

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Zyklotronwellen im heißen, zylindrischen
Plasma mit inhomogenem Magnetfeld.

(Cyclotron waves in a hot, cylindrical
plasma with an inhomogeneous magnetic
field.)

H. G r a w e

IPP 6/60

Juli 1967

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

ABSTRACT:

A method of calculating the propagation of rotational symmetric waves in a hot, circularly cylindrical plasma with a weakly inhomogeneous magnetic field is described. The frequency ω of the waves is not subject to any essential restrictions. Cyclotron waves, in particular, are thus taken into account as well. Attention in experiments is concentrated on rotational symmetric waves. In addition, it is shown that there is a simple theoretical reason for this restriction to the rotational symmetric case. From a model given by STIX⁷⁾ for the cyclotron damping one is first led to believe that the damping depends essentially on the strength of the inhomogeneity. This problem is discussed and it is shown that in a weakly inhomogeneous magnetic field the cyclotron damping is independent of the strength of the inhomogeneity. It is therefore possible to replace the weakly inhomogeneous magnetic field in the usual way with a partially homogeneous field. The Vlasov equation is taken as a basis to calculate the dielectric tensor and the pressure tensor for rotational symmetric waves in a homogeneous plasma with a homogeneous magnetic field. The components of the tensors can be expanded in powers of the gyroradii. Known boundary conditions at a circularly cylindrical plasma-vacuum interface are used. These govern the wave field in lowest order in the gyroradii. The dispersion relation thus obtained is the condition for the vanishing of a 5×5 determinant. In general it can only be solved numerically. Restrictions on the frequency are subsequently introduced in order to reproduce known results³⁾.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
I. Zyklotrondämpfung im inhomogenen Magnetfeld	
Problemstellung und Ergebnis	4
a.) Das Modell für die Zyklotrondämpfung	7
b.) Die Energieaufnahme eines Resonanzteilchens	10
c.) Die absorbierte Energie	15
d.) Die Verschmierung der Verteilungsfunktion	18
II. Wellen im heißen, zylindrischen Plasma	
Problemstellung und Ergebnis	24
1. Der Dielektrizitätstensor	
a.) Formale Lösung der Wlassow-Gleichung	32
b.) Die Auszeichnung des kreiszylindrischen Falles	36
c.) Berechnung des Dielektrizitätstensors	39
d.) Vergleich mit ebenen Wellen	47
2. Die Dispersionsbeziehung	
a.) Die Bestimmtheit des Systems	49
b.) Die Randbedingungen	52
c.) Berechnung des Drucktensors	55
d.) Diskussion der Dispersionsbeziehung	60
Anhang 1	66
Anhang 2	67
Anhang 3	68
Anhang 4	73
Bezeichnungsweise	79
Literatur	80

EINLEITUNG

Zu den effektivsten Möglichkeiten, die Energie einer hochfrequenten elektromagnetischen Welle in Wärmeenergie eines vorliegenden Plasmas überzuführen, gehören - bei höheren Plasmatemperaturen - die Prozesse der stoßfreien Absorption. Unter ihnen wird die Zyklotronheizung^{*)} am häufigsten experimentell verwirklicht. Abb. 1 stellt schematisch die experimentelle Anordnung dar: in einem kreiszylindrischen Gefäß befindet sich ein Plasma in einem inhomogenen Magnetfeld \underline{B}_0 . Im Plasma wird an einem oder auch beiden Enden des Rohres eine elektromagnetische Welle erregt, deren Frequenz ω kleiner ist als die lokale Gyrationfrequenz Ω der zu heizenden Teilchensorte am Anregungsort der Welle. Die Welle pflanzt sich längs der Zylinderachse fort in Richtung auf die Mitte des Rohres zu und erreicht eine "Resonanzfläche", die die Zylinderachse bei z_R bzw. $z_{R'}$ schneidet und auf der die lokale Gyrationfrequenz mit der Wellenfrequenz übereinstimmt.

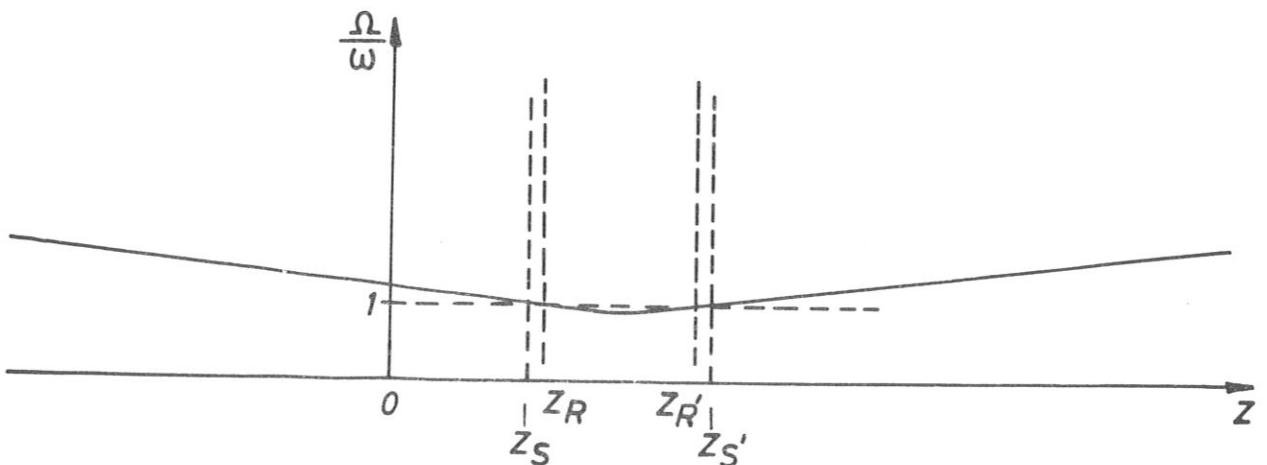
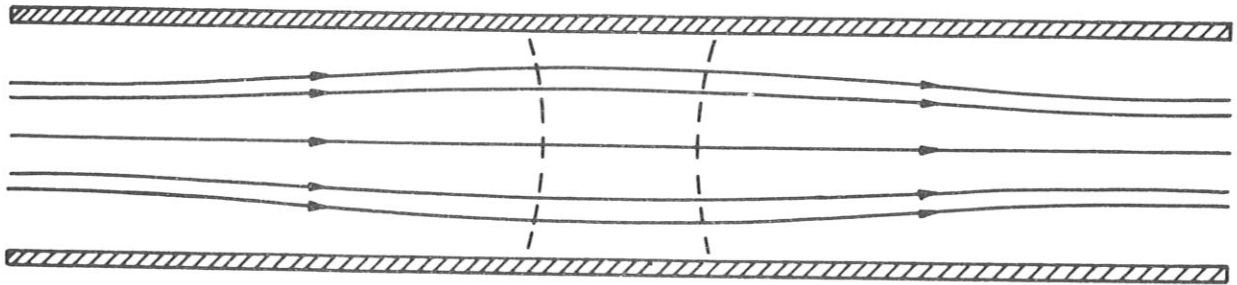


Abb. 1

Je mehr sich die Welle der Resonanzfläche nähert, desto mehr wird ihre Energie absorbiert, denn an einer Stelle z nehmen solche Teilchen aus der Welle Energie auf, für die die Wellenfrequenz durch die thermische Geschwindigkeit v_{th} längs \underline{B}_0 so Doppler-verschoben ist, daß sie mit der lokalen Gyration-frequenz übereinstimmt. Für diese "Resonanzteilchen" gilt also

$$\Omega(z) = \omega - k \cdot v_{th}$$

An der Resonanzstelle selbst wird die Welle, soweit sie nicht vorher absorbiert wurde, reflektiert, denn im Bereich $z_R < z < z_R'$ ist die Welle "cut off".

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Berechnung des Feldes der Zyklotronwelle. Falls keine Absorption vorliegt, z.B. im kalten Plasma, und falls die Inhomogenität des Magnetfeldes \underline{B}_0 hinreichend schwach ist, ist es geläufig, den Dielektrizitätstensor an einer Stelle z zu berechnen, indem man das inhomogene Magnetfeld durch ein homogenes gleicher Feldstärke ersetzt. Falls aber Absorption vorliegt, ist es nicht von vornherein klar, ob und ggf. wie die Absorption von der Stärke der Inhomogenität abhängt. Man vermutet zunächst, daß die Energieabsorption umso schwächer ist, je stärker die Inhomogenität des Magnetfeldes ist; denn das einzelne Teilchen spürt Resonanz für umso kürzere Zeit, je stärker die Inhomogenität ist. In Kap. I wird dieses Resonanzteilchenmodell für die Zyklotrondämpfung ausführlich diskutiert und gezeigt: für ein schwach inhomogenes Magnetfeld hängt die pro Volumen- und Zeiteinheit absorbierte Energie nicht von der Stärke der Inhomogenität ab, weil die Zahl der Teilchen, die pro Zeit- und Volumeneinheit Resonanz spüren umso größer ist, je stärker die Inhomogenität ist.

Damit ist es dann gerechtfertigt, sich in Kap. II auf ein homogenes Magnetfeld zu beschränken. Kap. II beschäftigt sich

[†]) Die Bezeichnungsweise "Zyklotronheizung" wird verwendet, weil sie sehr gebräuchlich ist, obwohl man besser von "Gyroresonanzheizung" sprechen sollte.

mit der Herleitung einer Dispersionsgleichung für axialsymmetrische Wellen im heißen Plasma unter Berücksichtigung der Randbedingungen auf einer kreiszylindrischen Grenzfläche. In älteren Arbeiten ^{1,2,3)} wurden bereits Dispersionsbeziehungen unter Berücksichtigung radialer Randbedingungen hergeleitet, allerdings unter Voraussetzungen, die für die Zyklotronwellen nicht erfüllt sind. Die Autoren ¹⁾ machen die Annahme eines kalten Plasmas, ²⁾ läßt keine Wellenausbreitung längs der Zylinderachse zu, während die in ³⁾ gegebene Theorie nur Gültigkeit besitzt für Frequenzen, die klein sind gegen Plasma- und Gyrationfrequenz aller Teilchensorten des Plasmas. Dagegen wird in Kap. II nur die Forderung hinreichend kleiner Gyroradien erhoben, während der Bereich der zulässigen Frequenzen nur durch die Verwendung der stoßfreien Boltzmanngleichung eingeschränkt wird. Die Theorie in II. gilt also nicht nur für Zyklotronwellen.

Bisher beschränkte man sich darauf (siehe ⁴⁾), die experimentellen Ergebnisse zu vergleichen mit der für ebene Wellen im unendlich ausgedehnten Plasma gültigen Theorie. In ⁵⁾ wurde am Beispiel der Elektronenzyklotronwelle im kalten Plasma gezeigt, daß die Berücksichtigung der radialen Randbedingungen eine wesentliche Änderung des Wellenfeldes bringen kann gegenüber dem Feld der entsprechenden ebenen Welle. Neuerdings wird auch die Möglichkeit der Plasmaaufheizung bei der ersten Harmonischen der Ionengyrofrequenz diskutiert ⁶⁾. Alle Effekte bei den Harmonischen der Gyrofrequenzen spielen aber nur eine Rolle für eine Welle, die sich nicht exakt parallel zum angelegten Magnetfeld fortpflanzt. Man muß also die radialen Randbedingungen berücksichtigen. Die in II. angegebene Theorie liefert eine Möglichkeit dazu.

I. Zyklotrondämpfung im inhomogenen Magnetfeld

Problemstellung und Ergebnis

Das Phänomen der Zyklotronheizung wird für das homogene Plasma im homogenen Magnetfeld ausgehend von der Wlassow-Gleichung von STIX ⁷⁾ ausführlich behandelt. Er gibt auch ein Modell für die Zyklotronabsorption an, das im Folgenden auf den Fall des inhomogenen Magnetfeldes erweitert wird: Es wird die Energie P berechnet, die die Resonanzteilchen pro Zeit- und Volumeneinheit aus einer gegebenen elektromagnetischen Welle

$$(1) \quad \tilde{\underline{E}} = \underline{E} \cdot e^{i(kz - \omega t)}$$

$$(1') \quad \tilde{\underline{B}} = \underline{B} \cdot e^{i(kz - \omega t)}$$

aufnehmen, wenn die z -Achse die Richtung des angelegten Magnetfeldes \underline{B}_0 hat; k und ω seien reell und die Inhomogenität von \underline{B}_0 sei so schwach, daß k als konstant betrachtet werden kann über den räumlichen Bereich von z bis $z+d_R$, in dem das einzelne Resonanzteilchen Energie aus der Welle aufnimmt. Das bedeutet gerade: Im Falle fehlender Absorption kann man die Dispersionsgleichung berechnen, indem man das inhomogene Magnetfeld ersetzt durch ein stückweise homogenes. Dafür ist jedenfalls eine notwendige Bedingung

$$(2) \quad |k \cdot L| \gg 1$$

wobei $L := |\partial^2 / \partial z^2 \Omega|$ die charakteristische Länge der Inhomogenität ist. Über die Dicke d_R der Resonanzschicht werden keine Annahmen gemacht, vielmehr ergibt sie sich aus der Rechnung als klein gegen L ; d_R und damit die Kohärenzzeit $\tau = d_R/v_{||}$ sind durch die Effekte begrenzt, die mit der Zeit zur Verletzung der Resonanzbedingung $\Omega = \omega - k \cdot v_{||}$ führen, wenn diese zum Zeitpunkt $t=0$ erfüllt war. Dafür sind vier Ursachen verantwortlich:

- i.) Zeitliche Änderung von $v_{||}$ durch Stöße
- ii.) Zeitliche Änderung von $v_{||}$ durch die Lorentzkraft $\underline{v}_\perp \times \underline{B}$
- iii.) Zeitliche Änderung von $v_{||}$ durch die Spiegelkraft in \underline{B}_0
- iv.) Änderung von Ω längs der Teilchenbahn

Wäre nicht $k = \text{const.}$ gefordert worden, so müßte $\partial_z k$ natürlich eine zu iv.) analoge Ursache darstellen. Aber selbst wenn $|k/\partial_z k| \approx L$ ist, wird sich diese Ursache gegenüber iv.) sehr gering auswirken, da $\Omega \approx \omega$ ist. iv.) bedeutet: Das einzelne Resonanzteilchen nimmt pro Resonanzdurchgang umso weniger Energie auf, je stärker die Inhomogenität des Magnetfeldes ist. Für hinreichend hohe Plasmatemperaturen wird man den Einfluß der Stöße vernachlässigen können. Es wird sich später ergeben, daß jedenfalls für Ionenzyklotronwellen unter den üblichen experimentellen Bedingungen immer, für Elektronenzyklotronwellen für nicht zu große Wellenamplitude die Ursache iv.) bestimmend für die Kohärenzzeit ist. In diesem Kapitel I. wird gezeigt: Die im inhomogenen Magnetfeld absorbierte Energie P_{inh} ist dennoch unabhängig von der Stärke der Inhomogenität und stimmt überein mit der im homogenen Magnetfeld absorbierten Energie P_h . Das liegt daran, daß zwar das einzelne Resonanzteilchen bei stärkerer Inhomogenität weniger Energie aufnimmt, dafür aber pro Zeiteinheit umso mehr Teilchen in Resonanz geraten.

Berechnet man die absorbierte Energie nicht aus dem im nächsten Abschnitt ausführlicher beschriebenen Modell, sondern -, was zunächst nur für das homogene Magnetfeld möglich ist, - mit Hilfe des aus der mikroskopischen Theorie folgenden Dielektrizitätstensors $\underline{\underline{\epsilon}}$, so ist

$$(3) \quad P = \frac{i \cdot \omega}{16 \pi} \underline{E}^* (\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^\dagger) \underline{E}$$

Die Frage nach der Übereinstimmung von P_h mit P_{inh} bedeutet dann also, nach der Gleichheit der antihermiteschen Anteile von $\underline{\underline{\epsilon}}_h$ und $\underline{\underline{\epsilon}}_{inh}$ zu fragen. Nun stellen - für den Fall einer skalaren Dielektrizitätskonstanten ϵ - die KRAMERS-KRONIG-Re-

lationen ⁸⁾ einen Zusammenhang zwischen dem Imaginärteil und dem Realteil von $\underline{\underline{\epsilon}}$ her, der sich auf jedes Element von $\underline{\underline{\epsilon}}$ übertragen läßt: Falls $\underline{\underline{\epsilon}}(\omega)$ holomorph ist für $\text{Im } \omega \geq 0$ und falls $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{HK} \underline{\underline{\epsilon}}(\omega) d\omega = 0$ (HK ist ein Halbkreisbogen in der oberen Halbebene mit dem Ursprung als Mittelpunkt und dem Radius R), dann sind $\text{Re } \underline{\underline{\epsilon}}$ und $\text{Im } \underline{\underline{\epsilon}}$ Hilbert-Transformierte voneinander:

$$(4a) \quad \text{Re } \underline{\underline{\epsilon}}(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im } \underline{\underline{\epsilon}}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$

$$(4b) \quad \text{Im } \underline{\underline{\epsilon}}(\omega) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Re } \underline{\underline{\epsilon}}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$

Unter der Annahme, daß nicht nur $\underline{\underline{\epsilon}}_h$ sondern auch $\underline{\underline{\epsilon}}_{inh}$ die Voraussetzungen der KRAMERS-KRONIG-Relationen erfüllt, ist es klar, daß $P_h = P_{inh}$ gilt, wenn man die Gleichheit des Wellenfeldes in beiden Fällen fordert. Falls man umgekehrt zeigt, daß unter der Voraussetzung $|k \cdot L| \gg 1$ $P_h = P_{inh}$ ist, dann folgt aus den K.-K.-Relationen: $|k \cdot L| \gg 1$ ist nicht nur eine notwendige, sondern auch eine hinreichende Bedingung für $\underline{\underline{\epsilon}}_h = \underline{\underline{\epsilon}}_{inh}$. Nun wird im Folgenden (unter der Voraussetzung $|k / \partial_z k| \leq L$) $P_h = P_{inh}$ nur nachgewiesen für den Fall der Zyklotrondämpfung, also $\omega \approx \Omega$; wenn man aber die plausible Annahme macht, daß die Intervalle der reellen ω -Achse, für die $\text{Im } \underline{\underline{\epsilon}} \neq 0$ ist, hinreichend weit voneinander entfernt sind, dann kann man (4a) für den Bereich $\omega \approx \Omega$ getrennt benutzen, da die anderen Bereiche mit $\text{Im } \underline{\underline{\epsilon}} \neq 0$ einen verschwindenden Beitrag zum Integral liefern. Unter diesen zusätzlichen Annahmen folgt also aus der im Folgenden bewiesenen Identität von P_h und P_{inh} , daß $|k \cdot L| \gg 1$ hinreichend ist für $\underline{\underline{\epsilon}}_h = \underline{\underline{\epsilon}}_{inh}$. Das ist aber nur ein Nebenergebnis dieses Kapitels, dessen Hauptanliegen es ist, die auf dem Resonanzteilchenmodell basierende Vermutung, daß die Absorption mit wachsender Inhomogenität abnimmt, in diesem Modell zu widerlegen.

a.) Das Modell für die Zyklotrondämpfung

Zunächst werden die Bewegungsgleichungen für ein Resonanzteilchen im inhomogenen stationären Magnetfeld mit überlagerter, transversaler Welle (1), (1'), gelöst. Es sei also $E_z = 0$; für das Magnetfeld der Welle folgt dann aus einer der Maxwell'schen Gleichungen:

$$\tilde{\underline{B}} = \frac{k \cdot c}{\omega} \cdot \frac{\underline{B}_0}{|\underline{B}_0|} \times \tilde{\underline{E}}$$

Das stationäre Magnetfeld \underline{B}_0 möge in kartesischen Koordinaten (x, y, z) die Komponenten haben: $(B_0 \cdot \gamma/2 \cdot x; B_0 \cdot \gamma/2 \cdot y; B_0 \cdot (1 - \gamma \cdot z))$
Um Fallunterscheidungen zu sparen, beschränken wir uns auf eine Welle, die (Abb.1) im Bereich $z < z_R$ auf die Resonanzstelle zu läuft. Es ist also:

$$(5) \quad \gamma > 0 \quad ; \quad k > 0$$

Für γ gilt:

$$(6) \quad \left| \frac{k}{\gamma} \right| = |k \cdot L| \gg 1$$

Sei q der Betrag, δ das Vorzeichen der Ladung des betrachteten Teilchens, m seine Masse, dann lauten die Bewegungsgleichungen:

$$(7a) \quad \frac{dv_x}{dt} = \frac{\delta \cdot q}{m} \cdot \left(\tilde{E}_x + \frac{v_y}{c} \cdot B_0 \cdot (1 - \gamma z) - \frac{v_z}{c \cdot 2} \cdot B_0 \cdot \gamma \cdot y - \frac{v_z}{c} \cdot \frac{k \cdot c}{\omega} \cdot \tilde{E}_x \right)$$

$$(7b) \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{\delta \cdot q}{m} \cdot \left(\tilde{E}_y - \frac{v_x}{c} \cdot B_0 \cdot (1 - \gamma z) + \frac{v_z}{c \cdot 2} \cdot B_0 \cdot \gamma \cdot x - \frac{v_z}{c} \cdot \frac{k \cdot c}{\omega} \cdot \tilde{E}_y \right)$$

$$(7c) \quad \frac{dv_z}{dt} = \frac{\delta \cdot q}{m} \cdot \left(\frac{B_0}{2 \cdot c} \cdot \gamma \cdot (v_x \cdot y - v_y \cdot x) + \frac{k}{\omega} \cdot (\tilde{E}_x \cdot v_x + \tilde{E}_y \cdot v_y) \right)$$

Spaltet man das Wellenfeld auf in zwei rotierende Komponenten, so nimmt das Resonanzteilchen nur Energie auf aus dem in seinem eigenen Gyrationssinn rotierenden Anteil. Deshalb wird von vornherein eine in diesem Sinn zirkular polarisierte Welle angenommen. Der Amplitudenvektor \underline{E} habe also die Komponenten:

$$E_x = \frac{E}{2} \quad E_y = -\frac{E}{2} \cdot i \cdot \delta$$

E sei reell. Stellt man die in der x-y-Ebene liegenden Anteile aller Vektoren durch komplexe Zahlen dar

$$\hat{v} = v_x + i \int v_y$$

$$\hat{r} = x + i \int y$$

so ergeben die Gleichungen (7a) und (7b) zusammen die Gleichung:

$$(8a) \quad \frac{d\hat{v}}{dt} = A \left(1 - \frac{k \cdot v_z}{\omega} \right) e^{i\varphi(t)} - i \Omega(t) \hat{v} + i \Omega_0 \gamma/2 \cdot v_{||} \cdot \hat{r}$$

Mit

$$v_{||} = v_z ; \quad A := \frac{q \cdot E}{m} ; \quad \varphi(t) := k \cdot z(t) - \omega \cdot t$$

$$\Omega(t) = \Omega_0 (1 - \gamma z(t)) ; \quad \Omega_0 = \frac{q \cdot B_0}{m \cdot c}$$

Und aus (7c) folgt:

$$(8b) \quad \frac{dv_{||}}{dt} = \text{Re} \left\{ -i \hat{v}^* \hat{r} \cdot \Omega_0 \cdot \gamma/2 + \frac{k}{\omega} \cdot A \hat{v}^* e^{i\varphi(t)} \right\}$$

Durch die Transformation

$$(9) \quad \hat{r} = s \cdot \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int_0^t \Omega(t') dt' \right\}$$

geht (8a) unter Benutzung von

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\gamma \cdot v_{||} \cdot \Omega_0$$

über in:

$$(10) \quad \frac{d^2 s}{dt^2} + \left(\frac{\Omega(t)}{2} \right)^2 \cdot s = A \left(1 - \frac{k \cdot v_{||}}{\omega} \right) \exp \left\{ i\varphi(t) + \frac{i}{2} \int_0^t \Omega(t') dt' \right\}$$

Gleichung (10) wird in der WKB-Näherung gelöst. Dazu muß die Bedingung

$$(11) \quad \left| \Omega^{-2} \cdot \frac{d\Omega}{dt} \right| \ll 1$$

erfüllt sein. (11) ist für ein Resonanzteilchen immer erfüllt.
Denn aus der Resonanzbedingung

$$(12) \quad \Omega = \omega - k \cdot v_{||}$$

folgt

$$(13) \quad \left| \frac{v_{||} \cdot k}{\Omega} \right| < 1$$

und es ist:

$$\left| \Omega^{-2} \frac{d\Omega}{dt} \right| = \left| \frac{v_{||} \cdot \Omega_0}{\Omega^2} \right| = \left| \frac{v_{||}}{k} \right| \left| \frac{v_{||} \cdot k}{\Omega} \right| \left| \frac{\Omega_0}{\Omega} \right| \ll 1$$

In der WKB-Näherung hat (10) die Lösung

$$s = (\Omega(t))^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} \left\{ i C_{-}(t) \exp\left\{-\frac{i}{2} \int_0^t \Omega(t') dt'\right\} - i C_{+}(t) \exp\left\{\frac{i}{2} \int_0^t \Omega(t') dt'\right\} \right\}$$

$$C_{-}(t) = (z \Omega)^{-\frac{1}{2}} \hat{v}_0 + A \int_0^t \left(1 - \frac{k}{\omega} v_{||}(t')\right) (z \Omega(t'))^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{i\psi(t') + i \int_0^{t'} \Omega(t'') dt''\right\} dt'$$

$$C_{+}(t) = A \int_0^t \left(1 - \frac{k}{\omega} v_{||}(t')\right) (z \Omega(t'))^{-\frac{1}{2}} \exp\{i\psi(t')\} dt'$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$\hat{v}(t=0) = \hat{v}_0 =: v_{||0} e^{i\alpha_0} \quad ; \quad \hat{r}(t=0) = \hat{r}_0 = \frac{i}{\Omega_0} \hat{v}_0$$

$$\Omega(t=0) = \Omega_0 \quad \text{d.h.} : \quad z(t=0) = 0 \quad ; \quad \psi(t=0) = 0$$

Es ist:

$$\hat{v} = \frac{d\hat{r}}{dt} = \left(\frac{ds}{dt} - \frac{i}{2} \Omega(t) \cdot s \right) \exp\left\{-\frac{i}{2} \int_0^t \Omega(t') dt'\right\}$$

Daraus folgt:

$$(14) \quad \hat{v} = \left(\hat{v}_0 \left(\frac{\Omega(t)}{\Omega_0} \right)^{\frac{1}{2}} + A \Psi(t) \right) \exp\left\{-i \int_0^t \Omega(t') dt'\right\}$$

$$(15) \Psi(t) = (\Omega(t))^{\frac{1}{2}} \cdot \int_0^t \left(1 - \frac{k}{\omega} v_{||}(t')\right) \Omega(t')^{-\frac{1}{2}} \exp i \left\{ \varphi(t') + \int_0^{t'} \Omega(t'') dt'' \right\} dt'$$

Damit ist die Lösung von (8a) gegeben, wenn man $v_{||}$ als Funktion der Zeit kennt. $v_{||}(t)$ wird in eine Taylor-Reihe um $t=0$ entwickelt

$$(16) v_{||}(t) = V_0 + \partial_t V \cdot t + \dots \quad \text{mit} \quad \partial_t V := \left. \frac{\partial v_{||}}{\partial t} \right|_{t=0}$$

Aus (8b) ergibt sich:

$$(17) \partial_t V = \gamma/2 \cdot v_{||0}^2 + k/\omega \cdot A v_{||0} \cdot \cos \alpha_0$$

Das erste Glied der rechten Seite wird durch die Spiegelkraft verursacht und ist unabhängig von der Anfangsphase α_0 . Das zweite rührt her vom Glied $\underline{v} \times \tilde{\underline{B}}$ und hängt ab von der Anfangsphase.

b.) Die Energieaufnahme eines Resonanzteilchens

Es waren die Anfangsbedingungen gestellt worden:

$$v_{||}(t=0) = V_0 \quad ; \quad z(t=0) = 0$$

Das betrachtete Teilchen hat Resonanz zum Zeitpunkt $t=0$, wenn gilt

$$k \cdot V_0 = \omega - \Omega_0$$

V_0 ist also negativ. Nach (16) ist dann:

$$z = V_0 \cdot t + \partial_t V \cdot \frac{t^2}{2} + \dots$$

$$\Omega(t) = \Omega_0 \cdot (1 - \gamma \cdot z(t)) = \Omega_0 \cdot \left(1 - \gamma \cdot V_0 \cdot t - \gamma \partial_t V \frac{t^2}{2} + \dots\right)$$

Und für das Argument der Exponentialfunktion in (15) erhält man:

$$(18) \varphi(t') + \int_0^{t'} \Omega(t'') dt'' = Q t'^2 - \gamma \partial_t V \cdot \Omega_0 \cdot \frac{t'^3}{6}$$

(19) mit

$$Q = Q' + Q'' \quad ; \quad Q' = \gamma/2 \left(k \frac{V_{10}^2}{2} + |V_0| \cdot \Omega_0 \right) \quad ; \quad Q'' = \frac{k^2}{2 \cdot \omega} A V_{10} \cos \alpha_0$$

Bei der Auswertung des Integrals (15) werden nun zwei Vernachlässigungen gemacht. (15) wird später benutzt für Zeiten von einigen $\tau := |Q|^{-\frac{1}{2}}$. Man wird in (18) das Glied dritter Ordnung in t' vernachlässigen dürfen, falls

$$(20) \quad |Q| \gg \left| \gamma \cdot \partial_t V \cdot \Omega_0 \cdot \frac{\tau}{6} \right|$$

ist. Außerdem wird in (15)

$$\left(1 - \frac{k \cdot V_{10}}{\omega} \right) \approx \frac{\Omega_0}{\omega}$$

gesetzt. Dazu ist notwendig

$$(21) \quad \left| \frac{k \cdot \partial_t V \cdot \tau}{\omega} \right| \ll \frac{\Omega_0}{\omega}$$

Das Bestehen der Ungleichungen (20) und (21) wird im Anhang 1 nachgewiesen. Ungleichung (20) ist nur erfüllbar, wenn $\{ := |z - z_R| \geq k^{-1}$ ist. Die Rechnungen gelten also nur bis zur Stelle z_s (Abb.1), die um eine Wellenlänge von z_R entfernt ist. Das ist keine zusätzliche Einschränkung, da die Voraussetzungen des Modells - insbesondere $|k/\partial_z k| \ll L$ - in der unmittelbaren Nähe der Resonanzstelle z_R sowieso nicht erfüllt sind. Außerdem soll die in Kap. II entwickelte Methode nur dazu dienen, das von der Resonanzstelle gemessene Wellenfeld mit einem berechneten zu vergleichen und die Frage zu beantworten, wieviel der vom Sender gelieferten Wellenenergie die Resonanzstelle erreicht.

Mit den durch (20) und (21) gerechtfertigten Vernachlässigungen ergibt das Integral (15):

$$(22) \quad \Psi(t) = \frac{\Omega_0}{\omega} (\Omega(t))^{\frac{1}{2}} \int_0^t (\Omega(t'))^{-\frac{1}{2}} \exp\{i t'^2 Q\} dt'$$

$$=: \left(\frac{\Omega(t)}{\Omega(t_0)} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot |\Phi(t)| \cdot e^{i\beta(t)}$$

Mit $0 < t_0 < t$ und

$$(23) \quad \Phi(t) = \frac{\Omega_0}{\omega} \int_0^t \exp\{it'^2 Q\} dt'$$

Q' ist stets positiv, während Q'' beide Vorzeichen annimmt. Es wird die Annahme gemacht:

$$(24) \quad Q' \gg |Q''|$$

Das bedeutet gerade, daß die Kohärenzzeit durch die Inhomogenität des stationären Magnetfeldes B_0 bestimmt ist. Durch $|z - z_R| \geq k^{-1}$ ist ein minimales $|v_{||}|$ gegeben: $|v_{||}|_{\min} = \gamma \cdot \omega / k^2$. Für $|v_{||}| \geq |v_{||}|_{\min}$ und für alle v_{\perp} ist (24) erfüllt, wenn gilt

$$(25) \quad \gamma^3 \gg \frac{k^5}{2 \cdot \omega^4} A^2$$

Führt man den Brechungsindex $n := kc/\omega$ ein, so hat man noch zu berücksichtigen, daß die Amplitude E der Welle kleiner wird, wenn die Welle sich in eine Richtung fortpflanzt, in der n anwächst. Denn ohne Absorption muß der Betrag S des Poyntingvektors, gemittelt über eine Wellenperiode, erhalten bleiben:

$$S = \frac{c}{16\pi} \cdot n \cdot E^2$$

E_V sei die Vakuumamplitude der Welle, dann ist $E^2 = n^{-1} E_V^2$ und mit $\omega \approx \Omega_0$ folgt aus (25):

$$(26) \quad \gamma^3 \gg \Lambda \cdot n^4 \cdot B_0 \cdot E_V^2$$

Wenn B_0 in G und E_V in V/cm angegeben werden, ist:

$$\Lambda = \left(\frac{q}{m}\right)^3 \cdot (3,6 \cdot 10^5 \cdot c^6)^{-1}$$

$$\Lambda_{\text{gr}} = 1,1 \cdot 10^{-21} \quad ; \quad \Lambda_e = 5,6 \cdot 10^{-11}$$

Bei vorgegebenem γ bedeutet (26) eine Einschränkung für die Wellenamplitude. Für Ionenzyklotronwellen ist im Experiment

$\gamma \approx 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$, $B_0 \approx 10^3 \text{ G}$ und $n^2 \approx 10$. Dann verlangt (26) $E_V \leq 10^4 \text{ V/cm}$. Die übliche Größenordnung der Feldamplitude ist 10^2 V/cm . Für Ionenzyklotronwellen bestimmt also unter den üblichen experimentellen Bedingungen tatsächlich immer die Feldinhomogenität die Kohärenzzeit, während für Elektronenzyklotronwellen (26) eine echte Einschränkung bedeutet.

Wegen (24) ist $Q > 0$ und

$$\Phi(t) = \frac{\Omega_0}{\omega} (iQ)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{(iQ)^{\frac{1}{2}} t} e^{x^2} dx = \pm \frac{\Omega_0}{\omega} Q^{-\frac{1}{2}} e^{-i\pi/4} \cdot F(Q^{\frac{1}{2}} t \cdot e^{i\pi/4})$$

Darin ist F das komplexe Fehlerintegral

$$F(z) = F(\zeta e^{i\vartheta}) = |\hat{F}(\zeta, \vartheta)| e^{i\{\beta(\zeta, \vartheta) + \pi/4\}} =: \int_0^z e^{x^2} dx$$

Abbildung 2 gibt den Verlauf der Funktion $|\hat{F}(Q^{\frac{1}{2}} t, \pi/4)|^2$ wieder. Die Kurve wurde nach der Tabelle ⁹⁾ berechnet.

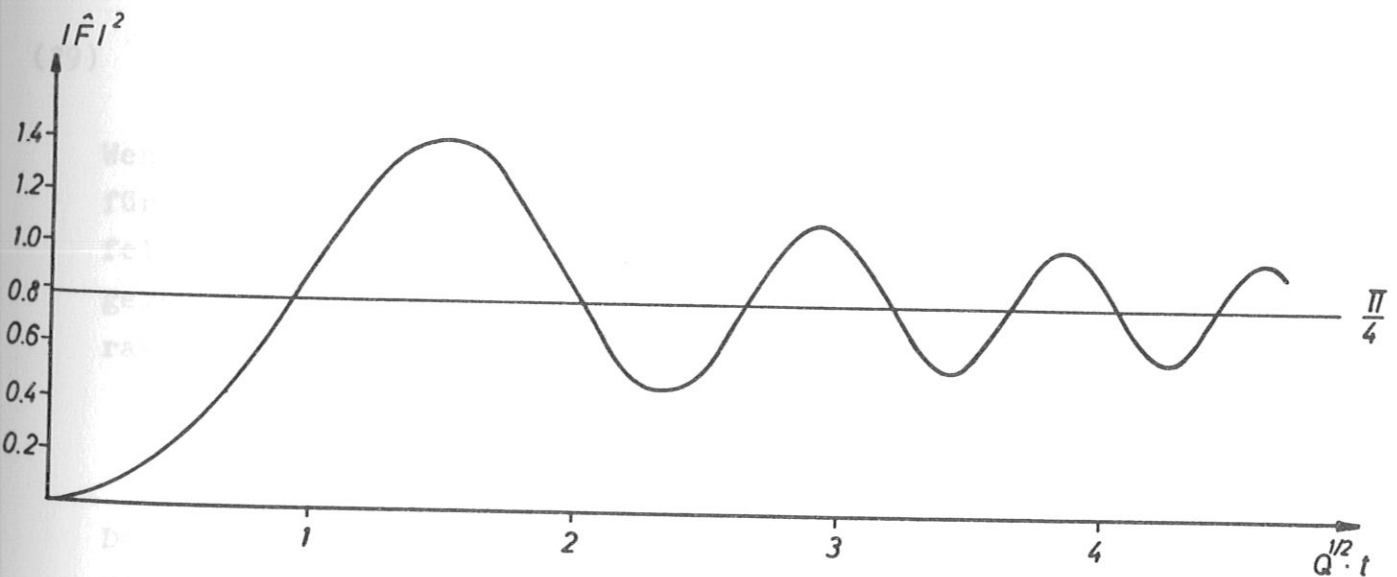


Abb. 2

$|\hat{F}|^2$ nimmt asymptotisch den Wert $\pi/4$ an, und β geht ebenfalls gegen $\pi/4$, so daß Φ für $t \gg \tau := Q^{-\frac{1}{2}}$ den Wert annimmt

$$(27) \quad \Phi_\infty = |\Phi_\infty| e^{i\beta_\infty} = \pm \frac{\Omega_0}{\omega} \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/4} \cdot Q^{-\frac{1}{2}}$$

Φ_{∞} hängt über Q noch von V_0 , v_{10} und α_0 ab.

Für die Energie der transversalen Bewegung eines Resonanzteilchens mit den Anfangswerten V_0 , v_{10} und α_0 folgt aus (14), (15) und (22):

$$(28) \quad W = \frac{m}{2} \hat{v} \cdot \hat{v}^* \quad ; \quad \chi := (\alpha_0 - \beta)$$

$$W = \frac{m}{2} \cdot \left\{ \frac{\Omega(t)}{\Omega_0} v_{10}^2 + \frac{\Omega(t)}{\Omega(t_0)} A^2 |\Phi|^2 + \frac{\Omega(t)}{(\Omega_0 \cdot \Omega(t_0))^{\frac{1}{2}}} A |\Phi| 2v_{10} \cos \chi \right\}$$

Der erste Term auf der rechten Seite von (28) liefert zunächst den richtigen Anfangswert. Der Faktor $\Omega(t)/\Omega_0$ beschreibt den Übergang von Energie der Längsbewegung in solche der Querbewegung. Das bedeutet also keinen Energiegewinn. Die gleiche Bedeutung haben die Faktoren $\Omega(t)/\Omega(t_0)$ bzw. $\Omega(t)/(\Omega_0 \cdot \Omega(t_0))^{\frac{1}{2}}$. Sie werden bei der Angabe des Energiegewinns $\int W$ des Teilchens daher weggelassen.

$$(29) \quad \int W = \frac{m}{2} \left\{ A^2 |\Phi(t)|^2 + 2 A v_{10} |\Phi(t)| \cos(\alpha_0 - \beta(t)) \right\}$$

Wenn τ sehr klein ist gegenüber einer charakteristischen Zeit t_c für die Dauer eines Durchlaufs des Teilchens durch das Spiegel-feld, dann wird man für $|\Phi|$ und β in (29) die durch (27) gegebenen asymptotischen Grenzwerte benutzen dürfen. Als charakteristische Zeit wird gewählt:

$$t_c := \left| \frac{L}{V_0} \right|$$

Da das magnetische Moment der Teilchen während der Wechselwirkung mit der Welle nicht erhalten bleibt, ist eine genauere Bestimmung von t_c nicht möglich. t_c hat aber jedenfalls qualitativ die richtige Abhängigkeit von L und V_0 . Mit der Ungleichung (13) und mit (24) folgt dann:

$$(30) \quad \frac{\tau}{t_c} \approx \left| \frac{\gamma}{k} \right|^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{v_{10}^2}{4V_0^2} + \frac{\Omega_0}{2k \cdot |V_0|} \right)^{-\frac{1}{2}} < \left| \frac{\gamma}{k} \right|^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2} \ll 1$$

mit

Die Dicke $d_R := |V_0 \cdot \tau|$ der Schicht, in der das Resonanzteilchen Energie aufnimmt, ist also dünn gegenüber L . Das rechtfertigt die Annahme eines "Resonanzzonenmodells", wie es ähnlich bereits in ¹⁰⁾ benutzt wurde: In einer schmalen Zone um seine individuelle Resonanzstelle nimmt jedes Teilchen die Energie

$$(31) \quad \delta W = \frac{m}{2} A^2 |\dot{\Phi}_\omega|^2 + m \cdot A \cdot v_{10} \cdot |\dot{\Phi}_\omega| \cdot \cos(\alpha_0 - \frac{\pi}{4})$$

auf; außerhalb dieser Resonanzzone bleiben Energie und Bahn des Teilchens im zeitlichen Mittel vom Wellenfeld unbeeinflusst.

c.) Die absorbierte Energie

Die absorbierte Energie P ist die von den Resonanzteilchen pro Zeit- und Volumeneinheit aufgenommene Wellenenergie. Es wird eine räumliche Schicht Σ von $z = 0$ bis $z = dz$ betrachtet. In der Zeit von $t = 0$ bis $t = dt$ befinden sich in Σ Teilchen verschiedener Geschwindigkeiten, zur Energieaufnahme in Σ während des betrachteten Zeitintervalles werden aber nur die Teilchen beitragen, die zu irgendeinem Zeitpunkt während dt an irgendeiner Stelle in Σ Resonanz spüren. Die Resonanzbedingung hängt von v_{10} und von α_0 nicht ab; daher werden solche Teilchen betrachtet, die für $t = 0$ alle dasselbe v_{10} und α_0 haben, aber verschiedenes $v_{||}(t=0) = v_{||0}$. Mit $v_{||0} = V_0$, $\Omega(z=0) = \Omega_0$ ist die Resonanzbedingung (12) für $t = 0$ an der Stelle $z = 0$ erfüllt. Aus einem wie großen Geschwindigkeitsintervall dv um $v_{||0} = V_0$ stammen die Teilchen, die während dt irgendwo in Σ Resonanz spüren?

Da sowohl dz als auch dt beliebig klein sind, braucht man offenbar nur solche Teilchen in Betracht zu ziehen, für die $z(t=0) = 0$ ist. Für sie ist $z(t) = v_{||0} t + \dots$. Damit die Resonanzbedingung zum Zeitpunkt t an der Stelle z erfüllt ist, muß

$$\Omega(z) = \omega - k \cdot v_{||}(v_{||0}, t)$$

mit $t = z/v_{10} + \dots$ eine Identität in z sein. Es muß also gelten:

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right)_{z=0} \cdot dz = -k \cdot \left(\frac{\partial v_{10}}{\partial v_{10}}\right)_{\substack{v_{10}=V_0 \\ t=0}} \cdot dv_{10} - k \cdot \left(\frac{\partial v_{10}}{\partial t}\right)_{\substack{t=0 \\ v_{10}=V_0}} \cdot \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)_{z=0} \cdot dz$$

Mit

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = -\gamma \cdot \Omega; \quad \frac{\partial v_{10}}{\partial v_{10}} = 1; \quad \frac{\partial v_{10}}{\partial t} = \partial_t V; \quad \frac{\partial t}{\partial z} = V_0^{-1}$$

folgt daraus

$$(32) \quad dv_{10} = (k \cdot |V_0|)^{-1} \cdot (k \cdot \partial_t V + \gamma \cdot |V_0| \cdot \Omega_0) dz = z (k \cdot |V_0|)^{-1} \cdot Q \cdot dz$$

Die Teilchen, für die $v_1(t=0) = v_{10}$ und $\alpha(t=0) = \alpha_0$ ist und die während dt in Σ Resonanz spüren, haben also für $t = 0$ eine Parallelgeschwindigkeit v_{10} , die zwischen V_0 und $V_0 + dv_{10}$ liegt. Sei f_0 die Verteilungsfunktion der Teilchen im Geschwindigkeitsraum zur Zeit $t = 0$. Es wird angenommen, daß f_0 nicht von α_0 abhängt. Das ist a priori nur richtig, wenn die Teilchen zum Zeitpunkt $t = 0$ zum ersten Male Resonanz spüren. Denn die Wechselwirkung mit der Welle wird im allgemeinen eine Anisotropie über die Quergeschwindigkeit verursachen. Im Abschnitt d.) wird aber gezeigt, daß diese Anisotropie wieder verschmiert ist nach einer Reflektion am Spiegel - jedenfalls im Mittel über die Teilchen, die in Σ Resonanz spüren. Dann ist auch für einen späteren Resonanzdurchgang die Annahme $\partial_{\alpha_0} f_0 \equiv 0$ gerechtfertigt. Aus dem Element $\{V_0, V_0 + dv_{10}\}, \{v_{10}, v_{10} + dv_{10}\}, \{\alpha_0, \alpha_0 + d\alpha_0\}$ passieren während dt die Ebene $z = 0$ pro Flächeneinheit

$$dN = |V_0| \cdot N_0 \cdot f_0(V_0, v_{10}) \cdot v_{10} \cdot dv_{10} \cdot d\alpha_0 \cdot dv_{10} \cdot dt$$

Teilchen. Zusammen mit (32) folgt daraus: Die Zahl $\int N_R$ der Teilchen, die pro Raum- und Zeiteinheit an der Stelle $z = 0$ Resonanz spüren, ist:

$$(33) \quad \int N_R = \frac{zQ}{k} \cdot N_0 \cdot f_0(V_0, v_{10}) \cdot v_{10} \cdot dv_{10} \cdot d\alpha_0$$

Da jedes Teilchen bei einem Resonanzdurchgang die Energie (31) aufnimmt, ist die absorbierte Energie:

$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \delta W \frac{2Q}{k} \cdot N_0 \cdot f_0(v_{10}, v_{10}) \cdot v_{10} \cdot dv_{10} \cdot d\alpha_0$$

Sei jetzt

$$f_0(v_{10}, v_{10}) = g_0(v_{10}) h_0(v_{10}) ; \quad 2\pi \cdot \int_0^{\infty} h_0 \cdot v_{10} \cdot dv_{10} = 1$$

Der Mittelwert einer stetigen Funktion $G(v_{10})$ sei gegeben durch:

$$\langle G \rangle_1 := 2\pi \int_0^{\infty} G \cdot h_0 \cdot v_{10} \cdot dv_{10}$$

Dann ist

$$(34) \quad P = \frac{\pi^2}{16k} \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 E^2 \cdot g_0 \left(\frac{\Omega_0 - \omega}{k} \right) \cdot [1 + b] ; \quad \pi^2 = \frac{4\pi q^2 \cdot N_0}{m}$$

mit

$$(35) \quad b := \left(\frac{\Omega}{\omega} A \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} Q^{\frac{1}{2}} \cdot v_{10} \cdot 2 \cdot \cos(\alpha_0 - \pi/4) \cdot h_0 \cdot v_{10} \cdot dv_{10} \cdot d\alpha_0$$

Da $Q' \gg Q''$, ist $Q^{\frac{1}{2}} \approx Q'^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} Q'^{-\frac{1}{2}} \cdot Q''$

Q' ist nach (19) unabhängig von α_0 , $Q'' = k^2/2\omega \cdot A \cdot v_{10} \cdot \cos \alpha_0$. Damit folgt:

$$(36) \quad b \approx k^2/\Omega \cdot \pi^{-\frac{1}{2}} \cdot \langle (2Q')^{-\frac{1}{2}} \cdot v_{10}^2 \rangle_1 \cdot \frac{1}{2}$$

b hängt über Q' noch von γ ab. Die eingangs aufgestellte Behauptung, daß P unabhängig von γ ist, ist also nur richtig, wenn noch $b \ll 1$ nachgewiesen wird. Das scheint zunächst unmöglich, da $b \rightarrow \infty$ für $\gamma \rightarrow 0$; aber der Grenzübergang $\gamma \rightarrow 0$ ist an dieser Stelle nicht mehr möglich, da durch die Forderung (24), $Q' \gg |Q''|$, ein minimales γ bereits vorgegeben ist. Mit Q' nach (19) ist:

$$b = k^2/\Omega \cdot \pi^{-\frac{1}{2}} \left\langle \gamma^{-\frac{1}{2}} \left(k \cdot \frac{v_{10}^2}{2} + \Omega_0 \cdot |v_{10}| \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot v_{10}^2 \right\rangle_1 \cdot \frac{1}{2}$$

Es ist $|v_{10}| \geq |v_{10}|_{\min} = \gamma \cdot \omega / k^2$. Sei \bar{x}^2 eine reelle Zahl ≥ 1 , dann ist:

$$b = \pi^{\frac{1}{2}} \left\langle \left(\bar{x}^2 + \frac{k^3 c^2}{2\omega \Omega \gamma} \cdot \frac{v_{10}^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{k^3 c^2}{2 \cdot \Omega \cdot \omega^{\frac{1}{2}} \cdot \Omega^{\frac{1}{2}} \gamma} \cdot \frac{v_{10}^2}{c^2} \right\rangle_1$$

Und mit $0 \leq \bar{\beta}^2 < 1$, $\omega \approx \Omega$, $n = kc/\omega$ und $\Gamma := q/2mc$ ist

$$(37) \quad b \approx \left(\bar{x}^2 + \Gamma \cdot \frac{n^3 B_0}{\gamma} \cdot \bar{\beta}^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} \cdot \Gamma \cdot \frac{n^3 \cdot B_0}{\gamma} \cdot \frac{\bar{T}_1}{m \cdot c^2}$$

mit $\bar{T}_1 := m/2 \langle v_{10}^2 \rangle_1$. Es ist $\Gamma_{D^+} \approx 8 \cdot 10^{-8}$ cgs-Einh., $\Gamma_e \approx 3 \cdot 10^{-4}$ cgs-Einh. Für die Ionenzyklotronwellen sind typische experimentelle Werte: $n \leq 10$, $\gamma \approx 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$, $B_0 = 10^3 \text{ G}$. b wird maximal für $\bar{\beta}^2 = 0$ und $\bar{x}^2 = 1$; daraus folgt

$$b < \pi^{-\frac{1}{2}} \cdot \Gamma \cdot \bar{T}_1 / mc^2$$

Da $\Gamma / mc^2 \approx 5 \cdot 10^{-7}$ für $\bar{T}_1 = 1 \text{ keV}$, ist $b_{D^+} \ll 1$. Dagegen kann für Elektronen dieses maximale b größer als 1 werden, wenn \bar{T}_1 hinreichend groß ist. Man müßte die Rechnung relativistisch durchführen, um den tatsächlichen Einfluß dieses Effektes abzuschätzen. Für Ionenzyklotronwellen gilt aber jedenfalls:

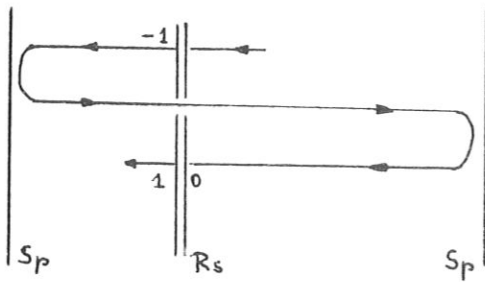
$$(38) \quad P(z) = \frac{\bar{T}_1^2}{16k} \left(\frac{\Omega(z)}{\omega} \right)^2 \cdot E^2 \cdot g_0 \left(\frac{\Omega(z) - \omega}{k} \right)$$

P ist also unabhängig von γ , obwohl die Kohärenzzeit durch die Inhomogenität des Magnetfeldes begrenzt wird.

d.) Die Verschmierung der Verteilungsfunktion

Bei der Berechnung der absorbierten Energie P (34) war angenommen worden, daß die Teilchen, die mit einem bestimmten v_{10} und v_{10} in die Resonanzzone eintreten, über die Phase α_0 gleichverteilt sind. Alle Größen beim Eintritt in die Resonanzzone seien wie zuvor mit dem Index 0 bezeichnet. Nun seien die Teilchen aber bereits vorher einmal durch die Resonanzzone R_s ge-

gangen. Die Größen bei diesem voran gehenden Austritt aus Rs



bekommen den Index -1. Da die Resonanz von der Richtung der thermischen Geschwindigkeit der Teilchen längs \underline{B}_0 abhängt, erreichen die Teilchen erst nach zweimaliger Reflektion am Spiegel (Sp) wieder

die Resonanzzone (Situation 0). f_{-1} sei anisotrop. Da man die Dicke der Resonanzschicht vernachlässigen kann, ist - wegen der Erhaltung von Energie und magnetischem Moment außerhalb Rs. -:

$$(39) \quad v_{n0} = v_{n-1} \quad ; \quad v_{l0} = v_{l-1}$$

Aber es ist im allgemeinen

$$\alpha_{-10} := \alpha_{-1} - \alpha_0 \neq 0$$

α_{-10} ist eine Funktion von v_{n0} und v_{l0} . Wenn t_D die Durchlaufzeit ist (Die Zeit, die zwischen den Situationen -1 und 0 liegt), so ist:

$$\alpha_{-10}(v_{n0}, v_{l0}) = \int_0^{t_D(v_{n0}, v_{l0})} \Omega(z(v_{n0}, v_{l0}, t)) \cdot dt$$

Es ist

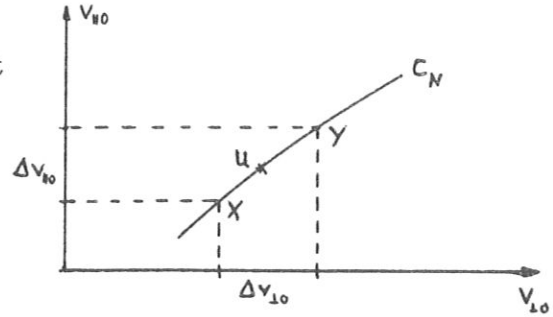
$$(40) \quad f_0(v_{n0}, v_{l0}, \alpha_0) = f_{-1}(v_{n-1}(v_{n0}, v_{l0}, \alpha_0), v_{l-1}(v_{n0}, v_{l0}, \alpha_0), \alpha_0 + \alpha_{-10}) \\ = f_{-1}(v_{n0}, v_{l0}, \alpha_0 + \alpha_{-10})$$

Die angenommene Isotropie von f_0 war bei der Berechnung von P wesentlich für das Verschwinden des Gliedes

$$\int_0^{2\pi} (Q'(v_{n0}, v_{l0}))^{-\frac{1}{2}} 2 \cos(\alpha_0 - \frac{\pi}{4}) v_{l0}^2 \cdot f_0 \cdot d\alpha_0$$

beim Übergang von (35) zu (36); und P war berechnet worden für

einen bestimmten Punkt U des Geschwindigkeitsraumes. Durch U gibt es in der Ebene $\alpha_0 = \text{const.}$ eine Niveaulinie C_N



$$(41) \quad \mathcal{J}(v_{10}, v_{40}) := v_{10}^2 \cdot Q^{p-1/2} = \text{const.}$$

Denn es ist $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial v_{40}} \neq 0$. C_N hängt von α_0 nicht ab. Statt P wird nun der Mittelwert

$$(42) \quad \langle P \rangle_l := \frac{1}{l} \int_X^Y P \cdot dl$$

benutzt. Das Integral ist längs C_N zu nehmen und l ist die Länge des Kurvenstücks von X bis Y. Längs C_N ändert sich aber v_{40} , und der Änderung von v_{10} um Δv_{10} entspricht nach (32) eine Änderung in der Lage der Resonanzstelle um

$$(43) \quad \Delta z_R = \frac{k \cdot |v_{10}|}{2Q} \Delta v_{10}$$

P kann daher nur dann durch den Mittelwert (42) ersetzt werden, wenn Δz_R klein ist gegen die Dicke d_R der Resonanzschicht:

$$(44) \quad \Delta v_{10} \ll \frac{2 \cdot Q}{k \cdot |v_{10}|} \cdot d_R = \frac{2 \cdot Q^{3/2}}{k}$$

(44) ist auch notwendig dazu, daß auf dem Kurvenstück von X bis Y (40) benutzt werden kann. Nun werden die Punkte X und Y so bestimmt, daß bei der Mittelung (42) die Anisotropie wieder verschmiert wird. Nachträglich ist dann zu prüfen, ob für die so bestimmten X und Y die Bedingung (44) erfüllt ist.

Die Anisotropie wird bei der Integration längs C_N verschmiert, wenn

$$(45) \quad \left| \Delta \alpha_{-10} \right| := \left| \alpha_{-10}(X) - \alpha_{-10}(Y) \right| = 2\pi$$

ist. Ersetzt man das Kurvenstück C_N durch ein Tangentenstück im Punkte U, so hat man zur Bestimmung von Δv_{10} die beiden Gleichungen:

$$(46) \quad \frac{\partial J}{\partial v_{10}} \cdot \Delta v_{10} + \frac{\partial J}{\partial v_{110}} \cdot \Delta v_{110} = 0$$

$$(47) \quad \left| \frac{\partial \alpha_{-10}}{\partial v_{10}} \cdot \Delta v_{10} + \frac{\partial \alpha_{-10}}{\partial v_{110}} \cdot \Delta v_{110} \right| = 2\pi$$

Es ist

$$\frac{\partial \alpha_{-10}}{\partial v_{10}} = \Omega_0 \cdot \frac{\partial t_D}{\partial v_{10}} + \int_0^{t_D} \frac{\partial \Omega}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v_{10}} \cdot dt$$

$$\frac{\partial \alpha_{-10}}{\partial v_{110}} = \Omega_0 \cdot \frac{\partial t_D}{\partial v_{110}} + \int_0^{t_D} \frac{\partial \Omega}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v_{110}} \cdot dt$$

mit $z(t) = \frac{v_{10}^2}{4} \cdot \gamma \cdot t^2 + v_{110} \cdot t$

Wenn Rs genau in der Mitte der Spiegelmaschine liegt, ist t_D exakt durch die folgende Definition bestimmt; wenn Rs nicht in der Mitte liegt, ist die Durchlaufzeit größer, die benötigte Differenz Δv_{110} also höchstens kleiner als die unten bestimmte. t_D sei definiert durch:

$$v_{110} + \int_0^{t_D/4} \left(\frac{dv_{110}}{dt} \right) \cdot dt = 0$$

Da außerhalb Rs das magnetische Moment der Teilchen erhalten bleibt, ist:

$$\frac{dv_{110}}{dt} = \frac{v_{10}^2}{2} \cdot \gamma$$

und damit

$$t_D = \frac{8 |v_{110}|}{\gamma \cdot v_{10}^2}$$

Die beiden Gleichungen (46), (47) ergeben das Gleichungssystem:

$$(48) \quad a_{11} \Delta v_{10} + a_{12} \Delta v_{110} = 0$$

$$(49) \quad |a_{21} \Delta v_{10} - a_{22} \Delta v_{110}| = \frac{\pi \cdot \gamma \cdot v_{10}^2}{4 \Omega}$$

mit

$$a_{11} = \frac{v_{10}^2}{4} \cdot k - v_{110} \cdot \Omega \quad ; \quad a_{12} = v_{10}/4 (\Omega - k \cdot v_{110})$$

$$a_{21} = \frac{2v_{110}}{v_{10}} \left(1 + \frac{16}{3} \frac{v_{110}^2}{v_{10}^2} \right); \quad a_{22} = 1 + 4 \frac{v_{110}^2}{v_{10}^2}$$

Und es folgt:

$$(50) \quad |\Delta v_{110}| = A_0^{-1} \frac{\pi \cdot v_{10}^2}{4 \Omega} \cdot \gamma$$

mit

$$A_0 = \left(a_{22} + a_{21} \frac{a_{12}}{a_{11}} \right)$$

$$= \left[\frac{v_{10}^2}{4} k + \frac{v_{110}^2}{2} \cdot k - \frac{v_{110}}{2} \cdot \Omega - v_{110} \cdot \frac{4v_{110}^2}{3v_{10}^2} (2\omega - \Omega) \right] \left[\frac{v_{10}^2}{4} k - v_{110} \cdot \Omega \right]^{-1}$$

Da $v_{110} < 0$ und in dem interessierenden Bereich $2\omega - \Omega \geq 0$ ist, ist $A_0 > 0$. Jetzt ist mit dem Ergebnis (50) noch die Ungleichung

(44) nachzuweisen:

$$1 \ll \frac{2 \cdot Q^{\frac{1}{2}}}{k} \frac{\Omega \cdot 4 \cdot A_0}{\pi \cdot \gamma \cdot v_{10}^2}$$

$$r.S. \geq \left| \frac{k}{\gamma} \right|^{\frac{1}{2}} \frac{4 \cdot \Omega \left(\frac{v_{10}^2}{2} \cdot k + |v_{110}| \cdot \Omega \right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot k^{\frac{3}{2}} \cdot v_{10}^2 \left[\frac{v_{10}^2}{4} \cdot k + |v_{110}| \cdot \Omega \right]}$$

Indem man das Minimum der rechten Seite über v_{110} bestimmt, bekommt man:

$$\frac{2 Q^{\frac{1}{2}}}{k} \frac{\Omega \cdot A_0}{\pi \cdot \gamma \cdot v_{10}^2} \geq \left| \frac{k}{\gamma} \right|^{\frac{1}{2}} \cdot \left| \frac{\Omega}{k \cdot v_{10}} \right| \gg 1$$

wegen $k/\gamma \gg 1$ und $|k v_{10}/\Omega| < 1$.

Im Mittel über eine räumliche Schicht, die dünn ist gegen die Dicke d_R der Resonanzzone, ist die Anisotropie der Geschwindigkeitsverteilung also verschmiert nach einem Durchlauf der Teilchen durch die Maschine.

II. Wellen im heißen, zylindrischen Plasma

Problemstellung und Ergebnis

Es wird ein Plasma betrachtet, das in eine Raumrichtung unendlich ausgedehnt und homogen ist. Diese ausgezeichnete Richtung sei in dem rechtwinkligen, kartesischen Koordinatensystem (x_1, x_2, x_3) die Richtung der x_3 -Achse und des stationären Magnetfeldes \underline{B}_0 . Dagegen soll das Plasma begrenzt sein durch eine zylindrische Plasma-Vakuum-Grenzfläche M_P . Der Schnitt von M_P mit der x_1 - x_2 -Ebene liefere eine (zweimal stetig differenzierbare) Kurve C_P , von der nicht gefordert wird, daß sie geschlossen ist. Das von C_P begrenzte Gebiet sei einfach zusammenhängend. Dann ist es immer möglich, ein krummliniges, rechtwinkliges Koordinatensystem (q_1, q_2, q_3) durch

$$x_1 = x_1(q_1, q_2) \quad ; \quad x_2 = x_2(q_1, q_2) \quad ; \quad x_3 = q_3 =: z$$

so einzuführen, daß M_P der Gleichung $q_1 = \text{const.} = a$ genügt. C_P ist also eine Koordinatenlinie. In Richtung der q_2 -Achse soll das Plasma ebenfalls homogen sein. Die Annahme einer Plasmadichte, die im stationären Gleichgewicht auch von q_1 unabhängig ist, ist mit einer mikroskopischen Beschreibung des Plasmas unverträglich. In ¹¹⁾ werden stationäre, nur von einer Raumrichtung abhängige Gleichgewichte aufgrund der stoßfreien Boltzmann-Gleichung untersucht mit dem Ergebnis: Ein nur durch ein stationäres Magnetfeld im Gleichgewicht gehaltenes Plasma, das den einen Halbraum homogen füllt, geht in das Vakuum im anderen Halbraum über in einer Schicht, deren Dicke J von der Ordnung des thermischen Gyroradius' der Ionen ist.

Der Einfluß dieser Randschicht sei im Folgenden vernachlässigt. Zur Rechtfertigung dieser Vernachlässigung müssen zwei Annahmen gemacht werden. Es wird die Ausbreitung von Wellen

einer gegebenen Kreisfrequenz ω untersucht. Die Berücksichtigung der inhomogenen Randschicht würde eventuell zum Auftreten von "universellen" Instabilitäten führen. Es wird angenommen, daß die Anwachsraten dieser Instabilitäten sehr klein sind gegenüber der angeregten Frequenz ω . Die zweite Annahme ist erforderlich für die Berücksichtigung der Randbedingungen. Sie werden in II.2 aufgestellt für ein bis an die Grenzfläche M_p homogenes Plasma. Die Randbedingungen sind dann Sprungbedingungen an der Diskontinuitätsfläche M_p . Das scheint gerechtfertigt, wenn \int , also der Ionengyroradius r_{gi} , klein ist gegenüber der Dimension des Plasmas in q_1 -Richtung und gegenüber der Wellenlänge, und zwar der Wellenlänge sowohl normal wie auch tangential zu M_p . Letzteres muß man fordern wegen der Oszillationen der Grenzfläche während der Wellenausbreitung.

Längs der x_3 -Achse sei ein homogenes Magnetfeld B_0 angelegt, dessen Stärke gemäß der Gleichgewichtsbedingung $p_{o1} + B_0^2 / 8\pi = B_0^2 / 8\pi$ an der Grenzfläche M_p einen Sprung hat (Ein oberer Index p kennzeichne die Größen im Plasma, ein oberer Index v die Größen in der Vakuumregion, ein unterer Index o alle Größen im stationären, wellenfreien Zustand.) Im Gleichgewicht sei das Plasma stromlos und neutral. In der Ebene $x_3 = z_0$ werde ein elektromagnetisches Feld erregt, das sich zeitlich sinusförmig mit der Kreisfrequenz ω ändert. Die Amplitude dieses Feldes sei so klein, daß eine Linearisierung in den Komponenten des Feldes wie in allen von ihm verursachten Abweichungen von den Gleichgewichtsgrößen des Plasmas erlaubt ist. Abschnitt II.1 beschäftigt sich mit der Berechnung der Wellenausbreitung im Plasma, während in II.2 Randbedingungen angegeben werden, die das Wellenfeld eindeutig bestimmen.

Sei $\tilde{E}^p(\underline{r}) \cdot e^{-i\omega t}$ das elektrische, $\tilde{B}^p(\underline{r}) \cdot e^{-i\omega t}$ das magnetische Feld der Welle, dann hat auch die Stromdichte \underline{j} die Form $\tilde{j}(\underline{r}) \cdot e^{-i\omega t}$. Das Wellenfeld im Plasma ist bestimmt durch die

Maxwell'schen Gleichungen

$$(1) \quad \text{rot } \underline{\tilde{E}}^p = \frac{i \cdot \omega}{c} \cdot \underline{\tilde{B}}^p$$

$$(2) \quad \text{rot } \underline{\tilde{B}}^p = \frac{4\pi}{c} \underline{\tilde{j}} - \underline{\tilde{E}}^p \cdot \frac{i \cdot \omega}{c}$$

wobei \underline{j} in der verwendeten mikroskopischen Beschreibung des Plasmas gegeben ist durch

$$(3) \quad \underline{j}(\underline{r}, t) = \sum_{\alpha} N_{0\alpha} q_{\alpha} \delta_{\alpha} \int \underline{u} \cdot f_{\alpha}(\underline{r}, \underline{u}, t) d^3u$$

Der Index α möge immer die Teilchensorten des Plasmas kennzeichnen; q_{α} sei der Betrag, δ_{α} das Vorzeichen der Ladung eines Teilchens der α -Sorte, f_{α} die Verteilung dieser Teilchen im Phasenraum. (Die Komponenten von \underline{u} sind an jedem Punkt des Ortsraumes auf das gleiche Achsensystem zu beziehen wie die Komponenten von \underline{E}^p und \underline{B}^p .) f_{α} sei so normiert, daß die Zahl der Teilchen pro Volumeneinheit am Ort \underline{r} gegeben ist durch:

$$(4) \quad N_{\alpha}(\underline{r}, t) = N_{0\alpha} \cdot \int f_{\alpha}(\underline{r}, \underline{u}, t) d^3u$$

Darin ist $N_{0\alpha}$ die mittlere räumliche Dichte der betrachteten Teilchensorte. f_{α} ist aus den Wlassow-Gleichung zu berechnen.

In den kartesischen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) kann man das Wellenfeld im Plasma natürlich immer beschreiben durch Überlagerung ebener harmonischer Wellen:

$$(5) \quad \underline{\tilde{E}}^p(\underline{r}) = \underline{E}^0 e^{i \cdot \underline{k} \cdot \underline{r}}$$

Die Ausbreitung ebener, harmonischer Wellen in einem homogenen, heißen Plasma wurde in der mikroskopischen Beschreibung bereits in ¹²⁾ und ¹³⁾ berechnet. Dabei werden die Rechnungen wesentlich vereinfacht durch zwei Eigenschaften der ebenen, harmonischen Wellen:

- α) Für Felder der Form (5) hat auch $\text{rot } \underline{\tilde{E}}^p(\underline{r})$ die gleiche Ortsabhängigkeit wie $\underline{\tilde{E}}^p(\underline{r})$. D.h.: auch für $\underline{\tilde{B}}^p(\underline{r})$ ist der Ansatz $\underline{B}^0 \cdot e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}}$ möglich.
- β) Für Felder der Form (5) hat auch das nach (3) unter Benutzung von (1), α) und der Wlassow-Gleichung berechnete $\underline{\tilde{j}}(\underline{r})$ die gleiche Ortsabhängigkeit wie $\underline{\tilde{E}}^p(\underline{r})$.

Wie in II.1.a näher ausgeführt wird, bekommt man aus der Lösung der linearisierten Wlassow-Gleichung zusammen mit (3) die Stromdichte \underline{j} in der Form einer Integralgleichung

$$(6) \quad \underline{j}(\underline{r}, t) = \left\{ \int \underline{K}_1(\underline{r}, \hat{r}) \cdot \underline{\tilde{E}}^p(\hat{r}) d\hat{r} + \int \underline{K}_2(\underline{r}, \hat{r}) \cdot \underline{\tilde{B}}^p(\hat{r}) d\hat{r} \right\} e^{-i\omega t}$$

\underline{j} hat also die gewünschte Zeitabhängigkeit, während seine Ortsabhängigkeit im allgemeinen eine andere sein wird als die von $\underline{\tilde{E}}^p(\underline{r})$.

Die Gleichungen (1) und (2) führen also im allgemeinen auf ein System von Integrodifferentialgleichungen. Im Fall ebener Wellen aber garantieren die Eigenschaften α) und β) gerade die Existenz eines räumlich und zeitlich konstanten Leitfähigkeits-tensors $\underline{\underline{\epsilon}}$ mit

$$\underline{j}^0 = \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{E}^0,$$

so daß die Gleichungen (1) und (2) nur noch auf Differentialgleichungen führen, die sich mit dem Ansatz (5) schließlich auf ein homogenes, lineares, algebraisches Gleichungssystem für die Komponenten von \underline{E}^0 reduzieren.

Die Möglichkeit dieses einfachen Lösungsweges beruht also wesentlich auf den Eigenschaften α.) und β), die bisher nur für ebene Wellen nachgewiesen wurden. Andererseits aber bringt die

Darstellung des gesuchten Wellenfeldes durch Superposition ebener Wellen, wenn die (q_k) nicht selbst kartesisch sind d.h. C_p keine Gerade ist, zwei Nachteile mit sich. Erstens ist die Form der Randbedingungen, die durch geeignete Überlagerung ebener Wellen noch zu erfüllen sind, in kartesischen Koordinaten komplizierter als in den der Geometrie angepaßten Koordinaten (q_k) . Zweitens: Wenn die Anregung der Welle so erfolgt, daß in den Koordinaten (q_k) gewisse Symmetrien herrschen, so gehen diese Symmetrien verloren bei der Beschreibung in kartesischen Koordinaten. Nun ist es geläufig bei der Beschreibung einer ebenen Welle in einem unendlichen Medium das kartesische Koordinatensystem so zu wählen, daß der Ausbreitungsvektor der Welle in einer Koordinatenebene liegt, so daß man es tatsächlich nur mit einem "zweidimensionalen" (soll heißen: nur von zwei Koordinaten abhängigen) Problem zu tun hat. Wenn man sich auf ein analoges, nur von q_1 und q_3 abhängendes Problem beschränkt, so würde die Beschreibung durch ebene Wellen dieses zweidimensionale Problem wieder in ein dreidimensionales überführen.

Man wird also versuchen, ein vollständiges Funktionensystem $\tilde{\underline{E}}^p(\underline{r}) = \underline{E}^o(q_k) \cdot \exp(ikz)$ zu finden, das die zu α) und β) analogen Eigenschaften besitzt. Zunächst aber führt die Forderung der "Zweidimensionalität", d.h.: daß mit $\tilde{\underline{E}}^p(\underline{r})$ auch $\tilde{\underline{B}}^p(\underline{r})$ nur eine Funktion von q_1 und q_3 ist, zu einer Einschränkung der möglichen Koordinatensysteme. In II.1.b wird gezeigt: Im obigen Sinne zweidimensionale elektromagnetische Felder sind nur möglich in kartesischen und in kreiszylindrischen Koordinaten. Für Kreiszyylinderkoordinaten (s, φ, z) wird das gestellte Problem dann weiter behandelt. Das gesuchte Feld $\tilde{\underline{E}}^p(\underline{r})$ ist:

$$(7) \quad \tilde{\underline{E}}^p(\underline{r}) = \begin{pmatrix} \tilde{E}_s^p(s, z) \\ \tilde{E}_\varphi^p(s, z) \\ \tilde{E}_z^p(s, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_s^o J_1(k_1 \cdot s) \\ E_\varphi^o J_1(k_1 \cdot s) \\ E_z^o J_0(k_1 \cdot s) \end{pmatrix} e^{ikz}$$

Die Eigenschaft α) ist für dieses Feld bekannt, β) wird nachgewiesen. Durch

$$(8) \quad \underline{\underline{\epsilon}}(k_{\perp}, k, \omega) \cdot \underline{E}^{\circ} := \frac{4\pi i}{\omega} \cdot \underline{j}^{\circ} + \underline{E}^{\circ}$$

ist der Dielektrizitätstensor $\underline{\underline{\epsilon}}$ definiert. Wie im Fall ebener Wellen führen die Gleichungen (1) und (2) auf ein algebraisches Gleichungssystem

$$(9) \quad \underline{\underline{L}} \cdot \underline{E}^{\circ} = 0$$

$$(10) \quad \underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} -n_z^2 + \epsilon_{ss} & \epsilon_{sy} & i n_{\perp} n_z + \epsilon_{sz} \\ \epsilon_{ys} & -n_z^2 + \epsilon_{yy} - n_{\perp}^2 & \epsilon_{yz} \\ -i n_{\perp} n_z + \epsilon_{zs} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} - n_{\perp}^2 \end{pmatrix}$$

mit $n_z = kc/\omega$ und $n_{\perp} = k_{\perp}c/\omega$. Die Komponenten von $\underline{\underline{\epsilon}}$ werden in 1. berechnet. Sie stehen in einfachem Zusammenhang mit den Komponenten des Dielektrizitätstensors für ebene, harmonische Wellen.

Die Beschreibung des Plasmas mit der stoßfreien Boltzmann-Gleichung setzt voraus, daß die Frequenz ω sehr groß ist gegenüber allen Stoßfrequenzen. Außerdem muß noch gefordert werden¹⁴⁾, daß die Zahl der Teilchen im Debye-Volumen groß ist:

$$N_{oe} \cdot \lambda_D^3 := N_{oe} \left(\frac{\langle v_e^2 \rangle_{av}}{3 v_e^2} \right)^{3/2} \gg 1$$

$\langle v_e^2 \rangle$ ist das mittlere Geschwindigkeitsquadrat der Elektronen. Da weiter nur klassische, nicht-relativistische Gleichungen verwendet werden, muß noch gelten:

$$\hbar \pi_{\alpha} \ll \frac{m_{\alpha}}{2} \langle v_{\alpha}^2 \rangle_{av} \ll m_{\alpha} \cdot c^2$$

Darüber hinaus werden an Frequenz der Welle und Temperatur der Plasmakomponenten zunächst keine einschränkende Forderungen gestellt.

Dadurch unterscheidet sich die hier gegebene Aufstellung des Dielektrizitätstensors für Wellen im heißen, kreiszylindrischen Plasma von der in ³⁾ durchgeführten. CHANDRASEKAR u.A. ³⁾ gehen zwar ebenfalls von der Wlassow-Gleichung aus, benutzen aber von vornherein die Näherungsannahmen $\omega^2 \ll \Pi_\alpha^2$ und $\omega^2 \ll \Omega_\alpha^2$. Sie beschränken sich also auf den Fall hoher Dichte und starken Magnetfeldes, während für den hier speziell interessierenden Fall der Zyklotronwellen $\omega^2 \approx \Omega_\alpha^2$ ist und für die Elektronenzyklotronwelle in den meisten Experimenten auch $\omega^2 \approx \Pi_e^2$ gilt. Allein mit der Annahme $\xi_\alpha := \omega^2 / \Omega_\alpha^2 \ll 1$ kommt eine Näherung aus, die in ¹⁷⁾ durchgeführt wird. Für die Berücksichtigung der Randbedingungen in II.2. wird gefordert:

$$(11) \quad \gamma_\alpha := \frac{1}{2} r_{g\alpha}^2 \cdot k_\perp^2 \ll 1$$

und

$$\eta_\alpha := r_{g\alpha}^2 \cdot k^2 \ll 1$$

Die Forderung $\eta_\alpha \ll 1$ ist schwächer als $\xi_\alpha \ll 1$, weil

$$\eta_\alpha = \frac{v_{th,\alpha}^2}{\Omega_\alpha^2} \cdot k^2 = \frac{v_{th,\alpha}^2}{(\omega/k)^2} \cdot \xi_\alpha$$

ist und die Phasengeschwindigkeit der Zyklotronwellen von der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit ist.

Als Randbedingungen werden in II.2. die Sprungbedingungen benutzt, die man aus den ersten 4 Momenten der Wlassow-Gleichung erhält. Dabei wird der Drucktensor

$$(12) \quad P_{\alpha\kappa} = \sum_\alpha N_{0\alpha} \cdot m_\alpha \int (v_\kappa - \langle v_\kappa \rangle) (v_\epsilon - \langle v_\epsilon \rangle) \cdot f_\alpha \cdot d^3v$$

berechnet mit Hilfe der bereits bei der Berechnung des Dielektrizitätstensors benutzten Lösung f_α der Wlassow-Gleichung. Entwickelt man die Elemente sowohl des $\underline{\underline{\xi}}$ -Tensors als auch des $\underline{\underline{P}}$ -Tensors nach Potenzen von γ_α , dann zeigt sich, daß in niedrigster Ordnung in γ_α durch die gewählten Randbedingungen das Wellenfeld im Plasma bestimmt ist. Natürlich sind nur die makroskopischen Größen bestimmt, während f_α in den Gliedern von höherer Ordnung im Gyroradius willkürlich ist. Die Dispersionsbeziehung ist die Bedingung für das Verschwinden einer 5×5 -Determinante, die sich im allgemeinen nur numerisch lösen läßt. Beschränkt man sich auf kleiner Gültigkeitsbereiche, dann vereinfacht sich die Dispersionsbeziehung wesentlich. Als Beispiel wird die Dispersionsgleichung für das "magnetosonic regime" ($\gamma_\alpha \ll 1$, $\xi_\alpha \ll 1$) angegeben.

1. Der Dielektrizitätstensor

a.) Formale Lösung der Wlassow-Gleichung

Die Wlassow-Gleichung, deren Lösung f_α zur Berechnung der Stromdichte \underline{j} nach (3) benötigt wird, lautet, wenn f_α eine Funktion beliebiger vollständiger Koordinaten im μ -Raum und der Zeit t ist:

$$(13) \quad \frac{df_\alpha}{dt} = 0$$

Dabei ist die zeitliche Ableitung zu nehmen längs der Bahn eines Teilchens der α -Sorte im Phasenraum. Jetzt seien $(q_1, q_2, q_3=z)$ beliebige krummlinige, rechtwinklige Zylinderkoordinaten im Ortsraum; dann kann man im Geschwindigkeitsraum immer ein kartesisches Koordinatensystem einführen, dessen Achsen an jedem Punkt des Ortsraums Tangenten an die Koordinatenlinien $q_i = \text{const.}$ sind. Die q_i gingen aus den rechtwinkligen, kartesischen Koordinaten x_k hervor durch $x_1 = x_1(q_1, q_2)$, $x_2 = x_2(q_1, q_2)$, $x_3 = q_3 = z$. Die Funktionen $x_1(q_1, q_2)$ und $x_2(q_1, q_2)$ seien zweimal stetig partiell differenzierbar (Bezeichnungsweise für Ableitungen nach q_i : $\frac{\partial x_k}{\partial q_i} =: x_{kii}$). Wenn die Grenzkontur C_p geschlossen ist, dann haben die Koordinatenflächen $q_i = \text{const.}$ notwendig eine Schnittgerade, die Achse. Außerhalb dieser Achse sei

$$Q_i^{-2} := \sum_{k=1}^3 x_{kii}^2 > 0$$

Falls C_p nicht geschlossen ist, gelte $Q_i^{-2} > 0$ überall. Zwischen den Komponenten v_i des Geschwindigkeitsvektors \underline{u} in den zu den q_i gehörigen kartesischen Koordinaten im Geschwindigkeitsraum und den Komponenten w_k von \underline{u} in den zu den x_k gehörenden Koordinaten besteht dann der Zusammenhang:

$$v_i = Q_i^{-1} \frac{dq_i}{dt} = Q_i^{-1} \sum_k \frac{\partial q_i}{\partial x_k} \cdot \frac{dx_k}{dt} =: \sum_k \alpha_{ik} w_k$$

$$\alpha_{ik} = Q_i^{-1} \frac{\partial q_i}{\partial x_k}$$

$$\text{Det}(\alpha_{ik}) = (Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3)^{-1} \frac{\partial(q_1, q_2, q_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = 1$$

Insbesondere ist:

$$V_3 = W_3 =: V_z$$

$$V_1^2 = (V_1^2 + V_2^2) = (W_1^2 + W_2^2)$$

In den Koordinaten q_i hat der räumliche Gradient $\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \psi$ die Komponenten $(Q_i \cdot \psi_{,i})$, während im Geschwindigkeitsraum der Gradient natürlich die Komponenten $\frac{\partial \psi}{\partial v_i}$ hat. Dann lautet die Wlassow-Gleichung (13): (Der Index α wird in Gleichungen, die für alle Teilchensorten gelten, jetzt weggelassen, der Index p ebenfalls, da in II.1. nur von Feldern im Plasma die Rede ist.)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{dq_i}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_i} + \sum_i \frac{dw_i}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial w_i} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{1}{Q_i} \frac{dq_i}{dt} \right) Q_i \cdot \frac{\partial f}{\partial q_i} + \sum_i \frac{dw_i}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial w_i} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) f + \left(\frac{d\underline{u}}{dt} \cdot \nabla_{\underline{u}} \right) f = 0$$

Es sei

$$m \cdot \frac{d\underline{u}}{dt} = \underline{K}_0 + \underline{\tilde{K}}$$

Darin enthält \underline{K}_0 die Lorentzkraft des Gleichgewichtsfeldes und die in den krummlinigen Koordinaten auftretenden Scheinkräfte, während $\underline{\tilde{K}}$ die Lorentzkraft des Wellenfeldes ist:

$$(14) \quad \underline{\tilde{K}}(\underline{r}, \underline{u}, t) = \left(\frac{\delta \cdot q}{c} [\underline{u} \times \underline{\tilde{B}}(\underline{r})] + \delta \cdot q \cdot \underline{\tilde{E}}(\underline{r}) \right) e^{-i\omega t}$$

Die Verteilungsfunktion f wird zerlegt in die Gleichgewichtsverteilung $f_0(\underline{u})$ die im Plasma nach Voraussetzung nicht vom Ort abhängt, und einen Anteil $\tilde{f}(\underline{r}, \underline{u}, t)$, der klein ist gegen f_0 in

dem Sinne, daß gilt:

$$(15) \quad \langle \underline{\tilde{K}} \cdot \nabla_{\underline{u}} \cdot f_0 \rangle_{av} \gg \langle \underline{\tilde{K}} \cdot \nabla_{\underline{u}} \tilde{f} \rangle_{av}$$

Der Mittelwert ist gebildet über den Geschwindigkeitsraum mit einer beliebigen stetigen Gewichtsfunktion. f_0 ist Lösung der Wlassow-Gleichung für das Gleichgewicht

$$(\underline{K}_0 \cdot \nabla_{\underline{u}}) f_0 = 0$$

Mit der durch (15) gerechtfertigten Vernachlässigung lautet dann die Wlassow-Gleichung:

$$(16) \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla_{\underline{r}}) \cdot \tilde{f} + \frac{1}{m} (\underline{K}_0 \cdot \nabla_{\underline{u}}) \cdot \tilde{f} = - \frac{1}{m} (\underline{\tilde{K}} \cdot \nabla_{\underline{u}}) \cdot \tilde{f}$$

Nach der Charakteristikenmethode folgt als Lösung von (16):

$$(17) \quad \tilde{f} = - \frac{1}{m} \int_{-\infty}^t \underline{\tilde{K}}(\underline{r}', \underline{u}', t') \cdot \nabla_{\underline{u}} f_0(\underline{u}) \Big|_{\underline{u}=\underline{u}'} \cdot dt' + \tilde{f}^{(h)}$$

$\tilde{f}^{(h)}$ ist eine sich aus den Anfangsbedingungen zur Zeit $t = -\infty$ entwickelnde Lösung des homogenen Teils von (16). Da hier das Interesse auf der Lösung für den eingeschwungenen, quasistationären Zustand liegt, wird $\tilde{f}^{(h)}$ vernachlässigt. $\underline{r}'(\underline{r}, \underline{u}, t')$, $\underline{u}'(\underline{r}, \underline{u}, t')$ sind die Charakteristiken der Gleichung (16); sie sind identisch mit der Teilchenbahn im Phasenraum unter dem Einfluß des Gleichgewichtsfeldes \underline{B}_0 , die gegeben ist durch das Differentialgleichungssystem:

$$(18) \quad \frac{d}{dt'} \underline{r}' = \underline{u}' \quad ; \quad \frac{d}{dt'} \underline{u}' = \frac{1}{m} \underline{K}_0(\underline{r}')$$

mit den Anfangsbedingungen: $\underline{u}'(t'=t) = \underline{u}$, $\underline{r}'(t'=t) = \underline{r}$. Gestrichene Größen mögen im Folgenden immer Funktionen bezeichnen, deren Argument längs der Charakteristik zu nehmen ist. In kartesischen Koordinaten ist die Gleichgewichtsverteilung f_0 be-

kanntlich eine Funktion nur von w_1^2 und w_z ; da aber $v_1^2 = w_1^2$ und $v_z = w_z$, ist f_0 auch nur eine Funktion von v_1^2 und v_z , oder allgemein:

$$f_0 = f_0(u_1^2, u_{||})$$

Dann ist

$$\nabla_{\underline{u}_1} \cdot f_0 = \underline{u}_1 \cdot \frac{\partial f_0}{\partial u_1^2} = : u_1 \cdot f_{01}$$

$$\nabla_{u_{||}} \cdot f_0 = : e_z \cdot f_{0z}$$

\underline{e}_z ist ein Einheitsvektor in z-Richtung. Sei ferner

$$\nabla_{\underline{r}_\perp} := \left(a_1 \cdot \frac{\partial}{\partial q_1} ; a_2 \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} ; 0 \right)$$

$$F_1 := f_{01} + \frac{k}{\omega} (f_{0z} - v_z \cdot f_{01})$$

$$F_2 := f_{0z} - v_z \cdot f_{01}$$

$$\gamma := kz - \omega t$$

dann folgt mit (1) und dem Ansatz $\check{\underline{E}}(\underline{r}) = \underline{E}(q_1) e^{i k z}$ aus (14)

$$(\check{\underline{K}} \cdot \nabla_{\underline{u}}) f_0 = \delta \cdot q \cdot e^{i \gamma} \left\{ (\underline{E}_\perp \cdot \underline{u}_1) \cdot F_1 + E_z \cdot f_{0z} + \frac{i}{\omega} (\underline{u}_1 \cdot \nabla_{\underline{r}_\perp}) \cdot E_z \cdot F_2 \right\}$$

Da die Lorentzkraft des Gleichgewichtsfeldes keine z-Komponente hat, ist $\underline{u}'_{||} = \underline{u}_{||}$, und da das Gleichgewichtsfeld nur ein Magnetfeld ist, $u_1'^2 = u_1^2$, also $f'_0 = f_0$, $F'_1 = F_1$, $F'_2 = F_2$, $f'_{0z} = f_{0z}$. Führt man dann noch $\tau = (t - t')$ in (17) als neue Integrationsvariable ein und beachtet

$$z' = z - v_z (t - t') = z - v_z \cdot \tau,$$

so folgt aus (17) als formale Lösung der Wlassow-Gleichung in

beliebigen rechtwinkligen Zylinderkoordinaten: $\hat{\varphi} := (\omega - k \cdot v_2)$

$$(19) \quad \tilde{f}(r, y, t) = - \frac{j \cdot q}{m} e^{i\varphi} \int_0^{\infty} \left\{ (\underline{E}'_1 \cdot \underline{u}_1) \cdot F_1 + E'_z \cdot f_{0z} + \frac{i}{\omega} (\underline{u}_1 \cdot \underline{\nabla}_r)' E'_z \cdot F_2 \right\} e^{i\hat{\varphi}\tau} d\tau$$

Die so gewonnene Integraldarstellung für \tilde{f} ist zunächst sicher nur gültig für $\text{Im } \omega > 0$ und $\text{Im } k = 0$, da andernfalls das Integral divergiert. Man kann auch noch $\text{Im } \omega = 0$ zulassen, wenn man wie in ¹²⁾ ein formales Stoßglied in der Boltzmann-Gleichung mit berücksichtigt. Die sich später ergebenden Komponenten des Dielektrizitätstensors erweisen sich als analytisch fortsetzbar von der reellen Achse aus in der komplexen Ebene sowohl für k als auch für ω . Nimmt man die Lösbarkeit des gestellten Problems für komplexe Werte von k und ω an, so muß die analytische Fortsetzung diese Lösungen darstellen. Bei der Berechnung des $\underline{\epsilon}$ -Tensors beschränken wir uns auf solche Werte von ω und k , für die das Integral (19) konvergiert. Die Auswertung der daraus gewonnenen Dispersionsbeziehung kann dann für beliebiges ω und k erfolgen.

b.) Die Auszeichnung des kreiszylindrischen Falles

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der schon eingangs Kapitel II. erwähnten Behauptung, daß die Forderung der "Zweidimensionalität" unter allen Zylinderkoordinaten die ebenen und die kreiszylindrischen Koordinaten auszeichnet. Es wird also der Beweis geliefert für folgenden Satz: Es seien

$x_1 = x_1(q_1, q_2)$, $x_2 = x_2(q_1, q_2)$ zweimal stetig partiell differenzierbare Funktionen von q_1 und q_2 , $x_3 = q_3$:

i.) $Q_i^{-2} := \sum_{k=1}^3 x_{ki}^2 \neq 0$ fast überall $i = 1, 2, 3$

ii.) $x_{111} \cdot x_{112} + x_{211} \cdot x_{212} \equiv 0$ (Orthogonalität)

Sei \underline{n}_i die Normale der Fläche $q_i = \text{const.}$ in Richtung wachsender q_i . Die Komponenten $V_i(\underline{r})$ des Vektorfeldes $\underline{V}(\underline{r})$ seien: $V_i(\underline{r}) = \underline{V}_i(\underline{r}) \cdot \underline{n}_i(\underline{r})$. Gibt es dann zweimal stetig differenzierbare Funktionen $E_i(q_1)$ und $B_i(q_1)$ mit $\prod_{i=1}^3 \frac{dE_i}{dq_1} \neq 0$ derart, daß durch die Felder

iii.)

$$\underline{E} = \begin{pmatrix} E_1(q_1) \\ E_2(q_1) \\ E_3(q_1) \end{pmatrix} \cdot e^{i(kz - \omega t)}$$

iv.)

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} B_1(q_1) \\ B_2(q_1) \\ B_3(q_1) \end{pmatrix} \cdot e^{i(kz - \omega t)}$$

die Maxwellsche Gleichung

$$c \cdot \text{rot } \underline{E} = -\dot{\underline{B}}$$

erfüllt ist, so sind die q_i entweder kartesische oder kreis-
zylindrische Koordinaten.

Beweis: Wegen $Q_3 = 1$ und $Q_{1|3} = Q_{2|3} = 0$ ist:

$$\text{rot } \underline{E} = \begin{pmatrix} -ik \cdot E_2 \\ ik E_1 - Q_1 \frac{\partial}{\partial q_1} E_3 \\ Q_1 Q_2 \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{E_2}{Q_2} \right) - Q_1 Q_2 E_1 \frac{\partial}{\partial q_2} \frac{1}{Q_1} \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}$$

Wegen $B_{2|2} \equiv 0$ ist Q_1 also nur eine Funktion von q_1 :

$$Q_1^{-2} := x_{111}^2 + x_{211}^2 = S^2(q_1) \quad (\text{b1})$$

Dann ist $B_{3|2} \equiv 0$ nur, wenn Q_2 Produkt aus einer Funktion von q_1 und einer von q_2 ist:

$$Q_2^{-2} := x_{112}^2 + x_{212}^2 = T^2(q_1) \cdot U^2(q_2) \quad (\text{b2})$$

mit $T \cdot S \cdot U \neq 0$ fast überall. Aus (b1) und (b2) folgt

$$x_{111} \cdot x_{11112} + x_{211} \cdot x_{21112} = 0 \quad (b3)$$

$$x_{112} \cdot x_{11211} + x_{212} \cdot x_{21211} = T \cdot \frac{\partial T}{\partial q_1} \cdot U^2$$

(b3) wird als lineares Gleichungssystem für die gemischten zweiten Ableitungen aufgefaßt. Sei zunächst $\frac{\partial T}{\partial q_1} \equiv 0$. Dann kommen zwei Fälle in Betracht: Hat (b3) die triviale Lösung $x_{11112} = x_{21112} \equiv 0$, dann sind die q_1 kartesische Koordinaten. Hat (b3) eine nicht-triviale Lösung, so ist notwendig

$$x_{111} \cdot x_{212} - x_{112} \cdot x_{211} = 0$$

Mit ii.) $x_{111} \cdot x_{112} + x_{211} \cdot x_{212} = 0$

folgt dann

entweder $x_1 = x_1(q_1)$ und $x_2 = x_2(q_1)$. Ausgeschlossen, da $Q_2^{-2} \equiv 0$ wäre!
 oder $x_1 = x_1(q_2)$ und $x_2 = x_2(q_2)$. Ausgeschlossen, da $Q_1^{-2} \equiv 0$ wäre!

Sei jetzt $\frac{\partial T}{\partial q_1} \neq 0$. Dann ist $x_{11112} = x_{21112} \equiv 0$ nach (b3) unmöglich. x_1 und x_2 sind also beide Funktionen der beiden Variablen q_1 und q_2 . Aus (b1) folgt

$$x_{111} = S(q_1) \cdot \cos G_1(q_1, q_2) \quad \text{mit} \quad \frac{\partial G_1}{\partial q_2} \neq 0 \text{ fast überall}$$

$$x_{211} = S(q_1) \sin G_1(q_1, q_2)$$

Aus (b2)

$$x_{112} = -T(q_1) \cdot U(q_2) \sin G_2(q_1, q_2)$$

$$x_{212} = T(q_1) U(q_2) \cdot \cos G_2(q_1, q_2)$$

Da $S \cdot T \cdot U \neq 0$ fast überall, folgt aus ii.)

$$-\cos G_1 \cdot \sin G_2 + \sin G_1 \cdot \cos G_2 \equiv 0 \quad \text{also } G_1 = G_2 =: G$$

Durch Gleichsetzen der gemischten zweiten Ableitungen folgen

$$-U \cdot \frac{\partial T}{\partial q_1} \sin G + U \cdot T \cdot \frac{\partial G}{\partial q_1} \cos G = -S \cdot \frac{\partial G}{\partial q_2} \sin G$$

$$U \cdot \frac{\partial T}{\partial q_1} \cdot \cos G - U \cdot T \cdot \frac{\partial G}{\partial q_1} \sin G = S \cdot \frac{\partial G}{\partial q_2} \cdot \cos G$$

Wegen $\frac{\partial G}{\partial q_2} \neq 0$ fast überall folgt daraus notwendig:

$$\frac{\partial G}{\partial q_1} \equiv 0 \quad ; \quad S = \frac{\partial \Gamma}{\partial q_1} \quad ; \quad U = \frac{\partial G}{\partial q_2}$$

Daraus folgt $\frac{\partial \Gamma}{\partial q_1} \neq 0$ fast überall und die einzige Lösung ist in diesem Fall (bis auf Integrationskonstanten)

$$x_1 = \Gamma(q_2) \cdot \cos G(q_2)$$

$$x_2 = \Gamma(q_2) \sin G(q_2)$$

Also sind die q_i kreiszylindrische Koordinaten.

c.) Berechnung des Dielektrizitätstensors

Nachdem im vorangehenden Abschnitt gezeigt wurde, daß elektromagnetische Felder, die nur von zwei rechtwinkligen Zylinderkoordinaten abhängen, nur in kartesischen oder kreiszylindrischen Koordinaten möglich sind, beschränken wir uns von nun an auf den Fall kreiszylindrischer Koordinaten (s, φ, z) . Dann ist $Q_1 = 1$, $Q_2 = s^{-1}$, $Q_3 = 1$ und mit dem Ansatz (7) wird die Lösung der Wlassow-Gleichung (19):

$$(19) \quad \tilde{f}(s, z, v_s, v_\varphi, v_z, t) = -\frac{f_0}{m} e^{i\psi} \int_0^{\alpha} \left\{ (E_s^\circ v_s' + E_\varphi^\circ v_\varphi') \cdot J_1(k_2 \cdot s') \cdot F_1 + E_z^\circ \left(\int_0^{\alpha} (k_2 \cdot s') \cdot f_{0z} - \frac{ik_z}{\omega} v_s' \int_1(k_2 \cdot s') \cdot F_2 \right) \right\} e^{i(\omega - kv_z)t} dt$$

Es soll nun gezeigt werden, daß es für das Feld (7) einen Dielektrizitätstensor gibt. Dafür ist notwendig und hinreichend: Für jede Teilchensorte haben die Geschwindigkeitsmomente

$$\langle \underline{v} \rangle := \int \underline{v} \cdot \tilde{f}_\alpha \, d^3v$$

die Orts- und Zeitabhängigkeit

$$(20) \quad \langle \underline{v} \rangle_{\alpha} = \begin{pmatrix} \langle v_s^0 \rangle_{\alpha} \cdot J_1(k_1, s) \\ \langle v_y^0 \rangle_{\alpha} \cdot J_1(k_1, s) \\ \langle v_z^0 \rangle_{\alpha} \cdot J_0(k_1, s) \end{pmatrix} e^{i\psi}$$

Und es gibt einen von Ort und Zeit unabhängigen Beweglichkeitstensor $\underline{M}^{(\alpha)}$, so daß gilt

$$(20') \quad \langle \underline{v}^0 \rangle_{\alpha} = \frac{c}{B_0} \underline{M}^{(\alpha)} \cdot \underline{E}^0$$

Nach (8) und (3) ist dann der Dielektrizitätstensor

$$(21) \quad \underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{1}} + i \sum_{\alpha} \frac{d_{\alpha} \cdot \overline{\Pi}_{\alpha}^2}{\omega \cdot \Omega_{\alpha}} \cdot \underline{M}^{(\alpha)} \quad \overline{\Pi}_{\alpha}^2 = \frac{4\pi N_{0\alpha} \cdot q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}}$$

Wir beschränken uns auf die Berechnung des Beweglichkeitstensors für Elektronen: $d_e = -1$, $q_e = e$. Die Vorzeichenänderungen, die sich für die Ionen ergeben ($d_i = +1$), kann man an den Ergebnissen dann nachträglich leicht anbringen. (Der Index $\alpha = e$ wird zunächst wieder weggelassen) Alle Rechnungen vereinfachen sich wesentlich, wenn man zu rotierenden Koordinaten übergeht:

$$v_{\pm} := v_s \pm i v_y \quad ; \quad E_{\pm} := E_s \pm i E_y$$

Die Komponenten M_{ij} (i, j mögen immer unabhängig voneinander die Indices $+$, $-$, z durchlaufen) gehen aus den Komponenten M_{kl} ($k, l = s, y, z$) hervor durch die Transformation:

$$(22) \quad \underline{M}_{(ij)} = \underline{R} \underline{M}_{(kl)} \underline{R}^{-1} \quad \text{mit} \quad \underline{R} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mit (19') folgt dann aus der Definition der $\langle \underline{v} \rangle$:

$$(23) \quad \langle v_j \rangle = \frac{e}{m} e^{i\psi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{v_j}{s'} (E_+^0 s' v_- + E_-^0 s' v_+) \frac{F_1}{2} J_1(k_1, s') + v_j E_z^0 / s' J_0(k_1, s') - \frac{i k_1}{\omega} \frac{v_j}{s'} (s' v_- + s' v_+) \frac{F_2}{2} E_z^0 J_1(k_1, s') \right] e^{i(\omega - k v_z) t} d^3 v dt$$

c1.) Übergang zu passenden Integrationsvariablen.

Wie in Anhang 2 gezeigt wird, ist:

$$(24) \quad s' \cdot v'_z = s \cdot v_z e^{\mp i \Omega \tau} \mp \frac{v_z^2}{\Omega} i (e^{\pm i \Omega \tau} - 1)$$

$$(25) \quad s'^2 = s^2 - \frac{2 \cdot s}{\Omega} [v_z \sin \Omega \tau + v_y (1 - \cos \Omega \tau)] + \frac{v_z^2}{\Omega^2} 2 (1 - \cos \Omega \tau)$$

Andererseits ist nach dem Kosinussatz:

$$(25') \quad s'^2 = s^2 - 2l \cdot s \cdot \cos \alpha + l^2$$

Es ist also:

$$l^2 = \frac{v_z^2}{\Omega^2} 2 (1 - \cos \Omega \tau) = \frac{v_z^2}{\Omega^2} \cdot 4 \sin^2 \frac{\Omega \tau}{2}$$

$$l \cdot \cos \alpha = \Omega^{-1} [v_z \sin \Omega \tau + v_y (1 - \cos \Omega \tau)] = \Omega^{-1} 2 \cdot \sin \frac{\Omega \tau}{2} [v_z \cos \frac{\Omega \tau}{2} + v_y \sin \frac{\Omega \tau}{2}]$$

Daraus folgt:

$$\frac{2 \sin \frac{\Omega \tau}{2}}{\Omega} \cdot v_z = l \cdot \cos \frac{\Omega \tau}{2} \cdot \cos \alpha - l \sin \frac{\Omega \tau}{2} \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{2 \cdot \sin \frac{\Omega \tau}{2}}{\Omega} \cdot v_y = l \cdot \sin \frac{\Omega \tau}{2} \cdot \cos \alpha + l \cdot \cos \frac{\Omega \tau}{2} \cdot \sin \alpha$$

Und die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(v_z, v_y)}{\partial(l, \alpha)} = \frac{\Omega^2}{4 \sin^2 \frac{\Omega \tau}{2}} \cdot l = \frac{\Omega^2}{2(1 - \cos \Omega \tau)} \cdot l =: D \cdot l$$

Es ist also

$$(26) \quad v_z^2 = l^2 \cdot D$$

$$(26') \quad D^{-\frac{1}{2}} v_z = l \cdot e^{\pm i(\alpha + \frac{\Omega \tau}{2})}$$

Es erweist sich als günstig, diese Koordinatentransformation durchzuführen, weil (siehe ¹⁵⁾) in den Koordinaten (l, α) die

Relation gilt:

$$(27) \quad J_0(k_\perp \cdot s') = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(k_\perp \cdot s) \cdot J_m(k_\perp \cdot l) \cdot e^{im\alpha}$$

Denkt man sich s' durch l und α ausgedrückt, so hat man noch die Integrale

$$(28) \quad \langle V_i \rangle = \frac{e}{m} e^{i\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{s'} J_1(k_\perp \cdot s') (M_{i+} E_+^\circ + M_{i-} E_-^\circ + M_{iz} E_z^\circ) \right. \right. \\ \left. \left. + J_0(k_\perp \cdot s') \bar{M}_{iz} \cdot E_z^\circ \right\} d\alpha dl \right) e^{i(\omega - kv_z)\tau} dv_z d\tau$$

auszuwerten. Alle M_{ij} sind von der Form (Anhang 3):

$$(29) \quad M_{ij} = H_{ij}(l, \Omega, \tau, v_z) \cdot R(p, n)$$

mit $R(p, n) = (s - 1 e^{i n \alpha}) e^{i p \alpha}$; $n = \pm 1$; $p = 0, \pm 1, \pm 2$

Alle \bar{M}_{iz} haben die Form:

$$(30) \quad \bar{M}_{iz} = \bar{H}_{iz}(l, \Omega, \tau, v_z) e^{i \bar{p} \alpha} ; \quad \bar{p} = 0, \pm 1$$

Die zu den verschiedenen Werten von i und j gehörenden (p, n) bzw. \bar{p} kann man der Tabelle entnehmen.

$i \setminus j$	+	-
+	(0, 1)	(2, -1)
-	(-2, 1)	(0, -1)
Z	(-1, 1)	(1, -1)

(p, n)

Tabelle 1

i	\bar{p}
+	1
-	-1
Z	0

Ferner ist

$$M_{iz} = -\frac{i k_\perp}{\omega} (M_{i+} + M_{i-}) \frac{\tilde{F}_z}{\tilde{F}_1}$$

$$\text{mit } \tilde{F}_1(l, v_z) = F_1(l^2 \mathcal{D}, v_z) ; \quad \tilde{F}_2(l, v_z) = F_2(l^2 \mathcal{D}, v_z)$$

c2.) Die Integration über α .

Aus (25') folgt:

$$\frac{\partial s'^2}{\partial \alpha} = 2 \cdot s \cdot l \cdot \sin \alpha \quad ; \quad \frac{\partial s'^2}{\partial s} = 2(s - l \cdot \cos \alpha)$$

Und es ist

$$\frac{1}{s'} \mathcal{J}_1(k_1 \cdot s') = -\frac{1}{k_1 \cdot s'} \cdot \frac{\partial}{\partial s'} \mathcal{J}_0(k_1 \cdot s') = -\frac{2}{k_1} \cdot \frac{\partial}{\partial (s'^2)} \mathcal{J}_0(k_1 \cdot s')$$

Der erste Integraltyp, der zu berechnen ist, ist nach (28) und (29):

$$\begin{aligned} (31) \quad & \int_0^{2\pi} \mathcal{R}(p, n) s'^{-1} \cdot \mathcal{J}_1(k_1 \cdot s') \cdot d\alpha \\ &= \int_0^{2\pi} (s - l \cdot \cos \alpha - i n l \sin \alpha) e^{i p \alpha} \left(-\frac{2}{k_1} \cdot \frac{\partial}{\partial (s'^2)} \mathcal{J}_0(k_1 \cdot s') \right) \cdot d\alpha \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \int_0^{2\pi} -k_1^{-1} e^{i p \alpha} \mathcal{J}_\alpha(k_1 \cdot s') \cdot d\alpha + i n (k_1 \cdot s)^{-1} \int_0^{2\pi} e^{i p \alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathcal{J}_0(k_1 \cdot s') \cdot d\alpha \\ &= k_1^{-1} \left(-\frac{\partial}{\partial s} + \frac{n \cdot p}{s} \right) \cdot \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_m(k_1 \cdot s) \cdot \mathcal{J}_m(k_1 \cdot l) e^{i(m+p)\alpha} \cdot d\alpha \\ &= -\mathcal{J}_{-p}(k_1 \cdot l) \cdot (k_1 \cdot s)^{n \cdot p} \cdot 2\pi \frac{d}{d(k_1 \cdot s)} \left((k_1 \cdot s)^{-n \cdot p} \cdot \mathcal{J}_{-p}(k_1 \cdot s) \right) \\ &= 2\pi \cdot n \cdot \mathcal{J}_p(k_1 \cdot l) \cdot \mathcal{J}_{p+n}(k_1 \cdot s) \end{aligned}$$

Der zweite zu berechnende Integraltyp ist:

$$\begin{aligned} (32) \quad & \int_0^{2\pi} e^{i p \alpha} \cdot \mathcal{J}_0(k_1 \cdot s') \cdot d\alpha \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_m(k_1 \cdot l) \cdot \mathcal{J}_m(k_1 \cdot s) e^{i(m+p)\alpha} \cdot d\alpha = \mathcal{J}_p(k_1 \cdot l) \cdot \mathcal{J}_p(k_1 \cdot s) \cdot 2\pi \end{aligned}$$

Damit folgt aus (28) und der Tabelle 1:

$$\langle v_+ \rangle \propto e^{i\varphi} \cdot \mathcal{J}_1(k_1 \cdot s)$$

$$\langle v_- \rangle \propto e^{i\varphi} \mathcal{J}_1(k_1 \cdot s)$$

$$\langle v_z \rangle \propto e^{i\varphi} \mathcal{J}_0(k_1 \cdot s)$$

Die Eigenschaft (20) ist also schon nachgewiesen. Die Elemente des Beweglichkeitstensors werden in Anhang 3 berechnet:

$$(33) \quad M_{ij} = 2\pi \cdot \Omega \int_0^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z e^{i(\omega - k \cdot v_z) \tau} \cdot T_{ij}$$

Nach (26) ist $v_1 \cdot dv_1 = D \, \mathfrak{f} \, d\mathfrak{f}$. Nach Rücktransformation der Variablen \mathfrak{f} in v_1 erhält man für die T_{ij} :

$$(34a) \quad T_{\pm\pm} = \int_0^{\infty} e^{\pm i\Omega\tau} \cdot \frac{1}{2} \cdot v_1^3 \cdot \mathcal{J}_0 \cdot F_1(v_1^2, v_z) \, dv_1$$

$$(34b) \quad T_{\pm z} = - \int_0^{\infty} \frac{1}{2} v_1^3 \cdot \mathcal{J}_z \cdot F_1(v_1^2, v_z) \cdot dv_1$$

$$(34c) \quad T_{z\pm} = \pm \int_0^{\infty} v_z \cdot i\Omega^{-1} (e^{\pm i\Omega\tau} - 1) \cdot \frac{1}{2} D^{\frac{1}{2}} v_1^2 \cdot \mathcal{J}_1 \cdot F_1(v_1^2, v_z) \, dv_1$$

$$(34d) \quad T_{\pm z} = \int_0^{\infty} \left\{ \pm \frac{i}{\Omega} (1 - e^{\pm i\Omega\tau}) D^{\frac{1}{2}} \cdot f_{0z} v_1^2 \cdot \mathcal{J}_1 - \frac{ik_z}{\omega \cdot 2} v_1^3 (e^{\pm i\Omega\tau} \mathcal{J}_0 - \mathcal{J}_z) F_2(v_1^2, v_z) \right\} dv_1$$

$$(34e) \quad T_{zz} = \int_0^{\infty} v_z \cdot \left\{ v_1 \cdot \mathcal{J}_0 \cdot f_{0z} + \frac{ik_z}{\omega} \frac{\sin\Omega\tau}{\Omega} \cdot D^{\frac{1}{2}} v_1^2 \cdot \mathcal{J}_1 \cdot F_2(v_1^2, v_z) \right\} dv_1$$

Argument der Besselfunktionen ist überall $(k_1 \cdot v_1 \cdot D^{-\frac{1}{2}})$.

c3.) Die Integration über v_1 .

Sei jetzt die Gleichgewichtsverteilung gegeben durch:

$$(35) \quad f_0(v_1^2, v_z) = g(v_z) \cdot h(v_1^2)$$

$g(v_z)$ wird zunächst nicht näher festgelegt, dagegen sei $h(v_1^2)$ eine Maxwellverteilung:

$$h(v_1^2) = \pi^{-1} \beta_1^2 \exp(-\beta_1^2 \cdot v_1^2) \quad ; \quad \beta_1^2 = m(2 \times T_1)^{-1}$$

Dann ist

$$f_{01} = -2 \beta_1^2 \cdot g \cdot h$$

$$(35a) \quad f_{0z} = h \cdot \frac{dg}{dv_z} =: h \cdot \Psi$$

$$(35b) \quad F_1 = h \cdot \left(-2\beta_1^2 \cdot g \left(1 - \frac{k_1}{\omega} v_z \right) + \frac{k_1}{\omega} \cdot \frac{dg}{dv_z} \right) =: h \cdot \Theta$$

$$(35c) \quad F_2 = h \left(\frac{dg}{dv_z} + 2\beta_1^2 \cdot v_z \cdot g \right) =: h \left(-\frac{\omega}{\Omega} \Phi \right)$$

Führt man die Verteilungsfunktion (35) in die Ausdrücke (34a - e) ein, so treten als Integrale über v_1 nur noch solche auf, die die Form haben:

$$(36) \quad \int \int_p (a \cdot v_1) \cdot e^{-\beta_1^2 \cdot v_1^2} \cdot v_1^{q-1} \cdot dv_1 =: G(p, q) \quad ; \quad a := k_1 \cdot D^{-\frac{1}{2}}$$

Diese Integrale lassen sich durch unendliche Reihen über modifizierte Besselfunktionen $I_n(x)$ ausdrücken, mit

$$(37) \quad \gamma := k_1^2 \cdot \frac{x T_1}{\Omega^2 \cdot m} = \frac{1}{2} k_1^2 \langle r_g^2 \rangle$$

z.B. ist:

$$G(0, 2) = (2\beta_1^2)^{-1} e^{-\gamma} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(\gamma) e^{in\Omega\tau}$$

Und die dann noch verbleibenden Integrale über v_z und τ haben die Form:

$$(38) \quad k \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X(v_z) \int_0^{\infty} \exp i [n \cdot \Omega - k v_z + \omega] \cdot \tau \cdot d\tau \cdot dv_z =: \langle X \rangle_n$$

X ist eine Funktion von v_z allein, da die τ -Abhängigkeit der T_{ij} mit in den Exponenten genommen wurde.

c4.) Ergebnis

Benutzt man die Definitionen (38) und (35a - c), so erhält man aus (33) und (34a - e) als Komponenten des Beweglichkeitstensors:

$$M_{\pm\pm} = \frac{\Omega \cdot e^{-\gamma}}{2\beta_1^2 \cdot k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ (1-\gamma) I_{n\mp 1} + \gamma/2 \cdot (I_n + I_{n\mp 2}) \right\} \langle \Theta \rangle_n$$

$$M_{\pm z} = - \frac{\Omega \cdot e^{-\gamma}}{2 \beta_1^2 \cdot k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \gamma \cdot I_n - \gamma/2 (I_{n+1} + I_{n-1}) \right\} \langle \Theta \rangle_n$$

$$M_{z\pm} = \mp \frac{e^{-\gamma}}{4 \beta_1^2 \cdot k} i \cdot k_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (I_n - I_{n\pm 1}) \langle v_z \Theta \rangle_n$$

$$M_{\pm z} = \frac{e^{-\gamma}}{2 \beta_1^2 \cdot k} i \cdot k_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ (I_{n\pm 2} + \gamma/2 [I_{n\pm 2} + I_{n\pm 1} - I_n - I_{n\pm 1}]) \langle \Phi \rangle_n \right. \\ \left. \mp (I_{n\pm 1} - I_n) \langle \Psi \rangle_n \right\}$$

$$M_{zz} = \frac{\Omega \cdot e^{-\gamma}}{k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ I_n \langle v_z \cdot \Psi \rangle_n + \gamma/2 (I_{n+1} - I_{n-1}) \langle v_z \Phi \rangle_n \right\}$$

Argument der Besselfunktionen I.. ist überall γ .

Nun wird noch die Rücktransformation auf das ruhende Zylinderkoordinatensystem durchgeführt, um das Ergebnis unmittelbar mit dem Beweglichkeitstensor für ebene harmonische Wellen vergleichen zu können. Die zu (22) inverse Transformation ist:

$$\underline{\underline{M}}_{(kl)} = \underline{\underline{R}}^{-1} \cdot \underline{\underline{M}}_{(ij)} \cdot \underline{\underline{R}} \quad i, j = +, -, z \quad ; \quad k, l = s, \varphi, z$$

Mit dieser Transformation bekommt man unter Ausnutzung einiger algebraischer Eigenschaften der modifizierten Besselfunktionen:

$$M_{ss} = \frac{-\delta \cdot \Omega \cdot e^{-\gamma} \cdot x \cdot T_1}{m \cdot k} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n^2}{\gamma} I_n \cdot \langle \Theta \rangle_n$$

$$M_{s\varphi} = -M_{\varphi s} = - \frac{\Omega \cdot e^{-\gamma} \cdot x \cdot T_1}{m \cdot k} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i n (I_n - I_n') \langle \Theta \rangle_n$$

$$M_{\varphi\varphi} = \frac{-\delta \cdot \Omega \cdot e^{-\gamma} \cdot x \cdot T_1}{m \cdot k} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{n^2}{\gamma} I_n + (I_n - I_n') \cdot 2\gamma \right\} \langle \Theta \rangle_n$$

$$(39) \quad M_{sz} = \frac{-\delta \cdot e^{-\gamma} \cdot x \cdot T_1}{m \cdot k} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{i \cdot k_1 \cdot n}{\gamma} I_n (n \langle \bar{\Phi} \rangle_n - \langle \Psi \rangle_n)$$

$$M_{\varphi z} = - \frac{e^{-\gamma} \cdot x \cdot T_1}{m \cdot k_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} k_1 (I_n - I_n') [n \langle \bar{\Phi} \rangle_n - \langle \Psi \rangle_n]$$

$$M_{zs} = \frac{-j \cdot e^{-\gamma} \cdot x \Gamma_1}{m \cdot k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i \cdot k_1 \cdot n}{\gamma} I_n \langle v_z \Theta \rangle_n$$

$$M_{zy} = \frac{e^{-\gamma} \cdot x \Gamma_1}{m \cdot k} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} k_1 (I_n - I'_n) \langle v_z \Theta \rangle_n$$

$$M_{zz} = \frac{j \cdot \Omega \cdot e^{-\gamma}}{k} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n \{ n \langle v_z \Phi \rangle_n - \langle v_z \Psi \rangle_n \}$$

An dieser Stelle wurden wieder Faktoren ($-j$) eingefügt, die für die betrachteten Elektronen gleich 1 sind. Sie wurden so gewählt, daß der Beweglichkeitstensor der Ionen für rotations-symmetrische Wellen auf die gleiche Weise aus dem für ebene Wellen hervorgeht wie der Beweglichkeitstensor der Elektronen. Der Zusammenhang mit dem Beweglichkeitstensor für ebene Wellen wird im nächsten Abschnitt erläutert.

d.) Vergleich mit dem Ergebnis für ebene Wellen

Die Bezeichnungsweise in (39) ist so gewählt, daß ein Vergleich unmittelbar möglich ist mit dem Beweglichkeitstensor für ebene Wellen, wie er in ⁷⁾, Seite 188, angegeben wird: Der Beweglichkeitstensor für ebene Wellen, deren Wellenvektor \underline{k} in einem kartesischen Koordinatensystem (x,y,z) die Komponenten $(k_x, 0, k_z)$ hat, geht über in den Beweglichkeitstensor für rotationssymmetrische Wellen, wenn gewisse Elemente mit einem Faktor i bzw. $-i$ multipliziert werden. Da es sich dabei nur um Nichtdiagonalelemente handelt, geht nach (21) der Dielektrizitätstensor auf die gleiche Weise aus dem für ebene Wellen hervor wie der Beweglichkeitstensor. Das folgende Schema gibt in einsichtiger Weise an, wie man die Elemente des Dielektrizitätstensors für rotationssymmetrische Wellen mit denen für ebene Wellen zu identifizieren hat.

$i \backslash j$	s	φ	z	
s	ϵ_{xx}	ϵ_{xy}	$i \cdot \epsilon_{xz}$	
φ	ϵ_{yx}	ϵ_{yy}	$i \cdot \epsilon_{yz}$	
z	$-i \cdot \epsilon_{zx}$	$-i \cdot \epsilon_{zy}$	ϵ_{zz}	
				ϵ_{ij}

Setzt man diese Elemente des $\underline{\xi}$ -Tensors in die Matrix \underline{L} (10) ein und vergleicht man \underline{L} mit der entsprechenden Matrix \underline{L}_e für ebene Wellen, so sieht man: \underline{L}_e geht über in \underline{L} , wenn man k_x durch k_\perp ersetzt und in \underline{L}_e die letzte Spalte mit i und die letzte Zeile mit $-i$ multipliziert; die Determinanten von \underline{L} und \underline{L}_e stimmen also überein. Die Gleichung

$$(40) \quad \text{Det } \underline{L} = 0$$

ergibt die Dispersionsgleichung $D_0(k_\perp, k, \omega) = 0$, in der ohne Randbedingungen die Wahl von k_\perp frei bleibt. Diese Dispersionsgleichung ist für rotationssymmetrische Wellen also die gleiche wie für ebene Wellen mit $k_y = 0$, wenn man k_x durch k_\perp ersetzt. Damit wurde ein für das kalte Plasma wohl bekanntes Ergebnis ⁴⁾ auch für das heiße Plasma nachgewiesen.

2. Die Dispersionsbeziehung

a.) Die Bestimmtheit des Systems

Die Gleichung (40) $\text{Det } \underline{L} = 0$ läßt die Wahl der transversalen Wellenzahl k_{\perp} noch frei. In diesem Teilkapitel II.2. soll gezeigt werden: Es gibt Randbedingungen, die die Wahl der möglichen k_{\perp} für die betrachtete Anordnung so festlegen, daß schließlich eine Dispersionsbeziehung der Form $D(\omega, k) = 0$ folgt. Wie zu Beginn von Kapitel II schon beschrieben, wird ein homogener, unendlich langer Plasmazylinder vom Radius s_0 betrachtet. Er befindet sich in einem metallischen Hohlzylinder vom Radius S_0 . In der Vakuumzone von s_0 bis S_0 sei das Gleichgewichtsfeld \underline{B}_0^V , im Plasma \underline{B}_0^P . Sowohl \underline{B}_0^V als auch \underline{B}_0^P seien parallel zur Zylinderachse. Mit der Gleichgewichtsverteilung (35) ist der Drucktensor im Gleichgewicht \underline{p}_0 diagonal:

$$(41) \quad p_{0_{kl}} = p_{l0} \cdot \delta_{kl} - (p_{l0} - p_{n0}) \hat{z}_k \cdot \hat{z}_l ; \quad \hat{z} := \frac{\underline{B}_0^P}{|B_0^P|}$$

Es muß die Gleichgewichtsbedingung gelten:

$$(42) \quad p_{l0} + \frac{B_0^{P^2}}{8\pi} = \frac{B_0^{V^2}}{8\pi}$$

In dieser Beschreibung wird die inhomogene Randschicht des Plasmas vernachlässigt; das dürfte eine zulässige Näherung sein unter den eingangserwähnten Voraussetzungen, also insbesondere der hinreichend kleiner Gyroradien.

Indem man die Elemente des Beweglichkeitstensors für jede Teilchensorte nach dem Parameter (11), $\gamma_{\alpha} := \frac{1}{2} \gamma_{g_{\alpha}}^2 \cdot k_{\perp}^2$ entwickelt (siehe ⁷⁾; dort wird statt γ_{α} die Bezeichnung λ gewählt), bekommt man für die Elemente des Dielektrizitätstensors eine Entwicklung nach den Gyroradien. In ⁷⁾ wird gezeigt: die Glieder M_{sz} , $M_{\varphi z}$, M_{zs} und $M_{z\varphi}$ sind Produkte aus k_{\perp} und einer Funktion

von γ_α , während die restlichen Elemente von \underline{M} nur Funktionen von γ_α sind. Entwickelt man die Funktionen von γ_α bis zur ersten Ordnung in γ_α , so stellt die Gleichung (40) eine Gleichung dritten Grades in k_\perp^2 dar: denn es war

$$\underline{L} = \begin{pmatrix} -n_z^2 + \epsilon_{ss} & \epsilon_{s\psi} & i \cdot n_\perp \cdot n_z + \epsilon_{sz} \\ \epsilon_{\psi s} & -n_z^2 + \epsilon_{\psi\psi} - n_\perp^2 & \epsilon_{\psi z} \\ -i \cdot n_\perp \cdot n_z + \epsilon_{zs} & \epsilon_{z\psi} & \epsilon_{zz} - n_\perp^2 \end{pmatrix}$$

und $\epsilon_{\lambda\kappa}$ ($\lambda, \kappa = s, \psi$) sowie ϵ_{zz} sind, wenn man die Glieder von höherer als erster Ordnung in γ_α vernachlässigt, Funktionen vom Typ:

$$\epsilon_{\lambda\kappa} = b_{\lambda\kappa} + c_{\lambda\kappa} \cdot k_\perp^2$$

$\epsilon_{\sigma\tau}$ ($\sigma = z; \tau = s, \psi$), $\epsilon_{\bar{\sigma}\bar{\tau}}$ ($\bar{\sigma} = s, \psi; \bar{\tau} = z$) sind Funktionen vom Typ:

$$\epsilon_{\sigma\tau} = k_\perp (b_{\sigma\tau} + c_{\sigma\tau} \cdot k_\perp^2)$$

b.. und c.. sind darin Funktionen von ω und k und der Plasma-parameter ($\Pi_\alpha, \Omega_\alpha, T_{\perp\alpha}, T_{\parallel\alpha}$), nicht aber von k_\perp . Die Gleichung $\text{Det } \underline{L} = 0$ hat also in niedrigster Ordnung in den Gyroradien im allgemeinen drei Lösungen:

$$k_{\perp v}^2(k, \omega) \quad ; \quad v = 1, 2, 3$$

$k_{\perp v}$ ist im Folgenden immer als Funktion von k und ω aufzufassen. Das elektrische Feld im Plasma hat dann die allgemeine Darstellung

$$(43) \quad \underline{\tilde{E}}^p = \sum_{v=1}^3 A_v \begin{pmatrix} E_{sv}^0 \cdot J_1(k_{\perp v} s) \\ 1 \cdot J_1(k_{\perp v} s) \\ E_{zv}^0 \cdot J_0(k_{\perp v} s) \end{pmatrix} \cdot e^{i(kz - \omega t)}$$

Die Koeffizienten A_ν sind aus den Randbedingungen zu bestimmen; $E_{s\nu}^0$ und $E_{z\nu}^0$ ergeben sich als Funktionen von $k_{1\nu}$, k und ω aus dem homogenen Gleichungssystem $\underline{L}_\nu \cdot \underline{E}_\nu^0 = 0$, wenn man den in der Lösung noch frei bleibenden Faktor so wählt, daß $E_{\psi\nu}^0 = 1$ ist.

Das elektrische Vakuumfeld $\tilde{\underline{E}}^v$ in dem Raum von s_0 bis S_0 muß auf dem Metallzylindermantel bei $s_0 = S_0$ die Randbedingungen erfüllen:

$$(44) \quad \tilde{E}_\varphi^v(s = S_0) = \tilde{E}_z^v(s = S_0) = 0$$

Als rotationssymmetrische Lösung der Maxwell'schen Gleichungen zusammen mit den Randbedingungen (44) bekommt man:

$$(45) \quad \begin{aligned} \tilde{E}_s^v &= - \frac{i \cdot k}{x} A_4 \left(\tilde{I}_1(x \cdot s) + C_1 \cdot K_1(x \cdot s) \right) e^{i(kz - \omega t)} \\ \tilde{E}_\varphi^v &= A_5 \left(\tilde{I}_1(x \cdot s) + C_2 K_1(x \cdot s) \right) e^{i(kz - \omega t)} \\ \tilde{E}_z^v &= A_4 \left(\tilde{I}_0(x \cdot s) + C_1 K_0(x \cdot s) \right) e^{i(kz - \omega t)} \end{aligned}$$

mit

$$x^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$C_1 = - \frac{\tilde{I}_0(x \cdot S_0)}{K_0(x \cdot S_0)} \quad ; \quad C_2 = - \frac{\tilde{I}_1(x \cdot S_0)}{K_1(x \cdot S_0)}$$

$K_{..}$ und $I_{..}$ sind Zylinderfunktionen in der Bezeichnungsweise von 15). Jetzt müssen nur noch die Randbedingungen an der Zylinderfläche $s = s_0$ erfüllt werden. Aus ihnen werden die fünf Koeffizienten $A_1 \dots A_5$ bestimmt. Dazu braucht man ein System von fünf linear-unabhängigen, linearen Randbedingungen. Sie ergeben dann ein System von fünf Gleichungen der Form

$$(46) \quad \sum_{n=1}^5 a_{mn} A_n = 0 \quad ; \quad m = 1 \dots 5 \quad ,$$

worin die a_{mn} noch Funktionen von k und ω sind. Die Lösbarkeitsbedingung

$$(47) \quad \text{Det} (a_{mn}) = 0$$

ist dann die gesuchte Dispersionsbeziehung $D(\omega, k) = 0$.

b.) Die Randbedingungen

Als Randbedingungen an der Fläche $s=s_0$ werden die bekannten Sprungbedingungen benutzt, die man aus den Maxwell'schen Gleichungen und den drei Geschwindigkeitsmomenten erster Ordnung der Wlassow-Gleichung (16) erhält. Sie werden z.B. in ¹⁶⁾ hergeleitet: An der Diskontinuitätsfläche mit der vom Plasma weg weisenden Normalen \underline{n} wird dem Plasmadruck das Gleichgewicht gehalten durch einen Sprung im Magnetfeld, der der Relation (42) genügt. Im Gleichgewicht mögen die Magnetfeldlinien auf der Sprungfläche liegen. Dann wird die Bewegung der Sprungfläche während der Wellenausbreitung definiert als die Bewegung der Magnetfeldlinien, die im Gleichgewicht auf der Sprungfläche liegen; an der Diskontinuitätsfläche gilt also immer $B_e \cdot n_e = 0$ (Summationskonvention!) Die Sprungrelationen bekommt man, indem man die Maxwell'schen Gleichungen und die Momentengleichungen in üblicher Weise integriert über ein flaches dosenförmiges Volumen, das die Sprungfläche umschließt. So folgen aus den drei Geschwindigkeitsmomenten der Wlassow-Gleichung die drei Gleichungen

$$(48) \quad n_e [T_{ke}] + \frac{1}{4\pi} u_e \cdot n_e [(\underline{E} \times \underline{B})_k] = 0$$

Darin bedeutet $[A]$ den Sprung der Größe A an der Diskontinuitätsfläche. Ist A^V der Wert von A auf der Vakuumseite der Fläche, A^P der Wert auf der Plasmaseite, dann ist

$$[A] := A^V - A^P$$

Alle Funktionen des Ortes in (48) sind am Orte der Fläche zu nehmen und \underline{u} ist die Geschwindigkeit der Fläche, $T_{\kappa\epsilon}$ der Spannungstensor

$$T_{\kappa\epsilon} := -P_{\kappa\epsilon} + \frac{1}{4\pi} (E_{\kappa} \cdot E_{\epsilon} + B_{\kappa} \cdot B_{\epsilon}) - \frac{j_{\kappa\epsilon}}{4\pi} (|E|^2 + |B|^2)$$

Aus der Maxwell'schen Gleichung (1) folgen die Gleichungen

$$(49) \quad \frac{1}{c} n_{\epsilon} \cdot u_{\epsilon} [B_{\kappa}] = \epsilon_{\kappa\epsilon m} \cdot n_{\epsilon} [E_m]$$

Und aus $\text{div } \underline{B} = 0$ folgt die Gleichung $n_{\epsilon} [B_{\epsilon}] = 0$; sie ist, da auf der Fläche $n_{\epsilon} \cdot B_{\epsilon} = 0$ gilt, automatisch erfüllt. Die aus den inhomogenen Maxwell-Gleichungen folgenden Sprungrelationen werden dadurch erfüllt, daß sich entsprechende Oberflächenströme und -ladungen auf der Sprungfläche einstellen. Nun werden die Sprungbedingungen (48) und (49) linearisiert. Es sei $\underline{P} = \underline{p}_0 + \tilde{\underline{p}}$ mit

$$(50) \quad \tilde{p}_{\kappa\epsilon}(\underline{r}, t) = p_{\kappa\epsilon}(s) \cdot e^{i(kz - \omega t)} = \sum_{\alpha} N_{0\alpha} m_{\alpha} \int (v_{\kappa} - \langle v_{\kappa} \rangle) (k - \langle k \rangle) \tilde{f}_{\alpha}^{\sim} d^3v$$

$$= : \sum_{\alpha} N_{0\alpha} \cdot m_{\alpha} (\langle v_{\kappa} \cdot v_{\epsilon} \rangle - \langle v_{\kappa} \rangle \cdot \langle v_{\epsilon} \rangle)$$

Die Normale \underline{n}_0 im Gleichgewicht ist ein Einheitsvektor in s-Richtung; es sei $\underline{n} = \underline{n}_0 + \tilde{\underline{n}}$. \underline{n} muß der Differentialgleichung genügen (siehe z.B. ⁷⁹)

$$\frac{d\underline{n}}{dt} = \underline{n} \times [\underline{n} \times (\nabla \cdot \underline{u}) \underline{n}]$$

Daraus folgt

$$(51a) \quad \tilde{n}_z = \frac{k}{\omega} u_s$$

Die s-Komponente von \underline{u} ergibt sich einfach aus der Bedingung,

daß kein Plasma durch die Sprungfläche hindurch tritt. Sei \underline{V} die Massengeschwindigkeit des Plasmas, dann muß an der Grenzfläche gelten:

$$\underline{n} \cdot (\underline{V} - \underline{u}) = 0$$

Durch Linearisierung folgt, da \underline{V} und \underline{u} Größen erster Ordnung sind:

$$\underline{n}_0 (\underline{V} - \underline{u}) = 0$$

$$(51b) \quad u_s = V_s$$

Wie \underline{u} und \underline{V} ist auch \underline{E} eine Größe erster Ordnung; der zweite Term in (48) liefert also nach der Linearisierung keinen Beitrag mehr; aus der dann verbleibenden Gleichung

$$n_{0e} [\tilde{T}_{ke}] + \tilde{n}_e [T_{ke}^0] = 0$$

folgen mit (50), (51a,b) und (42) die drei Gleichungen für $s = s_0$:

$$(52a) \quad p_{sz} = \frac{k}{\omega} V_s (p_{\perp 0} - p_{\parallel 0})$$

$$(52b) \quad p_{sy} = 0$$

$$(52c) \quad p_{ss} = -\frac{1}{4\pi} (B_z^p \cdot B_0^p - B_z^v \cdot B_0^v)$$

Aus (49) folgen die beiden Randbedingungen:

$$(52d) \quad \frac{1}{\varepsilon} V_s (B_0^p - B_0^v) = E_y^p - E_y^v$$

$$(52e) \quad E_z^p = E_z^v$$

Man erhält aus den Gleichungen (52) das gewünschte Gleichungssystem (46), wenn man B_z^p und B_z^v durch \underline{E}^p bzw. \underline{E}^v ausdrückt mit Hilfe der Maxwell-Gleichung (1) und wenn man außerdem noch die

Komponenten des Drucktensors erster Ordnung $p_{\kappa\epsilon}$ nach der Definition (50) als Funktionen von \underline{E}^p berechnet. Das geschieht im folgenden Abschnitt.

c.) Berechnung des Drucktensors

Wir beschränken uns wieder auf die Berechnung des Drucktensors der Elektronen, der Index α wird dementsprechend weggelassen. Nach (50) ist:

$$\tilde{p}_{\kappa\epsilon} = N_0 \cdot m (\langle v_\kappa \cdot v_\epsilon \rangle - \langle v_\kappa \rangle \langle v_\epsilon \rangle) =: p_{\kappa\epsilon}(s) \cdot e^{i(kz - \omega t)}$$

Die Glieder $\langle v_\kappa \rangle \cdot \langle v_\epsilon \rangle$ sind nach (20') von zweiter Ordnung in der Amplitude des elektrischen Feldes \underline{E}^p , sie werden deshalb vernachlässigt. Die Momente zweiter Ordnung

$$\langle v_\kappa \cdot v_\epsilon \rangle := \int \tilde{f} v_\kappa \cdot v_\epsilon \cdot d^3v$$

werden, wie die $\langle v_\kappa \rangle$, berechnet unter Benutzung der Integraldarstellung (19) von \tilde{f} . Dann erweist es sich wieder als praktisch, zu rotierenden Koordinaten überzugehen, und es werden zunächst Koeffizienten S_{ij}^h ($h, i, j = +, -, z$) definiert durch:

$$(53) \quad p_{ij} =: e \cdot N_0 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty S_{ij}^h \cdot E_h^0 \cdot e^{i(\omega - k \cdot v_z) \tau} d\tau \cdot dv_z$$

Die S_{ij}^h sind noch Funktionen von s, v_z und τ . Sie werden in Anhang 4 berechnet. Man erhält:

$$S_{++}^+ = \beta_+^2 \cdot \Theta \cdot e^{\pm i \frac{3}{2} \Omega \tau} \cdot G(1, 5) \cdot J_2(k_1 \cdot s)$$

$$(54) \quad S_{++}^- = -\beta_+^2 \cdot \Theta \cdot e^{\pm i \frac{1}{2} \Omega \tau} \cdot G(3, 5) \cdot J_2(k_1 \cdot s)$$

$$S_{+-}^+ = -\beta_+^2 \cdot \Theta \cdot e^{\pm i \frac{1}{2} \Omega \tau} \cdot G(1, 5) \cdot J_0(k_1 \cdot s)$$

$$S_{-+}^{\pm} = S_{+-}^{\pm}$$

$$S_{\pm\pm}^z = \left\{ e^{\pm i\Omega\tau} \cdot 2\beta_1^2 \cdot \Psi \cdot G(2,4) + \frac{i \cdot k_z}{\Omega} \cdot \beta_1^2 \cdot \Phi \left(e^{\pm i \frac{3}{2}\Omega\tau} G(1,5) - e^{\pm i \frac{1}{2}\Omega\tau} \cdot G(3,5) \right) \right\} J_2$$

$$S_{\pm\pm}^z = \left\{ 2 \cdot \beta_1^2 \cdot \Psi \cdot G(0,4) - \frac{i \cdot k_z}{\Omega} \cdot 2 \cdot \beta_1^2 \cdot \Phi \cdot G(1,5) \cdot \cos \frac{\Omega\tau}{2} \right\} \cdot J_0$$

$$S_{iz}^h = v_z \cdot T_{ih} \cdot 2\pi \cdot J_1(k_z \cdot s) \quad i \neq z; \quad S_{zz}^h = v_z \cdot T_{zh} \cdot 2\pi \cdot J_0$$

$G(p,q)$ sind durch (36) definiert, Θ, ϕ, Ψ durch (35), T_{ih} in (34).

Zunächst soll gezeigt werden, daß mit (53) für die Komponenten des Drucktensors die richtige Ortsabhängigkeit folgt. Die Komponenten der Kraft $\underline{K}^p = \nabla \cdot \underline{P}$ müssen komponentenweise die gleiche Ortsabhängigkeit wie \underline{E}^p haben. Definiert man

$$(55) \quad p_+ := \frac{1}{4} (p_{++} + p_{--}) \quad ; \quad p_- := p_{s\varphi} = \frac{1}{4i} (p_{++} - p_{--})$$

dann bekommt man für die Kraftkomponenten:

$$K_s^p = s^{-2} \cdot \partial_s (s^2 \cdot p_+) + \frac{1}{2} \partial_s p_{+-} + \partial_z p_{zs}$$

$$K_\varphi^p = s^{-2} \partial_s (s^2 \cdot p_-) + \partial_z p_{z\varphi}$$

$$K_z^p = s^{-1} \partial_s (s \cdot p_{sz}) + \partial_z p_{zz}$$

Benutzt man die Differentialeigenschaft der Besselfunktionen

$$J_{n-1}(x) = x^{-n} \frac{d}{dx} (x^n \cdot J_n(x))$$

so folgt aus (54)

$$K_s^p, K_y^p \propto J_1(k_x \cdot s)$$

$$K_z^p \propto J_0(k_x \cdot s)$$

Die Komponenten von \underline{p} haben also die richtige Ortsabhängigkeit.

Für das Weitere beschränken wir uns auf die Berechnung der Komponenten des Drucktensors, die in den Randbedingungen (52) vorkommen. Unter Benutzung von (55) erhält man als Rücktransformation:

$$(56) \quad p_{ss} = p_+ + \frac{1}{2} p_{+-}$$

$$p_{sy} = p_-$$

Es interessieren also p_+ , p_- , p_{+-} und p_{sz} . Es werden Koeffizienten π_\pm^ℓ definiert durch:

$$(57) \quad \begin{aligned} p_+ &= C \cdot J_2(k_x \cdot s) \cdot \sum_{\ell=1,2,3} \pi_\pm^\ell \cdot E_\ell^0 \\ p_{+-} &= C \cdot J_0(k_x \cdot s) \cdot \sum_{\ell=1,2,3} \pi_{+-}^\ell \cdot E_\ell^0 \\ p_{sz} &= C \cdot J_1(k_x \cdot s) \cdot \sum_{\ell=1,2,3} \pi_{sz}^\ell \cdot E_\ell^0 \end{aligned} \quad C := \frac{c \cdot M_0}{k}$$

Genau wie in 1.c.3. die entsprechenden Komponenten des Beweglichkeitstensors lassen sich die π_{kc}^{mn} für die anisotrope Maxwellverteilung (35) berechnen (Anhang 4). Definiert man mit den in (38) gegebenen $\langle \dots \rangle$ noch die dreifach indizierten Klammern

$$\langle \dots \rangle_{n,r,\pm} := \langle \dots \rangle_{n+r} \pm \langle \dots \rangle_{n-r}$$

dann bekommt man als Ergebnis:

$$\begin{aligned} \pi_+^s &= \frac{-\delta \cdot i \cdot e^{-\gamma}}{4 \cdot \beta_\pm^3} \left(\frac{\gamma}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ I_n \left(-\frac{\gamma}{2} \langle \odot \rangle_n + \langle \odot \rangle_{n,1,-} - \langle \odot \rangle_{n,2,-} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma}{4} I_n \left(2 \langle \odot \rangle_{n,2,-} - \langle \odot \rangle_{n,3,-} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\pi_{+}^{\psi} = \frac{e^{-\gamma}}{4\beta_{\perp}^3} (\gamma/2)^{\frac{1}{2}} \sum \left\{ I_n (-\langle \Theta \rangle_{n,1,+} + \langle \Theta \rangle_{n,2,+}) \right. \\ \left. + \gamma/4 I_n (-8\langle \Theta \rangle_n + 7\langle \Theta \rangle_{n,1,+} - 4\langle \Theta \rangle_{n,2,+} + \langle \Theta \rangle_{n,3,+}) \right\}$$

$$\pi_{+}^z = \frac{-d \cdot e^{-\gamma}}{4\beta_{\perp}^2} \sum \left\{ -2 I_n \cdot n \cdot \langle \Phi \rangle_n + \gamma/2 I_n (2\langle \Psi \rangle_n - \langle \Psi \rangle_{n,2,+} + 2\langle \Phi \rangle_{n,2,-} \right. \\ \left. + n\langle \Phi \rangle_n) - \gamma^2/4 (2\langle \Phi \rangle_{n,2,-} - \langle \Phi \rangle_{n,3,-}) \right\}$$

$$\pi_{-}^s = \frac{-d \cdot e^{-\gamma}}{4\beta_{\perp}^3} (\gamma/2)^{\frac{1}{2}} \sum \left\{ I_n (\langle \Theta \rangle_{n,1,+} - \langle \Theta \rangle_{n,2,+}) \right. \\ \left. + \gamma/4 I_n (-4\langle \Theta \rangle_n + \langle \Theta \rangle_{n,1,+} + 2\langle \Theta \rangle_{n,2,+}) \right\}$$

$$\pi_{-}^{\psi} = \frac{e^{-\gamma} \cdot i}{4\beta_{\perp}^3} (\gamma/2)^{\frac{1}{2}} \sum \left\{ I_n (-\frac{5}{2} n \langle \Theta \rangle_n + \langle \Theta \rangle_{n,1,-} - \langle \Theta \rangle_{n,2,-}) \right. \\ \left. + \gamma/4 I_n (4\langle \Theta \rangle_{n,2,-} - \langle \Theta \rangle_{n,3,-}) \right\}$$

$$\pi_{-}^z = \frac{-d \cdot e^{-\gamma} \cdot i}{4 \cdot \beta_{\perp}^2} \sum \left\{ \gamma/2 I_n \langle \Psi \rangle_{n,2,-} + \gamma I_n (\langle \Phi \rangle_{n,1,+} - \langle \Phi \rangle_{n,2,+}) \right. \\ \left. + \gamma^2/4 I_n (-4\langle \Phi \rangle_n + \langle \Phi \rangle_{n,1,+} + 2\langle \Phi \rangle_{n,2,+} - \langle \Phi \rangle_{n,3,+}) \right\}$$

(58)

$$\pi_{+-}^s = \frac{-d \cdot i \cdot e^{-\gamma}}{\beta_{\perp}^3} (\gamma/2)^{\frac{1}{2}} \sum \left\{ I_n (\langle \Theta \rangle_{n,1,-} - n \langle \Theta \rangle_n) + \gamma/4 I_n \cdot \langle \Theta \rangle_{n,2,-} \right\}$$

$$\pi_{+-}^{\psi} = \frac{e^{-\gamma}}{\beta_{\perp}^3} (\gamma/2)^{\frac{1}{2}} \sum \left\{ I_n (2\langle \Theta \rangle_n - \langle \Theta \rangle_{n,1,+}) + \gamma/4 I_n (-6\langle \Theta \rangle_n + \langle \Theta \rangle_{n,1,+} \right. \\ \left. - \langle \Theta \rangle_{n,2,+}) \right\}$$

$$\pi_{+-}^z = \frac{-d \cdot e^{-\gamma}}{\beta_{\perp}^2} \sum \left\{ I_n \langle \Psi \rangle_n + \gamma/2 I_n (\langle \Psi \rangle_{n,1,+} - 2\langle \Psi \rangle_n) \right. \\ \left. - n I_n \cdot \langle \Phi \rangle_n + \gamma/2 I_n (2n\langle \Phi \rangle_n - n\langle \Phi \rangle_{n,1,+} - \langle \Phi \rangle_{n,1,-}) \right\}$$

$$\pi_{sz}^s = \frac{-d \cdot e^{-\gamma}}{4\beta_{\perp}^2} \sum I_n (n \langle v_z \Theta \rangle_{n,1,-} + \langle v_z \Theta \rangle_{n,1,+})$$

$$\pi_{sz}^{\psi} = \frac{i \cdot e^{-\gamma}}{4\beta_{\perp}^2} \sum I_n (-2n \langle v_z \Theta \rangle_n + n \cdot \langle v_z \Theta \rangle_{n,1,+} + \langle v_z \Theta \rangle_{n,1,-})$$

$$\pi_{sz}^z = \frac{-d \cdot i \cdot e^{-\gamma}}{8\beta_{\perp}} (\gamma/2)^{\frac{1}{2}} \sum I_n \{ n \cdot \langle v_z \Phi \rangle_{n,1,-} + \langle v_z \Phi \rangle_{n,1,+} - \langle v_z \Psi \rangle_{n,1,-} \}$$

An dieser Stelle wurden wieder Faktoren $(-\mathcal{J})$ eingeführt. Es ist klar, daß alle π_{sm}^e in gleicher Weise vom Ladungsvorzeichen abhängen wie M_{se} ; denn π_{sm}^e geht aus M_{se} hervor durch eine weitere Multiplikation des Integranden in M_{se} mit v_m , die nicht vom Ladungsvorzeichen abhängt. Argument der Besselfunktionen ist überall γ . Summiert wird von $n = -\infty$ bis $n = +\infty$. Verwendet man die Reihendarstellung der modifizierten Besselfunktionen

$$\bar{I}_n(\gamma) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\gamma/2)^{n+2r}}{(n+r)!} \quad ; \quad n \geq 0 \quad ; \quad \bar{I}_{-n} = \bar{I}_n$$

so kann man die Glieder niedrigster Ordnung in γ in den direkt ablesen:

$$\pi_+^s = \frac{-i \cdot \mathcal{J}}{4 \cdot \beta_1^3} (\gamma/2)^{\frac{1}{2}} \cdot \{ \langle \Theta \rangle_{0,1,-} - \langle \Theta \rangle_{0,2,-} \}$$

$$\pi_+^y = \frac{1}{4 \cdot \beta_1^3} (\gamma/2)^{\frac{1}{2}} \{ \langle \Theta \rangle_{0,2,+} - \langle \Theta \rangle_{0,1,+} \}$$

$$\pi_+^z = \frac{-\mathcal{J}}{4 \cdot \beta_1^2} \{ \gamma/2 (z \langle \Psi \rangle_0 - \langle \Psi \rangle_{0,2,+}) - \gamma \langle \Phi \rangle_{0,1,-} + \gamma \langle \Phi \rangle_{0,2,-} \}$$

$$(59) \quad = \frac{-\mathcal{J} \cdot \gamma}{4 \cdot \beta_1^2} \{ \langle \Psi \rangle_0 - \frac{1}{2} \langle \Psi \rangle_{0,2,+} - \langle \Phi \rangle_{0,1,-} + \langle \Phi \rangle_{0,2,-} \}$$

$$\pi_-^s = \mathcal{J} \cdot \pi_+^y$$

$$\pi_-^y = -\mathcal{J} \cdot \pi_+^s$$

$$\pi_-^z = \frac{-i \cdot \mathcal{J}}{4 \cdot \beta_1^2} \{ \gamma/2 \langle \Psi \rangle_{0,2,-} + \gamma (\langle \Phi \rangle_{0,1,+} - \langle \Phi \rangle_{0,2,+}) \}$$

$$\pi_{+-}^s = \frac{-i \cdot d}{\beta_1^3} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \langle \Theta \rangle_{0,1,-} \right\}$$

$$\pi_{+-}^{\psi} = \frac{1}{\beta_1^3} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ 2 \cdot \langle \Theta \rangle_0 - \langle \Theta \rangle_{0,1,+} \right\}$$

$$\pi_{+-}^z = \frac{-d}{\beta_1^2} \left\{ (1-\gamma) \langle \Psi \rangle_0 + \frac{\delta}{2} (-2 \langle \Psi \rangle_0 + \langle \Psi \rangle_{0,1,+}) - \gamma \langle \Phi \rangle_{0,1,-} \right\}$$

$$\pi_{sz}^s = \frac{-d}{4\beta_1^2} \cdot \left\{ (1-\gamma) \langle v_z \cdot \Theta \rangle_{0,1,+} + \gamma \langle v_z \Theta \rangle_{0,z,+} \right\}$$

$$\pi_{sz}^{\psi} = \frac{i}{4\beta_1^2} \cdot \left\{ (1-\gamma) \langle v_z \Theta \rangle_{0,1,-} + \gamma (-\langle v_z \Theta \rangle_{0,1,-} + \langle v_z \Theta \rangle_{0,z,-}) \right\}$$

$$\pi_{sz}^z = \frac{-i \cdot d}{8\beta_1} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \langle v_z \cdot \Phi \rangle_{0,1,+} - \langle v_z \Psi \rangle_{0,1,-} \right\}$$

d.) Diskussion der Dispersionsbeziehung

Mit diesen Koeffizienten π_{mn}^{ℓ} lassen sich die im Gleichungssystem (46) noch unbestimmten Koeffizienten a_{mn} leicht angeben. Zunächst ist mit (20') die Massengeschwindigkeit \underline{v} per definitionem:

$$\underline{v} = \frac{\sum_{\alpha} (N_{\alpha} \cdot m \cdot \langle \underline{v} \rangle)_{\alpha}}{\sum_{\alpha} N_{\alpha} \cdot m_{\alpha}} = \frac{1}{s_0} \cdot \frac{c}{\beta_1^{\nu}} \sum_{\alpha} (N_{\alpha} \cdot m \cdot \underline{E}_{\alpha}^{\nu})_{\alpha}$$

Damit folgt aus den Gleichungen (52): ($\nu = 1, 2, 3$; $\nu' = 4, 5$)

$$(60a) \quad q_{\nu\nu'} = \sum_{\ell=1,2,3} \sum_{\alpha} \left(\frac{q \cdot N_{\alpha}}{k} \left(\pi_{sz}^{\ell} - \frac{k^2}{\omega} \frac{p_{z0} - p_{z10}}{s_0} \frac{1}{\Omega} \cdot M_{sz} \right)_{\alpha} \cdot J_1(k_{\perp\nu} s_0) \cdot E_e^{p_0} \right)$$

$$a_{\nu\nu'} = 0$$

$$a_{2v} = \sum_{\ell=s,y,z} \sum_{\alpha} \left(\pi_{-}^{\ell} \cdot \frac{q \cdot N_0}{k} \right)_{\alpha} \cdot E_e^{p_0} \cdot J_z(k_{\perp v} \cdot s_0)$$

(60b)

$$a_{2v'} = 0$$

$$a_{3v} = \sum_{\ell=s,y,z} \sum_{\alpha} \left\{ \left(\frac{q \cdot N_0}{k} \cdot \left[\pi_{+}^{\ell} \cdot J_z(k_{\perp v} \cdot s_0) + \frac{1}{2} \pi_{+}^{\ell} \cdot J_0(k_{\perp v} \cdot s_0) \right] \right)_{\alpha} \right. \\ \left. - \frac{i \cdot k_{\perp v} \cdot c}{4\pi \cdot \omega} \delta_{\ell y} \cdot B_0^p \cdot J_0(k_{\perp v} \cdot s_0) \right\} E_e^{p_0}$$

(60c)

$$a_{34} = 0$$

$$a_{35} = \frac{i \cdot x \cdot c}{4\pi \cdot \omega} \cdot B_0^v \cdot [I_0(x \cdot s_0) + C_2 K_0(x \cdot s_0)]$$

$$a_{4v} = \left\{ \left[\frac{1}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{B_0^v}{B_0^p} \right) \sum_{\ell} \sum_{\alpha} (N_0 \cdot m \cdot M_{se})_{\alpha} \cdot E_e^{p_0} \right] - 1 \right\} \cdot J_1(k_{\perp v} \cdot s_0)$$

(60d) $a_{44} = 0$

$$a_{45} = (I_1(x \cdot s_0) + C_2 K_1(x \cdot s_0))$$

$$a_{5v} = J_0(k_{\perp v} \cdot s_0) \cdot E_z^{p_0}$$

(60e) $a_{54} = - (I_0(x \cdot s_0) + C_1 \cdot K_0(x \cdot s_0))$

$$a_{55} = 0$$

Die Matrix der a_{mn} hat also die Gestalt:

$$(61) \quad \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & 0 \end{array}$$

In den a_{mn} sind die E_c^{ν} , π_{ij}^{ℓ} und $M_{5\ell}$ noch Funktionen von ω , k und $k_{\perp\nu}$, wobei die $k_{\perp\nu}$ als Funktionen von ω und k aufzufassen sind. Die Lösung der Dispersionsbeziehung $\text{Det}(a_{mn}) = 0$ wird für den allgemeinen Fall nur numerisch möglich sein. Einfachere Dispersionsbeziehungen erhält man, wenn man sich auf kleinere Gültigkeitsbereiche beschränkt. Als Beispiel wird die Näherung betrachtet, die nur Glieder erster Ordnung in ω/Ω und in γ berücksichtigt ("magnetosonic regime").

Die π_{mn}^{ℓ} und die Komponenten des Beweglichkeitstensors $M_{\ell m}$ werden berechnet unter Benutzung der in (59) gegebenen Entwicklung nach Potenzen von γ und der von STIX⁷⁾ berechneten entsprechenden Ausdrücke für $M_{\ell m}$. Falls

$$|\alpha_n| := \left| \left(\frac{m}{2 \times T_n} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\omega + n\Omega}{k} \right| \gg 1$$

dann kann man für die Plasmadispersionsfunktion $F_0(\alpha_n)$ die Entwicklung benutzen¹⁸⁾

$$F_0(\alpha_n) \approx \frac{i}{\alpha_n} \left(1 + \frac{1}{2 \cdot \alpha_n^2} + \dots \right)$$

Mit dieser Entwicklung werden in Anhang 4 die π_{mn}^e und M_{lm} berechnet. $F_0(\alpha_0)$ wird als von der Ordnung 1 betrachtet. Wenn man nämlich für $|\alpha_0| \gg 1$, d.h. Phasengeschwindigkeit \gg thermische Geschwindigkeit, auch für $F_0(\alpha_0)$ die obige Entwicklung benutzt, so sind π_{mn}^e und $\Omega^{-1} \cdot M_{lm}$ Reihen aus Gliedern der Form $\gamma^{q+\frac{r}{2}} \cdot (\omega/\Omega)^p \cdot F_0(\alpha_0)$; $p, q \geq 0$ ganz; $r = 0$ oder 1. (Im Dielektrizitätstensor tritt nur $\Omega^{-1} \cdot M_{lm}$ auf) Die Tabelle 2 gibt die niedrigste Ordnung an, die in dem betreffenden Element π_{mn}^e bzw. $\Omega^{-1} \cdot M_{lm}$ vorkommt. Da die Glieder von der Ordnung 1 über α_0 auch noch von der Temperatur abhängen, ist der Grenzübergang zur Temperatur 0 nicht dasselbe wie $\gamma \rightarrow 0$. Dagegen bedeutet der Grenzübergang $\Omega \rightarrow \infty$ auch $\gamma \rightarrow 0$.

	1	$\gamma^{1/2}$	γ
1	π_{+-}^z $\Omega^{-1} \cdot M_{zz}$	π_{+-}^y $\Omega^{-1} \cdot M_{yz}$ $\Omega^{-1} \cdot M_{zy}$	π_{+}^z $\Omega^{-1} \cdot M_{yy}$
ω/Ω	π_{sz}^y $\Omega^{-1} \cdot M_{sy}$ $\Omega^{-1} \cdot M_{ys}$	$\pi_{+}^s, \pi_{-}^y, \pi_{+-}^s, \pi_{sz}^z$ $\Omega^{-1} \cdot M_{sz}$ $\Omega^{-1} \cdot M_{zs}$	π_{-}^z
ω^2/Ω^2	π_{sz}^y $\Omega^{-1} \cdot M_{ss}$	π_{+}^y, π_{-}^s	

Tabelle 2

Für den betrachteten Gültigkeitsbereich läßt sich die Gleichung $\text{Det } \underline{\underline{L}} = 0$ aufspalten in zwei Gleichungen⁷⁾:

$$(62) \quad -n_z^2 + \varepsilon_{ss} = 0$$

$$(63) \quad -n_z^2 - n_{\perp}^2 + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \frac{\varepsilon_{\varphi z}^2}{\varepsilon_{zz}} = 0$$

Gleichung (62) beschreibt die um Temperaturglieder korrigierte Alfvènsche Verscherungswelle. Diese Dispersionsbeziehung ist -, wie man Tabelle 2 entnimmt, - unabhängig von k_{\perp} . Die Dispersionsbeziehung der Kompressionswelle (63) ist dagegen eine Gleichung ersten Grades in k_{\perp}^2 . Die Gleichung $\text{Det } \underline{\underline{L}} = 0$ hat also nur eine Lösung k_{\perp}^2 . Dementsprechend sind $A_2 = A_3 = 0$. Bleibt zu zeigen: Auch die Zahl der Randbedingungen reduziert sich um zwei. Es wird nachgewiesen, daß in der betrachteten Näherung die Randbedingungen (52a) und (52b) identisch erfüllt sind, d.h.: $a_{\mu\nu} \equiv 0$ ($\mu = 1, 2$).

Nach Tabelle 2 sind alle in a_{21} auftretenden Glieder von höherer Ordnung. Es ist also in dieser Näherung $a_{21} \equiv 0$. In a_{11} sind alle Glieder von höherer Ordnung bis auf π_{sz}^{φ} und $\Omega^{-1} \cdot M_{s\varphi}$. Es muß also noch bewiesen werden, daß in erster Ordnung in ω/Ω gilt:

$$\sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha} \cdot N_{0\alpha}}{k} \cdot \left(\pi_{sz}^{\varphi} - \frac{k^2}{\omega} \cdot \frac{\rho_{10} - \rho_{20}}{\varepsilon_0} \cdot \Omega^{-1} \cdot M_{s\varphi} \right)_{\alpha} = 0$$

Nach Anhang 4 ist:

$$\frac{k^2}{\omega \cdot \Omega} \cdot M_{s\varphi} \approx \frac{k^2}{\omega^2} \cdot \frac{\omega}{\Omega}$$

$$\pi_{sz}^{\varphi} \approx \frac{k^2}{\omega^2} \left(\frac{x T_{\perp}}{m} \right) \cdot \left(1 - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \right) \cdot \frac{\omega}{\Omega} = \frac{k^2}{\omega} \cdot x \left(T_{\perp} - T_{\parallel} \right) \frac{c}{q \cdot B_0}$$

Da das Plasma neutral sein soll, gilt $N_{0i} q_i = N_{0e} q_e$. Es ist also:

$$\frac{k^2}{\omega} \left(\frac{\rho_{10} - \rho_{110}}{S_0} \right) \sum_{\alpha} \left(\Omega_{\alpha}^{-1} \cdot M_{34} \right)_{\alpha}$$

$$= \frac{k^2}{\omega} \cdot x \cdot \frac{\{ N_{0i} \cdot (T_1 - T_n)_i + N_{0e} (T_1 - T_n)_e \} \cdot c}{\{ N_{0i} \cdot m_i + N_{0e} \cdot m_e \} \cdot B_0} \left(\frac{m_i}{q_i} + \frac{m_e}{q_e} \right) = \frac{k^2 \cdot c \cdot x}{\omega \cdot B_0} \sum_{\alpha} q_{\alpha}^{-1} (T_1 - T_n)_{\alpha}$$

Daher ist auch $a_{11} \equiv 0$. Dagegen treten in a_{31} und a_{41} Glieder der Ordnung 1 auf. In Übereinstimmung mit ³⁾ bleiben also zur Bestimmung der drei Konstanten A_1 , A_4 und A_5 die drei Randbedingungen (52c), (52d) und (52e). Und die Dispersionsbeziehung lautet $a_{31} \cdot a_{45} - a_{35} \cdot a_{41} = 0$, falls $a_{54} \neq 0$, d.h. $s_0 \neq S_0$:

Herrn Prof. Dr. A. Schlüter danke ich für sein wohlwollendes Interesse an dieser Arbeit und zahlreiche fördernd-kritische Anmerkungen. Den Herren Dr. H. Tasso und Dr. H. Wimmel bin ich für viele klärende Diskussionen zu Dank verpflichtet.

Anhang 1

Es wird die Ungleichung (20)

$$1.1) \quad 1 \gg \left| \frac{\gamma \cdot \partial_t V \cdot \tau \cdot \mathcal{N}_0}{6 Q} \right| = \left| \frac{\gamma \cdot \partial_t V \cdot \mathcal{N}_0}{6 \left[\frac{1}{2} (k \cdot \partial_t V + \gamma |V_0| \mathcal{N}_0) \right]^{\frac{3}{2}}} \right|$$

nachgewiesen für $f := |z - z_R| \geq k^{-1}$. Da für $z < z_R$ $\mathcal{N}(z) = \omega (1 + \gamma \cdot f)$, gilt nach der Resonanzbedingung (12) für die Resonanzgeschwindigkeit V_0 am Ort $f \geq k^{-1}$

$$|V_0| \geq \frac{\gamma \cdot \omega}{k^2} =: |V_{10}|_{\min}$$

Das Maximum der rechten Seite von (A1.1) liegt bei

$$\partial_t V = z \cdot \frac{\gamma}{k} |V_0| \cdot \mathcal{N}_0$$

Und mit $V_0 \geq |V_{10}|_{\min}$ bekommt man

$$\left| \frac{\gamma \cdot \partial_t V \cdot \tau \cdot \mathcal{N}_0}{6 Q} \right| \leq \frac{1}{3 \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

Als zweites ist die Ungleichung (21)

$$1 \gg \left| \frac{k \cdot \partial_t V \cdot \tau}{\mathcal{N}_0} \right|$$

zu beweisen. Es ist

$$\begin{aligned} \left| \frac{k \cdot \partial_t V \cdot \tau}{\mathcal{N}_0} \right| &= \left| \frac{k \cdot \partial_t V}{\mathcal{N}_0 \left[\frac{1}{2} (k \cdot \partial_t V + \gamma |V_0| \mathcal{N}_0) \right]^{\frac{1}{2}}} \right| \\ &< \frac{\sqrt{2} |k \cdot \partial_t V|^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{N}_0} \leq \left| \frac{\gamma}{k} \right|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{k^2 V_{10}^2}{\mathcal{N}_0} + \frac{V_{10} \cdot k}{\omega} \cdot \frac{|A| \cdot k^2}{\gamma \cdot \mathcal{N}_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \ll 1 \end{aligned}$$

Denn $|\gamma/k| \ll 1$ wurde vorausgesetzt, und da die Phasengeschwindigkeit von der Ordnung der Lichtgeschwindigkeit ist, ist $v_{10} \cdot k/\omega < 1$.

Nach (25) ist aber auch

$$\left| \frac{k^2 \cdot A}{2 \cdot \omega^2 \cdot \gamma} \right| \ll \left| \frac{\gamma}{k} \right|^{\frac{1}{2}}$$

Ist $\underline{w}' = (w'_x, w'_y, w'_z)$ die Geschwindigkeit eines Elektrons längs seiner Bahn im Gleichgewichtsfeld \underline{B}_0 , so muß \underline{w}' der Differentialgleichung genügen :

$$\Omega^{-1} \cdot \frac{d\underline{w}'}{dt'} = -\underline{w}' \times \hat{z} \quad \hat{z} = \frac{\underline{B}_0}{B_0}$$

In den in II.1.c.) eingeführten rotierenden Koordinaten ($w'_\pm = w'_x \pm w'_y$) ist dieses Differentialgleichungssystem :

$$\frac{d}{dt'} w'_\pm = \pm i \Omega \cdot w'_\pm \quad \frac{d}{dt'} w'_z = 0$$

Die Lösung mit der Anfangsbedingung $\underline{w}'(t' = t) = \underline{w}$ ist :

$$w'_\pm = w_\pm \cdot e^{\mp i \Omega \tau} \quad ; \quad w'_z = w_z \quad \text{mit } \tau = t - t'$$

Mit $\underline{r}' = x \pm iy$ folgt aus $\frac{d}{dt'} \underline{r}' = \underline{w}'$ mit der Anfangsbedingung $\underline{r}'(t' = t) = \underline{r}$:

$$r'_\pm = \mp w_\pm \frac{i}{\Omega} (e^{\mp i \Omega \tau} - 1) + r_\pm$$

$$z' = -w_z \cdot \tau + z$$

Geht man jetzt zu Zylinderkoordinaten $(s, \varphi, z), (v_s, v_\varphi, v_z)$ über durch

$$x = s \cdot \cos \varphi \quad ; \quad y = s \cdot \sin \varphi$$

$$r_\pm = s \cdot e^{\pm i \varphi} \quad ; \quad w_\pm = v_\pm \cdot e^{\pm i \varphi} \quad \text{mit } v_\pm = v_s \pm i v_\varphi$$

so folgt :

$$w_+ \cdot w_- = v_+ \cdot v_- = v_s^2$$

$$s'^2 = r'_+ \cdot r'_- = \left[-w_+ \frac{i}{\Omega} (e^{-i \Omega \tau} - 1) + r_+ \right] \cdot \left[w_- \frac{i}{\Omega} (e^{+i \Omega \tau} - 1) + r_- \right]$$

$$= s^2 + \frac{1}{\Omega^2} v_s^2 (e^{-i \Omega \tau} - 1)(e^{+i \Omega \tau} - 1) + \frac{2s}{\Omega} \operatorname{Im}\{v_s (e^{-i \Omega \tau} - 1)\}$$

$$= s^2 + \frac{2v_s^2}{\Omega^2} (1 - \cos \Omega \tau) - \frac{2s}{\Omega} (v_s \sin \Omega \tau + v_\varphi (1 - \cos \Omega \tau))$$

Und aus

$$v'_\pm = w'_\pm e^{\mp i \varphi'} = w'_\pm \cdot \frac{r'_\mp}{s'}$$

folgt :

$$s' v'_\pm = w'_\pm e^{\mp i \Omega \tau} \left(\pm \frac{i}{\Omega} w'_\mp (e^{\pm i \Omega \tau} - 1) + \hat{r}'_\mp \right)$$

$$= s \cdot v_\pm \cdot e^{\mp i \Omega \tau} \mp \frac{v_s^2}{\Omega} i (e^{\mp i \Omega \tau} - 1)$$

Anhang 3

Nach (23) und (28) ist :

$$\begin{aligned}
 .1) \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{v_j}{s'} (E_+^\circ \cdot s' \cdot v'_- + E_-^\circ \cdot s' \cdot v'_+) \frac{F_1}{2} \cdot \mathcal{J}_1(k_1 \cdot s') + v_j \cdot E_z^\circ \cdot f_{0z} \cdot \mathcal{J}_0(k_1 \cdot s') \right. \\
 & \left. - \frac{i \cdot k_1}{\omega} \cdot \frac{v_j}{s'} (s' \cdot v'_- + s' \cdot v'_+) \frac{F_2}{2} \cdot E_z^\circ \cdot \mathcal{J}_1(k_1 \cdot s') \right\} dv'_- \cdot dv'_+ \\
 & =: \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{s'} \mathcal{J}_1(k_1 \cdot s') \cdot (M_{j+} E_+^\circ + M_{j-} E_-^\circ + M_{jz} E_z^\circ) + \mathcal{J}_0(k_1 \cdot s') \bar{m}_{jz} \cdot E_z^\circ \right\} d\alpha \cdot dl
 \end{aligned}$$

Es sei :

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_1(l, v_z) &:= F_1(l^2 \mathcal{D}, v_z) \\
 \tilde{F}_2(l, v_z) &:= F_2(l^2 \mathcal{D}, v_z) \\
 \tilde{f}_{0z}(l, v_z) &:= f_{0z}(l^2 \mathcal{D}, v_z)
 \end{aligned}$$

Da $\frac{\partial(v_3, v_4)}{\partial(l, \alpha)} = \mathcal{D} \cdot l$ folgt für die linke Seite von (A3.1) :

$$\begin{aligned}
 \text{l.S.} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{v_j}{s'} \mathcal{D} \cdot l \cdot \mathcal{J}_1(k_1 \cdot s') \left[\frac{\tilde{F}_1}{2} (E_+^\circ \cdot s' \cdot v'_- + E_-^\circ \cdot s' \cdot v'_+) - \frac{i \cdot k_1}{\omega} (s' v'_- + s' v'_+) \frac{\tilde{F}_2}{2} E_z^\circ \right] \right. \\
 \left. + v_j \mathcal{D} \cdot l \cdot \mathcal{J}_0(k_1 \cdot s') \cdot \tilde{f}_{0z} \cdot E_z^\circ \right\} d\alpha \cdot dl
 \end{aligned}$$

Daraus liest man ab :

$$\begin{aligned}
 M_{\pm\pm} &= \frac{1}{2} \mathcal{D} \cdot l \cdot v_{\pm} \cdot s' \cdot v'_{\pm} \tilde{F}_1 = \frac{1}{2} \mathcal{D} \cdot l \cdot v_{\pm} \left(s \cdot v_{\pm} e^{\pm i \Omega t} \pm \frac{v_{\pm} \cdot v_{\pm}}{\Omega} i (e^{\pm i \Omega t} - 1) \right) \cdot \tilde{F}_1 \\
 &= \frac{1}{2} \mathcal{D}^2 l^3 e^{\pm i \Omega t} (s - l e^{\pm i \alpha}) \cdot \tilde{F}_1 =: H_{\pm\pm} \cdot (s - l e^{\pm i \alpha})
 \end{aligned}$$

nach (26), (26'), Anhang 1 und wegen

$$.2) \quad \frac{2 \cdot \sin \frac{\Omega t}{2}}{\Omega} \cdot v_{\pm} = l \cdot e^{\pm (i \alpha + i \frac{\Omega t}{2})}$$

Genauso folgt :

$$\begin{aligned}
 M_{\pm\mp} &= \frac{1}{2} \mathcal{D} \cdot l \cdot v_{\pm} \cdot s' \cdot v'_{\mp} \tilde{F}_1 = \frac{1}{2} \mathcal{D} \cdot l \cdot v_{\pm} \left(s \cdot v_{\mp} e^{\mp i \Omega t} + \frac{v_{\pm}^2}{\Omega} i (e^{\mp i \Omega t} - 1) \right) \cdot \tilde{F}_1 \\
 &= \frac{1}{2} \mathcal{D}^2 l^3 e^{\pm i \alpha} (s \cdot e^{\pm i \alpha} - l) \cdot \tilde{F}_1 =: H_{\pm\mp} \cdot e^{\pm i \alpha} (s \cdot e^{\pm i \alpha} - l)
 \end{aligned}$$

$$M_{z\pm} = \frac{1}{2} D \cdot l \cdot s' v_{\pm}' \cdot v_z \cdot \tilde{F}_1 \quad - 69 -$$

$$= \frac{1}{2} D^2 \cdot l^2 \cdot v_z \cdot \tilde{F}_1 \cdot \frac{2 \sin \frac{\Omega \tau}{2}}{\Omega} (s e^{\mp i \alpha} - l) e^{\pm i \frac{\Omega \tau}{2}} =: H_{z\pm} (s e^{\mp i \alpha} - l)$$

$$\bar{M}_{iz} = - \frac{i k_{\pm}}{\omega} (M_{i+} + M_{i-}) \cdot \frac{\tilde{F}_z}{\tilde{F}_1}$$

$$\bar{M}_{\pm z} = v_{\pm} \tilde{f}_{0z} \cdot D \cdot l = l^2 \cdot D^2 \cdot \frac{2 \sin \frac{\Omega \tau}{2}}{\Omega} e^{\pm i (\alpha + \frac{\Omega \tau}{2})} \cdot \tilde{f}_{0z}$$

$$= \mp l^2 \cdot D^2 \cdot \frac{i}{\Omega} \tilde{f}_{0z} (e^{\pm i \Omega \tau} - 1) e^{\pm i \alpha} = \bar{H}_{\pm z} \cdot e^{\pm i \alpha}$$

$$\bar{M}_{zz} = v_z \cdot \tilde{f}_0 \cdot D \cdot l$$

In (33) sind T_{ij} definiert durch

$$3.3) \quad M_{ij} = 2\pi \cdot \Omega \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T_{ij} \cdot e^{i(\omega - kv_z)} dv_z d\tau$$

Aus der Definition (20') der M_{ij} folgt zusammen mit (31) und der Tabelle 1 :

$$\begin{aligned} T_{\pm\pm} \cdot \mathcal{J}_1(k_{\pm} s) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{s'} \mathcal{J}_1(k_{\pm} s') \cdot M_{\pm\pm} d\alpha \cdot dl \\ &= \mathcal{J}_1(k_{\pm} s) \int_0^{\infty} \frac{1}{2} D^2 \cdot l^3 \cdot e^{\pm i \Omega \tau} \cdot \tilde{F}_1 \cdot \mathcal{J}_0(k_{\pm} l) \cdot dl \end{aligned}$$

Mit $v_1^2 = D \cdot l^2$ folgt weiter :

$$T_{\pm\pm} = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} D^2 l^3 e^{\pm i \Omega \tau} \cdot \tilde{F}_1 \cdot \mathcal{J}_0(k_{\pm} l) dl = \int_0^{\infty} e^{\pm i \Omega \tau} \cdot \frac{1}{2} v_1^3 \cdot \mathcal{J}_0\left(\frac{k_{\pm} v_1}{D^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot F_1(v_1^2, v_z) \cdot dv_1$$

Genauso folgt :

$$T_{\pm\mp} = - \int_0^{\infty} \frac{1}{2} D^2 l^3 \cdot \mathcal{J}_2(k_{\pm} l) \cdot \tilde{F}_1(l^2, v_z) \cdot dl = - \int_0^{\infty} \frac{1}{2} v_1^3 \cdot \mathcal{J}_2\left(\frac{k_{\pm} v_1}{D^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot F_1(v_1^2, v_z) \cdot dv_1$$

$$T_{z\pm} = \pm \int_0^{\infty} v_z \cdot \frac{i}{\Omega} (e^{\pm i\Omega\tau} - 1) \frac{1}{2} D^2 \ell^2 \cdot J_1(k_1 \ell) \cdot \tilde{F}_1(\ell^2, v_z) \cdot d\ell$$

$$= \pm \int_0^{\infty} v_z \frac{i}{\Omega} (e^{\pm i\Omega\tau} - 1) \cdot \frac{1}{2} v_1^2 \cdot D^{\frac{1}{2}} \cdot J_1\left(\frac{k_1 v_1}{D^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot F_1(v_1^2, v_z) \cdot dv_1$$

$$T_{\pm z} = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} D^2 \ell^2 \cdot \left[\pm \frac{2i}{\Omega} (1 - e^{\pm i\Omega\tau}) \tilde{f}_{0z}(\ell^2, v_z) \cdot J_1(k_1 \ell) - \frac{i k_1}{\omega} \ell \cdot \tilde{F}_2(e^{\pm i\Omega\tau} \cdot J_0(k_1 \ell) - J_2(k_1 \ell)) \right] \cdot d\ell$$

$$= \int_0^{\infty} \left\{ \pm \frac{i}{\Omega} (1 - e^{\pm i\Omega\tau}) D^{\frac{1}{2}} \cdot f_{0z} \cdot v_1^2 \cdot J_1\left(\frac{k_1 v_1}{D^{\frac{1}{2}}}\right) - \frac{i k_1}{\omega} \cdot \frac{1}{2} v_1^3 \cdot F_2(e^{\pm i\Omega\tau} J_0 - J_2) \right\} dv_1$$

$$T_{zz} = \int_0^{\infty} v_z \cdot \left[D \ell \cdot J_0(k_1 \ell) \cdot \tilde{f}_{0z} + \frac{i k_1}{\omega} \frac{\sin \Omega \tau}{\Omega} \ell^2 D^2 \cdot J_1(k_1 \ell) \tilde{F}_2 \right] d\ell$$

$$= \int_0^{\infty} v_z \left[v_1 J_0\left(\frac{k_1 v_1}{D^{\frac{1}{2}}}\right) f_{0z} + \frac{i k_1}{\omega} \frac{\sin \Omega \tau}{\Omega} D^{\frac{1}{2}} v_1^2 \cdot J_1\left(\frac{k_1 v_1}{D^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot F_2 \right] dv_1$$

Wenn man die Definitionen (35a - c) und (36) benutzt, nehmen für die Maxwell-Verteilung (35) die T_{ij} die folgende Form an :

$$T_{\pm\pm} = \frac{\beta_z^2}{2\pi} \odot \cdot G(0,4) \cdot e^{\pm i\Omega\tau}$$

$$T_{\pm\mp} = -\frac{\beta_z^2}{2\pi} \oplus \cdot G(2,4)$$

$$T_{z\pm} = \pm \frac{\beta_z^2}{2\pi} \odot \cdot G(1,3) \frac{i v_z}{\Omega} (e^{\pm i\Omega\tau} - 1) \cdot D^{\frac{1}{2}}$$

$$T_{\pm z} = \frac{\beta_z^2}{2\pi} \left\{ \pm \Psi \cdot G(1,3) \frac{2i}{\Omega} (1 - e^{\pm i\Omega\tau}) D^{\frac{1}{2}} + \frac{i k_1}{\omega} \Phi (e^{\pm i\Omega\tau} G(0,4) - G(2,4)) \right\}$$

$$T_{zz} = \frac{\beta_z^2}{\pi} v_z \cdot \left\{ \Psi \cdot G(0,2) - \frac{i k_1}{\omega} \frac{\sin \Omega \tau}{\Omega} D^{\frac{1}{2}} \Phi \cdot G(1,3) \right\}$$

Nach RYSHIK-GRADSTEIN : Tafeln Σ , Π , \int ist (nach Berichtigung eines offensichtlichen Fehlers) :

$$G(p,q) := \int_0^{\infty} J_p(ax) \cdot e^{-\beta^2 x^2} \cdot x^{q-1} dx$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \left(\frac{q}{2\beta^2}\right)^p}{2\beta^2 \cdot \Gamma(p+1)} \cdot \exp\left\{-\frac{q^2}{4\beta^2}\right\} \cdot {}_1F_1\left(\frac{p-q}{2} + 1; p+1; \frac{q^2}{4\beta^2}\right)$$

mit der konfluenten hypergeometrischen Reihe

$${}_1F_1(x, y, z) = 1 + \frac{x}{y} \frac{z}{1!} + \frac{x(x+1)}{y(y+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{x(x+1)(x+2)}{y(y+1)(y+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Es ist $a^2 := k_1^2 D^{-1}$ und $\frac{a^2}{4\beta_1^2} = \frac{\Omega^2}{2D} \cdot \gamma = \gamma (1 - \cos \Omega \tau)$

$$\exp\left\{-\frac{a^2}{4\beta_1^2}\right\} = e^{-\gamma(1 - \cos \Omega \tau)} = e^{-\gamma} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{I}_n(\gamma) \cdot e^{i n \Omega \tau}$$

Damit ist dann :

$$\begin{aligned} G(0,4) &= \frac{1}{2\beta_1^4} [1 - \gamma(1 - \cos \Omega \tau)] \cdot e^{-\gamma} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{I}_n(\gamma) e^{i n \Omega \tau} \\ &= \frac{e^{-\gamma}}{2\beta_1^4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i n \Omega \tau} \left((1-\gamma) \bar{I}_n + \frac{\gamma}{2} \bar{I}_{n+1} + \frac{\gamma}{2} \bar{I}_{n-1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(2,4) &= \frac{1}{2\beta_1^4} \cdot \gamma (1 - \cos \Omega \tau) e^{-\gamma} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{I}_n(\gamma) e^{i n \Omega \tau} \\ &= \frac{e^{-\gamma}}{2\beta_1^4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i n \Omega \tau} \left(\gamma \bar{I}_n - \frac{\gamma}{2} \bar{I}_{n+1} - \frac{\gamma}{2} \bar{I}_{n-1} \right) \end{aligned}$$

$$G(1,3) = \frac{1}{2\beta_1^3} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\Omega}{D^{\frac{1}{2}}}\right) e^{-\gamma} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{I}_n(\gamma) \cdot e^{i n \Omega \tau}$$

$$G(0,2) = \frac{1}{2\beta_1^2} e^{-\gamma} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{I}_n(\gamma) \cdot e^{i n \Omega \tau}$$

Mit (A3.3) und (A3.4) und der Definition (38)

$$\langle X \rangle_n := k \int_{-\infty}^{+\infty} X(v_z) \int_0^{\infty} e^{i(n\Omega - k \cdot v_z + \omega) \tau} d\tau dv_z$$

folgt dann für die Elemente des Beweglichkeitstensors der Elektronen :

$$M_{\pm\pm} = \frac{\Omega \cdot e^{-\gamma}}{2\beta_1^2 \cdot k} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[(1-\gamma) \bar{I}_{n\pm 1} + \frac{\gamma}{2} (\bar{I}_n + \bar{I}_{n\pm 2}) \right] \langle \Theta \rangle_n$$

$$M_{\pm\mp} = -\frac{\Omega \cdot e^{-\gamma}}{2\beta_1^2 \cdot k} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\gamma \cdot \bar{I}_n - \frac{\gamma}{2} (\bar{I}_{n+1} + \bar{I}_{n-1}) \right] \langle \Theta \rangle_n$$

$$M_{z\pm} = \mp \frac{e^{-y}}{4\beta_L^2 \cdot k} i \cdot k_x \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (I_n - I_{n\mp 1}) \langle v_z \Theta \rangle_n$$

$$M_{\pm z} = \frac{e^{-y}}{2\beta_L^2 \cdot k} \cdot i \cdot k_x \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\bar{I}_{n\mp 1} + \frac{\cancel{y}}{2} (I_{n\mp 2} + I_{n\pm 1} - I_n - I_{n\mp 1}) \right] \langle \phi \rangle_n \right. \\ \left. \mp [I_{n\mp 1} - I_n] \langle \Psi \rangle_n \right\}$$

$$M_{zz} = \frac{\Omega \cdot e^{-y}}{k} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \bar{I}_n \langle v_z \bar{\Psi} \rangle_n + \frac{\cancel{y}}{2} (I_{n+1} - I_{n-1}) \langle v_z \phi \rangle_n \right\}$$

Anhang 4

Die Berechnung der Komponenten des Drucktensors

1)
$$\tilde{p}_{ij} = p_{ij} \cdot e^{i\psi} := \langle v_i \cdot v_j \rangle \cdot N_0 \cdot m \quad ; \quad \psi = kz - \omega t$$

läßt sich auf einfache Weise auf die Berechnung des Beweglichkeits-tensors zurückführen. Es war

2)
$$\langle v_i \rangle = \frac{e}{m} e^{i\psi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \left[e^{i(\omega - kv_z)\tau} \cdot \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{s'} J_1(k_1 s') \cdot (\mu_{i+} E_+^0 + \mu_{i-} E_-^0 + \mu_{iz} E_z^0) + J_0(k_1 s') \bar{\mu}_{iz} E_z^0 \right\} d\alpha d\ell \right] dv_z \cdot d\tau$$

$$M_{ij} = H_{ij}(\ell, \Omega, \tau, v_z) \cdot R(p, n) := H_{ij}(s - \ell \cdot e^{in\alpha}) e^{ip\alpha}$$

$$\bar{M}_{iz} = \bar{H}_{iz}(\ell, \Omega, \tau, v_z) \cdot e^{ip\alpha}$$

Und die Integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{s'} J_1(k_1 s') \cdot R(p, n) d\alpha = n \cdot J_p(k_1 \ell) \cdot J_{p+n}(k_1 s) \quad ; \quad n = \pm 1$$

$$\int_0^{2\pi} J_0(k_1 s') \cdot e^{ip\alpha} d\alpha = J_p(k_1 \ell) \cdot J_p(k_1 s)$$

führen auf

$$M_{ij} = 2\pi \cdot \Omega \cdot \int_0^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega - kv_z)\tau} \cdot T_{ij}(v_z, \tau) dv_z$$

Die T_{ij} setzen sich linear zusammen aus Gliedern der Form :

$$X(v_z) \cdot e^{i\nu\Omega\tau} \cdot G(p, q) \quad ; \quad \nu = \text{ganze Zahl}$$

Die $S(s, v_z, \tau)$ sind definiert durch

$$p_{ij} =: \frac{e}{m} N_0 \cdot m \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \sum_{h=t, -z} S_{ij}^h \cdot E_h^0 \cdot e^{i(\omega - kv_z)\tau} dv_z \cdot d\tau$$

Die $\langle v_i \cdot v_j \rangle$ gehen aus den $\langle v_i \rangle$ hervor durch eine Multiplikation des Integranden in (A4.2) mit v_j . Da $v_{\pm} = v_1 \cdot e^{\pm i(\alpha + \frac{\Omega\tau}{2})}$ bedeutet

eine Multiplikation mit

$$\begin{aligned} V_+ &: p \rightarrow p+1 \quad ; \quad q \rightarrow q+1 \\ V_- &: p \rightarrow p-1 \quad ; \quad q \rightarrow q+1 \\ V_z &: p \rightarrow p \quad ; \quad q \rightarrow q \end{aligned}$$

Unter Benutzung von (A3.4) und $J_{-r} = (-1)^r J_r$ liest man aus Tabelle 1 ab :

$$S_{+-}^+ = \beta_1^2 \Theta e^{\pm i \frac{3}{2} \Omega \tau} G(1,5) \cdot J_2(k_1 s)$$

$$S_{+-}^- = -\beta_1^2 \Theta e^{\pm i \frac{1}{2} \Omega \tau} G(3,5) \cdot J_2(k_1 s)$$

$$S_{+-}^+ = -\beta_1^2 \Theta e^{\pm i \frac{1}{2} \Omega \tau} G(1,5) \cdot J_0(k_1 s)$$

$$S_{+-}^+ = S_{+-}^+$$

$$S_{++}^z = \left[2\beta_1^2 \Psi e^{\pm i \Omega \tau} G(2,4) + \frac{i k_1}{\omega} \beta_1^2 \Phi \left(e^{\pm i \frac{3}{2} \Omega \tau} G(1,5) - e^{\pm i \frac{1}{2} \Omega \tau} G(3,5) \right) \right] J_2(k_1 s)$$

$$S_{+-}^z = \left[2\beta_1^2 \Psi G(0,4) - \frac{i k_1}{\omega} \beta_1^2 \Phi G(1,5) \cdot 2 \cos \frac{\Omega \tau}{2} \right] \cdot J_0(k_1 s)$$

$$S_{iz}^h = 2\pi \cdot v_z \cdot T_{ih} J_1(k_1 s) \quad i = +, -$$

$$S_{zz}^h = 2\pi v_z T_{zh} \cdot J_0(k_1 s)$$

Es werden Koeffizienten π_{++}^{\pm} und π_{+-}^{\pm} definiert durch

$$p_{++} = : C \cdot J_2(k_1 s) \sum_{h=+,-,z} \pi_{++}^h \cdot E_h^0$$

$$C := \frac{e \cdot N_0}{k}$$

$$p_{+-} = : C \cdot J_0(k_1 s) \sum_{h=+,-,z} \pi_{+-}^h \cdot E_h^0$$

Durch analoge Rechnungen wie in Anhang 3 findet man :

(Argument der I.. ist immer γ)

$$\pi_{++}^+ = + \frac{i \cdot e^{-\gamma}}{\beta_1^2} \left(\frac{\gamma}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle \Theta \rangle_n \left[(I_{n+2} - I_{n-1}) - \frac{\gamma}{4} \{ 3I_{n+2} + I_n - 3I_{n-1} - I_{n-3} \} \right]$$

$$\pi_{+-}^{\pm} = \pm \frac{i \cdot e^{-\gamma}}{\beta_{\pm}^3} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma}{4} \{ 3I_{n-1} + I_{n+1} - 3I_n - I_{n-2} \} \langle \Theta \rangle_n$$

$$\pi_{--}^{\pm} = \frac{e^{-\gamma}}{\beta_{\pm}^2} \cdot \frac{\gamma}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\langle \Psi \rangle_n (I_n - I_{n-2}) \pm z \langle \Phi \rangle_n \left\{ (I_{n-2} - I_{n-1}) - \frac{\gamma}{2} (I_{n-2} - I_n + \frac{1}{2} I_{n+1} - \frac{1}{2} I_{n+3}) \right\} \right]$$

$$\pi_{+-}^{\pm} = \pm \frac{i \cdot e^{-\gamma}}{\beta_{\pm}^3} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle \Theta \rangle_n \left[(I_{n-1} - I_n) - \frac{\gamma}{4} (3I_{n-1} + I_{n+1} - 3I_n - I_{n-2}) \right]$$

$$\pi_{+-}^{\pm} = \frac{e^{-\gamma}}{\beta_{\pm}^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\langle \Psi \rangle_n \left\{ (1-\gamma) I_n + \frac{\gamma}{2} (I_{n-1} + I_{n+1}) \right\} - \gamma \langle \Phi \rangle_n \left\{ (I_{n-1} - I_{n+1}) + \frac{\gamma}{4} (-2I_{n-1} + 2I_{n+1} + I_{n-2} - I_{n+2}) \right\} \right]$$

Es ist :

$$p_{\pm} := \frac{1}{4} (p_{++} + p_{--}) = \frac{c}{4} \cdot \int_2(k_1, s) \left\{ \pi_{++}^{\pm} \cdot E_{\pm}^0 + \pi_{++}^{\mp} \cdot E_{\mp}^0 + \pi_{++}^z \cdot E_z^0 + \pi_{--}^{\pm} \cdot E_{\pm}^0 + \pi_{--}^{\mp} \cdot E_{\mp}^0 + \pi_{--}^z \cdot E_z^0 \right\}$$

$$= \frac{c}{4} \cdot \int_2(k_1, s) \cdot \left\{ \pi_{++}^{\pm} (E_s^0 + i E_y^0) + \pi_{++}^{\mp} (E_s^0 - i E_y^0) + \pi_{--}^{\pm} (E_s^0 + i E_y^0) + \pi_{--}^{\mp} (E_s^0 - i E_y^0) + (\pi_{++}^z + \pi_{--}^z) \cdot E_z \right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{4} (\pi_{++}^{\pm} + \pi_{++}^{\mp} + \pi_{--}^{\pm} + \pi_{--}^{\mp}) \cdot E_s^0 + \frac{i}{4} (\pi_{++}^{\pm} - \pi_{++}^{\mp} + \pi_{--}^{\pm} - \pi_{--}^{\mp}) \cdot E_y^0 + \frac{1}{4} (\pi_{++}^z + \pi_{--}^z) \cdot E_z \right\} c \cdot \int_2(k_1)$$

Also ist :

$$\bar{\pi}_{\pm}^s = \frac{1}{4} (\pi_{++}^{\pm} + \pi_{++}^{\mp} + \pi_{--}^{\pm} + \pi_{--}^{\mp})$$

$$\bar{\pi}_{\pm}^y = \frac{i}{4} (\pi_{++}^{\pm} - \pi_{++}^{\mp} + \pi_{--}^{\pm} - \pi_{--}^{\mp})$$

$$\bar{\pi}_{\pm}^z = \frac{1}{4} (\pi_{++}^z + \pi_{--}^z)$$

Genauso findet man :

$$\bar{\pi}_{\pm}^s = \frac{1}{4i} (\pi_{++}^{\pm} + \pi_{++}^{\mp} - \pi_{--}^{\pm} - \pi_{--}^{\mp}) \quad ; \quad \bar{\pi}_{\pm}^y = \frac{1}{4} (\pi_{++}^{\pm} - \pi_{++}^{\mp} - \pi_{--}^{\pm} + \pi_{--}^{\mp}) \quad ; \quad \bar{\pi}_{\pm}^z = \frac{1}{4i} (\pi_{++}^z - \pi_{--}^z)$$

$$\bar{\pi}_{\pm}^s = \bar{\pi}_{\pm}^{\pm} + \bar{\pi}_{\pm}^{\mp} \quad ; \quad \bar{\pi}_{\pm}^y = i (\pi_{\pm}^{\pm} - \pi_{\pm}^{\mp})$$

Nach diesen Umrechnungen erhält man die Ergebnisse (58). Die $\pi_{s\alpha}^{\ell}$ (siehe (57)) ergeben sich bis auf einen Faktor aus den $M_{s\alpha}$ (39), indem man $\langle \Theta \rangle$ durch $\langle \psi_z \Theta \rangle$, $\langle \Psi \rangle$ durch $\langle \psi_z \Psi \rangle$ und $\langle \Phi \rangle$ durch $\langle \psi_z \Phi \rangle$ ersetzt.

Falls $\omega/\Omega \ll 1$, kann man für die Plasmodispersionsfunktion die Entwicklung benutzen ¹⁸⁾ :

$$F_0(\alpha_n) = \frac{i}{\alpha_n} \left(1 + \frac{i}{2 \cdot \alpha_n^2} + \dots \right)$$

mit $\alpha_n^{-1} = \left(\frac{2 \times \bar{T}_n}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{k}{\omega + n\Omega}$ und $n \neq 0$; $k = k_{||}$

Benutzt man die in 7) gegebene Darstellung der $\langle \dots \rangle_n$, so bekommt man für $n \neq 0$:

$$\begin{aligned} \langle \Theta \rangle_n &= - \frac{2 \cdot \bar{T}_n}{T_1} \left(\frac{m}{2 \times \bar{T}_n} \right)^{\frac{3}{2}} F_0 + \frac{2 i k}{\omega \cdot \bar{T}_1} \left(\frac{m}{2 \times \bar{T}_n} \right) (T_1 - \bar{T}_n) (1 + \alpha_n i F_0) \\ &\approx - \left(\frac{m}{x \bar{T}_1} \right) \frac{i k}{\omega + n\Omega} - \frac{i k}{\omega} \left(1 - \frac{\bar{T}_n}{T_1} \right) \frac{k^2}{(\omega + n\Omega)^2} \end{aligned}$$

$$\langle \Theta \rangle_{0, n, +} = \left(\frac{m}{x \bar{T}_1} \right) \frac{2 i k}{\omega} \frac{\omega^2}{n^2 \cdot \Omega^2} - \left(1 - \frac{\bar{T}_n}{T_1} \right) \frac{2 i k^3}{\omega^3} \cdot \frac{\omega^2}{n^2 \cdot \Omega^2}$$

$$\langle \Theta \rangle_{0, n, -} = - \left(\frac{m}{x \bar{T}_1} \right) \frac{2 i k}{\omega} \cdot \frac{\omega}{n \cdot \Omega} + \left(1 - \frac{\bar{T}_n}{T_1} \right) \cdot \frac{4 i k^3}{\omega^3} \cdot \frac{\omega^3}{n^3 \cdot \Omega^3}$$

$$\begin{aligned} \langle v_z \Theta \rangle_n &= \frac{2 i}{\omega \cdot \bar{T}_1} \left(\frac{m}{2 \times \bar{T}_n} \right) (\omega \cdot \bar{T}_1 + n\Omega \bar{T}_1 - n\Omega \cdot \bar{T}_n) (1 + i \alpha_n F_0) \\ &\approx \frac{2 i}{\omega \cdot \bar{T}_1} \left[(\omega + n\Omega) \cdot (T_1 - \bar{T}_n) + \omega \bar{T}_n \right] \cdot \frac{-k^2}{2(\omega + n\Omega)^2} \end{aligned}$$

$$\langle v_z \Theta \rangle_{0, n, +} = \frac{2 i k^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\bar{T}_n}{T_1} \right) \frac{\omega^2}{n^2 \cdot \Omega^2} - \frac{2 i k^2}{\omega^2} \cdot \frac{\bar{T}_n}{T_1} \cdot \frac{\omega^2}{n^2 \cdot \Omega^2}$$

$$\langle v_z \Theta \rangle_{0, n, -} = - \frac{2 i k^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\bar{T}_n}{T_1} \right) \frac{\omega}{n \cdot \Omega} + \frac{4 i k^2}{\omega^2} \cdot \frac{\bar{T}_n}{T_1} \cdot \frac{\omega^3}{n^3 \cdot \Omega^3}$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{\Phi} \rangle_n &= - \frac{2 i \cdot \Omega}{\omega \cdot \bar{T}_1} \left(\frac{m}{2 \times \bar{T}_n} \right) (T_1 - \bar{T}_n) (1 + i \alpha_n \cdot F_0) \\ &\approx \frac{i \Omega}{\omega} \left(1 - \frac{\bar{T}_n}{T_1} \right) \frac{k^2}{(\omega + n\Omega)^2} \end{aligned}$$

$$\langle \bar{\Phi} \rangle_{0, n, +} = \frac{2 i k^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\bar{T}_n}{T_1} \right) \cdot \frac{\omega}{n^2 \cdot \Omega}$$

$$\langle \bar{\Phi} \rangle_{0, n, -} = - \frac{4 i k^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\bar{T}_n}{T_1} \right) \cdot \frac{\omega^2}{n^3 \cdot \Omega^2}$$

$$\langle \psi_z \phi \rangle = - \frac{2 \cdot \mathcal{J} \cdot \Omega}{k \cdot \omega \Gamma_1} \left(\frac{m}{2x \Gamma_n} \right) (\omega + n \Omega) (\Gamma_1 - \Gamma_n) (1 + i d_n \cdot F_0)$$

$$\approx \frac{i k \cdot \mathcal{J}}{\omega} \left(1 - \frac{\Gamma_n}{\Gamma_1} \right) \cdot \frac{1}{\omega + n \Omega}$$

$$\langle \psi_z \phi \rangle_{0, n, +} \approx - \frac{2 i k}{\omega} \left(1 - \frac{\Gamma_n}{\Gamma_1} \right) \cdot \frac{\omega}{n^2 \cdot \Omega}$$

$$\langle \psi_z \phi \rangle_{0, n, -} \approx \frac{2 i k}{\omega} \left(1 - \frac{\Gamma_n}{\Gamma_1} \right) \frac{1}{n} \left(1 + \frac{\omega^2}{n^2 \cdot \Omega^2} \right)$$

$$\langle \bar{\Psi} \rangle_n = 2 i \left(\frac{m}{2x \Gamma_n} \right) (1 + i d_n \cdot F_0) \approx -i k^2 \frac{1}{(\omega + n \Omega)^2}$$

$$\langle \bar{\Psi} \rangle_{0, n, +} = - \frac{2 i k^2}{\omega^2} \cdot \frac{\omega^2}{n^2 \cdot \Omega^2}$$

$$\langle \bar{\Psi} \rangle_{0, n, -} = \frac{4 i k^2}{\omega^2} \cdot \frac{\omega^3}{n^3 \cdot \Omega^3}$$

$$\langle \psi_z \bar{\Psi} \rangle_n = \frac{2 i}{k} \left(\frac{m}{2x \Gamma_n} \right) (\omega + n \Omega) (1 + i d_n \cdot F_0) \approx - \frac{i k}{(\omega + n \Omega)}$$

$$\langle \psi_z \bar{\Psi} \rangle_{0, n, +} = \frac{2 i k}{\omega} \frac{\omega^2}{n^2 \cdot \Omega^2}$$

$$\langle \psi_z \bar{\Psi} \rangle_{0, n, -} = - \frac{2 i k}{\omega} \cdot \frac{\omega}{n \cdot \Omega} \left(1 + \frac{\omega^2}{n^2 \cdot \Omega^2} \right)$$

Entwickelt man die Komponenten (39) des Beweglichkeitstensors bis zur ersten Ordnung in γ , so erhält man :

$$M_{ss} = \frac{-\mathcal{J} \cdot \Omega}{4 k \beta_1^2} \cdot \left[\langle \Theta \rangle_{0, 1, +} - \gamma \langle \Theta \rangle_{0, 1, +} + \gamma \langle \Theta \rangle_{0, 2, +} \right]$$

$$M_{sy} = -M_{ys} = \frac{i \cdot \mathcal{J}}{4 k \beta_1^2} \left[\langle \Theta \rangle_{0, 1, -} - 2 \gamma \langle \Theta \rangle_{0, 1, -} + \gamma \langle \Theta \rangle_{0, 2, -} \right]$$

$$M_{yy} = \frac{-\mathcal{J} \cdot \Omega}{4 k \beta_1^2} \cdot \left[\langle \Theta \rangle_{0, 1, +} + 4 \gamma \langle \Theta \rangle_0 - 3 \gamma \langle \Theta \rangle_{0, 1, +} + \gamma \langle \Theta \rangle_{0, 2, +} \right]$$

(A5.1)

$$M_{sz} = \frac{-\mathcal{J} \cdot i \cdot k_1}{4 \cdot k \cdot \beta_1^2} \cdot \left[\langle \bar{\Phi} \rangle_{0, 1, +} - \langle \bar{\Psi} \rangle_{0, 1, -} \right]$$

$$M_{yz} = \frac{k_1}{4 \beta_1^2 \cdot k} \cdot \left[2 \cdot \langle \bar{\Psi} \rangle_0 + \langle \bar{\Phi} \rangle_{0, 1, -} - \langle \bar{\Psi} \rangle_{0, 1, +} \right]$$

$$M_{zs} = \frac{-i \mathcal{J} \cdot k_1}{4 k \cdot \beta_1^2} \langle \psi_z \Theta \rangle_{0, 1, -}$$

$$M_{zy} = \frac{k_z}{4 \cdot k \cdot \beta_z^2} \left[2 \langle v_z \cdot \Theta \rangle_0 - \langle v_z \Theta \rangle_{0,1,+} \right]$$

$$M_{zz} = \frac{-j \cdot \Omega}{2 \cdot k} \cdot \left[2 \langle v_z \dot{\Psi} \rangle_0 - 2j \langle v_z \dot{\Psi} \rangle_0 - j \langle v_z \phi \rangle_{0,1,-} + j \langle v_z \Psi \rangle_{0,1,+} \right]$$

In den Gliedern $\langle \dots \rangle_0$ tritt $F(\alpha_0)$ auf, das als Glied der Ordnung 1 betrachtet wird. Dann liest man aus (A5.1) und (59) unmittelbar die in der Tabelle 2 angegebenen Ordnungen ab. Weiter folgt in erster Ordnung in y und ω/Ω :

$$\frac{k^2}{\omega \cdot \Omega} M_{zy} \approx \frac{i \cdot k}{4 \cdot \beta_z^2} \left(-\frac{m}{x \cdot T_1} \right) \cdot \frac{2 i \cdot k}{\omega^2} \cdot \frac{\omega}{\Omega} = \frac{k^2}{\omega^2} \cdot \frac{\omega}{\Omega}$$

$$\pi_{s2}^y \approx \frac{i}{4 \beta_z^2} \left(-\frac{2 i \cdot k^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{T_0}{T_1} \right) \right) \cdot \frac{\omega}{\Omega} = \frac{k^2}{\omega^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \beta_z^2} \left(1 - \frac{T_0}{T_1} \right) \cdot \frac{\omega}{\Omega}$$

Bezeichnungsweise

Kap. I

$d_R := \tau \cdot |v_{||}|$: Dicke der Resonanzschicht

q := Betrag
der Ladung des Teilchens

δ := Vorzeichen

$$\Omega_0 := \frac{q \cdot B_0}{m \cdot c}$$

$$L := \gamma^{-1} := \frac{\Omega}{\partial_z \Omega}$$

$$\hat{v} := v_x + i \delta v_y =: v_{\perp} \cdot e^{i\alpha}$$

Q, Q', Q'' : definiert durch (19)

$$\xi := |z - z_R| \quad \text{mit} \quad \Omega(z_R) = \omega$$

N_0 : mittlere Teilchendichte

$$\Pi^2 := \frac{4\pi \cdot N_0 \cdot q^2}{m} : \text{Quadrat der Plasmakreisfrequenz}$$

Kap. II

\int : Dicke der Randschicht

α : Index zur Kennzeichnung der Teilchensorte

q_{α} : Betrag
der Ladung eines Teilchens der α -Sorte

δ_{α} : Vorzeichen

$N_{0\alpha}$: mittlere Teilchendichte

$$\Pi_{\alpha}^2 := \frac{4\pi \cdot N_{0\alpha} \cdot q_{\alpha}^2}{m_{\alpha}}$$

$$j_{\alpha} := \frac{1}{2} r_{g\alpha}^2 \cdot k_{\perp}^2$$

$$f_{\alpha} := \frac{\omega^2}{\Omega_{\alpha}^2} \quad ; \quad \Omega_{\alpha} = \frac{q_{\alpha} \cdot B_0}{m_{\alpha} \cdot c}$$

$$\eta_{\alpha} := r_{g\alpha}^2 \cdot k^2$$

$\Theta(v_z), \Phi(v_z), \Psi(v_z)$: definiert in (35a-c) $\beta_{\perp}^2 := \frac{m}{2 \times T_{\perp}}$

$G(p, q)$: definiert in (36)

$\langle X \rangle_n$: definiert in (38)

$$\alpha_n := \left(\frac{m}{2 \times T_n} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\omega + n \Omega}{k}$$

Literatur

- 1) Fainberg Y.B., Gorbatenko M.F. : Sov.Phys.-Techn.Phys. 4, 487 (1959)
Bernstein I.B., Trehan S.K. : Nucl.Fus. 1, 37 (1960)
Stix T.H. : Phys.Rev. 106, 1146 (1957)
Kondratenko A.N. : J.Nucl.En.(Part C) 7, 89 (1965)
- 2) Körper K. : Z.Naturf. 12A, 815 (1957)
- 3) Chandrasekar S., Kaufman A.N., Watson K.M. : Proc.Roy.Soc. 245A, 435 (1958)
- 4) Hooke W.M., Rothman M.A. : Nucl.Fus. 4, 33 (1964)
- 5) Grawe H. : Vort. DPG, Kiel, April 66
- 6) Hooke W.M. : Private Mitteilung
- 7) Stix T.H. : Theory of Plasma Waves (New York 1962)
- 8) Kramers H.A. : Atti.Congr.Intern.Como 2, 545 (1927)
Kronig R. : J.Opt.Soc.Am. 12, 546 (1926)
Toll J.S. : Phys.Rev. 104, 1760 (1956)
- 9) Karpov K.A. : Tabellen $F(z) = \int_0^z e^{x^2} \cdot dx$ (Moskau 1958)
- 10) Piliya A.D., Frenkel V.Y. : Sov.Phys.-Techn.Phys. 9, 1356 und 1363 (1965)
- 11) Völk H. : Diplomarb. Uni.München 1961
- 12) Drummond J.E. : Phys.Rev. 110, 293 (1958)
- 13) Bernstein I.B. : Phys.Rev. 109, 10 (1958)
- 14) Montgomery D.C., Tidman D.A. : Plasma Kinetic Theory (New York 1964)

- 15) Watson G.N. : Theory of Bessel-Functions
(Cambridge 1958)
- 16) Chandrasekar S.
Kaufman A.N., Watson K.M. : Annals of Physics 2, 435 (1957)
- 17) Simon A., Thomson W.B. : J.Nucl.En.(Part C)8,373 (1966)
- 18) Fried B.D., Conte S.D. : The Plasma Dispersions Function
(New York 1961)

This report is to be treated as strictly confidential.

The 'Institut für Plasmaphysik' holds the exclusive rights of publication, mimeographing, propagation and translation into foreign languages of the original text, inclusive of the drawings, wholly or partially; also of excerpts or résumés, as well as of the technical or scientific contents of this report. Exceptions to these restrictions require written permission.

Furthermore, the 'Institut für Plasmaphysik' reserves the right of exclusive exploitation of the information contained in this report, for the purpose of obtaining protective industrial rights, particularly patent and utility patent rights at home and abroad. Actions of exploitation taken on the basis of the knowledge gained from this report cannot be regarded as grounds for obtaining the right of prior use ('Vorbenutzungsrecht') according to article 7 paragraph 1, first sentence of the German Patent Law. The reader is referred to article 5 of the Patent Law. For reasons stipulated by the Patent Law, the report must not be exhibited in public libraries, or lent out indiscriminately.

The Institute does not guarantee that the information given in this report is free from protective rights, such as patent rights, utility patent rights or trade-mark rights.

No guarantee is given in respect of the accuracy, completeness or usefulness of the information contained in this report. Thus, no liability can be accepted for damage resulting from use of the information, or of the apparatus, methods and procedures described.