdichte σ auftritt und im Falle der Quasineutralität des Plasmas ($n_i = n_e$) verschwindet.

Die Glieder auf der linken Seite sind durch

$$\frac{d_i v}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\rho}{m^2} \left(\frac{m_i}{n_i} + \frac{m_e}{n_e} \right) (v \cdot \nabla) v + \frac{m_i m_e}{e^2 m^2 \rho} \left(\frac{m_i}{m_e} + \frac{m_e}{n_i} \right) (\vec{j} \cdot \nabla) \vec{j} + \quad (2.6)$$

$$+ \frac{m_i m_e}{e^2 m^2 \rho} \left[\vec{j} \cdot \nabla \left(\frac{m_i}{n_i} + \frac{m_e}{n_e} \right) \right]$$

bzw.

$$\begin{aligned} \rho \gamma_{G_1} = & \frac{m_i m_e}{e m^2 \rho} \left[e m \left[n_i \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m_e}{n_i} \right) + n_e \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m_i}{n_e} \right) \right] \cdot v + \right. \\ & + m \left[n_i \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{n_i} \right) - n_e \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{n_e} \right) \right] \vec{j} + \rho \left(\frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_e} \right) \left[(v \cdot \nabla) \vec{j} + (\vec{j} \cdot \nabla) v \right] + \\ & + e \rho \left[v \cdot \nabla \left(\frac{n_e}{n_i} + \frac{n_i}{n_e} \right) \right] v + \left[\vec{j} \cdot \nabla \left(m_e \frac{n_e}{n_i} - m_i \frac{n_i}{n_e} \right) \right] v + \\ & + \rho \left[v \cdot \nabla \left(\frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_e} \right) \right] \vec{j} + \frac{1}{c} \left[\vec{j} \cdot \nabla \left(\frac{m_i}{n_i} + \frac{m_e}{n_e} \right) \right] \vec{j} \end{aligned} \quad (2.7)$$

definiert. Diese beiden letzten Beziehungen ergeben sich, wenn man bei der Addition der Bewegungsgleichungen (2.3) die Geschwindigkeiten v_i , v_e gemäss

$$v_i = \frac{\rho}{n_i m_i} v + \frac{m_e}{n_i m_e} \vec{j} \quad ; \quad v_e = \frac{\rho}{n_e m_e} - \frac{m_i}{n_e m_e} \vec{j} \quad (2.8)$$

durch die makroskopischen Grössen v und \vec{j} ausdrückt. Sie gelten für ein nicht-quasineutrales Plasma; im Falle der Quasineutralität verschwindet der Term ρ/n_i , während $d_i v/dt$ dann in die von Schlüter [3] angegebene Form (2.4) übergeht.

Multipliziert man die Gleichungen (2.3) mit m_e bzw. m_i , so erhält man durch Subtraktion das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz (Diffusionsgleichung) in der von Lüst [11] angegebenen Form:

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^2} \frac{m_i m_e}{n_i m_e + n_e m_i} \left[\frac{d_i \vec{j}}{dt} + \gamma_{\Omega} \right] + \frac{1}{\eta} (\vec{j} - \sigma v) = \\ = \mathcal{E} + \frac{\rho}{n_i m_e + n_e m_i} \frac{v}{c} \times \mathcal{L} + \frac{1}{e (n_i m_e + n_e m_i)} \cdot \\ \cdot \left[(m_e - m_i) \frac{1}{c} \vec{j} \times \mathcal{L} - m_e \nabla p_i + m_i \nabla p_e \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung enthält die eingepprägten Felder, sowie diejenigen Felder, die die Diffusion hervorrufen. In einem quasineutralen Plasma bestimmen die ersten beiden Glieder der rechten Seite die in einem mit der Geschwindigkeit v bewegten Koordinatensystem gemessene elektrische Feldstärke. Die Klammer enthält den Hall-Term und die Druckdiffusionsterme. - Auf der linken Seite bedeutet

$$\eta = \frac{e^2 (n_i m_e + n_e m_i)}{m_i m_e} \cdot \frac{1}{v} \quad (2.10)$$

die skalare elektrische Leitfähigkeit, σv ist der durch die elektrische Raumladungsdichte bedingte Konvektionsstrom. Die Zeitableitung der Stromdichte beschreibt die Trägheit der Elektronen, durch die sich der Strom \vec{j} bei gegebener Feldstärke erst allmählich einstellt.

Die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{j}}{dt} &= \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{\rho}{m^2} \left(\frac{m_e}{n_i} + \frac{m_i}{m_e} \right) \left[(\vec{w} \cdot \nabla) \vec{j} + (\vec{j} \cdot \nabla) \vec{w} \right] + \\ &+ \frac{1}{em^2} \left(\frac{m_e^2}{n_i} - \frac{m_i^2}{n_e} \right) (\vec{j} \cdot \nabla) \vec{j} + \frac{1}{em^2} \left[\vec{j} \cdot \nabla \left(\frac{m_e^2}{n_i} - \frac{m_i^2}{n_e} \right) \right] \vec{j} + \\ &+ \frac{\rho}{m^2} \left[\vec{w} \cdot \nabla \left(\frac{m_e}{n_i} + \frac{m_i}{n_e} \right) \right] \vec{j} + \frac{1}{m} \left[m_e n_i \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{n_i} \right) + m_i n_e \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{n_e} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2 &= \frac{e}{m} \left[m_e n_i \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m_e}{n_i} \right) - m_i n_e \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m_i}{n_e} \right) \right] \vec{w} + \frac{e\rho^2}{m^2} \left(\frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_e} \right) (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{w} + \\ &+ \frac{e\rho}{m} \left[\vec{w} \cdot \nabla \left(m_e \frac{n_e}{n_i} - m_i \frac{n_i}{n_e} \right) \right] \vec{w} + \frac{1}{m^2} \left[\vec{j} \cdot \nabla \left(m_e^2 \frac{n_e}{n_i} + m_i^2 \frac{n_i}{n_e} \right) \right] \vec{w} \end{aligned} \quad (2.12)$$

findet man wieder durch Einsetzen der makroskopischen Größen \vec{w} und \vec{j} für w_i, w_e nach Gl.(2.8). \mathcal{R}_2 verschwindet analog zu \mathcal{R}_1 für ein quasineutrales Plasma.

Die hier betrachteten Vorgänge sollen so schnell verlaufen, dass sie als adiabatisch angesehen werden können. Von Ohmscher Heizung, Wärmeleitung und Reibung wird abgesehen. Dann gilt für den Zusammenhang zwischen Druck und Dichte das Adiabatengesetz

$$p_k = \text{const.} \cdot \rho_k^{\gamma^*} \quad ; \quad (k = i, e)$$

wobei

$$\gamma^* = \frac{C_p}{C_v}$$

das Verhältnis der spezifischen Wärmen ist. Hier soll das Adiabatengesetz in differentieller Form benutzt werden

$$\frac{dp_i}{dt} = S_i^2 \frac{d\rho_i}{dt} \quad (2.13)$$

$$\frac{dp_e}{dt} = S_e^2 \frac{d\rho_e}{dt}$$

wobei der Faktor

$$S_k^2 = \gamma \frac{\rho_k}{\rho_k} ; \quad (k = i, e)$$

das Quadrat der Schallgeschwindigkeit bedeutet.

Die Beschreibung des Plasmas wird durch die Maxwell'schen Gleichungen vervollständigt:

$$\nabla \times \mathcal{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \quad (2.14)$$

$$\nabla \times \mathcal{E} = - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \quad (2.15)$$

$$\nabla \cdot \mathcal{H} = 0 \quad (2.16)$$

$$\nabla \cdot \mathcal{E} = 4\pi \sigma \quad (2.17)$$

Für die folgenden Betrachtungen werden das stationäre Plasma in dem Zylinder und das statische axiale Magnetfeld als homogen und zeitunabhängig vorausgesetzt. Insbesondere wird angenommen, dass der Druck im Innern des Plasmas homogen und isotrop ist.

Ausserhalb des Plasmas gelten allein die Maxwell'schen Gleichungen. Für die hier zugrunde gelegte Anordnung ist dabei im Bereich der Spule (Stromschicht) $\vec{j} = \text{const.} \neq 0$ zu setzen; in den beiden Vakuumbereichen ist $\vec{j} = 0$.

An der Grenzfläche zwischen Plasma und Vakuum ist wegen der Randwertkomponente des elektrischen Feldes anzusetzen und bedingt einen Potentialsprung an dieser Stelle (vgl. Gl. (5.12) und (5.13)).

Als zeitlich und räumlich konstante Größen des ungestörten Zustandes seien dann

III. Linearisierte Gleichungen

1. Stationäres Plasma

Eine Raumladungsdichte σ kann nach Gl.(2.17) im Inneren des Plasmas nur durch ein inhomogenes elektrisches Feld aufrechterhalten werden. Wegen der für den stationären Fall vorausgesetzten Homogenität des Feldes ist dann

$$\begin{aligned}\sigma &= e(n_i - n_e) = 0 \\ n_i &= n_e \equiv n\end{aligned}\tag{3.1}$$

d.h. im ungestörten Zustand ist das Plasma quasineutral. Die Raumladungsdichte verschwindet jedoch nur im Innern des Plasmas; an der Grenze zwischen Plasma und Vakuum bildet sich nach Gl.(5.5) eine Oberflächenladung aus, die durch die nichtverschwindende Radialkomponente des elektrischen Feldes im Vakuum hervorgerufen wird (vgl. Gl.(5.8)).

Im stationären Fall verschwinden die Differentialausdrücke der Maxwell'schen Gleichung (2.14), so dass im Innern des ungestörten Plasmas kein stationärer Strom fließen kann:

$$\vec{j} = 0\tag{3.2}$$

An der Grenzfläche zwischen Plasma und Vakuum fließt jedoch ein stationärer Flächenstrom (vgl. Gl.(5.6)). Aus dem Ohmschen Gesetz (2.9) ergibt sich für das stationäre Plasma bei homogener Druckverteilung ($\nabla p = 0$), verschwindender Stromdichte \vec{j} und Quasineutralität, dass im Innern des Plasmas auch das elektrische Feld verschwindet:

$$\vec{E} = 0\tag{3.3}$$

An der Grenzfläche zwischen Plasma und Vakuum ist dagegen die Radialkomponente des elektrischen Feldes unstetig und bedingt einen Drucksprung an dieser Stelle (vgl. Gl.(5.12) und (5.13)).

Als zeitlich und räumlich konstante Größen des ungestörten Zustands bleiben dann

$$\rho_0 = m_0 (m_i + m_e) \quad (3.9)$$

$$\rho_0 = \rho_{i0} + \rho_{e0} \quad (3.4)$$

$$\zeta_0$$

Im folgenden werden die Grössen, die klein von erster Ordnung gegenüber den Grössen des ungestörten Zustands sein sollen, ohne Index bleiben; die Grössen des ungestörten Zustands erhalten den Index 0. Das Plasma wird dann durch die reinen Störgrössen

$$n_k = n_k(x, t); \quad (k = i, e)$$

$$\vec{j} = \vec{j}(x, t) \quad (3.5)$$

$$\sigma = \sigma(x, t)$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(x, t)$$

und die aus stationären und Störgrössen zusammengesetzten Grössen

$$\rho_k^* = \rho_{k0} + \rho_k(x, t)$$

$$\rho_k^* = \rho_{k0} + \rho_k(x, t); \quad (k = i, e) \quad (3.6)$$

$$\zeta_k^* = \zeta_0 + \zeta_k(x, t)$$

beschrieben.

2. Linearisierung

Bei der Untersuchung von Wellen kleiner Amplitude werden in den Grundgleichungen alle Terme vernachlässigt, die klein von höherer als erster Ordnung sind. Ausserdem werden alle Ableitungen der als zeitlich und räumlich konstant vorausgesetzten Grössen nicht berücksichtigt.

Derart linearisiert lauten die Gleichungen (2.2), (2.5), (2.9) und (2.13) bis (2.17):

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = -n_0 \nabla \cdot v_i \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = -n_0 \nabla \cdot v_e \quad (3.8)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} = \frac{1}{c} \vec{j} \times \mathcal{W}_0 - \nabla p \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{\omega_p^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{1}{\eta} \vec{j} &= \\ &= \mathcal{E} + \frac{\mathcal{W}}{c} \times \mathcal{W}_0 + \frac{1}{e\rho_0} \left[(m_e - m_i) \frac{1}{c} \vec{j} \times \mathcal{W}_0 - m_e \nabla p_i + m_i \nabla p_e \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\frac{1}{\rho_{i0}} \frac{d p_i}{dt} = \gamma \frac{1}{\rho_{i0}} \frac{d p_i}{dt} \quad (3.11)$$

$$\frac{1}{\rho_{e0}} \frac{d p_e}{dt} = \gamma \frac{1}{\rho_{e0}} \frac{d p_e}{dt} \quad (3.12)$$

$$\nabla \times \mathcal{W} = \frac{4\pi}{c} n_0 e (\mathcal{W}_i - \mathcal{W}_e) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \quad (3.13)$$

$$\nabla \times \mathcal{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} \quad (3.14)$$

$$\nabla \cdot \mathcal{W} = 0 \quad (3.15)$$

$$\nabla \cdot \mathcal{E} = 4\pi \sigma \quad (3.16)$$

Hierin bedeutet

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_0 (m_i + m_e)}{m_i \cdot m_e} \approx \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e}$$

die Plasmafrequenz, die in dieser Näherung wegen der als konstant vorausgesetzten Dichte n_0 ebenfalls konstant ist.

Dieses System linearisierter Gleichungen stimmt bis auf Gl.(3.16) mit dem Gleichungssystem für das quasineutrale Zweiflüssigkeitsmodell überein. Wegen der vorausgesetzten Homogenität des Plasmas und des äusseren Magnetfeldes, durch die die Quasineutralität des stationären Plasmas bedingt wird, sowie aus der Annahme kleiner

Amplituden folgt also die Anwendbarkeit der Gleichungen für das quasineutrale Zweiflüssigkeitsmodell.

Für die Störgrößen dieses Gleichungssystems wird ein Lösungsansatz von der Form

$$a = \tilde{a} e^{i\omega t} \quad (3.17)$$

gemacht, d.h. für die Störgrößen wird rein periodische Zeitabhängigkeit vorausgesetzt. Die Amplitude \tilde{a} ist dabei eine komplexe Konstante; die Frequenz ist mit $\omega = 2\pi\nu$, ihr Wellenvektor mit

$$|\vec{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \quad (3.18)$$

und die Wellenlänge mit λ bezeichnet.

Anstelle der Zeitableitung kann dann stets

$$\frac{\partial}{\partial t} \dots = i\omega \dots \quad (3.19)$$

geschrieben werden.

Die Quellgleichung (3.15) ist wegen (3.14) für zeitlich periodische Lösungen stets erfüllt und braucht deshalb bei den weiteren Betrachtungen nicht mehr berücksichtigt zu werden.

Ist der Ionendruck p_i vom Elektronendruck p_e verschieden, so werden Ionen- und Elektronendichte n_i und n_e getrennt benötigt. Obwohl in den linearisierten Gleichungen die Raumladungsdichte σ nur in Gl.(3.16) auftritt, muss sie in diesem Falle beibehalten werden. Sie liefert nämlich bei bekanntem elektrischen Feld \mathcal{E} die Abweichungen von der Quasineutralität.

3. Vereinfachung des Ohmschen Gesetzes

In den folgenden Betrachtungen sollen Stösse im Plasma und der Verschiebungsstrom vernachlässigt werden. Um einen Überblick über die Bedingungen zu bekommen, unter denen diese Vereinfachungen möglich sind, werden die Größenordnungen der verschiedenen Terme der Diffusionsgleichung nach der von Lüst [1] angegebenen Methode abgeschätzt.

Dazu wird angenommen, dass alle Glieder der Bewegungsgleichung (3.9) von gleicher Grössenordnung sind. Ersetzt man dann die Zeitableitung gemäss Gl.(3.19) durch den Faktor $i\omega$, so bekommt man aus der Bewegungsgleichung die Abschätzungen

$$|\mathcal{W}| \approx \frac{1}{\rho_0 \omega c} B_0 |\vec{j}| \quad (3.20)$$

$$|\nabla p| \approx \frac{B_0}{c} |\vec{j}| \quad (3.21)$$

Für die einzelnen Glieder des Ohmschen Gesetzes bekommt man damit

$$\frac{4\pi}{\omega_p^2} \left| \frac{\partial}{\partial t} \vec{j} \right| \approx \frac{4\pi \omega}{\omega_p^2} |\vec{j}| \quad (3.22)$$

$$\frac{1}{\eta} |\vec{j}| \approx \frac{4\pi \nu}{\omega_p^2} |\vec{j}| \quad (3.23)$$

Hierbei wurde die Definition (2.10) der elektrischen Leitfähigkeit η benutzt. Weiter wird

$$\frac{1}{c} |\mathcal{W} \times \mathcal{L}_0| \approx \frac{\mathcal{L}_i \mathcal{L}_e}{\omega_p^2} \frac{4\pi}{\omega} |\vec{j}| \quad (3.24)$$

Hierin bedeuten

$$\mathcal{L}_k = \frac{e B_0}{m_k c} \quad (k = i, e) \quad (3.25)$$

die Gyrationfrequenzen der Ionen bzw. Elektronen.

$$\frac{m_i}{\rho_0 e c} |\vec{j} \times \mathcal{L}_0| \approx 4\pi \frac{\mathcal{L}_e}{\omega_p^2} |\vec{j}| \quad (3.26)$$

$$\frac{m_i}{\rho_0 e} |\nabla p_e| \approx 4\pi \frac{\mathcal{L}_e}{\omega_p^2} |\vec{j}| \quad (3.27)$$

Hierin wurde m_e gegen m_i vernachlässigt; ausserdem wurde angenommen, dass der Elektronendruck von der Grössenordnung des Gesamtdruckes ist (vgl. Gl.(5.13)).

Vergleicht man (3.23) mit den beiden letzten Abschätzungen, so ergibt sich für

$$\omega^2 \ll \mathcal{L}_i$$

$$\frac{m_i}{\beta e c} \left| \vec{j} \times \vec{\mathcal{L}}_0 \right| \approx \frac{m_i}{\beta e} \left| \nabla \rho_e \right| \ll \frac{1}{c} \left| \vec{v} \times \vec{\mathcal{L}}_0 \right| \quad (3.28)$$

Wegen

$$\frac{\mathcal{R}_i}{\mathcal{R}_e} = \frac{m_e}{m_i} \ll 1$$

ist dann

$$\omega^2 \ll \mathcal{R}_i \mathcal{R}_e$$

erst recht erfüllt, d.h. das Trägheitsglied (3.22) des Stromes ist klein gegen $\frac{1}{c} |\vec{v} \times \vec{\mathcal{L}}_0|$ und kann vernachlässigt werden, auch wenn die beiden letzten Terme des Ohmschen Gesetzes in die Grössenordnung von $\frac{1}{c} |\vec{v} \times \vec{\mathcal{L}}_0|$ kommen.

Den Reibungsterm (3.23) schliesslich kann man mit der Bedingung

$$v \omega \ll \mathcal{R}_i \mathcal{R}_e$$

ebenfalls gegen $\frac{1}{c} |\vec{v} \times \vec{\mathcal{L}}_0|$ vernachlässigen. Das ist also immer dann möglich, wenn $v \approx \omega$ oder $v \ll \omega$ ist, d.h. wenn die Gyration der Teilchen während einer oder mehrerer Perioden nicht durch Stösse gestört wird.

In einem Plasma mit grosser Leitfähigkeit, d.h. bei kleiner Stossfrequenz, wird dann das elektrische Feld \mathcal{E} für Frequenzen $\omega \ll \mathcal{R}_i$ im wesentlichen durch den Term $\frac{1}{c} |\vec{v} \times \vec{\mathcal{L}}_0|$ bestimmt. Damit kommt man auf die Gleichungen der Magnetohydrodynamik zurück, denn dann kann der Verschiebungsstrom in der Maxwellschen Gleichung (3.13) vernachlässigt werden.

Mit den hier gemachten Einschränkungen werden in den weiteren Rechnungen Stossterme und Verschiebungsstrom vernachlässigt.

4. Berücksichtigung der Geometrie der Anordnung

Bei der hier vorausgesetzten Zylindersymmetrie der Anordnung sind die Feldgrössen vom Azimutwinkel φ und der axialen Koordinate z unabhängig. Es gilt also

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \dots = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial z} \dots = 0 \quad (3.29)$$

Die verschiedenen Vektoroperationen lauten dann in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) :

$$\nabla a = \left\{ \frac{\partial}{\partial r} a, 0, 0 \right\} \quad (3.36)$$

$$\nabla \cdot \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot a_r) \quad (3.37)$$

$$\nabla \times \vec{a} = \left\{ 0, -\frac{\partial}{\partial r} a_z, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot a_\varphi) \right\} \quad (3.38)$$

Wegen des axialen Magnetfeldes

$$\vec{L}_0 = \hat{z} B_0 \quad (3.39)$$

(\hat{z} = axialer Einheitsvektor) wird noch

$$\vec{a} \times \vec{L}_0 = \{ a_\varphi B_0, -a_r B_0, 0 \} \quad (3.40)$$

Zur Lösung des Gleichungssystems werden anstelle der makroskopischen Bewegungsgleichung des Plasmas und des Ohmschen Gesetzes die Bewegungsgleichungen (2.3) der einzelnen Komponenten benutzt. Dann ergibt sich das linearisierte Gleichungssystem in Komponentenschreibweise:

$$i\omega m_i v_{ir} = -m_i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v_{ir}) \quad (3.42)$$

$$i\omega m_e v_{er} = -m_e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v_{er}) \quad (3.43)$$

$$i\omega \rho_{i0} v_{i\varphi} = -\frac{\partial p_i}{\partial r} + m_i e E_r + \frac{m_i e B_0}{c} v_{i\varphi} \quad (3.44)$$

$$i\omega \rho_{i0} v_{i\varphi} = m_i e E_\varphi - \frac{m_i e B_0}{c} v_{ir} \quad (3.45)$$

$$i\omega \rho_{i0} v_{iz} = m_i e E_z \quad (3.46)$$

$$i\omega \rho_{e0} v_{er} = -\frac{\partial p_e}{\partial r} - m_e e E_r - \frac{m_e e B_0}{c} v_{e\varphi} \quad (3.47)$$

$$i\omega \rho_{e0} v_{e\varphi} = -m_0 e E_\varphi + \frac{m_0 e B_0}{c} v_{er} \quad (3.36)$$

$$i\omega \rho_{e0} v_{ez} = -m_0 e E_z \quad (3.37)$$

$$\frac{\rho_i}{\rho_{i0}} = \gamma \frac{\rho_i}{\rho_{i0}} \quad (3.38)$$

$$\frac{\rho_e}{\rho_{e0}} = \gamma \frac{\rho_e}{\rho_{e0}} \quad (3.39)$$

$$0 = 4\pi m_0 e (v_{ir} - v_{er}) \quad (3.40)$$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{4\pi}{c} m_0 e (v_{i\varphi} - v_{e\varphi}) \quad (3.41)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) = \frac{4\pi}{c} m_0 e (v_{iz} - v_{ez}) \quad (3.42)$$

$$0 = \frac{i\omega}{c} B_r \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial r} = \frac{i\omega}{c} B_\varphi \quad (3.44)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) = -\frac{i\omega}{c} B_z \quad (3.45)$$

$$i\omega \pi = -m_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \quad (4.4)$$

geschrieben werden kann.

Das dann verbleibende Gleichungssystem zerfällt in zwei voneinander unabhängige Systeme. Das System I enthält die Gleichungen

$$(3.34); (3.37); (3.40); (3.43)$$

IV. Lösung des Gleichungssystems

1. Lösung der Plasmagleichungen

Die hier angegebenen Lösungen der Gleichungen für die verschiedenen Bereiche stimmen im wesentlichen mit den bereits von Körper [4] angegebenen Lösungen überein. Mit Ausnahme der Lösungen im Abschnitt IV.1.3, die zusätzlich noch Druckterme enthalten und einen weiteren Lösungsterm ergeben, sind in den anderen Lösungen auftretende Unterschiede zu den von Körper angegebenen Ergebnissen durch die hier gemachten vereinfachenden Annahmen über die Stossterme und den Verschiebungsstrom bedingt.

1.1. Aufspaltung des Gleichungssystems

Die Symmetriebedingung (3.29) hat stets

$$B_r = 0 \quad (4.1)$$

zur Folge. Ausserdem werden bei Vernachlässigung des Verschiebungsstroms in Gl.(3.40) die Radialkomponenten der Ionen- und Elektronengeschwindigkeit identisch und brauchen nicht mehr unterschieden zu werden:

$$v_{er} = v_{ir} \equiv v_r \quad (4.2)$$

Die Gleichheit der Radialkomponenten v_r bedingt schliesslich nach Gl.(3.30) und (3.31) noch die Gleichheit der Elektronen- und Ionen-dichte.

$$n_i = n_e \equiv n \quad (4.3)$$

so dass statt dieser beiden Gleichungen

$$i\omega n = -n_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v_r) \quad (4.4)$$

geschrieben werden kann.

Das dann verbleibende Gleichungssystem zerfällt in zwei voneinander unabhängige Systeme. Das System I enthält die Gleichungen

$$(3.34); (3.37); (3.42); (3.44)$$

mit den Grössen

$$E_z, B_\varphi, v_{iz}, v_{ez}$$

Hier sind also genau diejenigen Terme weggefallen, durch die sich das Gleichungssystem für ein Plasma im Magnetfeld von dem eines magnetfeldfreien Plasmas unterscheidet.

Das System II enthält die Gleichungen

$$(4.4); (3.32); (3.33); (3.35); (3.36); (3.38); (3.39);$$

$$(3.41); (3.45)$$

mit den Grössen

$$n, v_r, p_i, p_e, E_r, E_\varphi, v_{i\varphi}, v_{e\varphi}, B_\varphi.$$

Hier tritt auch das stationäre Magnetfeld \mathcal{L}_0 auf.

1.2. Lösung des Systems I

Aus dem Gleichungssystem I lässt sich eine Besselsche Differentialgleichung für B_φ ableiten. Eliminiert man nämlich

$$v_{iz} \quad \text{aus Gl. (3.34)}$$

$$v_{ez} \quad \text{aus Gl. (3.37)}$$

$$E_z \quad \text{aus Gl. (3.44)}$$

und setzt in Gl.(3.42) ein, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot B_\varphi) \right] - \frac{\omega_p^2}{c^2} B_\varphi = 0 \quad (4.5)$$

Die Lösung dieser Besselschen Differentialgleichung ist

$$B_\varphi(r) = c_1 J_1(Kr) + c_2 Y_1(Kr)$$

wobei

$$J_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}}{k!(k+1)!}$$

$$Y_1(x) = \frac{2}{\pi} \left[\left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) J_1(x) - \frac{1}{x} - \frac{x}{4} + \left(\frac{1+(1+\frac{1}{2})}{2} \right) \frac{x^3}{2^3 2!} - \dots + \right]$$

die Besselfunktionen erster bzw. zweiter Art von der Ordnung 1 ($\gamma = \text{Eulersche Konstante}$) und

$$K^2 = - \frac{\omega_p^2}{c^2}$$

bedeuten.

Wegen des asymptotischen Verhaltens von Y_1 für kleine Argumente [14]

$$\lim_{x \rightarrow 0} Y_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(- \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{x} \right) \rightarrow -\infty$$

lautet die für $r = 0$ reguläre Lösung der Differentialgleichung

$$B_\varphi(r) = c_1 J_1(Kr) \tag{4.6}$$

Mit Hilfe dieser Lösungen lassen sich auch die übrigen Größen des Systems I bestimmen. Man erhält

$$E_z(r) = - \frac{i\omega}{c} \cdot \frac{c_1}{K} \cdot J_0(Kr) \tag{4.7}$$

$$v_{iz}(r) = - \frac{e}{m_i c} \cdot \frac{c_1}{K} \cdot J_0(Kr) \tag{4.8}$$

$$v_{ez}(r) = \frac{e}{m_e c} \cdot \frac{c_1}{K} \cdot J_0(Kr) \tag{4.9}$$

$$j_z(r) = - \frac{\omega_p^2}{4\pi c} \cdot \frac{c_1}{K} \cdot J_0(Kr) \tag{4.10}$$

1.3. Lösung des Systems II

Aus dem Gleichungssystem II lässt sich eine Besselsche Differentialgleichung für E ableiten. Eliminiert man nämlich

- n aus Gl. (4.4)
- p_i aus Gl. (3.38)
- p_e aus Gl. (3.39)
- E_r aus Gl. (3.32)
- v_r aus Gl. (3.33)
- v_e aus Gl. (3.36)
- v_i aus Gl. (3.41)
- B_z aus Gl. (3.45)

und setzt in Gl.(3.35) ein, so wird

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\varphi) \right] \right] \right] - M \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\varphi) \right] - N E_\varphi = 0 \quad (4.11)$$

wobei

$$M = \frac{\omega_p^2}{c^2} + \frac{\rho_0}{\gamma \rho_0} (\mu_i \mu_e + \omega^2) \quad (4.12)$$

$$N = \frac{\omega_p^2}{c^2} \cdot \frac{\rho_0}{\gamma \rho_0} \omega^2$$

und

$$\rho_0 = m_0 (m_i + m_e)$$

$$\gamma \rho_0 = \gamma (\rho_{i0} + \rho_{e0})$$

ist.

Der Lösungsansatz

$$E_\varphi(r) = J_1(f_1 r)$$

enthält eine noch zu bestimmende Konstante f und liefert mit der Differentiationsvorschrift

$$\frac{d}{dx} J_n(\alpha x) = \alpha J_{n-1}(\alpha x) - \frac{n}{x} J_n(\alpha x)$$

und

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

durch rückwärts einsetzen

$$(f^4 + f^2 M - N) J_1(f\tau) = 0$$

Die Bestimmungsgleichung

$$f^4 + f^2 M - N = 0$$

für die Konstante f ergibt vier Wurzeln

$$f_{(i)} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} (-M \pm \sqrt{M^2 + 4N})} \quad (4.13)$$

von denen wegen der Beziehung

$$J_n(x) = (-1)^n J_n(x)$$

nur zwei linear unabhängige Lösungen liefern:

$$f_1 = \sqrt{\frac{1}{2} (-M + \sqrt{M^2 + 4N})} \quad (4.14)$$

$$f_2 = i \sqrt{\frac{1}{2} (M + \sqrt{M^2 + 4N})}$$

Damit lautet die vollständige Lösung der Differentialgleichung (4.11):

$$E_p^p(\tau) = c_3 J_1(f_1 \tau) + i c_4 I_1(f_2 \tau) + c_3^* Y_1(f_1 \tau) + c_4^* K_1(f_2 \tau)$$

Der obere Index p soll andeuten, dass sich diese Grössen auf das Plasma beziehen; I_1 und K_1 sind die durch

$$I_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}}{k!(k+1)!}$$

$$K_1(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2} \left[J_1(ix) + i Y_1(ix) \right]$$

definierten "modifizierten Besselfunktionen" erster bzw. zweiter Art von der Ordnung 1.

Aus Regularitätsgründen verschwinden in der Lösung die Konstanten

$$c_3^* = c_4^* = 0$$

und es bleibt

$$E_p^p(\tau) = c_3 J_1(f_1 \tau) + i c_4 I_1(f_2 \tau) \quad (4.15)$$

als Lösung der Differentialgleichung (4.11) für die azimutale Komponente des elektrischen Feldes im Plasma.

Damit lassen sich die übrigen Größen des Systems II bestimmen:

$$B_z^p(r) = - \frac{c}{i\omega} \left[C_3 f_1 J_0(f_1 r) + C_4 i f_2 I_0(f_2 r) \right] \quad (4.16)$$

$$v_{e\varphi}^p(r) = \frac{m_i}{m_i + m_e} \cdot \frac{c^2}{4\pi n_0 e i \omega} \left[C_3 f_1^2 J_1(f_1 r) + C_4 i f_2^2 I_1(f_2 r) \right] \quad (4.17)$$

$$v_{i\varphi}^p(r) = - \frac{m_e}{m_i + m_e} \cdot \frac{c^2}{4\pi n_0 e i \omega} \left[C_3 f_1^2 J_1(f_1 r) + C_4 i f_2^2 I_1(f_2 r) \right] \quad (4.18)$$

$$j_\varphi^p(r) = - \frac{c^2}{4\pi i \omega} \left[C_3 f_1^2 J_1(f_1 r) + C_4 i f_2^2 I_1(f_2 r) \right] \quad (4.19)$$

$$v_r^p(r) = \frac{c}{B_0} \left[\left(1 + \frac{c^2}{\omega_p^2} f_1^2\right) C_3 J_1(f_1 r) + \left(1 + \frac{c^2}{\omega_p^2} f_2^2\right) i C_4 I_1(f_2 r) \right] \quad (4.20)$$

$$p_i^p(r) = \frac{\gamma p_{ie}}{i\omega} \cdot \frac{c}{B_0} \left[\left(1 + \frac{c^2}{\omega_p^2} f_1^2\right) C_3 f_1 J_1(f_1 r) + \left(1 + \frac{c^2}{\omega_p^2} f_2^2\right) C_4 i f_2 I_1(f_2 r) \right] \quad (4.21)$$

$$p_e^p(r) = - \frac{\gamma p_{e0}}{i\omega} \cdot \frac{c}{B_0} \left[\left(1 + \frac{c^2}{\omega_p^2} f_1^2\right) C_3 f_1 J_1(f_1 r) + \left(1 + \frac{c^2}{\omega_p^2} f_2^2\right) i C_4 f_2 I_1(f_2 r) \right] \quad (4.22)$$

$$E_r^p(r) = \left[\frac{1}{i\omega\mu_i} (\mu_i^2 - \omega^2 - \frac{\rho_{ic}}{f_{ic}} f_1^2) \left(1 + \frac{c^2}{\omega_p^2} f_1^2\right) - \frac{\rho_i}{i\omega} \right] C_3 \bar{J}_1(f_1 r) +$$

$$+ \left[\frac{1}{i\omega\mu_i} (\mu_i^2 - \omega^2 - \frac{\rho_{ic}}{f_{ic}} f_2^2) \left(1 + \frac{c^2}{\omega_p^2} f_2^2\right) - \frac{\rho_i}{i\omega} \right] i C_4 I_1(f_2 r)$$

$$= - \left[\frac{1}{i\omega\mu_e} (\mu_e^2 - \omega^2 - \frac{\rho_{ie}}{f_{ie}} f_1^2) \left(1 + \frac{c^2}{\omega_p^2} f_1^2\right) + \frac{\rho_e}{i\omega} \right] C_3 J_1(f_1 r) +$$

$$- \left[\frac{1}{i\omega\mu_e} (\mu_e^2 - \omega^2 - \frac{\rho_{ie}}{f_{ie}} f_2^2) \left(1 + \frac{c^2}{\omega_p^2} f_2^2\right) + \frac{\rho_e}{i\omega} \right] i C_4 I_1(f_2 r) \quad (4.23)$$

$$n_r^p(r) = - \frac{n_0}{i\omega} \frac{c}{B_0} \left[\left(1 + \frac{c^2}{\omega_p^2} f_1^2\right) f_1 C_3 J_0(f_1 r) + \left(1 + \frac{c^2}{\omega_p^2} f_2^2\right) f_2 i C_4 I_0(f_2 r) \right] \quad (4.24)$$

2. Lösungen im inneren Vakuumbereich

Im Vakuum gelten die Maxwell'schen Gleichungen (3.40) bis (3.45) mit

$$\vec{j} = n_0 e (v_i - v_e) = 0$$

Das gibt sofort

$$\begin{aligned} E_r^v(r) &= 0 \\ B_r^v(r) &= 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Aus den Gl.(3.41) und (3.45) erhält man die Besselsche Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\varphi) \right] + \frac{\omega^2}{c^2} E_\varphi = 0 \quad (4.26)$$

Im Bereich der Maxwell'schen Gleichungen (3.41) und (3.45) die inhomogene Besselsche Differentialgleichung

$$E_\varphi^v(r) = J_1(kr) + Y_1(kr) \quad (4.27)$$

gelöst wird. Für B_z ergibt sich dann mit Gl.(3.45)

$$B_z^v(r) = i (J_0(kr) + Y_0(kr)) \quad (4.28)$$

Aus den Gl.(3.42) und (3.44) erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot B_\varphi) \right] + \frac{\omega^2}{c^2} B_\varphi = 0 \quad (4.29)$$

die analog zu Gl.(4.26) durch

$$B_\varphi^v(r) = J_1(kr) + Y_1(kr) \quad (4.30)$$

gelöst wird. Für E_z ergibt sich dann aus Gl.(3.31)

$$\bar{E}_z^v(r) = -i \left[J_0(kr) + Y_0(kr) \right] \quad (4.31)$$

Die Lösungspaare E_φ^v, B_z^v und E_z^v, B_φ^v stellen die beiden voneinander unabhängigen transversalen Wellentypen dar, die im Vakuum möglich sind. Sie unterscheiden sich im wesentlichen durch die Polarisationsrichtung.

Das Lösungspaar E_z^v, B_φ^v lässt sich an das Lösungssystem I anschließen, das Lösungspaar E_φ^v, B_z^v an das Lösungssystem II.

In der das Plasma umgebenden Spule kann die vorgegebene Stromverteilung nur den Schwingungstyp mit den Komponenten E_φ^v, B_z^v anregen. Deshalb lauten die allgemeinen Lösungen für den inneren Vakuumring

$$\bar{E}_\varphi^v(r) = C_5 J_1(kr) + C_6 Y_1(kr) \quad (4.32)$$

$$B_z^v(r) = i \left[C_5 J_0(kr) + C_6 Y_0(kr) \right] \quad (4.33)$$

3. Lösungen im Bereich der Stromschicht

Im Bereich der Stromschicht ist $\vec{j} \neq 0$. Für diesen Fall erhält man aus den Maxwell'schen Gleichungen (3.41) und (3.45) die inhomogene Besselsche Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot E_\varphi) \right] = \frac{4\pi}{c^2} i \omega j_\varphi \quad (4.34)$$

die die elektrische Feldkomponente einer von der vorgegebenen Stromdichte j_φ erregten elektromagnetischen Welle beschreibt.

Als Lösung dieser Differentialgleichung ergibt sich

$$E_{\varphi}^S(r) = c_5 J_1(kr) + c_6 Y_1(kr) + i \frac{4\pi}{\omega} j_{\varphi} S_{11}(kr) \quad (4.35)$$

und damit

$$B_z^S(r) = i \left[c_5 J_0(kr) + c_6 Y_0(kr) \right] - \frac{4\pi}{\omega} j_{\varphi} S_{00}(kr) \quad (4.36)$$

Die Funktionen

$$y(z) = S_{\mu\nu}(z)$$

sind Lommel-Funktionen, die als Lösungen der Differentialgleichung

$$z^2 y'' + z y' + (z - \nu) y = z^{\mu+1}$$

definiert sind [15].

Die Lommel-Funktionen lassen sich durch Reihen der Form

$$S_{\mu\nu}(z) = z^{\mu-1} \left[1 - \frac{(\mu-1)^2 - \nu^2}{z^2} + \frac{[(\mu-1)^2 - \nu^2][(\mu-3)^2 - \nu^2]}{z^4} - \dots + \dots \right]$$

darstellen. Für sie gelten ähnliche Rekursionsformeln wie für die Zylinderfunktionen.

4. Lösungen im äusseren Vakuumbereich

Für den äusseren Vakuumbereich erhält man wieder die Differentialgleichung (4.26). Bei der Lösung dieser Gleichung für einen ins Unendliche erstreckten Bereich ist zu beachten, dass es sich bei physikalischen Fragestellungen stets um fortschreitende Wellen handelt, die von den im Endlichen liegenden Quellen ins Unendliche ausstrahlen, sog. divergierende Wellen. Das mathematisch gleichwertige Bild einer aus dem Unendlichen einstrahlenden Welle, die sich in den im Endlichen liegenden Quellpunkten verliert (konvergierende Welle), ist physikalisch nicht realisierbar.

Die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung [9] sichert die Eindeutigkeit der Lösung dieses Problems. Sie bezieht sich auf das Verhalten der Wellen im Unendlichen. Die asymptotische Darstellung der Bessel- und Neumann-Funktionen erster Ordnung für grosses Argument ($x \rightarrow \infty$)

$$J_1(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)$$

$$Y_1(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)$$

liefert mit

$$J_1(x) - iY_1(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[-i\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)\right] \equiv H_1^{(2)}(x)$$

Hankelfunktionen zweiter Art als Lösungen

$$E_{\dot{\gamma}}^w(r) = C_7 H_1^{(2)}(kr) \quad (4.37)$$

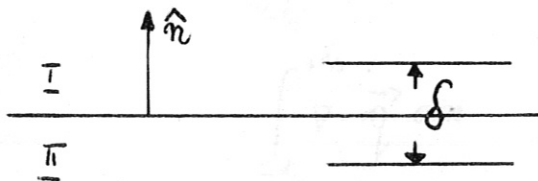
$$B_z^w(r) = iC_7 H_0^{(2)}(kr) \quad (4.38)$$

Der obere Index w bezeichnet dabei den äusseren Vakuumbereich. Wie man aus der asymptotischen Darstellung erkennt, ist die Bedingung auslaufender Wellen erfüllt.

V. Grenzbedingungen

1. Integration über eine Grenzfläche

Die für das Verhalten der physikalischen Grössen an der Grenzfläche zwischen zwei Medien geltenden Gleichungen erhält man durch Integration der Gleichungen über die Grenzfläche hinweg [8]. Dabei wird



angenommen, dass der Sprung in den physikalischen Grössen in einem zum Normaleneinheitsvektor \hat{n} der Grenzfläche parallelen Intervall der Länge δ stattfindet. Inner-

halb des Intervalls wird die Änderung der Grössen als stetig vorausgesetzt.

Für diese Grenzschicht lassen sich die Flächengrössen

$$\begin{aligned} \sigma^* &= \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \sigma \, dn \\ \vec{j}^* &= \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \vec{j} \, dn \end{aligned} \tag{5.1}$$

eingeführen. Die Annahme einer endlichen Flächenladung σ^* und eines endlichen Flächenstroms \vec{j}^* bedingt für $\delta \rightarrow 0$ unendlich grosse Werte für σ und \vec{j} in der Grenzfläche. Diese Darstellung kann also nicht benutzt werden, wenn der aus der Trägheit der Elektronen resultierende endliche Widerstand berücksichtigt werden muss. Dann sind die endlichen Dimensionen der Randschicht von ausschlaggebender Bedeutung. Hier soll neben der unendlichen Leitfähigkeit des Plasmas eine Grenzschicht verschwindender Dicke angenommen werden.

Für die Integration einer in der Grenzfläche endlichen Grösse

$$q = \rho, p \tag{5.2}$$

bzw.

$$\vec{q} = \omega, \epsilon, \zeta \tag{5.3}$$

$$\nabla \cdot (\vec{q} - \vec{q}') = 0 \tag{5.4}$$

gelten dann folgende Regeln:

$$\int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \frac{\partial q}{\partial n} dn = q^I - q^{II} \quad (5.5)$$

$$\int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \nabla q dn = \hat{n} (q^I - q^{II}) \quad (5.2)$$

$$\int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \nabla \cdot \vec{q} dn = \hat{n} (\vec{q}^I - \vec{q}^{II}) \quad (5.6)$$

$$\int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \nabla \times \vec{q} dn = \hat{n} \times (q^I - q^{II})$$

$$\int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \frac{\partial q}{\partial t} dn = -u (q^I - q^{II}) \quad (5.7)$$

Die Oberflächenladung des stationären Plasmas wird dann nach Gl:

(5.5) durch die nichtverschwindende Radialkomponente des elektrischen

Dabei weist der obere Index auf das Medium hin, in dem die betreffende Grösse definiert ist;

$$u = v \cdot \hat{n} \quad (5.8)$$

ist die Geschwindigkeit der Grenzfläche.

$$0 = \hat{n} \cdot (\vec{J}_0^P - \vec{J}_0^V) - \hat{n} \cdot (\rho_0^P - \rho_0^V) + \sigma_0 \cdot \frac{1}{c} (\mathcal{E}_0^P + \mathcal{E}_0^V) \quad (5.9)$$

2. Die Grenzfläche Plasma - Vakuum im stationären Fall

Die Integration der Maxwell'schen Gleichungen für das stationäre Plasma über den Rand zum Vakuum ergibt

$$\hat{n} \times (\mathcal{L}_0^P - \mathcal{L}_0^V) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_0^* \quad (5.10) \quad (5.2)$$

für das Druckgleichgewicht an der Grenzfläche zwischen Plasma und Vakuum, in dieser Gleichung ist bereits berücksichtigt, dass \mathcal{E}_0^P

$$\hat{n} \times (\mathcal{E}_0^P - \mathcal{E}_0^V) = 0 \quad (5.3)$$

$$\hat{n} \cdot (\mathcal{L}_0^P - \mathcal{L}_0^V) = 0 \quad (5.4)$$

$$\hat{n} \cdot (\mathcal{E}_0^P - \mathcal{E}_0^V) = 4\pi\sigma_0^* \quad (5.5)$$

Der obere Index bezieht sich auf das jeweilige Medium, Plasma oder Vakuum.

Da \mathcal{L}_0^P und \mathcal{L}_0^V rein axiale Felder sind, wird aus Gl.(5.2)

$$\hat{n} \times \hat{z} (B_0^P - B_0^V) = -\hat{\varphi} (B_0^P - B_0^V) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_0^* \quad (5.6)$$

wobei \hat{z} und $\hat{\varphi}$ die Einheitsvektoren in axialer bzw. azimuthaler Richtung sind. Der Flächenstrom \vec{j}_0^* hat also nur eine azimuthale Komponente.

Da im stationären Plasma kein elektrisches Feld existiert ($\mathcal{E}_0^P = 0$), ergibt Gl.(5.3)

$$E_{0z}^V = 0 \quad (5.7)$$

$$E_{0\varphi}^V = 0$$

Die Oberflächenladung des stationären Plasmas wird dann nach Gl. (5.5) durch die nichtverschwindende Radialkomponente des elektrischen Vakuumfeldes bestimmt:

$$\sigma_0^* = - \frac{E_{0r}^V}{4\pi} \quad (5.8)$$

Setzt man in die integrierte Bewegungsgleichung (2.5)

$$0 = \frac{1}{c} \vec{j}_0^* \times \frac{1}{2} (\mathcal{L}_0^P + \mathcal{L}_0^V) - \hat{n} (p_0^P - p_0^V) + \sigma_0^* \cdot \frac{1}{2} (\mathcal{E}_0^P + \mathcal{E}_0^V) \quad (5.9)$$

aus den Gl.(5.2) und (5.5) für \vec{j}_0^* und σ_0^* ein, so erhält man

$$\frac{(\mathcal{L}_0^P)^2}{8\pi} + p_0^P = \frac{(\mathcal{L}_0^V)^2}{8\pi} - \frac{(\mathcal{E}_0^V)^2}{8\pi} \quad (5.10)$$

für das Druckgleichgewicht an der Grenzfläche zwischen Plasma und Vakuum. In dieser Gleichung ist bereits berücksichtigt, dass \mathcal{E}_0^P und p_0^V verschwinden.

man die rechte Seite von Gl.(5.10) mit Hilfe von Gl.(5.10), so erhält man die Komponenten

Die Integration des Ohmschen Gesetzes (2.9)

$$0 = (m_e - m_i) \frac{1}{c} \vec{j}_0^* \times \frac{1}{2} (\mathcal{L}_0^P + \mathcal{L}_0^V) - m_e \hat{n} (\rho_{i0}^P - \rho_{i0}^V) + m_i \hat{n} (\rho_{e0}^P - \rho_{e0}^V) \quad (5.11)$$

ergibt durch Einsetzen für \vec{j}_0^* bzw. σ_0^* einen Zusammenhang zwischen dem elektrischen Feld im Vakuum und dem Plasmadruck

$$\frac{(\mathcal{E}_0^V)^2}{8\pi} = -p_{ic} \quad (5.12)$$

wenn man alle Terme vernachlässigt, die m_e enthalten. Damit wird aus Gl.(5.10)

$$p_{e0} + \frac{(\mathcal{L}_0^P)^2}{8\pi} = \frac{(\mathcal{L}_0^V)^2}{8\pi} \quad (5.13)$$

3. Die Grenzfläche Plasma - Vakuum im instationären Fall

Die Integration der Maxwell'schen Gleichungen für den instationären (gestörten) Fall ergibt

$$\hat{n} \times (\mathcal{L}^P - \mathcal{L}^V) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}^* \quad (5.14)$$

$$\hat{n} \times (\mathcal{E}^P - \mathcal{E}^V) = \frac{v_r(R_0)}{c} (\mathcal{L}_0^P - \mathcal{L}_0^V) \quad (5.15)$$

$$\hat{n} \cdot (\mathcal{L}^P - \mathcal{L}^V) = 0 \quad (5.16)$$

$$\hat{n} \cdot (\mathcal{E}^P - \mathcal{E}^V) = 4\pi \sigma^* \quad (5.17)$$

Die Radialkomponenten des magnetischen Störfeldes verschwinden nach Gl.(4.1) bzw. (4.25) sowohl im Plasma als auch im Vakuum, so dass die Stetigkeitsbedingung (5.16) automatisch erfüllt ist. Ersetzt man die rechte Seite von Gl.(5.15) mit Hilfe von Gl.(5.13), so erhält man die Komponenten

$$E_z^p - E_z^v = 0 \quad (5.18)$$

$$E_\varphi^p - E_\varphi^v = - \frac{8\pi \rho_{c0}}{B_0^p + B_0^v} \cdot \frac{v_r(R_0)}{c}$$

Mit $v_r(R_0)$ ist dabei die Radialkomponente der Geschwindigkeit am Rande des Plasmas ($r = R_0$) bezeichnet. - Die axiale Komponente des elektrischen Feldes ist also an der Grenzfläche stetig, während die azimutale Komponente eine Unstetigkeit vom Betrage $\frac{8\pi \rho_{c0}}{B_0^p + B_0^v} \cdot \frac{v_r(R_0)}{c}$ aufweist.

Die Integration der linearisierten Bewegungsgleichung (2.5) ergibt

$$0 = \frac{1}{c} \vec{j}_0^* \times \frac{1}{2} (\mathcal{Y}^p + \mathcal{Y}^v) + \frac{1}{c} \vec{j}^* \times \frac{1}{2} (\mathcal{Y}_0^p + \mathcal{Y}_0^v) - \hat{n} (p^p - p^v) + \frac{\sigma_0^*}{2} (\mathcal{E}^p + \mathcal{E}^v) + \frac{\sigma^*}{2} (\mathcal{E}_0^p + \mathcal{E}_0^v) \quad (5.19)$$

Setzt man hierin für \vec{j}_0^* , \vec{j}^* , σ_0^* , σ^* aus den Gl.(5.2), (5.14), (5.5), (5.17) ein und multipliziert die Vektorprodukte aus, so bleibt mit Gl.(5.4) und (5.16)

$$0 = \frac{\hat{n}}{8\pi} [(\mathcal{Y}_0^p - \mathcal{Y}_0^v)(\mathcal{Y}^p + \mathcal{Y}^v)] + \frac{\hat{n}}{8\pi} [(\mathcal{Y}^p - \mathcal{Y}^v)(\mathcal{Y}_0^p + \mathcal{Y}_0^v)] + \hat{n} (p^p - p^v) - \frac{\hat{n}}{8\pi} [(\mathcal{E}_0^p - \mathcal{E}_0^v)(\mathcal{E}^p + \mathcal{E}^v)] - \frac{\hat{n}}{8\pi} [(\mathcal{E}^p - \mathcal{E}^v)(\mathcal{E}_0^p + \mathcal{E}_0^v)] \quad (5.20)$$

Die Integration des linearisierten Ohmschen Gesetzes (2.9) ergibt

$$0 = (m_e - m_i) \frac{1}{c} \vec{j}_0^* \times \frac{1}{2} (\mathcal{Y}^p + \mathcal{Y}^v) + (m_e - m_i) \frac{1}{c} \vec{j}^* \times \frac{1}{2} (\mathcal{Y}_0^p + \mathcal{Y}_0^v) + \hat{n} m_e (p_i^p - p_i^v) + \hat{n} m_i (p_e^p - p_e^v) \quad (5.21)$$

Setzt man hierin für \vec{j}_0^* und \vec{j}^* aus den Gl.(5.2) und (5.14) ein und vernachlässigt alle Terme, die m_e enthalten, so bleibt

$$0 = \frac{\hat{n}}{8\pi} [(\mathcal{Y}_0^p - \mathcal{Y}_0^v)(\mathcal{Y}^p + \mathcal{Y}^v)] + \frac{\hat{n}}{8\pi} [(\mathcal{Y}^p - \mathcal{Y}^v)(\mathcal{Y}_0^p + \mathcal{Y}_0^v)] + \hat{n} (p_e^p - p_e^v) \quad (5.22)$$

Berücksichtigt man nun, dass im Plasma kein stationäres elektrisches Feld existiert und der Druck im Vakuum verschwindet, so ergibt sich aus (5.20) und (5.22) als Randbedingung

$$p_i(R_0) = 0 \quad (5.23)$$

Vernachlässigt man im Ohmschen Gesetz (5.21) m_e gegen m_i und nimmt man

$$p_e \approx p_i \quad (5.28)$$

an, so erhält man die Radialkomponente

$$\frac{1}{2c} j_\varphi^* (B_0^p + B_0^v) = \frac{1}{2c} j_{0\varphi}^* (B_z^p + B_z^v) + p_e$$

Die Azimutalkomponente von Gl.(5.14) liefert

$$j_\varphi^* = -\frac{c}{4\pi} (B_z^p - B_z^v)$$

so dass mit Gl.(5.6)

$$(B_z^p - B_z^v) = (B_z^p + B_z^v) \frac{B_0^p - B_0^v}{B_0^p + B_0^v} - \frac{8\pi p_e}{B_0^p + B_0^v} \quad (5.24)$$

wird.

4. Die Grenzfläche Vakuum - Stromschicht - Vakuum

Der von einer äusseren Quelle aufrechterhaltene Flächenstrom j^* fliesst mit dem Radius R_1 in φ -Richtung. Für $r = R_1$ gelten dann die Gleichungen

$$\hat{n} \times (\mathcal{L}^v - \mathcal{L}^w) = \frac{4\pi}{c} \hat{\varphi} j^* \quad (5.25)$$

$$\hat{n} \times (\mathcal{E}^v - \mathcal{E}^w) = 0 \quad (5.26)$$

Dabei bezeichnet der obere Index v wieder den inneren, w den äusseren Vakuumbereich. Die Komponenten dieser Gleichungen

$$B_z^v - B_z^w = -\frac{4\pi}{c} j^* \quad (5.30)$$

$$B_\varphi^v - B_\varphi^w = 0 \quad (5.27)$$

$$E_z^v - E_z^w = 0$$

$$E_\varphi^v - E_\varphi^w = 0$$

zeigen die Stetigkeit der Feldkomponenten B_φ , E_φ , E_z beim Durchgang durch die Stromschicht, während B_z eine Unstetigkeit von der Grösse des anregenden Stroms aufweist. Subtrahiert man die Induktionsgleichungen für die beiden Vakuumregionen voneinander, so bleibt bei Berücksichtigung der Zylindersymmetrie des Systems und der Gl.(5.27)

$$\frac{\partial}{\partial r} (E_\varphi^v - E_\varphi^w) = \frac{4\pi i \omega}{c^2} j^\# \quad (5.28)$$

als Randbedingung.

5. Bestimmung der Integrationskonstanten

In den Lösungen für die Feldgrössen in den verschiedenen Raumbereichen - Gl.(4.15) bis (4.24), (4.32), (4.33), (4.35), (4.36), (4.37), (4.38) - sind die Integrationskonstanten C_3, \dots, C_7 noch zu bestimmen. Dazu werden die Randbedingungen - Gl.(5.23), (5.24), (5.18), (5.27), (5.28) - die für den Übergang der Feldgrössen über die Grenzflächen zwischen den einzelnen Raumbereichen gelten, benutzt.

Setzt man aus der Lösungsgleichung (4.21) in die Randbedingung (5.23) für $r = R_0$ ein, so erhält man

$$\left(1 + \frac{c^2}{\omega_p^2} f_1^2\right) f_1 C_3 J_0(f_1 R_0) + \left(1 + \frac{c^2}{\omega_p^2} f_2^2\right) f_2 i C_4 I_0(f_2 R_0) = 0 \quad (5.29)$$

Die Randbedingung (5.24) ergibt mit den Lösungen (4.16), (4.22), (4.33)

$$\begin{aligned} & C_3 f_1 J_0(f_1 R_0) \left[\frac{c}{i\omega} \left(\frac{B_0^p - B_0^v}{B_0^p + B_0^v} - 1 \right) - \frac{8\pi c}{i\omega} \gamma \frac{\rho_{eo}}{(B_0^p + B_0^v) B_0^p} \left(1 + \frac{c^2}{\omega_p^2} f_1^2\right) f_1 \right] + \\ & + i C_4 f_2 I_0(f_2 R_0) \left[\frac{c}{i\omega} \left(\frac{B_0^p - B_0^v}{B_0^p + B_0^v} - 1 \right) - \frac{8\pi c}{i\omega} \gamma \frac{\rho_{eo}}{(B_0^p + B_0^v) B_0^p} \left(1 + \frac{c^2}{\omega_p^2} f_2^2\right) f_2 \right] = \\ & = i C_5 J_0(k R_0) \left[1 + \frac{B_0^p - B_0^v}{B_0^p + B_0^v} \right] + i C_6 Y_0(k R_0) \left[1 + \frac{B_0^p - B_0^v}{B_0^p + B_0^v} \right] \quad (5.30) \end{aligned}$$

Aus der Randbedingung (5.18) ergibt sich mit den Lösungen (4.15), (4.20), (4.32)

$$c_3 J_1(f_1 R_0) \left[1 + \frac{8\pi \rho_{eo}}{(B_0^p + B_0^v) B_0^p} \left(1 + \frac{c^2}{\omega_p^2} f_1^2 \right) \right] + i c_4 I_1(f_2 R_0) \left[1 + \frac{8\pi \rho_{eo}}{(B_0^p + B_0^v) B_0^p} \left(1 + \frac{c^2}{\omega_p^2} f_2^2 \right) \right] =$$

$$= c_5 J_1(k R_0) + c_6 Y_1(k R_0) \quad (5.31)$$

Die Randbedingung (5.27) ergibt mit den Lösungen (4.32) und (4.37)

$$c_5 J_1(k R_1) + c_6 Y_1(k R_1) - c_7 H_1^{(2)}(k R_1) = 0 \quad (5.32)$$

Schliesslich liefert die Randbedingung (5.28) mit den Lösungen (4.32) und (4.37)

$$c_5 J_1'(k R_1) + c_6 Y_1'(k R_1) - c_7 H_1^{(2)'}(k R_1) = \frac{4\pi i \omega}{c^2} j^* \quad (5.33)$$

Die Striche an den Besselfunktionen deuten die auszuführende Differentiation an.

Aus dem Gleichungssystem (5.29) bis (5.33) lassen sich nun die Integrationskonstanten c_3, \dots, c_7 bestimmen.

Zur Vereinfachung der Rechnungen soll ein Plasma mit den folgenden Parametern zugrunde gelegt werden:

$$\begin{aligned} n_0 &= 10^{15} \text{ [cm}^{-3}\text{]} \\ \mathcal{L}_0^p &= 10^4 \text{ [} \Gamma \text{]} \\ T_0 &= 10^5 \text{ [}^\circ\text{K]} \\ \omega &= 10^8 \text{ [sec}^{-1}\text{]} \end{aligned} \quad (5.34)$$

Für diese Parameter wird noch

$$\omega_p^2 \approx 3 \cdot 10^{24} \text{ [sec}^{-2}\text{]}$$

$$\Omega_i \approx 10^8 \text{ [sec}^{-1}\text{]}$$

$$\Omega_e \approx 2 \cdot 10^{11} \text{ [sec}^{-1}\text{]}$$

und

$$s^2 \approx 1,4 \cdot 10^{13} \text{ [cm}^2 \text{ sec}^{-2}\text{]}$$

so dass die bereits angegebenen Bedingungen

$$\Omega_i, \Omega_e \gg \omega^2 \quad ; \quad \omega_p^2 \gg \omega^2$$

für die Vernachlässigung des Verschiebungsstroms erfüllt sind.

Mit diesen Parametern lassen sich die Bestimmungsgleichungen für die Integrationskonstanten weitgehend vereinfachen. Diese Vereinfachungen gelten bei festem Magnetfeld $B_0 = 10^4 [\text{G}]$ für alle Frequenzen $\omega < 10^9 [\text{sec}^{-1}]$; erhöht man die Stärke des Magnetfeldes auf $10^5 [\text{G}]$, so kann die Frequenz auf $\omega < 10^{10} [\text{sec}^{-1}]$ erhöht werden. - Ausserdem gelten die folgenden Gleichungen bei der festen Dichte $n_0 = 10^{15} [\text{cm}^{-3}]$ für alle Temperaturen $T < 10^7 [\text{°K}]$; erhöht man die Dichte auf $10^{16} [\text{cm}^{-3}]$, so kann auch die Temperatur auf $T < 10^8 [\text{°K}]$ erhöht werden.

Unter Vernachlässigung kleiner Terme erhält man aus den Gl.(5.29) bis (5.33)

$$C_3 f_1 J_0(f_1 R_0) + i C_4 \frac{c^2}{\omega_p^2} f_2^3 I_0(f_2 R_0) = 0 \quad (5.35)$$

$$C_3 f_1 J_0(f_1 R_0) + i C_4 f_2 I_0(f_2 R_0) \left[\frac{8\pi \chi \rho_{c0}}{(B_0^P + B_0^V) B_0^P} \cdot \frac{c^2}{\omega_p^2} f_2^2 \right] =$$

$$= -C_5 \frac{\omega}{c} J_0(k R_0) - C_6 \frac{\omega}{c} Y_0(k R_0) \quad (5.36)$$

$$C_3 J_1(f_1 R_0) + i C_4 I_1(f_2 R_0) \left[\frac{8\pi \chi \rho_{c0}}{(B_0^P + B_0^V) B_0^P} \cdot \frac{c^2}{\omega_p^2} f_2^2 + 1 \right] =$$

$$= C_5 J_1(k R_0) + C_6 Y_1(k R_0) \quad (5.37)$$

$$C_5 J_1(k R_1) + C_6 Y_1(k R_1) - C_7 H_1^{(2)}(k R_1) = 0 \quad (5.38)$$

$$C_5 J_1'(k R_1) + C_6 Y_1'(k R_1) - C_7 H_1^{(2)'}(k R_1) = \frac{4\pi i \omega}{c^2} j^\# \quad (5.39)$$

als Gleichungssystem für die Integrationskonstanten. Im einzelnen ergibt sich

$$C_3 = - \frac{2\pi^2 \omega k R_1}{c^2} \cdot I_0(f_2 R_0) \cdot j^* \cdot \frac{(1-iA) J_1(kR_0) - AY_1(kR_0)}{\left[\frac{8\pi\chi\rho_{e0}}{(B_0^p + B_0^y)B_0^p} \cdot f_1 + \frac{\omega_p^2}{c^2} \cdot \frac{f_1}{f_2^2} \right] I_1(f_2 R_0) J_0(f_1 R_0) - I_0(f_2 R_0) J_1(f_1 R_0)} \quad (5.40)$$

$$C_4 = - \frac{2\pi^2 i \omega k R_1}{c^2} J_0(f_1 R_0) \cdot j^* \cdot \frac{(1-iA) J_1(kR_0) - AY_1(kR_0)}{\left[\frac{8\pi\chi\rho_{e0}}{(B_0^p + B_0^y)B_0^p} \cdot \frac{c^2}{\omega_p^2} f_2^2 + 1 \right] I_1(f_2 R_0) J_0(f_1 R_0) - \frac{c^2}{\omega_p^2} \frac{f_2^2}{f_1} \cdot I_0(f_2 R_0) J_1(f_1 R_0)} \quad (5.41)$$

$$C_5 = \frac{2\pi^2 \omega k R_1}{c^2} j^* (1-iA) \quad (5.42)$$

$$C_6 = - \frac{2\pi^2 \omega k R_1}{c^2} \cdot j^* A \quad (5.43)$$

$$C_7 = \frac{2\pi^2 \omega k R_1}{c^2} j^* \cdot \frac{1}{H_1^{(\omega)}(kR_1)} \left[(1-iA) J_1(kR_1) - AY_1(kR_1) \right] \quad (5.44)$$

wobei

$$\begin{aligned}
 A = & \frac{\omega}{c} \left[\frac{8\pi\chi p_{e0}}{(B_0^p + B_0^v) B_0^p} + \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{1}{f_2^2} \right] J_0(kR_0) \cdot J_0(f_1 R_0) \cdot I_1(f_2 R_0) - \\
 & \frac{\omega}{c} \left[\frac{8\pi\chi p_{e0}}{(B_0^p + B_0^v) B_0^p} + \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{1}{f_2^2} \right] I_1(f_2 R_0) \cdot J_0(f_1 R_0) \left[Y_0(kR_0) - J_0(kR_0) \right] - \\
 & \dots - \frac{\omega}{c} \frac{1}{f_1} I_0(f_2 R_0) \cdot J_0(kR_0) \cdot J_1(f_1 R_0) + \\
 & \dots - \frac{\omega}{c} \frac{1}{f_1} I_0(f_2 R_0) \cdot J_1(f_1 R_0) \left[Y_0(kR_0) - J_0(kR_0) \right] + \\
 & \dots + \left[\frac{8\pi\chi p_{e0}}{(B_0^p + B_0^v) B_0^p} f_2 - 1 \right] J_0(f_1 R_0) \cdot I_0(f_2 R_0) \cdot J_1(kR_0) \\
 & \dots + \left[\frac{8\pi\chi p_{e0}}{(B_0^p + B_0^v) B_0^p} f_2 - 1 \right] J_0(f_1 R_0) \cdot I_0(f_2 R_0) \left[Y_1(kR_0) - J_1(kR_0) \right]
 \end{aligned}
 \tag{5.45}$$

bedeutet. Ausserdem wurde zur Vereinfachung der Lösungen noch die Beziehung

$$J_1(x) \cdot Y_1'(x) - J_1'(x) \cdot Y_1(x) = \frac{2}{\pi x}$$

für die Wronski-Determinante der Besselfunktionen $J_1(x)$ und $Y_1(x)$ benutzt.

Mit diesen Konstanten sind nun die Lösungen des Gleichungssystems II vollständig bestimmt.

$$c_2 = -c_3 \frac{f_1 J_0(f_1 R_0) \omega_p^2}{f_1^2 I_0(f_1 R_0) c^2}$$

VI. Der Brechungsindex

1. Die elektromagnetische Welle

Die mit den Ergebnissen von Körper [4] identischen Lösungen (4.6) und (4.7) des Gleichungssystems I beschreiben eine in radialer Richtung fortschreitende Welle. Ihr Brechungsindex ist durch das Verhältnis

$$n = \frac{k}{k_0} \quad ; \quad k = \frac{\omega}{c}$$

gegeben. Das ergibt

$$n^2 = - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \tag{6.1}$$

Dies ist - bis auf den Summanden 1 auf der rechten Seite, der hier wegen des vernachlässigten Verschiebungsstroms fehlt - die bekannte Ecclessche Beziehung [12] für die Ausbreitung transversaler elektromagnetischer Planwellen in einem magnetfeldfreien Plasma. Die Stromdichte - Gl.(4.10) - ist parallel zum äusseren Magnetfeld gerichtet, ebenso die Geschwindigkeitskomponenten der Ionen und Elektronen. Deshalb verschwinden in den Bewegungsgleichungen der Ionen und Elektronen alle Terme, die \mathcal{L}_0 enthalten. Durch diese Terme unterscheidet sich ein Plasma im Magnetfeld von einem magnetfeldfreien Plasma. Da sich Zylinderwellen stets als Überlagerung ebener Wellen auffassen lassen, wird auch die Übereinstimmung in den Brechzahlen für die beiden Wellenarten verständlich.

2. Das Amplitudenverhältnis der Lösungen

Die Lösung (4.15) für die Azimutalkomponente des elektrischen Feldes zerfällt in zwei Teile, für die das Verhältnis der Amplituden bestimmt werden soll.

Aus der vereinfachten Randbedingung (5.35) ergibt sich

$$iC_4 = - C_3 \frac{f_1 J_0(f_1 R_0) \omega_p^2}{f_2^3 I_0(f_2 R_0) c^2}$$

Damit erhält man - Gl.(4.15) -

$$E_{\varphi}^p(R_0) = C_3 J_1(f_1 R_0) \left[1 - \frac{f_1 \omega_p^2}{f_2^3 c^2} \cdot \frac{J_0(f_1 R_0)}{I_0(f_2 R_0)} \cdot \frac{I_1(f_2 R_0)}{J_1(f_1 R_0)} \right] \quad (6.2)$$

Legt man nun die unter (5.34) angenommenen Parameter zugrunde, so wird nach Gl.(4.14)

$$f_1 \approx 1 \quad [\text{cm}^{-1}]$$

$$f_2 \approx 10^3 \quad [\text{cm}^{-1}]$$

Dann können die Besselfunktionen für kleine bzw. grosse Werte ihres Arguments durch die asymptotischen Entwicklungen approximiert werden:

$$J_n(x) \approx \frac{1}{2^n n!} x^n ; \quad (x \rightarrow 0)$$

$$I_n(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} ; \quad (x \rightarrow \infty)$$

Nimmt man den Radius des Plasmas noch zu $R_0 \approx 1$ cm an, so erhält man eine Abschätzung des zweiten Terms auf der rechten Seite von Gl.(6.2)

$$\frac{f_1 \omega_p^2}{f_2^3 c^2} \cdot \frac{J_0(f_1 R_0)}{I_0(f_2 R_0)} \cdot \frac{I_1(f_2 R_0)}{J_1(f_1 R_0)} \ll 1 \quad (6.7)$$

d.h. die Amplitude des zweiten Terms in der Lösung (4.15) für E_{φ}^p ist vernachlässigbar klein gegen die des ersten Terms; als Lösung bleibt im wesentlichen

$$E_{\varphi}^p(r) = C_3 J_1(f_1 r) \quad (6.3)$$

3. Die Alfvénsche Welle

Der Brechungsindex der ersten Lösungsfunktion (4.15) ist durch das Verhältnis

$$n = \frac{f_1}{k} ; \quad k = \frac{\omega}{c}$$

gegeben, d.h. es ist

$$n^2 = \frac{c^2}{2\omega^2} \left[\sqrt{\left(\frac{\omega_p^2}{c^2} + \frac{\nu(\nu e + \omega^2)}{s^2} \right)^2 + 4 \frac{\omega_p^2 \omega^2}{c^2 s^2}} - \frac{\omega_p^2}{c^2} - \frac{\nu(\nu e + \omega^2)}{s^2} \right] \quad (6.4)$$

Legt man nun die Parameter (5.34) zugrunde, so wird

$$M^2 = \left(\frac{\omega_p^2}{c^2} + \frac{\rho_i \rho_e + \omega^2}{s^2} \right)^2 \gg N = \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\omega^2}{s^2}$$

und der Argumentfaktor

$$f_1 = \sqrt{\frac{1}{2} M \left(\sqrt{1 + \frac{4N}{M^2}} - 1 \right)}$$

lässt sich entwickeln:

$$f_1 \approx \sqrt{\frac{N}{M}} \quad (6.5)$$

Damit wird der Brechungsindex

$$n^2 \approx \frac{\omega_p^2}{\rho_i \rho_e} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\omega_p^2 s^2}{\rho_i \rho_e c^2}} \quad (6.6)$$

In dieser Beziehung tritt ω nicht mehr auf, d.h. die Welle ist dispersionsfrei. Setzt man in diese Gleichung noch die Parameter (5.34) ein, so erhält man für den temperaturabhängigen Term

$$\frac{\omega_p^2 s^2}{\rho_i \rho_e c^2} \ll 1 \quad (6.7)$$

so dass im wesentlichen

$$n^2 = \frac{\omega_p^2}{\rho_i \rho_e} \quad (6.8)$$

der Brechungsindex für Alfvénsche Wellen bleibt. Die Ausbreitungsrichtung dieser Zylinderwellen ist senkrecht zum axialen Magnetfeld \mathcal{L} . gerichtet. Die Schwingung ist jedoch - wie bereits von Lüst [16] gezeigt wurde - weder rein transversal noch rein longitudinal. Das ergibt sich aus dem Lösungssystem II, das für die elektrische Feldstärke und die Geschwindigkeiten der Teilchen sowohl Radial- als auch Azimutalkomponenten liefert. Für die Stromdichte existiert dagegen nur eine Azimutalkomponente. Die Radialkomponente verschwindet wegen der Identität der radialen Geschwindigkeiten für Elektronen und Ionen.

$$\omega^2 = \frac{\omega_p^2 (c^2 - n^2 s^2)}{n^2 (2c^2 + n^2 s^2)} \quad (6.11)$$

Den Einfluss des dichte- und temperaturabhängigen Korrekturterms (6.7) auf den Brechungsindex (6.6) gibt das Diagramm I. Bei Temperaturen um 10^5 [°K] wirkt sich dieser Term erst für Dichten oberhalb 10^{19} [cm⁻³] aus, bei Temperaturen um 10^7 [°K] für Dichten oberhalb 10^{17} [cm⁻³].

Unterhalb der gestrichelten Linie gilt also der Brechungsindex für Alfvénsche Wellen, in den Bereichen oberhalb davon muss dagegen die Korrektur (6.7) berücksichtigt werden.

Ist (im oberen Bereich des Diagramms) sogar

$$\frac{\omega_p^2 s^2}{k_{\parallel}^2 c^2} \gg 1$$

dann wird der Brechungsindex

$$n^2 = \frac{c^2}{s^2} \approx \frac{c^2 \cdot m_i}{k_{\parallel} \cdot T} \quad (6.9)$$

also eine nur von der Temperatur abhängige Grösse.

4. Der Brechungsindex bei der Hybridfrequenz

Setzt man im vollständigen Brechungsindex (6.4) die eingestrahelte Frequenz ω^2 gleich der Hybridfrequenz $\omega_i \omega_e$ des Plasmas, so bekommt man die Dispersionsbeziehung

$$n^2 = \frac{c^2}{2\omega^2} \left[\sqrt{\left(\frac{\omega_p^2}{c^2} + 2\frac{\omega^2}{s^2}\right)^2 + 4\frac{\omega_p^2 \omega^2}{c^2 s^2}} - \frac{\omega_p^2}{c^2} - 2\frac{\omega^2}{s^2} \right] \quad (6.10)$$

Der Verlauf des Brechungsindex als Funktion der eingestrahelten Frequenz ist im Diagramm II dargestellt für die feste Temperatur $T = 10^5$ [°K]. Dabei wird die Dispersionskurve bei verschiedenen Dichten nicht verändert, sondern für steigende Dichten nur parallel zu steigenden Werten für ω^2 verschoben.

Löst man diese Dispersionsbeziehung nach ω^2 auf, so erhält man

$$\omega^2 = \frac{\omega_p^2 (c^2 - n^2 s^2)}{n^2 (2c^2 + n^2 s^2)} \quad (6.11)$$

Für sehr kleine Frequenzen $\omega \rightarrow 0$ ergibt das

$$n^2 = \frac{c^2}{s^2} \quad (6.9)$$

eine Beziehung, die auch im oberen Teil des Diagramms I gilt.

Einen Brechungsindex von der Grössenordnung $n^2 \approx 1$ erhält man andererseits für Frequenzen der Grössenordnung $\omega^2 \approx 10^{26} [\text{sec}^{-1}]$. Das bedeutet, wenn $\omega^2 = \Omega_i \Omega_e$ gesetzt wird, Magnetfeldstärken von der Grössenordnung $10^7 [r]$.

5. Der thermische Anteil der Lösung

Mit der bereits verwendeten Abschätzung

$$M^2 \gg N$$

erhält man für den Argumentfaktor f_2 der zweiten Lösungsfunktion von Gl.(4.15)

$$f_2 = \sqrt{\frac{1}{2} M \left(\sqrt{1 + \frac{4N}{M^2}} + 1 \right)} \approx \sqrt{M} \quad (6.12)$$

Der Brechungsindex wird in diesem Falle

$$n^2 = \frac{1}{\omega^2} \left(\omega_p^2 + \beta_i \beta_e \frac{c^2}{s^2} \right) \quad (6.13)$$

Wieder wurde ω^2 gegen $\Omega_i \Omega_e$ vernachlässigt. In dieser Gleichung ist wegen der Annahmen (5.34)

$$\omega_p^2 \ll \beta_i \beta_e \frac{c^2}{s^2}$$

so dass im wesentlichen

$$n^2 = \frac{\beta_i \beta_e}{\omega^2} \cdot \frac{c^2}{s^2} \quad (6.14)$$

als Brechungsindex bleibt. Dieser Anteil der Lösung ist also nicht dispersionsfrei und hängt vom Druck bzw. von der Temperatur des Plasmas ab. Unter den Voraussetzungen (5.34) ist dieser Brechungsindex um einen Faktor 10^6 grösser als der Brechungsindex (6.8) der Alfvénschen Welle.

VII. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden die durch eine äussere Stromschicht angeregten Schwingungen eines unendlich langen Plasmazylinders untersucht, der sich in einem homogenen axialen Magnetfeld befindet. Der Plasmazylinder und das Magnetfeld werden als stationär angesehen; die von der Stromschicht radial nach innen laufenden elektromagnetischen Wellen werden als Störungen kleiner Amplitude dem stationären Zustand überlagert. Die linearisierten Gleichungen des Zweiflüssigkeitsmodells der Magnetohydrodynamik führen auf zwei Besselsche Differentialgleichungen, durch die die beiden möglichen Schwingungstypen des Plasmas bestimmt werden.

Die Lösung der Besselschen Differentialgleichung zweiter Ordnung liefert den für die Ausbreitung transversaler, elektromagnetischer Wellen in einem magnetfeldfreien Plasma massgeblichen Ecclesschen Brechungsindex.

Die zweite Besselsche Differentialgleichung ist von vierter Ordnung. Das wird durch die Berücksichtigung der Druckterme in den Bewegungsgleichungen der Plasmakomponenten bedingt, ohne die sich eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ergäbe. - Die Lösung dieser Differentialgleichung ergibt im wesentlichen den Brechungsindex für Alfvénsche Wellen mit einem temperaturabhängigen Korrekturglied.

Im Gegensatz zum rein transversalen Charakter des ersten Schwingungstyps ist der zweite weder rein transversaler noch rein longitudinaler Art.

Die Lösungen in den übrigen Raumbereichen der Anordnung ergeben sich unmittelbar aus den Maxwell'schen Gleichungen.

Die Randbedingungen, über die die Lösungen in den einzelnen Raumbereichen aneinander anzuschliessen sind, werden nach einer von Stix angegebenen Methode der Integration über die Randflächen bestimmt.

Danach wird die Oberflächenladung des stationären Plasmas durch die Radialkomponente des elektrischen Feldes im Vakuum bestimmt. Ausserdem wird dem stationären elektrischen Feld des Vakuums im wesentlichen durch den stationären Ionendruck des Plasmas das Gleichgewicht gehalten, während der stationäre Elektronendruck das Gleichgewicht zwischen den stationären Magnetfeldern des Plasmas und des Vakuums bedingt.

Das elektrische Feld der Störung besitzt eine stetige Axialkomponente, die azimutale Komponente ist dagegen unstetig. Als weitere Randbedingung des gestörten Systems ergibt sich ein verschwindender Ionendruck am Rande des Plasmazylinders.

Beim Durchgang durch die anregende Stromschicht ergibt sich die Stetigkeit der Feldkomponenten B_φ , E_φ , E_z , während die axiale Magnetfeldkomponente B_z eine Unstetigkeit von der Grösse des anregenden Stroms aufweist.

Mit Hilfe dieser Randbedingungen lassen sich die Integrationskonstanten der verschiedenen Lösungen als Funktionen der stationären Parameter berechnen. Damit sind die Lösungen in den einzelnen Raumbereichen eindeutig bestimmt.



Bild 1: Verlauf des Korrekturterms von Gl.(6.6)

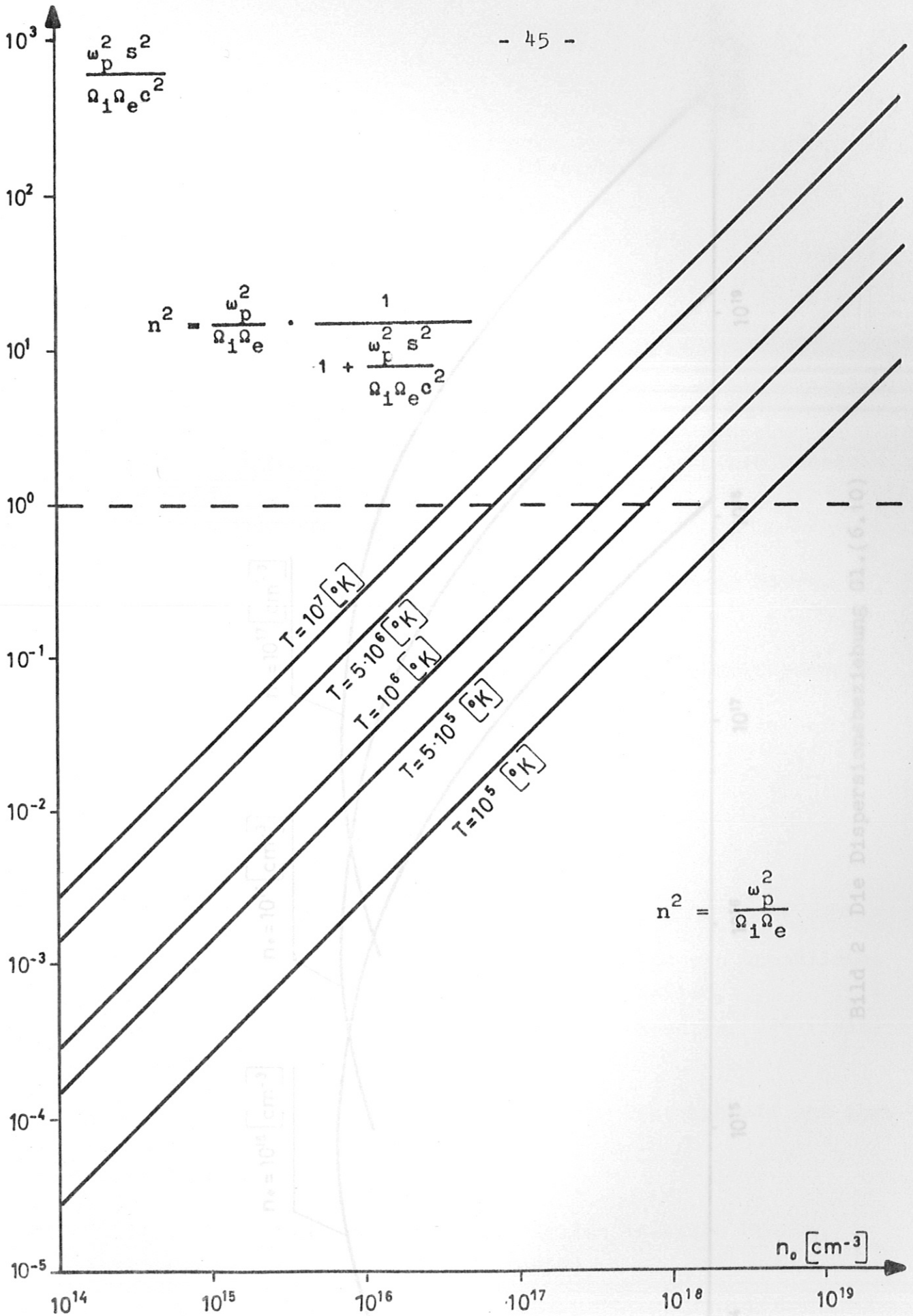


Bild 1 Verlauf des Korrekturterms von Gl.(6.6)

Bild 2 Die Dispersionsbeziehung Gl.(6.6)

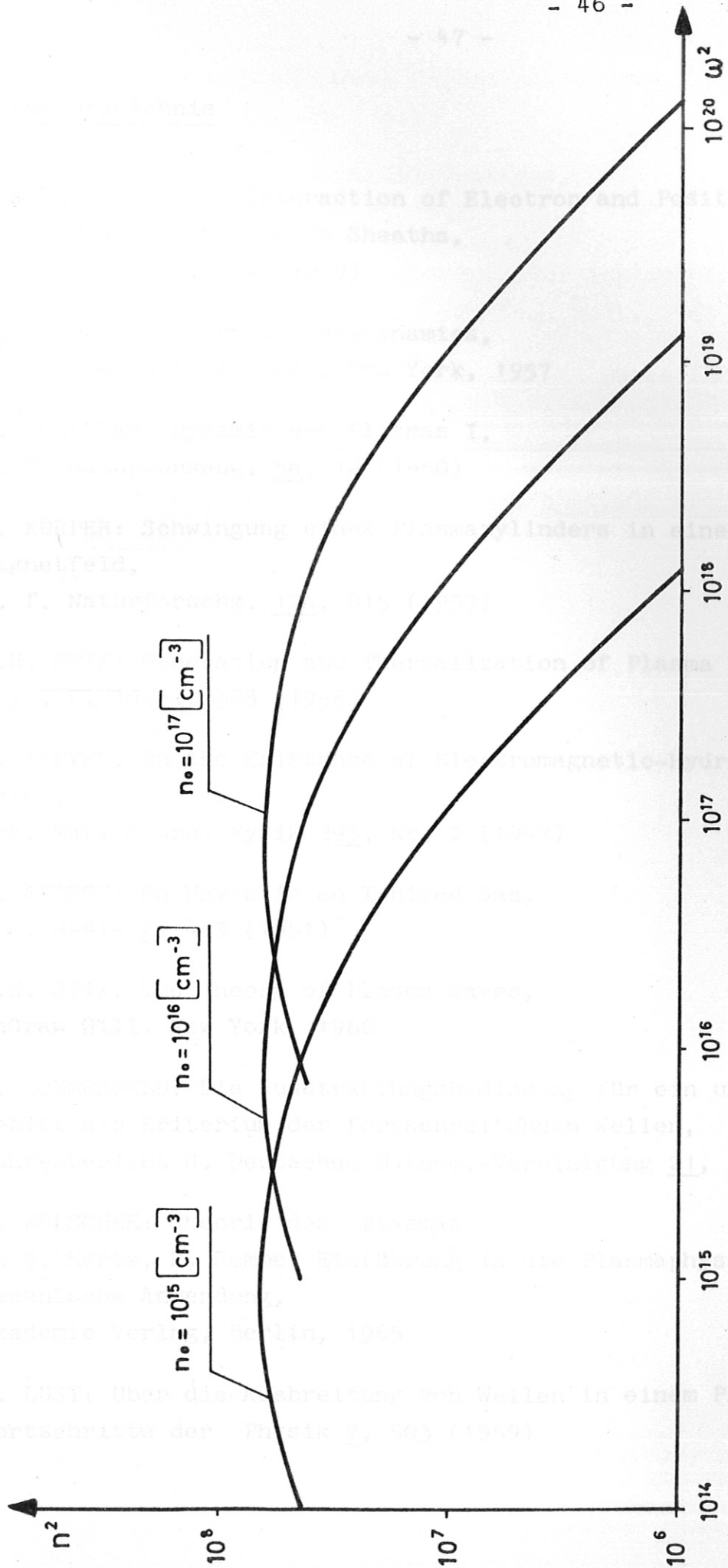


Bild 2 Die Dispersionsbeziehung Gl.(6.10)

Literaturverzeichnis

- 1 I. LANGMUIR: The Interaction of Electron and Positive Ion Space Charges in Cathode Sheaths, Phys. Rev. 33, 954 (1929)
- 2 T.G. COWLING: Magnetohydrodynamics, Interscience Publishers, New York, 1957
- 3 A. SCHLÜTER: Dynamik des Plasmas I, Z. f. Naturforschg. 5a, 72 (1950)
- 4 K. KÖRPER: Schwingung eines Plasmazyinders in einem äusseren Magnetfeld, Z. f. Naturforschg. 12a, 815 (1957)
- 5 T.H. STIX: Generation and Thermalization of Plasma Waves, Phys. Fluids 1, 308 (1958)
- 6 H. ALFVEN: On the Existence of Electromagnetic-Hydrodynamical Waves, Ark. Mat. Astro. Fysik 293, Nr. 2 (1942)
- 7 E. ÅSTRÖM: On Waves in an Ionized Gas, Ark. Fysik 2, 443 (1951)
- 8 T.H. STIX: The Theory of Plasma Waves, McGraw Hill, New York, 1962
- 9 A. SOMMERFELD: Die Ausstrahlungsbedingung für ein unendliches Gebiet als Kriterium der fortschreitenden Wellen, Jahresbericht d. Deutschen Mathem.-Vereinigung 21, 326 (1912)
- 10 S. WOLSCHKE: Theorie des Plasmas in G. Hertz, R. Rompe: Einführung in die Plasmaphysik und ihre technische Anwendung, Akademie Verlag, Berlin, 1965
- 11 R. LUST: Über die Ausbreitung von Wellen in einem Plasma, Fortschritte der Physik 7, 503 (1959)

- 12 W.H. ECCLES: On the Diurnal Variations of the Electric Waves,
Proc. Roy. Soc. 87A, 79 (1913)
- 13 G.N. WATSON: Theory of Besselfunctions,
Cambridge University Press, 1958
- 14 F.B. HILDEBRAND: Advanced Calculus for Applications,
Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1962
- 15 W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER: Formeln und Sätze für die
speziellen Funktionen der mathematischen Physik,
Springer Verlag, Berlin, 1948
- 16 R. LUST: Plasmaschwingungen in einem äusseren Magnetfeld,
Z. Astrophys. 37, 67 (1955)

Herrn Prof. Dr. A. Schlüter und Herrn Prof. Dr. R. Wienecke danke ich für die Anregung des Themas und die Förderung der Arbeit. Die zahlreichen Diskussionen mit Herrn Dr. W. Feneberg haben mir sehr geholfen. Ausserdem danke ich Frl. A. Breitkopf für die sorgfältige Niederschrift.