

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Zur relativistischen nichtlinearen
Wechselwirkung kalter Plasmen mit
elektromagnetischen Wellen

On the Relativistic Non-linear
Interaction of Cold Plasmas with
Electromagnetic Waves

Werner Lünow

IPP 6/58

Juli 1967

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

ABSTRACT: The behaviour of a fully ionized plasma composed of one type of atom and subjected mainly to electromagnetic forces (waves) is treated analytically: Forces due to the stress-(pressure)-tensors of the ions and electrons, to gravitation and to ion-electron interaction, as opposed to electromagnetic forces, are ignored. The mean thermal particle velocities have to be sufficiently small compared with the phase velocities of longitudinal plasma waves (LANDAU damping). The problem is described by relativistic (covariant) field equations and equations of motion.

The general fundamental equations lead to a special system of equations yielding wave solutions in which all partial waves have the same space-time constant phase velocity. This system of equations provides:

1. A strictly analytical periodic solution of the non-linear initial equations. The solution describes a transverse, circularly polarized electromagnetic wave and is valid for phase velocities greater than the velocity of light in vacuo. The relativistic correction term of the dispersion relation describes exactly the influence of the ions and electrons.

An analogous solution is obtained for a fully ionized plasma composed of electrons and k ($= 1, 2, 3, \dots$) types of ions. The individual types of ions orbit in phase (without a constant magnetic field). The magnitude of the orbital velocity is constant for each type of ion. Depending on the charge and mass of the individual types of ions, the magnitudes of their orbital velocities may vary, and hence their orbital radii may vary as well. In this way it is possible to produce relative velocities between various types of ions or between ions and neutral gas (the latter not being affected by the wave field).

2. A strictly analytical periodic solution of the non-linear initial equation obtained when the ion oscillation is neglected. The solution describes a longitudinal electric wave.
- The phase velocity of the wave has to be greater than the maximum absolute value of the longitudinal electron velocity caused by the electric field. This exact statement is a pendant to a corresponding relation resulting from the LANDAU damping between the phase velocity and the mean thermal electron velocity.
3. An approximate (up to the third order) steady-state solution of the non-linear initial equations for the simultaneous coupling of the plasma, transverse waves and longitudinal waves. It is valid for phase velocities greater than the velocity of light in vacuo. Relativistic effects occur in the third order. The ion oscillation is ignored because it does not affect the solution until the fourth order.

Purely longitudinal electric waves result in a constant second-order plasma electron drift velocity: The plasma electrons stream toward the waves.

A transverse plane polarized first-order electromagnetic wave is coupled with a plane polarized third-order electromagnetic wave: The third-order wave oscillates at three times the frequency of the first-order wave and has a maximum amplitude which is directly proportional to the electron rest density of the wave-free plasma when the plasma frequency is sufficiently smaller than the first-order wave frequency.

INHALTSVERZEICHNIS

A.	PHYSIKALISCHES MODELL, AUSGANGSGLEICHUNGEN UND GRUNDSÄTZLICHE BETRACHTUNGEN ZUR LÖSUNG	1
A.1	Relativistische Invarianten	1
A.2	Radiusvektor	2
A.3	Vierergeschwindigkeit (Ionen)	2
A.4	Vierergeschwindigkeit (Elektronen)	3
A.5	Feldtensor	3
A.6	Dualer Feldtensor	3
A.7	Viererstromdichte	3
A.8	Beziehungen	4
A.9	Summationskonvention	4
A.10	Bewegungsgleichungen	4
A.11	Feldgleichungen	4
A.12	Kontinuitätsgleichung	5
A.13	Allgemeine Lösung	5
A.14	Eingeschränkte Lösung	5
B.	ERHALTUNGSSÄTZE	7
B.1	Erhaltung der Ruh-Ladungsdichte	7
B.2	Erhaltung der Ruh-Teilchendichte und der Ruh-Massendichte	8
B.3	Impuls-Energie-Erhaltung	8
B.4	Drehimpuls-Erhaltung	9
C.	ABLEITUNG DES SPEZIALISIERTEN GLEICHUNGSSYSTEMS	9
C.1	Integration der Kontinuitätsgleichung C5	10
C.2	Neufassung des Gleichungssystems (C1-C5)	11
C.3	Homogener Fall	13

C.4	Zur Lösung des Gleichungssystems (C14-C18)	14
C.5	Freie Parameter	16
C.6	Die dreidimensionale Vektorform des Gleichungssystems (C44-C49)	18
D.	ERSTE STRENGE ANALYTISCHE LÖSUNG / REIN TRANSVERSALER FALL	19
D.1	Voraussetzungen	20
D.2	Transversalitätsbedingung	21
D.3	Ausgangsgleichungen und Lösung	21
E.	ZWEITE STRENGE ANALYTISCHE LÖSUNG / REIN LONGITUDINALER FALL	24
E.1	Voraussetzungen	24
E.2	Longitudinalitätsbedingung	26
E.3	Ausgangsgleichung und Lösung	27
E.4	Ausartungsfall	34
F.	GEMISCHTER FALL / NÄHERUNGSLÖSUNG BIS ZUR 3. ORDNUNG	35
F.1	Vorbetrachtung	35
F.2	Transformation und Näherung	37
F.3	Entwicklung und Voraussetzungen	38
F.4	Ausgangsgleichungen	39
F.5	Lösung der 1. Ordnung	44
F.6	Lösung der 2. Ordnung	45
F.7	Lösung der 3. Ordnung	47
F.8	Zur Näherungslösung	54
F.9	Rücktransformation	56
F.10	Rein transversaler Fall (siehe Abschnitt D)	56
F.11	Rein longitudinaler Fall (siehe Abschnitt E)	57
F.12	Spezieller gemischter Fall	58

ABBILDUNGEN

60

LITERATURVERZEICHNIS

64

ANHANG: Strenge analytische Lösung des rein
transversalen Falles (siehe Abschnitt D)
für aus mehr als einer Atomsorte be=
stehende Plasmen

67

A. PHYSIKALISCHES MODELL, AUSGANGSGLEICHUNGEN UND GRUND-
SÄTZLICHE BETRACHTUNGEN ZUR LÖSUNG

Die Arbeit ist ein Beitrag zum Studium des Verhaltens eines vollionisierten, aus einer einzigen Atomsorte bestehenden Plasmas, das im wesentlichen elektromagnetischen Kräften unterliegt. Die Beschreibung des Plasmas erfolgt makroskopisch. Gegen die elektromagnetischen Kräfte werden Kraftwirkungen (1) vernachlässigt, die von den Spannungs-(Druck)-Tensoren der Ionen und Elektronen, der Gravitation und der Wechselwirkung zwischen Ionen und Elektronen herrühren. Dissipative Terme sind in den Gleichungen nicht enthalten. Damit gilt bezüglich der LANDAU-Dämpfung (2)*: Gegen die Phasengeschwindigkeiten longitudinaler Plasmawellen müssen die mittleren thermischen Teilchengeschwindigkeiten genügend klein sein.

Im eben skizzierten Sinne "kalte" Plasmen wurden unter dem speziellen Aspekt ihrer Wechselwirkung mit elektromagnetischen Wellen großer Amplituden (Laserlicht) in den Arbeiten (3) makroskopisch behandelt. Der gleiche Aspekt soll auch jetzt eine Rolle spielen, jedoch keine ausschließliche.

Im Gegensatz zu den unter (3) zitierten Arbeiten wird das Problem hier dem Formalismus der speziellen Relativitätstheorie (4) unterworfen. Die möglichen hohen Feldstärken der durch Laser erzeugten elektromagnetischen Wellen können entsprechend hohe Teilchengeschwindigkeiten zur Folge haben.

Zunächst werden im Weiteren benutzte Größen angegeben.

A.1 Relativistische Invarianten

e - Elementarladung

* Das hier zugrunde liegende Dämpfungsdekrement wird in (2) für ein Elektronen-Plasma aus nichtrelativistischen kinetischen Gleichungen abgeleitet.

- Z - Zahl der im Ion enthaltenen Elementarladungen
- m_+ - Ionen-Ruhmasse
- m_- - Elektronen-Ruhmasse
- n_+ - Ruh-Teilchendichte (Ionen)
- n_- - Ruh-Teilchendichte (Elektronen)
- Λ_+ - Betrag der Ruh-Ladungsdichte (Ionen)
- Λ_- - Betrag der Ruh-Ladungsdichte (Elektronen)
- ϱ_+ - Ruh-Massendichte (Ionen)
- ϱ_- - Ruh-Massendichte (Elektronen)
- ϵ_0 - Dielektrizitätskonstante (Vakuum)
- μ_0 - Permeabilität (Vakuum)
- c - Vakuumlichtgeschwindigkeit

A.2 Radiusvektor

x_m mit den Komponenten -

$$x_1 = x ; x_2 = y ; x_3 = z ; x_4 = ict$$

A.3 Vierergeschwindigkeit (Ionen)

V_{+m} mit den Komponenten -

$$V_{+1} = \gamma_+ v_{+x} ; V_{+2} = \gamma_+ v_{+y} ; V_{+3} = \gamma_+ v_{+z} ; V_{+4} = \gamma_+ ic$$

Für das Element der Eigenzeit gilt

$$d\tau_+ = dt \sqrt{1 - \beta_+^2} \quad \text{mit} \quad \text{A1}$$

$$\beta_+^2 = \frac{1}{c^2} (v_{+x}^2 + v_{+y}^2 + v_{+z}^2) \quad \text{A2}$$

Dann ist

$$\Gamma_+ = \frac{dt}{d\tau_+} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_+^2}}$$

A3

A.4 Vierergeschwindigkeit (Elektronen)

V_{-m} Die Komponenten und das Element der Eigenzeit haben die gleiche Form wie im Fall der Ionen, nur daß der Index + durch den Index - ersetzt werden muß.

A.5 Feldtensor

$$(F_{mn}) = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{i}{c} E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{i}{c} E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{i}{c} E_z \\ \frac{i}{c} E_x & \frac{i}{c} E_y & \frac{i}{c} E_z & 0 \end{pmatrix}$$

A.6 Dualer Feldtensor

$$(F_{mn}^*) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{c} E_z & \frac{i}{c} E_y & B_x \\ \frac{i}{c} E_z & 0 & -\frac{i}{c} E_x & B_y \\ -\frac{i}{c} E_y & \frac{i}{c} E_x & 0 & B_z \\ -B_x & -B_y & -B_z & 0 \end{pmatrix}$$

A.7 Viererstromdichte

Γ_m mit den Komponenten -

$$\Gamma_m = \Gamma_{+m} - \Gamma_{-m} = \Lambda_+ V_{+m} - \Lambda_- V_{-m} \quad A4$$

A.8 Beziehungen

$$\Lambda_+ = Z e n_+ \quad A5$$

$$\Lambda_- = e n_- \quad A6$$

$$\rho_+ = m_+ n_+ \quad A7$$

$$\rho_- = m_- n_- \quad A8$$

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 / u_0} \quad A9$$

A.9 Summationskonvention

Treten in den folgenden Kombinationen indizierter Größen Paare gleichlautender Indizes auf, so ist von 1 bis 4 zu summieren. Zudem soll gelten

$$\frac{\partial}{\partial x_n} = \partial_n \quad A10$$

A.10 Bewegungsgleichungen

$$V_{+n} \partial_n V_{+m} = \frac{Ze}{m_+} V_{+n} F_{mn} \quad A11$$

$$V_{-n} \partial_n V_{-m} = - \frac{e}{m_-} V_{-n} F_{mn} \quad A12$$

A.11 Feldgleichungen

$$\partial_n F_{mn} = /u_0 \Gamma_m \quad A13$$

$$\partial_n F_{mn}^* = 0 \quad \text{A14}$$

A.12 Kontinuitätsgleichung

$$\partial_n \Gamma_n = 0 \quad \text{A15}$$

Die Darstellung des hier vorliegenden physikalischen Problems geschieht mit Hilfe der Feldgrößen F_{mn} bzw. F_{mn}^* . Sie werden gemessen. Ein Vorteil der Potentialform gegenüber der Feldform der Gleichungen besteht für den gegebenen Anwendungszweck offenbar nicht.

Das Gleichungssystem (A11-A15) enthält teils lineare, teils nichtlineare Gleichungen. Damit ist das Problem als Ganzes von nichtlinearer Natur.

Die gesuchten Lösungsfunktionen des Gleichungssystems (A11-A15) werden jetzt allgemein mit \emptyset bezeichnet. Sie sollen von den Koordinaten eines eindeutig festliegenden Raum-Zeit-Inertialsystems $S(x_1; x_2; x_3; x_4)$ abhängen und reell sein.

A.13 Allgemeine Lösung

$$\emptyset = \emptyset(x_1; x_2; x_3; x_4) \quad \text{A16}$$

A.14 Eingeschränkte Lösung

Durch die Beziehung

$$\mathfrak{f} = U_m x_m = k(\bar{e} \cdot \bar{x} - ut) \quad \text{A17}$$

mit

$$\bar{x} = \bar{x}(x_1; x_2; x_3)$$

$$\bar{e} = \bar{e}(\cos \alpha_1; \cos \alpha_2; \cos \alpha_3)$$

$$\bar{e}^2 = \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1 \quad \text{A18}$$

wird ein Vierer-Ausbreitungsvektor U_m mit den Komponenten -

$$U_1 = k \cos \alpha_1 ; \quad U_2 = k \cos \alpha_2 ; \quad U_3 = k \cos \alpha_3 ; \quad U_4 = ik \frac{u}{c}$$

eingeführt.

ξ ist die relativistisch invariante Phase einer physikalischen Erscheinung, die sich mit der Phasengeschwindigkeit u in Richtung des Einheitsvektors \bar{e} durch den dreidimensionalen Raum bewegt. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sind die Winkel der Vektorkomponenten U_1, U_2, U_3 gegen die x_1, x_2, x_3 -Achse im Inertialsystem S . ξ ist dimensionslos. Also muß U_m die Dimension einer reziproken Länge haben. Das bewirkt der mit dieser Dimension behaftete Parameter k .

Der Betrag von U_m lautet im Quadrat

$$U_m U_m = k^2 \left[1 - \left(\frac{u}{c} \right)^2 \right] \quad \text{A19}$$

Dann gilt

$$u < c \longrightarrow U_m U_m > 0 \quad (\text{raumartig})$$

$$u = c \longrightarrow U_m U_m = 0 \quad (\text{singulär})$$

$$u > c \longrightarrow U_m U_m < 0 \quad (\text{zeitartig})$$

Die eingeschränkte Lösung ergibt sich nun zu

$$\phi = \phi(\xi) \quad \text{A20}$$

Um eine derartige Lösung zu erhalten, muß im Gleichungssystem (A11-A15) von den partiellen Ableitungen nach den x_n auf totale Ableitungen nach ξ übergegangen werden -

Der Vierervektor U_m ist konstant, d.h. er hängt nicht vom

Vierervektor x_m ab. Es folgt

$$\partial_n \phi = \partial_n \left\{ \frac{d\phi}{d\xi} \right\} = U_n \cdot \frac{d\phi}{d\xi} \quad \text{A21}$$

Die eingeschränkte Lösung ist der wesentliche Inhalt dieser Arbeit.

B. ERHALTUNGSSÄTZE

B.1 Erhaltung der Ruh-Ladungsdichte

Mit A15 wird

$$\partial_n \Gamma_n = \partial_n (\Lambda_{+}^{V_{+n}} - \Lambda_{-}^{V_{-n}}) = 0 \quad \text{B1}$$

Die Ruh-Ladungsdichte der Ionen im Volumenelement kann nur durch einen Ionen-Quellterm Q_+ und das Ein- bzw. Ausströmen von Ionen geändert werden. Für die Ruh-Ladungsdichte der Elektronen gilt mit einem Elektronen-Quellterm Q_- das Entsprechende. Q_+ und Q_- sind relativistische Invarianten. Im einzelnen muß sein

$$\partial_n \Gamma_{+n} = \partial_n \Lambda_{+}^{V_{+n}} = Q_+ \quad \text{B2}$$

$$\partial_n \Gamma_{-n} = \partial_n \Lambda_{-}^{V_{-n}} = Q_- \quad \text{B3}$$

Aus B1 wird

$$\partial_n \Lambda_{+}^{V_{+n}} - \partial_n \Lambda_{-}^{V_{-n}} = Q_+ - Q_- = 0 \quad \text{d.h.} \quad \text{B4}$$

$$Q_+ = Q_- \quad \text{B5}$$

Die Neuentstehung oder das Verschwinden von Ionen und Elektronen im Volumenelement ist im vorliegenden Konzept nicht enthalten. Also folgt

$$Q_+ = Q_- = 0 \quad \text{B6}$$

$$\partial_n \Lambda_{+}^{V_{+n}} = 0 \quad \text{B7}$$

$$\partial_n \Lambda_{-}^{V_{-n}} = 0 \quad \text{B8}$$

B.2 Erhaltung der Ruh-Teilchendichte und der Ruh-Massen-
dichte

Aus B7 und B8 ergibt sich direkt

$$\partial_n n_{+}^{V_{+n}} = 0 \quad \text{B9}$$

$$\partial_n n_{-}^{V_{-n}} = 0 \quad \text{B10}$$

$$\partial_n \rho_{+}^{V_{+n}} = 0 \quad \text{B11}$$

$$\partial_n \rho_{-}^{V_{-n}} = 0 \quad \text{B12}$$

B.3 Impuls-Energie-Erhaltung

Durch Multiplikation von A11 mit n_+ und von A12 mit n_- folgt unter Verwendung von A5, A6, A7 und A8

$$\rho_{+}^{V_{+n}} \partial_n^{V_{+m}} = \Lambda_{+}^{V_{+n}} F_{mn} = \Gamma_{+n}^{F_{mn}} \quad \text{B13}$$

$$\rho_{-}^{V_{-n}} \partial_n^{V_{-m}} = -\Lambda_{-}^{V_{-n}} F_{mn} = -\Gamma_{-n}^{F_{mn}} \quad \text{B14}$$

Für die Ionen gilt

$$\rho_{+}^{V_{+n}} \partial_n^{V_{+m}} = \partial_n \rho_{+}^{V_{+n}} V_{+m} - V_{+m} \partial_n \rho_{+}^{V_{+n}} \quad \text{B15}$$

Wegen B11 verschwindet der 2. Term der rechten Seite. Analoges gilt für die Elektronen und es wird

$$g_{-V-n} \partial_n V_{-m} = \partial_n g_{-V-n} V_{-m} \quad B16$$

Nach Einsetzen von B15 und B16 ergibt sich aus der Addition von B13 und B14

$$\partial_n (g_{+V+m} V_{+n} + g_{-V-m} V_{-n}) = (\Gamma_{+n} - \Gamma_{-n}) F_{mn} = \Gamma_n F_{mn} \quad B17$$

Die Elemente des symmetrischen Spannungs-Energie-Tensors (T_{mn}) lauten (5)

$$T_{mn} = - \frac{1}{\sqrt{u_0}} (F_{mr} F_{nr} - \frac{1}{4} F_{pq} F_{pq} \delta_{mn}) \quad B18$$

mit $\delta_{mn} = 0$ für $m \neq n$ und $\delta_{mn} = 1$ für $m = n$.

Die Beziehung

$$\Gamma_n F_{mn} = \partial_n T_{mn} \quad B19$$

liefert schließlich mit B17

$$\partial_n (g_{+V+m} V_{+n} + g_{-V-m} V_{-n} - T_{mn}) = \partial_n \tilde{T}_{mn} = 0 \quad B20$$

Für $m = 1, 2, 3$ macht B20 Aussagen über die Impulsstromdichte, für $m = 4$ Aussagen über die Energiedichte.

Der durch B20 gegebene Tensor (\tilde{T}_{mn}) ist wie (T_{mn}) symmetrisch.

B.4 Drehimpuls-Erhaltung

$$\partial_n (x_p \tilde{T}_{qn} - x_q \tilde{T}_{pn}) = 0 \quad B21$$

Näheres siehe unter (6).

C. ABLEITUNG DES SPEZIALISIERTEN GLEICHUNGSSYSTEMS

Wie bereits unter A.14 bemerkt wurde, soll die Arbeit die eingeschränkte Lösung des Gleichungssystems (A11-A15) behandeln. Mit A21 ergibt sich dementsprechend aus A11, A12, A13, A14 und A15

$$U_n V_{+n} \frac{dV_{+m}}{d\tau} = \frac{Ze}{m_+} V_{+n} F_{mn} \quad C1$$

$$U_n V_{-n} \frac{dV_{-m}}{d\tau} = - \frac{e}{m_-} V_{-n} F_{mn} \quad C2$$

$$\frac{d}{d\tau} U_n F_{mn} = \gamma_{u_0} \Gamma_m = \gamma_{u_0} (\Lambda_+ V_{+m} - \Lambda_- V_{-m}) \quad C3$$

$$\frac{d}{d\tau} U_n F_{mn}^* = 0 \quad C4$$

$$\frac{d}{d\tau} U_n \Gamma_n = \frac{d}{d\tau} U_n (\Lambda_+ V_{+n} - \Lambda_- V_{-n}) = 0 \quad C5$$

C.1 Integration der Kontinuitätsgleichung C5

Aus C5 wird

$$U_n \Gamma_n = U_n (\Lambda_+ V_{+n} - \Lambda_- V_{-n}) = J \quad C6$$

J ist eine relativistische Invariante. Mit C3 und C6 folgt

$$\frac{d}{d\tau} U_m U_n F_{mn} = \gamma_{u_0} J \quad C7$$

Wegen

$$U_m U_n F_{mn} = 0 \quad C8$$

gilt

$$J = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Lambda_+ U_n V_{+n} = \Lambda_- U_n V_{-n} \quad C9$$

Aus B7 und B8 wird mit A21

$$\frac{d}{d\xi} \Lambda_+ U_n V_{+n} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Lambda_+ U_n V_{+n} = J_+ \quad \text{C10}$$

$$\frac{d}{d\xi} \Lambda_- U_n V_{-n} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Lambda_- U_n V_{-n} = J_- \quad \text{C11}$$

und wegen C9

$$J_+ = J_- = \tilde{J} \quad \text{C12}$$

d.h. C5 ist durch

$$\Lambda_+ = \tilde{J} \cdot (U_n V_{+n})^{-1} \quad \text{und} \quad \Lambda_- = \tilde{J} \cdot (U_n V_{-n})^{-1} \quad \text{C13}$$

ersetzbar. \tilde{J} ist wie J eine relativistische Invariante.

C.2 Neufassung des Gleichungssystems (C1-C5)

Unter Verwendung von C13 ergibt sich an Stelle von (C1-C5)

$$U_n V_{+n} \frac{dV_{+m}}{d\xi} = \frac{Ze}{m_+} V_{+n} F_{mn} \quad \text{C14}$$

$$U_n V_{-n} \frac{dV_{-m}}{d\xi} = -\frac{e}{m_-} V_{-n} F_{mn} \quad \text{C15}$$

$$\frac{d}{d\xi} U_n F_{mn} = /u_o \tilde{J} \cdot \left[V_{+m} (U_n V_{+n})^{-1} - V_{-m} (U_n V_{-n})^{-1} \right] \quad \text{C16}$$

$$U_n F_{mn}^* = C_m \quad \text{C17}$$

$$\Lambda_+ = \tilde{J} \cdot (U_n V_{+n})^{-1} \quad \text{und} \quad \Lambda_- = \tilde{J} \cdot (U_n V_{-n})^{-1} \quad \text{C18}$$

C_m ist ein Vierervektor.

Durch Multiplikation von C14 mit V_{+m} und von C15 mit V_{-m} folgt mit Rücksicht auf die Antisymmetrie des Tensors (F_{mn})

$$V_{+m}^2 = \text{const.} \quad \text{und} \quad V_{-m}^2 = \text{const.} \quad \text{C19}$$

Mit der Definition von V_{+m} und dem Element der Eigenzeit A_1 wird

$$V_{+4} = i \cdot (c^2 + v_{+1}^2 + v_{+2}^2 + v_{+3}^2)^{\frac{1}{2}} = \gamma_{+} i c \quad \text{C20}$$

$$\gamma_{+} = \frac{dt}{d\tau_{+}} = \frac{1}{c} \cdot (c^2 + v_{+1}^2 + v_{+2}^2 + v_{+3}^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{C21}$$

$$v_{+n} = c v_{+n} (c^2 + v_{+1}^2 + v_{+2}^2 + v_{+3}^2)^{-\frac{1}{2}} ; \quad n = 1, 2, 3 \quad \text{C22}$$

C20, C21 und C22 gelten gleichermaßen für die Plasma-Elektronen: Der Index + ist durch den Index - zu ersetzen. D.h.

$$v_{+m}^2 = v_{-m}^2 = -c^2 \quad \text{C23}$$

Die vierten Komponenten der Vierervektoren V_{+m} und V_{-m} ergeben sich damit aus den jeweiligen ersten drei Komponenten.

Aus C16 wird mit C8

$$\frac{d}{d\tau} U_m U_n F_{mn} = \int u_o \tilde{J}_m^U \left[v_{+m} (U_n v_{+n})^{-1} - v_{-m} (U_n v_{-n})^{-1} \right] = 0 \quad \text{C24}$$

und aus C17 wird entsprechend

$$U_m U_n F_{mn}^* = U_m C_m = 0 \quad \text{C25}$$

Die Gleichungen der vierten Komponenten von C16 und C17 sind

eine Folge der Gleichungen der jeweiligen ersten drei Komponenten.

Zur Ermittlung der 14 von \mathbf{k} abhängigen Lösungsfunktionen

$$V_{+1}; V_{+2}; V_{+3}; V_{-1}; V_{-2}; V_{-3}; F_{14}; F_{24}; F_{34}; F_{14}^*; F_{24}^*; F_{34}^*;$$

$$\Lambda_+; \Lambda_-$$

C26

sind also 14 Gleichungen (C14-C18) verfügbar.

C18 ergibt sich aus einer einzigen Differentialgleichung erster Ordnung (C5): Das Gleichungssystem (C14-C18) erlaubt lediglich 13 voneinander unabhängige Integrationskonstanten, von denen 4 bereits explizit als C_1, C_2, C_3 und \tilde{J} vorliegen.

In der Arbeit sollen speziell Wellenlösungen ermittelt werden -

Die Wechselwirkung des Plasmas mit elektromagnetischen Wellen wird als Verkoppelung ebener Wellen mit einem unendlich ausgedehnten Plasma behandelt. Das bedingt eine im Vergleich zu den benutzten Wellenlängen (und zu den Amplituden der Teilchenbewegung) genügend große Ausdehnung des Plasmas und der Wellenfronten.

C.3 Homogener Fall

Der Fall des wellenfreien Plasmas, d.h.

$$\mathbf{a}_n = 0$$

C27

wird als homogener Fall bezeichnet. Alle in (A11-A15) enthaltenen von den x_n unabhängigen Größen sind räumlich-zeitlich homogen. Das wellenfreie Plasma muß damit eine ausreichende räumlich-zeitliche Homogenität besitzen.

Größen des homogenen Falles werden mit dem zusätzlichen Index 0 gekennzeichnet. Mit C27 folgt dann aus (A11-A15)

$$V_{0+n} F_{0mn} = 0$$

C28

$$V_{o-n} F_{omn} = 0 \quad C29$$

Die

$$\Lambda_{o+} V_{o+m} = \Lambda_{o-} V_{o-m} \quad C30$$

Zudem gilt mit C20 und C21

$$V_{o+4} = i \cdot (c^2 + V_{o+1}^2 + V_{o+2}^2 + V_{o+3}^2)^{\frac{1}{2}} = \gamma_{o+ic} \quad C31$$

$$V_{o-4} = i \cdot (c^2 + V_{o-1}^2 + V_{o-2}^2 + V_{o-3}^2)^{\frac{1}{2}} = \gamma_{o-ic} \quad C32$$

Mit C30, C31 und C32 wird

$$\Lambda_{o+} = \Lambda_{o-} = \Lambda_o \quad C33$$

$$V_{o+m} = V_{o-m} = V_{om} \quad C34$$

und damit aus C28 und C29

$$V_{on} F_{omn} = 0 \quad C35$$

Wegen der Antisymmetrie des Tensors (F_{mn}) ist die Gleichung

$$V_{om} V_{on} F_{omn} = 0 \quad C36$$

erfüllt; d.h. die Gleichung der vierten Komponente von C35 ist eine Folge der Gleichungen der ersten drei Komponenten.

Mit C34 gilt noch

$$\gamma_{o+} = \gamma_{o-} = \gamma_o \quad C37$$

C.4 Zur Lösung des Gleichungssystems (C14-C18)

Die Wechselwirkung des Plasmas mit den elektromagnetischen

Wellen wird in erster Linie unter dem Aspekt der Plasma-Diagnostik betrachtet. Insbesondere erhebt sich die Frage, wie weit den elektromagnetischen Wellen Größen aufprägbar sind, die den wellenfreien (homogenen) Plasmazustand charakterisieren. Es ist die Frage nach der Beziehung zwischen den Wellenlösungen und dem homogenen Fall -

Mit C33 und C34 sind

$$V_{01}; V_{02}; V_{03}; F_{014}; F_{024}; F_{034}; F_{014}^*; F_{024}^*; F_{034}^*; \Lambda_0 \quad C38$$

die den wellenfreien (homogenen) Plasmazustand kennzeichnenden Größen. Nach C35 und C36 gilt die Gleichung

$$V_{on} F_{omn} = 0; \quad m = 1, 2, 3 \quad C39$$

Damit sind lediglich 7 der Größen C38 voneinander unabhängig.

Eine geeignete Beziehung zwischen den Wellenlösungen und dem homogenen Fall ergibt sich, wenn die gesuchten Lösungsfunktionen C26 zwei Forderungen erfüllen

1. Für den wellenfreien (homogenen) Plasmazustand, d.h. bei verschwindenden Maximalamplituden sämtlicher Wellen, sollen sie in die Größen C38 übergehen.
2. Gehen die Maximalamplituden sämtlicher Wellen in C17 und C18 gegen Null, so folgt

$$C_{om} = U_n F_{omn}^*; \quad m = 1, 2, 3 \quad C40$$

$$\vec{J}_0 = \Lambda_0 U_n V_{on} \quad C41$$

C40 und C41 sind Grenzwerte. Der Grenzübergang ist wegen der 1. Forderung an C26 durchführbar und gewährleistet, daß der in einem wellenfreien (homogenen) Plasma an sich sinnlose Vierer-Ausbreitungsvektor U_m seinen wohldefinierten Sinn beibehält.

Nun wird weiterhin die Gültigkeit der Gleichungen

$$C_m = C_{om} ; \quad m = 1, 2, 3 \quad C42$$

$$\tilde{J} = \tilde{J}_0 \quad C43$$

verlangt.

Aus (C14-C18) wird mit C40, C41, C42, C43 und $m = 1, 2, 3$

$$U_n V_{+n} \frac{dV_{+m}}{d\eta} = \frac{Ze}{m_+} V_{+n} F_{mn} \quad C44$$

$$U_n V_{-n} \frac{dV_{-m}}{d\eta} = - \frac{e}{m_-} V_{-n} F_{mn} \quad C45$$

$$\frac{d}{d\eta} U_n F_{mn} = /u_o \Lambda_o U_n V_{on} \left[V_{+m} (U_n V_{+n})^{-1} - V_{-m} (U_n V_{-n})^{-1} \right] \quad C46$$

$$U_n F_{mn}^* = U_n F_{omn}^* \quad C47$$

$$\Lambda_+ = \Lambda_o U_n V_{on} (U_n V_{+n})^{-1} \quad C48$$

$$\Lambda_- = \Lambda_o U_n V_{on} (U_n V_{-n})^{-1} \quad C49$$

Im Grenzfall verschwindender Maximalamplituden sämtlicher Wellen ergibt sich aus C44 und C45 die Gleichung C39.

Wie die Rechnung zeigt, existieren für das Gleichungssystem (C44-C49) eindeutige Lösungsfunktionen C26, welche die vor- genannten zwei Forderungen erfüllen.

C.5 Freie Parameter

In den Lösungsfunktionen C26 des Gleichungssystems (C44-C49) auftretende voneinander unabhängige Konstanten werden als freie Parameter bezeichnet. Es lassen sich zwei Gruppen von

freien Parametern unterscheiden

1. Freie Parameter, die nicht aus der Integration der Differentialgleichungen folgen. Dazu gehören 4 durch den Vierer-Ausbreitungsvektor U_m eingeführte relativistisch variante Konstanten: k, u, α_1 und α_2 . α_3 hängt nach A18 von α_1 und α_2 ab. k und u kennzeichnen mit $\{$ veränderliche Anteile der Wellenphasen. α_1 und α_2 kennzeichnen die Wellenfortpflanzungsrichtung.
2. Freie Parameter, die aus der Integration der Differentialgleichungen folgen. Dazu gehören 7 voneinander unabhängige bis auf Λ_0 relativistisch variante Größen aus C38, die den wellenfreien (homogenen) Plasmazustand beschreiben. Insgesamt sind 13 voneinander unabhängige Integrationskonstanten zulässig. Damit bleiben noch 6 freie Parameter übrig: Sie sind den Wellen zugeordnet und ergeben sich mit den Lösungen. Im Fall der Linearisierung und bei Darstellung der Wellen durch eine longitudinale und zwei aufeinander senkrecht stehende transversale Schwingungskomponenten ist zum Beispiel für jede der drei Komponenten eine relativistisch variante Maximalamplitude und ein relativistisch invarianter konstanter Anteil der Wellenphase verfügbar.

Demnach besitzen die Lösungsfunktionen C26 des Gleichungssystems (C44-C49) - von Naturkonstanten abgesehen - 17 freie Parameter, von denen 7 den wellenfreien (homogenen) Plasmazustand beschreiben und 10 die Wellen charakterisieren.

Aus den 9 Differentialgleichungen erster Ordnung des Gleichungssystems (C44-C49) resultieren 9 voneinander unabhängige Integrationskonstanten: Von ihnen müssen 3 mit 3 von den durch C40, C41, C42 und C43 bereits in (C44-C49) eingeführten 7 freien Parametern zur Beschreibung des wellenfreien (homogenen) Plasmazustandes identisch sein.

Das Gleichungssystem (C44-C49) liefert die Lösungsfunktionen C26 in einem beliebigen eindeutig festliegenden Raum-Zeit-Inertialsystem $S(x_1; x_2; x_3; x_4)$. Die den relativistisch varianten freien Parametern zugeordneten Zahlenwerte beziehen

sich also nur auf $S(x_1; x_2; x_3; x_4)$. Sowohl diese Werte als auch damit gewonnene Lösungsfunktionen lassen sich durch LORENTZ-Transformationen in jedes andere Raum-Zeit-Inertialsystem $S'(x'_1; x'_2; x'_3; x'_4)$ überführen.

C.6 Die dreidimensionale Vektorform des Gleichungssystems (C44-C49)

Mit geeigneten Voraussetzungen über die Zahlenwerte eines Teiles der freien Parameter gelingt die Erzeugung zweier strenger analytischer Lösungen des Gleichungssystems (C44-C49). Allerdings hat die Vorgabe fester Parameterwerte auch zur Folge, daß die bisherige kovariante Darstellung verlassen wird. Es erscheint daher überhaupt zweckmäßig, die Vektorform im Dreidimensionalen zu verwenden. Dies bedeutet natürlich keine Einschränkung der Allgemeingültigkeit des Weiteren.

Zunächst werden die Tensor-Elemente durch die Komponenten des elektrischen und des magnetischen Feldes ersetzt. Der Zusammenhang zwischen Tensor-Element und Feldkomponente ist linear; d.h. die Feldkomponenten transformieren sich im wesentlichen wie die Tensor-Elemente.

Mit Hilfe der Dreiervektoren (Zahlenindizes wurden gegen entsprechende Buchstabenindizes ausgetauscht)

$$\begin{array}{ll}
 \bar{V}_+(V_{+x}; V_{+y}; V_{+z}) & \bar{V}_0(V_{0x}; V_{0y}; V_{0z}) \\
 \bar{V}_-(V_{-x}; V_{-y}; V_{-z}) & \bar{U}(U_x; U_y; U_z) \\
 \bar{E}(E_x; E_y; E_z) & \bar{E}_0(E_{0x}; E_{0y}; E_{0z}) \\
 \bar{B}(B_x; B_y; B_z) & \bar{B}_0(B_{0x}; B_{0y}; B_{0z})
 \end{array} \quad \text{C50}$$

und der relativistisch invarianten Elektronen-Grundfrequenz

$$\omega_G^2 = \frac{u_0 c^2 e}{m_-} \Lambda_0 \quad \text{C51}$$

wird dann aus (C44-C49)

$$(\bar{U}\bar{V}_+ - \gamma_+ ku) \frac{d\bar{V}_+}{d\xi} = \frac{Ze}{m_+} \left[\gamma_+ \bar{E} + (\bar{V}_+ \times \bar{B}) \right] \quad C52$$

$$(\bar{U}\bar{V}_- - \gamma_- ku) \frac{d\bar{V}_-}{d\xi} = -\frac{e}{m_-} \left[\gamma_- \bar{E} + (\bar{V}_- \times \bar{B}) \right] \quad C53$$

$$\frac{d}{d\xi} \left[\frac{ku}{c^2} \bar{E} + (\bar{U} \times \bar{B}) \right] = \frac{\omega_{G-}^2}{ec^2} (\bar{U}\bar{V}_0 - \gamma_0 ku) *$$

$$* \left[\bar{V}_+ (\bar{U}\bar{V}_+ - \gamma_+ ku)^{-1} - \bar{V}_- (\bar{U}\bar{V}_- - \gamma_- ku)^{-1} \right] \quad C54$$

$$\bar{B} = \bar{B}_0 + \frac{1}{ku} \left[\bar{U} \times (\bar{E} - \bar{E}_0) \right] \quad C55$$

$$\Lambda_+ = \frac{\omega_{G-}^2}{\omega_0 c^2 e} (\bar{U}\bar{V}_0 - \gamma_0 ku) (\bar{U}\bar{V}_+ - \gamma_+ ku)^{-1} \quad C56$$

$$\Lambda_- = \frac{\omega_{G-}^2}{\omega_0 c^2 e} (\bar{U}\bar{V}_0 - \gamma_0 ku) (\bar{U}\bar{V}_- - \gamma_- ku)^{-1} \quad C57$$

Mit C50 lautet die Gleichung C39

$$\gamma_0 \bar{E}_0 + (\bar{V}_0 \times \bar{B}_0) = 0 \quad C58$$

C58 ergibt sich aus C52 und C53 im Grenzfall verschwindender Maximalamplituden sämtlicher Wellen.

Das Gleichungssystem (C52-C57) dient als Ausgangspunkt für alle folgenden Betrachtungen. Neben den beiden strengen analytischen Lösungen wird eine Näherungslösung angegeben.

D. ERSTE STRENGE ANALYTISCHE LÖSUNG / REIN TRANSVERSALER FALL

D.1 Voraussetzungen

Es sei

$$\alpha_1 = 0 ; \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{\pi}{2} \quad \text{d.h.}$$

$$\bar{U}(U_x; U_y; U_z) = (+k; 0; 0) \quad \text{D1}$$

$$\bar{V}_0(V_{0x}; V_{0y}; V_{0z}) = (0; 0; 0) \quad \text{D2}$$

$$\bar{B}_0(B_{0x}; B_{0y}; B_{0z}) = (0; 0; 0) \quad \text{D3}$$

und wegen C58 auch

$$\bar{E}_0(E_{0x}; E_{0y}; E_{0z}) = (0; 0; 0) \quad \text{D4}$$

D1 besagt, daß sich die Wellen längs der x-Achse in positiver Richtung fortpflanzen. Die longitudinale und die beiden transversalen Schwingungskomponenten der Wellen entsprechen damit den x-, y- und z-Komponenten der Lösungsfunktionen von (C52-C57).

Aus C52 und C53 folgt mit C55, D1, D3, D4 und $n = y, z$

$$\frac{d}{dz} \left(V_{+n} + \frac{Zm_-}{m_+} V_{-n} \right) = 0 ; \quad V_{+n} + \frac{Zm_-}{m_+} V_{-n} = \tilde{C}_n \quad \text{D5}$$

Gehen die Maximalamplituden sämtlicher Wellen in D5 gegen Null, so wird

$$\tilde{C}_{on} = \left(1 + \frac{Zm_-}{m_+} \right) V_{on} \quad \text{D6}$$

Die Lösungsfunktionen V_{+n} und V_{-n} sollen die Gleichung

$$\tilde{C}_n = \tilde{C}_{on} \quad \text{D7}$$

erfüllen. Also ist

$$V_{+n} = V_{on} - \frac{Zm_-}{m_+} (V_{-n} - V_{on}) \quad D8$$

und mit D2

$$V_{+n} = - \frac{Zm_-}{m_+} V_{-n} \quad D9$$

D.2 Transversalitätsbedingung

Wird das Magnetfeld \vec{B} in den Differentialgleichungen C52, C53 und C54 durch C55 eliminiert, dann ergibt sich die Bedingung für die Transversalität zu

$$V_{+x} = V_{-x} = E_x = 0 \quad D10$$

D.3 Ausgangsgleichungen und Lösung

Mit D1, D2, D3, D4, D9 und D10 folgt aus C53, C54 und C55 das Gleichungssystem

$$\frac{d^2 V_{-n}}{d\mathfrak{f}^2} + A^2 V_{-n} = 0 ; \quad n = y, z \quad D11$$

$$V_{-y} \frac{dV_{-y}}{d\mathfrak{f}} + V_{-z} \frac{dV_{-z}}{d\mathfrak{f}} = 0 ; \quad V_{-y}^2 + V_{-z}^2 = \tilde{V}^2 \quad D12$$

$$A^2 = \frac{1}{k^2} \frac{\omega_G^2}{u^2 - c^2} \left(\frac{1}{\mathfrak{r}_-} + \frac{Zm_-}{m_+} \frac{1}{\mathfrak{r}_+} \right) \quad D13$$

$$\mathfrak{r}_- = \frac{1}{c} \cdot (c^2 + \tilde{V}^2)^{\frac{1}{2}} \quad D14$$

$$\gamma_+ = \frac{1}{c} \cdot \left(c^2 + \frac{z_{m-}^2}{m_+^2} \tilde{V}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{D15}$$

Nach D12 ist $A = \text{const.}$. Für

$$A^2 > 0 \quad \text{D16}$$

ergibt sich die Wellenlösung

$$V_{-y} = \tilde{V} \cdot \sin(A\xi + \varphi) \quad \text{D17}$$

$$V_{-z} = \pm \tilde{V} \cdot \cos(A\xi + \varphi) \quad \text{D18}$$

Mit A17 und D1 gilt

$$A\xi = Ak(x - ut) = \tilde{k}(x - ut) = \tilde{k}x - \omega t \quad \text{D19}$$

$$\tilde{k} = Ak ; \quad u = \frac{\omega}{\tilde{k}} \quad \text{D20}$$

Es bedeuten: \tilde{k} die Wellenzahl und ω die Frequenz der Lösung (D17/D18).

Aus D17 und D18 wird mit D19, D20, C53 und

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \frac{3}{2}\pi \quad \text{D21}$$

$$E_y = \tilde{E} \cdot \sin(\tilde{k}x - \omega t + \tilde{\varphi}) \quad \text{D22}$$

$$E_z = \pm \tilde{E} \cdot \cos(\tilde{k}x - \omega t + \tilde{\varphi}) \quad \text{D23}$$

$$\tilde{E} = \frac{m_-}{e} \omega \tilde{V} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{V} = \frac{e}{m_-} \frac{\tilde{E}}{\omega} \quad \text{D24}$$

Eine D22 und D23 analoge aus der relativistischen VLASOV-

Gleichung für die Plasma-Elektronen resultierende Lösung wird in (7) angegeben.

Mit D13 und D20 gilt die Dispersionsbeziehung

$$\omega^2 - c^2 k^2 = \omega_G^2 \cdot Q \quad D25$$

$$Q = \left[1 + \frac{e^2}{c^2 m_-^2} \frac{\tilde{E}^2}{\omega^2} \right]^{-\frac{1}{2}} + \frac{Z m_-}{m_+} \left[1 + \frac{Z^2 e^2}{c^2 m_+^2} \frac{\tilde{E}^2}{\omega^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad D26$$

$$u^2 = \left(\frac{c}{n}\right)^2 = c^2 \cdot \left[1 - \frac{\omega_G^2}{\omega^2} Q \right]^{-1} \quad D27$$

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_G^2}{\omega^2} Q \quad D28$$

Die Phasengeschwindigkeit u und der Brechungsindex n sind hier reelle, nicht negative Größen. Es ist

$$u \geq c ; \quad n \leq 1 \quad D29$$

Wegen D1 und D10 wird mit D17 und D9

$$\frac{dV_{-y}}{dt} = \frac{\partial V_{-y}}{\partial t} = -\frac{e}{m_-} \tilde{E} \cdot \cos(\tilde{k}x - \omega t + \varphi) \quad D30$$

$$\frac{dV_{+y}}{dt} = \frac{\partial V_{+y}}{\partial t} = \frac{Ze}{m_+} \tilde{E} \cdot \cos(\tilde{k}x - \omega t + \varphi) \quad D31$$

Die Geschwindigkeiten lauten

$$V_{-y} = \frac{e}{m_-} \frac{\tilde{E}}{\omega} \sin(\tilde{k}x - \omega t + \varphi) \quad D32$$

$$V_{+y} = -\frac{Ze}{m_+} \frac{\tilde{E}}{\omega} \sin(\tilde{k}x - \omega t + \varphi) \quad D33$$

Das Entsprechende ist für V_{-z} und V_{+z} der Fall. Aus D30 und D31 folgt, daß die Maximalamplitude der Teilchenbeschleunigung nur von \tilde{E} abhängt. Die Maximalamplitude der Teilchengeschwindigkeit ist nach D32 und D33 durch den Quotienten \tilde{E}/ω bestimmt.

Der relativistische Faktor Q (D26) enthält die Quadrate der Maximalamplituden der Elektronen- und Ionen-Geschwindigkeit. Wird

$$\left(\frac{\tilde{E}}{\omega}\right)^2 \gg \frac{c^2 m_+^2}{Z^2 e^2} \quad \text{D34}$$

dann sind die Einflüsse der beiden Geschwindigkeiten von gleicher Größenordnung. Der Effekt beruht auf der relativistischen Massenzunahme der Teilchen: Elektronen- und Ionen-Maximalgeschwindigkeit nähern sich der Grenzgeschwindigkeit c .

Die Geschwindigkeit eines Teilchens kann selbst bei geringer Größe der Beschleunigung in die Nähe der Vakuumlichtgeschwindigkeit c gebracht werden, wenn die Beschleunigung in einer Richtung nur genügend lange anhält (kleines ω). Bei der Entscheidung der Frage, ob die Elektronen und Ionen einen wesentlichen relativistischen Einfluß haben, spielt deshalb die Größe der Frequenz ω eine Rolle.

Der Ausdruck D28 für den Brechungsindex n weist auf die Möglichkeit der Existenz von Wellen mit $\omega < \omega_G$ hin, sobald Q kleiner als 1 ist.

E. ZWEITE STRENGE ANALYTISCHE LÖSUNG / REIN LONGITUDINALER FALL

E.1 Voraussetzungen

Hauptvoraussetzung - Die Ionen- sind gegen die Elektronen-Schwingungen zu vernachlässigen. Damit

kann \bar{V}_+ durch \bar{V}_0 ersetzt werden. Die Differentialgleichung C52 entfällt.

Weiterhin werden D1, D2, D3 und D4 vorausgesetzt.

C53, C54, C55 und die nichtlineare Transformation

$$(kV_{-x} - \gamma_{-}ku) \frac{1}{\omega_G} \frac{d}{d\tau} = \frac{d}{d\gamma} = \cdot ; \quad V_{-x} \neq \gamma_{-}u \quad E1$$

$$E_x = \frac{u^2 - c^2}{u} \frac{\omega_{Gm-}}{e} X ; \quad X = \frac{u}{u^2 - c^2} \frac{e}{\omega_{Gm-}} E_x \quad E2$$

$$E_y = \frac{u \omega_{Gm-}}{e} Y ; \quad Y = \frac{e}{u \omega_{Gm-}} E_y \quad E3$$

$$E_z = \frac{u \omega_{Gm-}}{e} Z ; \quad Z = \frac{e}{u \omega_{Gm-}} E_z \quad E4$$

liefern das Gleichungssystem

$$\ddot{X} + \gamma_{-}X = - (Y\dot{Y} + Z\dot{Z}) \quad E5$$

$$\ddot{Y} + \gamma_{-} \frac{u^2}{u^2 - c^2} Y = Y\dot{X} \quad E6$$

$$\ddot{Z} + \gamma_{-} \frac{u^2}{u^2 - c^2} Z = Z\dot{X} \quad E7$$

$$\gamma_{-} = \left[1 + \frac{(u^2 - c^2)^2}{c^2 u^2} \cdot [(\dot{X})^2 + (\dot{Y})^2 + (\dot{Z})^2] \right]^{\frac{1}{2}} \quad E8$$

γ, X, Y und Z sind dimensionslose Größen. Insbesondere ist γ die mit dem Faktor ω_G behaftete Eigenzeit τ_{-} der Plasma-Elektronen und damit eine relativistische Invariante.

Mit der Hauptvoraussetzung folgt aus B14, B16, B19, A21, C48 und C20

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} g_{-V-m}^{U_n V_{-n}} &= -\Gamma_{-n}^{F_{mn}} = \Gamma_{on}^{F_{mn}} - \Gamma_{-n}^{F_{mn}} - \Gamma_{on}^{F_{mn}} = \\ &= \Gamma_{n}^{F_{mn}} - \Gamma_{on}^{F_{mn}} \end{aligned} \quad E9$$

also

$$\frac{d}{d\eta} U_n (g_{-V-m}^{V_{-n}} - T_{mn}) = -\Gamma_{on}^{F_{mn}} \quad E10$$

E10 ergibt für $m = 4$ mit A8, A6, C49, C51, C20, C21, B18, C55, A9, D1, D2, D3, D4, E1, E2, E3 und E4

$$\frac{d}{d\eta} \left[\gamma_{-} + \frac{1}{2} \frac{u^2 - c^2}{c^2} \left[\frac{u^2 - c^2}{u^2} x^2 + y^2 + z^2 \right] \right] = 0 \quad E11$$

$$\gamma_{-} + \frac{1}{2} \frac{u^2 - c^2}{c^2} \left[\frac{u^2 - c^2}{u^2} x^2 + y^2 + z^2 \right] = \tilde{H} \quad E12$$

Im Grenzfall des wellenfreien (homogenen) Plasmas gilt

$$\tilde{H}_0 = \gamma_{0-} = 1 \quad E13$$

\tilde{H}_0 ist die auf Eins normierte Ruh-Energiedichte der Plasma-Elektronen. Aus E6 und E7 resultieren Wellenlösungen offensichtlich nur für $u > c$ und mit Wellen ist

$$\tilde{H} > (\tilde{H}_0 = 1) \quad E14$$

E12 stellt die Beziehung zwischen der kinetischen Energie der Plasma-Elektronen und der Energie des elektromagnetischen Feldes her. Mit E1 ergibt sich die Konstanz von \tilde{H} bezüglich η : Die Energiedichte \tilde{H} ist räumlich-zeitlich homogen.

E.2 Longitudinalitätsbedingung

Die Bedingung für die Longitudinalität lautet

$$Y = Z = 0 \quad \text{E15}$$

E.3 Ausgangsgleichung und Lösung

Mit E5, E8 und E15 wird

$$\ddot{X} = \frac{1}{2} \frac{d(\dot{X})^2}{dX} = -X \cdot \sqrt{1 + \frac{(u^2 - c^2)^2}{c^2 u^2} (\dot{X})^2} \quad \text{E16}$$

bzw.

$$\frac{1}{2} d(\dot{X})^2 \cdot \left[1 + \frac{(u^2 - c^2)^2}{c^2 u^2} (\dot{X})^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = -X dX \quad \text{E17}$$

Die Integration von E17 ergibt

$$(\dot{X})^2 = a \cdot (X^4 - bX^2 + d) = a \cdot P(X) \quad \text{E18}$$

mit

$$a = \frac{(u^2 - c^2)^2}{4c^2 u^2} \quad \text{E19}$$

$$b = 2X_0^2 + \frac{1}{a} \cdot \sqrt{1 + 4a(\dot{X}_0)^2} \quad \text{E20}$$

$$d = X_0^4 + \frac{1}{a} \cdot (\dot{X}_0)^2 + \frac{1}{a} X_0^2 \cdot \sqrt{1 + 4a(\dot{X}_0)^2} \quad \text{E21}$$

Aus der Integration von E18 folgt

$$G_1(X) = \int_{X_0}^X [P(X')]^{-\frac{1}{2}} dX' = \sqrt{a} \cdot (\vartheta - \vartheta_0) \quad \text{E22}$$

E22 liefert die unabhängige Veränderliche ϑ als Funktion

$\varphi(X)$. $G_1(X)$ ist ein elliptisches Integral erster Gattung.
 Gesucht wird eine der physikalischen Fragestellung angemessene Umkehrfunktion $X(\varphi)$. X_0 und \dot{X}_0 sind die Werte von X und \dot{X} an der Stelle φ_0 . Zunächst gilt

$$P(X) = X^4 - bX^2 + d = (X - w_1)(X - w_2)(X - w_3)(X - w_4) \quad \text{E23}$$

Die Wurzeln von $P(X)$ charakterisieren die Nullstellen des Nenners in E22. Sie lauten

$$w = \pm \sqrt{\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - d}} \quad \text{E24}$$

$$\begin{array}{llll} w_1 \longrightarrow & + & + & \\ w_2 \longrightarrow & + & - & w_4 = -w_1 \\ w_3 \longrightarrow & - & - & w_3 = -w_2 \\ w_4 \longrightarrow & - & + & \end{array} \quad \text{E25}$$

Aus E8 und E12 ergibt sich mit E15 und E19

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= 2aX^2 + \sqrt{1 + 4a(\dot{X})^2} = \\ &= 2aX_0^2 + \sqrt{1 + 4a(\dot{X}_0)^2} \end{aligned} \quad \text{E26}$$

Wird $(\dot{X}_0)^2 = 0$, so nimmt X_0^2 den Wert

$$\tilde{X}^2 = \frac{1}{2a} \cdot (\tilde{H} - 1) \quad \text{E27}$$

an. \tilde{X} ist der maximale Absolutwert einer Wellenlösung $X(\varphi)$. Die Zuordnung von φ_0 und $((\dot{X}_0)^2 = 0; X_0^2 = \tilde{X}^2)$ bedeutet keine Einschränkung: φ_0 kann noch jeden beliebigen (reellen) Wert

haben. Es folgt

$$w_1 = \sqrt{\tilde{x}^2 + \frac{1}{a}} ; \quad w_4 = -w_1 \quad \text{E28}$$

$$w_2 = +\tilde{x} ; \quad w_3 = -\tilde{x} \quad \text{E29}$$

$$w_1 > w_2 > w_3 > w_4 \quad \text{E30}$$

Sämtliche vier Wurzeln sind reell: Das Polynom E23 ist von viertem Grad mit vier reellen Nullstellen E30; der erste Koeffizient hat den Wert +1. Wegen E27 gilt

$$|x| \leq \tilde{x} \quad \text{oder} \quad (w_3 = -\tilde{x}) \leq x \leq (w_2 = +\tilde{x}) \quad \text{E31}$$

E22 wird für E31 mit Hilfe von

$$x = \frac{w_3 w_{42} - w_4 w_{32} \sin^2 \theta}{w_{42} - w_{32} \sin^2 \theta} \quad \text{E32}$$

$$w_{rs} = w_s - w_r \quad \text{E33}$$

in die LEGENDRESche Normalform

$$G_2(\theta; \tilde{k}) = m \int_0^\theta [1 - \tilde{k}^2 \sin^2 \theta']^{-\frac{1}{2}} d\theta' = \sqrt{a} \cdot (\varphi - \varphi_0) \quad \text{E34}$$

$$m = \frac{2}{w_1 + w_2} ; \quad \tilde{k}^2 = \frac{4w_1 w_2}{(w_1 + w_2)^2} \quad \text{E35}$$

transformiert (8). Mit

$$\theta = \arcsin h \quad \text{E36}$$

folgt aus E34

$$G_3(h; \underline{k}) = \int_0^h [(1 - h'^2)(1 - \underline{k}^2 h'^2)]^{-\frac{1}{2}} dh' =$$

$$= \sqrt{a} \cdot (\varphi - \varphi_0) \quad \text{E37}$$

Die Umkehrfunktion von E37 lautet (8)

$$h = \text{sn} \left[\frac{\sqrt{a}}{m} \cdot (\varphi - \varphi_0) \right] = \text{sn } f \quad \text{E38}$$

Mit E25, E33, E36 und E38 wird aus E32

$$X(\varphi) = - \frac{w_2(w_2 + w_1(1 - 2\text{sn}^2 f(\varphi)))}{w_1 + w_2(1 - 2\text{sn}^2 f(\varphi))} \quad \text{E39}$$

$$f = \frac{\sqrt{a}}{2} \cdot (w_1 + w_2)(\varphi - \varphi_0) \quad \text{E40}$$

Die im Komplexen erklärten JACOBI'schen Funktionen sn, cn und dn sind meromorphe, doppelperiodische Funktionen ihres Argumentes. Sie enthalten \underline{k} als Parameter. In der vorliegenden Anwendung ist \underline{k} reell und im (beiderseits) abgeschlossenen Intervall (0;1) gelegen; ebenso ist φ und damit f reell. Dann sind auch sn, cn und dn reell: sn und cn oszillieren zwischen -1 und +1, während dn stets positiv ist und zwischen

$$k' = \sqrt{1 - \underline{k}^2} \quad \text{E41}$$

und 1 hin- und herschwankt. Die hier allein erforderlichen reellen Periodenlängen bezüglich f betragen

$$\begin{aligned} \text{sn } f &- 4K(\underline{k}) \\ \text{cn } f &- 4K(\underline{k}) \\ \text{dn } f &- 2K(\underline{k}) \end{aligned} \quad \text{mit}$$

$$K(\underline{k}) = \frac{1}{m} \cdot G_2(\mathbb{N}/2; \underline{k}) = F(\mathbb{N}/2; \underline{k}) \quad \text{E42}$$

$K(k)$ ist das vollständige elliptische Integral erster Gat-
tung. Bezüglich φ wird mit E40 und E42

$$\tilde{K}(k) = \frac{2}{\sqrt{a} \cdot (w_1 + w_2)} K(k) \quad \text{E43}$$

Aus E39 ist die Periodizität von $X(\varphi)$ mit der Periodenlänge $2\tilde{K}(k)$ ersichtlich. Die Lösung $E_x(\varphi)$ ergibt sich durch Rück-
transformation von E39 mittels E28, E29 und E2

$$E_x(\varphi) = - \frac{\tilde{E}_x(\tilde{E}_x + W(1 - 2\text{sn}^2 f(\varphi)))}{W + \tilde{E}_x(1 - 2\text{sn}^2 f(\varphi))} \quad \text{E44}$$

$$f(\varphi) = \frac{e}{4c m_- \omega_G} (\tilde{E}_x + W)(\varphi - \varphi_0) \quad \text{E45}$$

$$W = \frac{2c m_- \omega_G}{e} \sqrt{1 + \frac{e^2}{4c^2 m_-^2} \frac{\tilde{E}_x^2}{\omega_G^2}} \quad \text{E46}$$

$$\tilde{K}(k) = \frac{4c m_- \omega_G}{e(\tilde{E}_x + W)} K(k) \quad \text{E47}$$

$$k^2 = \frac{4\tilde{E}_x W}{(\tilde{E}_x + W)^2}; \quad 0 \leq k \leq 1 \quad \text{E48}$$

$$- \tilde{E}_x \leq E_x \leq + \tilde{E}_x \quad \text{E49}$$

\tilde{E}_x ist der maximale Absolutwert der longitudinalen elektri-
schen Feldstärke E_x .

Zur Transformation der Lösung $E_x(\varphi)$ in die Form $E_x(\xi)$ dient
die aus E1, C54, E8, E12, E27 und E2 resultierende Beziehung

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = D(\varphi) = \frac{ku}{\omega_G} \left[\frac{e}{um_-} \frac{\dot{E}_x}{\omega_G} - \sqrt{1 + \frac{e^2}{c^2 m_-^2} \frac{(\dot{E}_x)^2}{\omega_G^2}} \right] =$$

$$= \frac{ku}{\omega_G} \left[\frac{e}{um_-} \frac{\dot{E}_x}{\omega_G} - \left(1 + \frac{e^2}{2c^2 m_-^2 \omega_G^2} (\tilde{E}_x^2 - E_x^2) \right) \right] \quad \text{E50}$$

mit

$$\dot{E}_x = \frac{4cm_- \omega_G}{e} \tilde{E}_x (W + \tilde{E}_x) \left[W + \tilde{E}_x (1 - 2\text{sn}^2 f(\varphi)) \right]^{-2}.$$

$$\cdot \text{sn } f(\varphi) \cdot \text{cn } f(\varphi) \cdot \text{dn } f(\varphi) \quad \text{E51}$$

Es wäre die Bestimmung der Funktion $\varphi(\xi)$ erwünscht. Das erlaubt E50 nicht. Möglich ist dagegen die Ermittlung von

$$\xi(\varphi) = \xi_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} D(\varphi') d\varphi' \quad \text{E52}$$

Die Forderung nach Eindeutigkeit wird in dem Sinne gestellt, daß jedem ξ -Wert nur ein einziger φ -Wert zugeordnet ist: E50 muß definit sein. Wegen der Periodizität von E44 genügt die Betrachtung einer Periode. An den Umkehrpunkten der Schwingung ($E_x(\varphi) = \pm \tilde{E}_x$) gilt $\dot{E}_x = 0$. Dort also wird $D(\varphi)$ negativ: E50 muß demnach negativ-definit sein. Solange \dot{E}_x einen negativen Wert hat, ist die Eindeutigkeitsforderung automatisch erfüllt. Mit positiven Werten von \dot{E}_x ergibt sich aus E50 eine Bedingung an u

$$u > c \frac{e}{m_-} \frac{|\dot{E}_x|_{\max}}{\omega_G} \cdot \left[c^2 + \frac{e^2}{m_-^2} \frac{|\dot{E}_x|_{\max}^2}{\omega_G^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{E53}$$

Aus E53 folgt unter Verwendung von C54, E1 und C22

$$u > |v_{-x}|_{\max} \quad \text{E54}$$

$|\dot{E}_x|_{\max}$ ist der maximale Absolutwert von E51. $|v_{-x}|_{\max}$ ist der maximale Absolutwert der longitudinalen Komponente des

Vektors der wirklichen Elektronen-Geschwindigkeit.

Die Phasengeschwindigkeit u unterliegt außer der durch die LANDAU-Dämpfung gegebenen Einschränkung hinsichtlich der mittleren thermischen Elektronen-Geschwindigkeit noch der Einschränkung E54 hinsichtlich der durch das elektrische Feld verursachten gerichteten Elektronen-Geschwindigkeit.

Mit der zweiten Form von $D(\psi)$ in E50 wird die Periodenlänge von E_x bezüglich ψ

$$2\tilde{K}(k) = \left| -\frac{ku}{\omega_G} I \right| \quad \text{E55}$$

$$I = \int_{\psi_0}^{\psi_0 + 2\tilde{K}(k)} \left[1 + \frac{e^2}{2c^2 m^2 \omega_G^2} (\tilde{E}_x^2 - E_x^2(\psi')) \right] d\psi' \quad \text{E56}$$

$E_x(\psi)$ ist eine periodische Funktion. Sie läßt sich in ein harmonisches Linienspektrum entwickeln. Mit A17 und D1 gilt

$$E_x(\psi) = E_x(k(x - ut)) = E_x(kx - \omega t) \quad \text{E57}$$

$$ku = \omega; \quad kL = 2\tilde{K}(k) = 2\pi \quad \text{E58}$$

Es bedeuten

- ω - Frequenz der Grundwelle
- k - Wellenzahl der Grundwelle
- L - Wellenlänge der Grundwelle

Aus E55, E56 und E58 ergibt sich

$$\omega = \omega(\omega_G; \tilde{E}_x) = \frac{2\pi}{L} \omega_G \quad \text{E59}$$

ω wird durch E59 bestimmt. u oder k ist über die Beziehung E58 unter Beachtung der einschränkenden Bedingung E54 frei

wählbar. u und k sind nicht mehr voneinander unabhängig. Das steht aber in nur scheinbarem Widerspruch zu den Darlegungen über die freien Parameter (C.5). An sich folgt $2\tilde{K}(k)$ aus E55 mit voneinander unabhängig vorgegebenen u und k . Allein die in E58 zwangsläufig getroffene Festlegung $2\tilde{K}(k) = 2\pi$ führt zur gegenseitigen Abhängigkeit von u und k .

Numerische Lösungen $E_x(\cdot)$ lassen sich durch eine geeignete Auswertung der Quadraturen E52 und E56 gewinnen. Um einen Eindruck vom Aussehen der Lösungen E57 zu vermitteln, werden am Schluß der Arbeit einige Abbildungen gebracht.

Möglichkeiten zur Anregung longitudinaler Plasmawellen sind aus (9) ersichtlich.

E.4 Ausartungsfall

Für $k = 0$ gilt

$$\operatorname{sn} f = \sin f ; \quad \operatorname{cn} f = \cos f ; \quad \operatorname{dn} f = 1 ;$$

$$K(0) = \pi/2 \tag{E60}$$

Mit E46 und E48 erhält man

$$k^2 = 4 \frac{e}{2cm_-} \frac{\tilde{E}_x}{\omega_G} \tilde{W} \left[\tilde{W} + \frac{e}{2cm_-} \frac{\tilde{E}_x}{\omega_G} \right]^{-2} \tag{E61}$$

$$\tilde{W} = \sqrt{1 + \frac{e^2}{4c^2 m_-^2} \frac{\tilde{E}_x^2}{\omega_G^2}} \tag{E62}$$

Es soll

$$\frac{e}{2cm_-} \frac{\tilde{E}_x}{\omega_G} \ll 1 \tag{E63}$$

sein, also mit E61 und E51

$$k \ll 1 \quad \text{und} \quad |\dot{E}_x| \leq \tilde{E}_x \tag{E64}$$

Ist weiterhin

$$\left[\frac{e}{um} \frac{|\dot{E}_x|}{\omega_G} = \frac{|V_{-x}|}{u} \right] \ll 1 \quad \text{E65}$$

dann wird näherungsweise mit E47, E60, E56, E59, E50, E45 und E44

$$\tilde{K}(0) = \pi; \quad I = 2\pi; \quad \omega = \omega_G \quad \text{E66}$$

$$D(\varphi) = -1; \quad \varphi - \varphi_0 = -(\xi - \xi_0) \quad \text{E67}$$

$$f = -\frac{1}{2}(\xi - \xi_0); \quad E_x(\xi) = -\tilde{E}_x \cdot \cos(\xi - \xi_0) \quad \text{E68}$$

Mit $\xi_0 = -(\pi/2 + \varphi)$, A17 und D1 folgt schließlich

$$E_x = \tilde{E}_x \cdot \sin(\xi + \varphi) = \tilde{E}_x \cdot \sin(kx - \omega_G t + \varphi) \quad \text{E69}$$

Die Gültigkeit der Näherungslösung E69 hängt von der Größe des Quotienten (\tilde{E}_x/ω_G) und von der Größe der Phasengeschwindigkeit u ab.

F. GEMISCHTER FALL / NÄHERUNGSLÖSUNG BIS ZUR 3. ORDNUNG

F.1 Vorbetrachtung

Die simultane Verkoppelung von Plasma, transversalen und longitudinalen Wellen wird als gemischter Fall bezeichnet. Die Frage, ob das Gleichungssystem (C52-C57) strenge analytische gemischte Lösungen besitzt oder nicht, blieb allgmein offen. Unter der Voraussetzung (siehe E8)

$$\frac{(u^2 - c^2)^2}{c^2 u^2} \left[(\dot{X})^2 + (\dot{Y})^2 + (\dot{Z})^2 \right] \ll 1 \quad \text{d.h.}$$

$$\gamma \approx 1$$

läßt sich (E5-E7) mit der LAGRANGE-Funktion

$$L = (\dot{q}_x)^2 - q_x^2 + (\dot{q}_y)^2 + (\dot{q}_z)^2 - \frac{u^2}{u^2 - c^2} \cdot (q_y^2 + q_z^2) + \dot{q}_x(q_y^2 + q_z^2); \quad q_x = X; \quad q_y = Y; \quad q_z = Z \quad \text{F2}$$

neu fassen (10)

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0; \quad s = x, y, z \quad \text{F3}$$

Mit der aus F2 abgeleiteten HAMILTON-Funktion

$$H = \frac{1}{4} \cdot (p_x - q_y^2 - q_z^2)^2 + \frac{1}{4} \cdot p_y^2 + \frac{1}{4} \cdot p_z^2 + q_x^2 + \frac{u^2}{u^2 - c^2} \cdot (q_y^2 + q_z^2) \quad \text{F4}$$

$$p_x = 2\dot{q}_x + q_y^2 + q_z^2; \quad p_y = 2\dot{q}_y; \quad p_z = 2\dot{q}_z \quad \text{F5}$$

gilt

$$\dot{p}_s = - \frac{\partial H}{\partial q_s}; \quad \dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}; \quad s = x, y, z \quad \text{F6}$$

Wird in E8 die Wurzel mit F1 entwickelt, so resultiert mit E12 und E13 die Beziehung

$$H = \frac{2c^2 u^2}{(u^2 - c^2)^2} \cdot (\tilde{H} - \tilde{H}_0) \quad \text{F7}$$

Die Anwendung eines notwendigen und hinreichenden Kriteriums von STAECKEL (11) auf die HAMILTON-Funktion F4 zeigt, daß es keine kanonische Transformation gibt, welche die Lösung von F6 auf Quadraturen zurückführt.

F.2 Transformation und Näherung

Der Näherungslösung liegt das Gleichungssystem (C52-C55) zugrunde. Durch die Transformation

$$\bar{V}_+ = c\bar{W}_+ ; \quad \bar{V}_- = c\bar{W}_- ; \quad \bar{V}_0 = c\bar{W}_0 ;$$

$$\bar{E} = \frac{km_- c^2}{e} \bar{W} ; \quad \bar{B} = \frac{km_- c}{e} \bar{W} \quad \text{F8}$$

werden allgemein mit $\bar{W}(\xi)$ bezeichnete Funktionen und allgemein mit \bar{W}_0 bezeichnete konstante Größen eingeführt, die sämtlich dimensionslos sind. Es wird (siehe C21)

$$\delta_+ = \frac{dt}{d\tau_+} = \sqrt{1 + \bar{W}_+^2} \quad \text{F9}$$

Unter der Voraussetzung

$$\bar{W}_+^2 \leq 1 \quad \text{d.h.} \quad \bar{V}_+^2 \leq \frac{1}{2} c^2 \quad \text{F10}$$

gilt die Näherung

$$\delta_+ = \frac{dt}{d\tau_+} = 1 + \left[\frac{1}{2} \bar{W}_+^2 - \frac{1}{8} \bar{W}_+^4 + \dots \right] = 1 + N_+ \quad \text{F11}$$

Für die Plasma-Elektronen und den homogenen Fall ist in F9, F10 und F11 der Index + durch den Index - bzw. o zu ersetzen.

Mit F8 und F11 folgt aus (C52-C55)

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{W}_+}{d\xi} = & - \frac{c}{u} \frac{Zm_-}{m_+} \bar{W} + \left[\frac{c}{u} \left[\frac{1}{k} \bar{U}\bar{W}_+ \frac{d\bar{W}_+}{d\xi} - \frac{Zm_-}{m_+} (\bar{W}_+ \times \bar{B}) \right] - \right. \\ & \left. - N_+ \left[\frac{d\bar{W}_+}{d\xi} + \frac{c}{u} \frac{Zm_-}{m_+} \bar{W} \right] \right] \quad \text{F12} \end{aligned}$$

$$\frac{d\bar{W}_-}{d\zeta} = \frac{c}{u} \bar{P} + \left[\frac{c}{u} \left[\frac{1}{k} \bar{U} \bar{W}_- \frac{d\bar{W}_-}{d\zeta} + (\bar{W}_- \times \bar{P}) \right] - N_- \left[\frac{d\bar{W}_-}{d\zeta} - \frac{c}{u} \bar{P} \right] \right] \quad \text{F13}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\zeta} \left[\bar{P} + \frac{c}{ku} (\bar{U} \times \bar{P}) \right] &= - \frac{\omega_G^2}{k^2 u c} (\bar{W}_- - g \bar{W}_+) + \\ &+ \left(\frac{c}{ku} \bar{U} \bar{W}_- - N_- \right) \cdot \frac{d}{d\zeta} \left[\bar{P} + \frac{c}{ku} (\bar{U} \times \bar{P}) \right] + \\ &+ \frac{\omega_G^2}{k^2 u c} \left[\frac{c}{ku} \left[(\bar{U} \bar{W}_0) \bar{W}_- - g (\bar{U} \bar{W}_-) \bar{W}_+ \right] - N_0 \bar{W}_- + g N_- \bar{W}_+ \right] \end{aligned} \quad \text{F14}$$

$$\bar{P} = \bar{P}_0 + \frac{c}{ku} \left[\bar{U} \times (\bar{P} - \bar{P}_0) \right] \quad \text{F15}$$

$$g = \left[\frac{c}{ku} \bar{U} \bar{W}_0 - (1 + N_0) \right] \cdot \left[\frac{c}{ku} \bar{U} \bar{W}_+ - (1 + N_+) \right]^{-1} \quad \text{F16}$$

Die Gleichung C58 lautet jetzt

$$(1 + N_0) \bar{P}_0 + (\bar{W}_0 \times \bar{P}_0) = 0 \quad \text{F17}$$

F.3 Entwicklung und Voraussetzungen

Die in (F12-F16) enthaltenen Funktionen $\bar{Q}(\zeta)$ werden entwickelt

$$\bar{Q}(\zeta) = \frac{1}{\bar{Q}} + \frac{2}{\bar{Q}} + \frac{3}{\bar{Q}} + \dots + \frac{n}{\bar{Q}} + \dots \quad \text{F18}$$

Für in (F12-F16) enthaltene konstante Größen \bar{Q}_0 gilt formal

$$\bar{W}_0 = \frac{1}{W_0} + \frac{2}{W_0} + \frac{3}{W_0} + \dots + \frac{n}{W_0} + \dots \quad \text{F19}$$

und zwar in Verbindung mit der Vorschrift, daß auf der rechten Seite von F19 jeweils nur einer der Terme von Null verschieden ist. Dies muß bei der Interpretation der Lösungen beachtet werden.

In der Entwicklung (F18/F19) wird die Ordnung der Größen durch den über ihnen stehenden Ordnungsindex n gekennzeichnet. Werden Größen gleicher oder verschiedener Ordnungen miteinander multipliziert, so sei das Produkt von einer Ordnung, die gleich der Summe aus den Ordnungen der Faktoren ist.

Die Näherungslösung wird lediglich bis zur 3. Ordnung ermittelt. Das erlaubt wegen der Kleinheit des Massenverhältnisses (Zm_-/m_+) die Vernachlässigung des auf den elektromagnetischen Feldern beruhenden Ionen-Einflusses. Statt F12 gilt dann

$$\bar{W}_+ \cong \bar{W}_0 \quad \text{F20}$$

und mit F11 und F16

$$N_+ \cong N_0 ; \quad g \cong 1 \quad \text{F21}$$

Schließlich sei D1 vorausgesetzt.

F.4 Ausgangsgleichungen

Mit F20, F21 und D1 läßt sich das Gleichungssystem (F12-F16) durch geeignete Differentiationen und Substitutionen auf die folgende Komponenten-Form bringen

$$\frac{d^2 \bar{W}_S}{d\bar{t}^2} + A_{S\bar{W}_S}^2 = R_S \quad \text{F22}$$

$$W_{-s} = W_{0s} + \frac{c}{u} \frac{1}{A_s^2} \cdot (R_{Ws} - \frac{d\mathbb{F}_s}{d\mathfrak{f}}) ; \quad s = x, y, z \quad \text{F23}$$

$$A_x^2 = \frac{\omega_G^2}{u^2 k^2} ; \quad A_y^2 = A_z^2 = A^2 = \frac{\omega_G^2}{k^2(u^2 - c^2)} \quad \text{F24}$$

$$\begin{aligned} R_x = & \left[\frac{c}{u} \cdot \left(\frac{dW_{-x}}{d\mathfrak{f}} \frac{d\mathbb{F}_x}{d\mathfrak{f}} + W_{-x} \frac{d^2\mathbb{F}_x}{d\mathfrak{f}^2} \right) - A_x^2 \left(W_{-x} \frac{dW_{-x}}{d\mathfrak{f}} + W_{-y} \mathbb{F}_{0z} - \right. \right. \\ & \left. \left. - W_{-z} \mathbb{F}_{0y} \right) - \frac{c}{u} A_x^2 \left[W_{-y} (\mathbb{F}_y - \mathbb{F}_{0y}) + W_{-z} (\mathbb{F}_z - \mathbb{F}_{0z}) \right] \right] + \\ & + \left[\frac{u}{c} A_x^2 \left[N_- \left(\frac{dW_{-x}}{d\mathfrak{f}} - \frac{c}{u} \mathbb{F}_x \right) - N_0 \frac{dW_{-x}}{d\mathfrak{f}} + W_{0x} \frac{dN_-}{d\mathfrak{f}} \right] - \frac{dN_-}{d\mathfrak{f}} \frac{d\mathbb{F}_x}{d\mathfrak{f}} - \right. \\ & \left. - N_- \frac{d^2\mathbb{F}_x}{d\mathfrak{f}^2} \right] \quad \text{F25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_y = & \left[\frac{c}{u} \cdot \left(\frac{dW_{-x}}{d\mathfrak{f}} \frac{d\mathbb{F}_y}{d\mathfrak{f}} + W_{-x} \frac{d^2\mathbb{F}_y}{d\mathfrak{f}^2} \right) + A^2 \left[(W_{0x} - W_{-x}) \frac{dW_{-y}}{d\mathfrak{f}} - \right. \right. \\ & \left. \left. - W_{0y} \frac{dW_{-x}}{d\mathfrak{f}} + W_{-x} \mathbb{F}_{0z} - W_{-z} \mathbb{F}_{0x} \right] + \frac{c}{u} A^2 W_{-x} (\mathbb{F}_y - \mathbb{F}_{0y}) \right] + \\ & + \left[\frac{u}{c} A^2 \left[N_- \left(\frac{dW_{-y}}{d\mathfrak{f}} - \frac{c}{u} \mathbb{F}_y \right) - N_0 \frac{dW_{-y}}{d\mathfrak{f}} + W_{0y} \frac{dN_-}{d\mathfrak{f}} \right] - \frac{dN_-}{d\mathfrak{f}} \frac{d\mathbb{F}_y}{d\mathfrak{f}} - \right. \\ & \left. - N_- \frac{d^2\mathbb{F}_y}{d\mathfrak{f}^2} \right] \quad \text{F26} \end{aligned}$$

$$R_z = \left[\frac{c}{u} \cdot \left(\frac{dW_{-x}}{d\mathfrak{f}} \frac{d\mathbb{F}_z}{d\mathfrak{f}} + W_{-x} \frac{d^2\mathbb{F}_z}{d\mathfrak{f}^2} \right) + A^2 \left[(W_{0x} - W_{-x}) \frac{dW_{-z}}{d\mathfrak{f}} - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - W_{Oz} \frac{dW_{-x}}{d\zeta} - W_{-x} W_{Oy} + W_{-y} W_{Ox} \Big] + \frac{c}{u} A^2 W_{-x} (W_z - W_{Oz}) \Big] + \\
 & + \left[\frac{u}{c} A^2 \left[N_- \left(\frac{dW_{-z}}{d\zeta} - \frac{c}{u} W_z \right) - N_o \frac{dW_{-z}}{d\zeta} + W_{Oz} \frac{dN_-}{d\zeta} \right] - \frac{dN_-}{d\zeta} \frac{dW_z}{d\zeta} - \right. \\
 & \left. - N_- \frac{d^2 W_z}{d\zeta^2} \right] \tag{F27}
 \end{aligned}$$

$$R_{Wx} = \left[\frac{c}{u} W_{-x} \frac{dW_x}{d\zeta} \right] - \left[N_- \frac{dW_x}{d\zeta} + \frac{u}{c} A_x^2 (N_o W_{-x} - N_- W_{Ox}) \right] \tag{F28}$$

$$\begin{aligned}
 R_{Wy} &= \frac{c}{u} \left[W_{-x} \frac{dW_y}{d\zeta} + \frac{u}{c} A^2 (W_{Ox} W_{-y} - W_{Oy} W_{-x}) \right] - \left[N_- \frac{dW_y}{d\zeta} + \right. \\
 & \left. + \frac{u}{c} A^2 (N_o W_{-y} - N_- W_{Oy}) \right] \tag{F29}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{Wz} &= \frac{c}{u} \left[W_{-x} \frac{dW_z}{d\zeta} + \frac{u}{c} A^2 (W_{Ox} W_{-z} - W_{Oz} W_{-x}) \right] - \left[N_- \frac{dW_z}{d\zeta} + \right. \\
 & \left. + \frac{u}{c} A^2 (N_o W_{-z} - N_- W_{Oz}) \right] \tag{F30}
 \end{aligned}$$

Die nichtlinearen Terme sind in den R_s und R_{Ws} zusammengefaßt.

Die Wellenlösungen ($A_s^2 > 0$) der homogenen Differentialgleichungen F22

$$W_s(\text{homogen}) = a_s \cdot \sin \psi_s ; \quad s = x, y, z \tag{F31}$$

werden durch die von höherer als 1. Ordnung kleinen rechten Seiten R_s der inhomogenen Differentialgleichungen F22 gestört. Entsprechend der Entwicklung F18 gilt damit für die Wellenlösungen der inhomogenen Differentialgleichungen F22

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_s &= \mathbb{F}_s(\text{inhomogen}) = a_s \cdot \sin \psi_s + \\ &+ \mathbb{F}_s^2(a_x; a_y; a_z; \psi_x; \psi_y; \psi_z) + \mathbb{F}_s^3(a_x; a_y; a_z; \psi_x; \psi_y; \psi_z) + \\ &+ \dots ; \quad s = x, y, z \end{aligned} \quad \text{F32}$$

In Anlehnung an (12) sei

$$a_s = a_{os} + \int \left[q_s^2 + q_s^3 + \dots \right] d\mathfrak{f} \quad \text{F33}$$

$$\psi_s = \left[A_s \mathfrak{f} + \int \left[p_s^1 + p_s^2 + \dots \right] d\mathfrak{f} \right] + \varphi_s \quad \text{F34}$$

bzw.

$$\frac{da_s}{d\mathfrak{f}} = q_s^2 + q_s^3 + \dots \quad \text{F35}$$

$$\frac{d\psi_s}{d\mathfrak{f}} = A_s + p_s^1 + p_s^2 + \dots \quad \text{F36}$$

a_{os}^1 und φ_s sind konstante Amplituden- und Phasenanteile.

Die Größen q_s^n und p_s^n sind Amplituden- und Phasen-Korrekturglieder. Ihre Einführung ermöglicht die Beseitigung der säkularen Terme.

Hier werden lediglich bis zur 3. Ordnung stationäre Lösungen des Gleichungssystems (F22-F30) betrachtet. Derartige Lösungen existieren. Es ist

$$q_s^n = 0 ; \quad n = 2, 3 \quad \text{F37}$$

und

$$p_s = \text{const.}; \quad n = 1, 2 \quad \text{F38}$$

zu setzen. Über höhere Ordnungen als die 3. Ordnung wird keine Aussage gemacht. Sie können noch instationäre Terme enthalten. Eine räumlich-zeitliche Gültigkeitsbeschränkung der bis zur 3. Ordnung stationären Lösungen darf deshalb nicht ausgeschlossen werden.

F31 hat zwei transversale und eine longitudinale Komponente: Im Weiteren wird entweder nur von den beiden transversalen Komponenten oder nur von der longitudinalen Komponente ausgegangen. Innerhalb des verwendeten Näherungsverfahrens werden die Lösungen von höherer als der 1. Ordnung durch F31 quasi "angeregt". Somit ist zwischen dem Fall transversaler und dem Fall longitudinaler Anregung zu unterscheiden

1. Im Fall der transversalen Anregung sei mit F33 und F24

$$a_x = 0; \quad A^2 = 1 = \frac{\omega_G^2}{k^2(u^2 - c^2)};$$

$$A_x^2 = \frac{u^2 - c^2}{u^2}; \quad u > c \quad \text{F39}$$

2. Im Fall der longitudinalen Anregung sei mit F33 und F24

$$a_y = a_z = 0; \quad A_x^2 = 1 = \frac{\omega_G^2}{u^2 k^2};$$

$$A^2 = \frac{u^2}{u^2 - c^2}; \quad u > c \quad \text{F40}$$

In beiden Fällen sind u und k nicht mehr voneinander unabhängig, was aber in nur scheinbarem Widerspruch zu den Darlegungen über die freien Parameter (C.5) steht. An sich folgen A und A_x aus F24 mit voneinander unabhängig vorgegebenen

u und k. Allein die in F39 und F40 getroffenen Festlegungen $A = 1$ bzw. $A_x = 1$ führen zur gegenseitigen Abhängigkeit von u und k.

F.5 Lösung der 1. Ordnung

Ausgangsgleichungen -

$$\frac{d^2 \overset{1}{W}_s}{d\overset{1}{t}^2} + A_s^2 \overset{1}{W}_s = 0 \quad \text{F41}$$

$$\overset{1}{W}_{-s} = \overset{1}{W}_{0s} - \frac{c}{u} \frac{1}{A_s^2} \frac{d\overset{1}{W}_s}{d\overset{1}{t}} ; \quad s = x, y, z \quad \text{F42}$$

Lösung der transversalen Anregung -

$$\overset{1}{W}_s = a_s \cdot \sin \psi_s \quad \text{F43}$$

$$\overset{1}{W}_{-s} = \overset{1}{W}_{0s} - \frac{c}{u} a_s \cdot \cos \psi_s ; \quad s = y, z \quad \text{F44}$$

$$\overset{1}{W}_{-x} = \overset{1}{W}_{0x} \quad \text{F45}$$

Lösung der longitudinalen Anregung -

$$\overset{1}{W}_x = a_x \cdot \sin \psi_x \quad \text{F46}$$

$$\overset{1}{W}_{-x} = \overset{1}{W}_{0x} - \frac{c}{u} a_x \cdot \cos \psi_x \quad \text{F47}$$

$$\overset{1}{W}_{-s} = \overset{1}{W}_{0s} ; \quad s = y, z \quad \text{F48}$$

F.6 Lösung der 2. Ordnung

Ausgangsgleichungen (mit F37, F38) -

$$\frac{d^2 \overset{2}{\Phi}_s}{d\overset{2}{t}} + A_s^2 \overset{2}{\Phi}_s = 2A_s a_s p_s^1 \cdot \sin \psi_s + R_s^2 \quad \text{F49}$$

$$\overset{2}{W}_{-s} = \overset{2}{W}_{os} + \frac{c}{u} \frac{1}{A_s^2} \cdot \left(R_{\overset{2}{W}_s} - \frac{d\overset{2}{\Phi}_s}{d\overset{2}{t}} - a_s p_s^1 \cdot \cos \psi_s \right) ;$$

$$s = x, y, z \quad \text{F50}$$

Von den Lösungen der homogenen Differentialgleichungen F49 wird hier abgesehen.

Lösung der transversalen Anregung -

$$\begin{aligned} \overset{2}{\Phi}_x = & \left(\overset{1}{B}_{oy} \overset{1}{W}_{oz} - \overset{1}{B}_{oz} \overset{1}{W}_{oy} \right) + \frac{c}{u} \frac{A_x^2}{1 - A_x^2} \cdot \left(\overset{1}{W}_{oy} a_y \cdot \sin \psi_y - \right. \\ & \left. - \overset{1}{B}_{oz} a_y \cdot \cos \psi_y + \overset{1}{W}_{oz} a_z \cdot \sin \psi_z + \overset{1}{B}_{oy} a_z \cdot \cos \psi_z \right) - \\ & - \frac{1}{2} \frac{c^2}{u^2} \frac{A_x^2}{4 - A_x^2} \cdot \left(a_y^2 \cdot \sin 2\psi_y + a_z^2 \cdot \sin 2\psi_z \right) \quad \text{F51} \end{aligned}$$

$$\overset{2}{\Phi}_y = \left(\overset{1}{B}_{oz} \overset{1}{W}_{ox} - \overset{1}{B}_{ox} \overset{1}{W}_{oz} \right) \quad \text{F52}$$

$$\overset{2}{\Phi}_z = \left(\overset{1}{B}_{ox} \overset{1}{W}_{oy} - \overset{1}{B}_{oy} \overset{1}{W}_{ox} \right) \quad \text{F53}$$

$$\begin{aligned}
 \overset{2}{W}_{-x} &= \overset{2}{W}_{ox} - \frac{c^2}{u^2} \frac{1}{1 - A_x^2} (\overset{1}{W}_{oy} a_y \cdot \cos \psi_y + \overset{1}{W}_{oz} a_y \cdot \sin \psi_y + \\
 &+ \overset{1}{W}_{oz} a_z \cdot \cos \psi_z - \overset{1}{W}_{oy} a_z \cdot \sin \psi_z) + \\
 &+ \frac{c^3}{u^3} \frac{1}{4 - A_x^2} (a_y^2 \cdot \cos 2\psi_y + a_z^2 \cdot \cos 2\psi_z)
 \end{aligned}
 \tag{F54}$$

$$\overset{2}{W}_{-s} = \overset{2}{W}_{os} - \frac{c}{u} a_s p_s \cdot \cos \psi_s ; \quad s = y, z
 \tag{F55}$$

mit den Lösbarkeitsbedingungen

$$\overset{1}{p}_y = \frac{1}{2} \frac{c}{u} \overset{1}{W}_{ox} \frac{a_z}{a_y} \sin \Delta
 \tag{F56}$$

$$\overset{1}{p}_z = \frac{1}{2} \frac{c}{u} \overset{1}{W}_{ox} \frac{a_y}{a_z} \sin \Delta
 \tag{F57}$$

$$\frac{c}{u} \overset{1}{W}_{ox} a_z \cdot \cos \Delta = 0
 \tag{F58}$$

$$\frac{c}{u} \overset{1}{W}_{ox} a_y \cdot \cos \Delta = 0
 \tag{F59}$$

$$\Delta = \psi_z - \psi_y = \text{const.}
 \tag{F60}$$

Lösung der longitudinalen Anregung -

$$\overset{2}{W}_x = (\overset{1}{W}_{oy} \overset{1}{W}_{oz} - \overset{1}{W}_{oz} \overset{1}{W}_{oy}) - \frac{1}{2} \frac{c^2}{u^2} a_x^2 \cdot \sin 2\psi_x
 \tag{F61}$$

$$\begin{aligned} \overset{2}{W}_y &= (\overset{1}{B}_{OZ} \overset{1}{W}_{Ox} - \overset{1}{B}_{Ox} \overset{1}{W}_{OZ}) - \frac{c}{u} \frac{A^2}{A^2 - 1} (\overset{1}{W}_{Oy} a_x \cdot \sin \psi_x + \\ &+ \overset{1}{B}_{OZ} a_x \cdot \cos \psi_x) \end{aligned} \quad \text{F62}$$

$$\begin{aligned} \overset{2}{W}_z &= (\overset{1}{B}_{Ox} \overset{1}{W}_{Oy} - \overset{1}{B}_{Oy} \overset{1}{W}_{Ox}) - \frac{c}{u} \frac{A^2}{A^2 - 1} (\overset{1}{W}_{Oz} a_x \cdot \sin \psi_x - \\ &- \overset{1}{B}_{Oy} a_x \cdot \cos \psi_x) \end{aligned} \quad \text{F63}$$

$$\overset{2}{W}_{-x} = (\overset{2}{W}_{Ox} - \frac{1}{2} \frac{c^3}{u^3} a_x^2) + \frac{1}{2} \frac{c^3}{u^3} a_x^2 \cdot \cos 2\psi_x \quad \text{F64}$$

$$\begin{aligned} \overset{2}{W}_{-y} &= \overset{2}{W}_{Oy} - \frac{c^2}{u^2} \frac{1}{A^2 - 1} (\overset{1}{B}_{Oz} a_x \cdot \sin \psi_x - \\ &- A^2 \overset{1}{W}_{Oy} a_x \cdot \cos \psi_x) \end{aligned} \quad \text{F65}$$

$$\begin{aligned} \overset{2}{W}_{-z} &= \overset{2}{W}_{Oz} + \frac{c^2}{u^2} \frac{1}{A^2 - 1} (\overset{1}{B}_{Oy} a_x \cdot \sin \psi_x + \\ &+ A^2 \overset{1}{W}_{Oz} a_x \cdot \cos \psi_x) \end{aligned} \quad \text{F66}$$

mit der Lösbarkeitsbedingung

$$\overset{1}{P}_x = \frac{c}{u} \overset{1}{W}_{Ox} \quad \text{F67}$$

F.7 Lösung der 3. Ordnung

Ausgangsgleichungen (mit F37, F38) -

$$\frac{d^2 \overset{3}{W}_s}{d\overset{3}{t}^2} + A_s^2 \overset{3}{W}_s = (2A_s p_s^2 + p_s^2) a_s \cdot \sin \psi_s + (ZGE)_s + \overset{3}{R}_s \quad F68$$

$$\overset{3}{W}_{-s} = \overset{3}{W}_{os} + \frac{c}{u} \frac{1}{A_s^2} \cdot (R_{\overset{3}{W}_s} - \frac{d \overset{3}{W}_s}{d\overset{3}{t}} - (ZGV)_s - a_s p_s^2 \cdot \cos \psi_s) ;$$

s = x, y, z F69

Die Terme $(ZGE)_s$ und $(ZGV)_s$ sind Zusatzglieder von 3. Ordnung, die sich aus der Ableitung der $\overset{2}{W}_s$ ergeben. Von den Lösungen der homogenen Differentialgleichungen F68 wird hier abgesehen.

Das wesentliche Interesse besteht an der elektrischen Feldstärke. Die weitere Darstellung beschränkt sich deshalb auf ihre Angabe.

Lösung der transversalen Anregung -

$$\begin{aligned} \overset{3}{E}_x &= (\overset{2}{B}_{oy} \overset{1}{W}_{oz} + \overset{1}{B}_{oy} \overset{2}{W}_{oz} - \overset{2}{B}_{oz} \overset{1}{W}_{oy} - \overset{1}{B}_{oz} \overset{2}{W}_{oy}) - \\ &- \frac{A_x^2}{1 - A_x^2} \left[\left(1 - \frac{c^2}{u^2} \frac{2}{1 - A_x^2}\right) \overset{1}{W}_{ox} \overset{1}{W}_{oy} - \frac{c}{u} \overset{2}{W}_{oy} + \right. \\ &+ \left. \frac{c}{u} \frac{2}{1 - A_x^2} \overset{1}{W}_{oy} \overset{1}{p}_y \right] a_y \cdot \sin \psi_y + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{c}{u} \frac{A_x^2}{4 - A_x^2} \left[\left(1 - \frac{c^2}{u^2} \frac{8}{4 - A_x^2}\right) \overset{1}{W}_{ox} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{c}{u} \left(1 - \frac{8}{4 - A_x^2} \right) p_y \Big] a_y^2 \cdot \sin 2\psi_y - \\
 & + \frac{c}{u} \frac{A_x^2}{1 - A_x^2} \left[\frac{c}{u} \frac{2}{1 - A_x^2} \overset{1}{H}_{Oz} \overset{1}{W}_{Ox} + \overset{2}{H}_{Oz} + \right. \\
 & + \left. \left(1 - \frac{2}{1 - A_x^2} \right) \overset{1}{H}_{Oz} p_y \right] a_y \cdot \cos \psi_y - \\
 & - \frac{A_x^2}{1 - A_x^2} \left[\left(1 - \frac{c^2}{u^2} \frac{2}{1 - A_x^2} \right) \overset{1}{W}_{Ox} \overset{1}{W}_{Oz} - \frac{c}{u} \overset{2}{W}_{Oz} + \right. \\
 & + \left. \frac{c}{u} \frac{2}{1 - A_x^2} \overset{1}{W}_{Oz} p_z \right] a_z \cdot \sin \psi_z + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{c}{u} \frac{A_x^2}{4 - A_x^2} \left[\left(1 - \frac{c^2}{u^2} \frac{8}{4 - A_x^2} \right) \overset{1}{W}_{Ox} - \right. \\
 & - \left. \frac{c}{u} \left(1 - \frac{8}{4 - A_x^2} \right) p_z \right] a_z^2 \cdot \sin 2\psi_z + \\
 & + \frac{c}{u} \frac{A_x^2}{1 - A_x^2} \left[\frac{c}{u} \frac{2}{1 - A_x^2} \overset{1}{H}_{Oy} \overset{1}{W}_{Ox} + \overset{2}{H}_{Oy} + \right. \\
 & + \left. \left(1 - \frac{2}{1 - A_x^2} \right) \overset{1}{H}_{Oy} p_z \right] a_z \cdot \cos \psi_z
 \end{aligned}$$

F70

$$\overset{3}{H}_y = \left(\overset{2}{H}_{Oz} \overset{1}{W}_{Ox} + \overset{1}{H}_{Oz} \overset{2}{W}_{Ox} - \overset{2}{H}_{Ox} \overset{1}{W}_{Oz} - \overset{1}{H}_{Ox} \overset{2}{W}_{Oz} \right) -$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(\frac{2}{3} \frac{c^3}{u^3} \frac{1}{4 - A_x^2} + \frac{1}{3} \frac{c^3}{u^3} \frac{1}{1 - A_x^2} - \frac{1}{2} \frac{c}{u} \right) \cdot \frac{1}{W_{oy}} a_y^2 \cdot \sin 2\psi_y + \\
 & + \left(\frac{3}{16} \frac{c^4}{u^4} \frac{1}{4 - A_x^2} - \frac{3}{64} \frac{c^2}{u^2} \right) \cdot a_y^3 \cdot \sin 3\psi_y + \\
 & + \left(\frac{3}{16} \frac{c^4}{u^4} \frac{1}{4 - A_x^2} - \frac{3}{64} \frac{c^2}{u^2} \right) \cdot a_y a_z^2 \cdot \sin(\psi_y + 2\psi_z) - \\
 & - \frac{1}{3} \frac{c^3}{u^3} \left(\frac{1}{4 - A_x^2} - \frac{1}{1 - A_x^2} \right) \cdot \frac{1}{W_{oz}} a_y^2 \cdot \cos 2\psi_y - \\
 & - \frac{1}{3} \frac{c^3}{u^3} \frac{1}{1 - A_x^2} \frac{1}{W_{oy}} a_y a_z \cdot \cos(\psi_y + \psi_z) - \\
 & - \left(\frac{2}{3} \frac{c^3}{u^3} \frac{1}{4 - A_x^2} - \frac{1}{6} \frac{c}{u} \right) \cdot \frac{1}{W_{oy}} a_z^2 \cdot \sin 2\psi_z - \\
 & - \frac{1}{3} \frac{c^3}{u^3} \frac{1}{4 - A_x^2} \frac{1}{W_{oz}} a_z^2 \cdot \cos 2\psi_z
 \end{aligned}$$

F71

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{W_z} & = \left(\frac{2}{W_{ox}} \frac{1}{W_{oy}} + \frac{1}{W_{ox}} \frac{2}{W_{oy}} - \frac{2}{W_{oy}} \frac{1}{W_{ox}} - \frac{1}{W_{oy}} \frac{2}{W_{ox}} \right) - \\
 & - \left(\frac{2}{3} \frac{c^3}{u^3} \frac{1}{4 - A_x^2} + \frac{1}{3} \frac{c^3}{u^3} \frac{1}{1 - A_x^2} - \frac{1}{2} \frac{c}{u} \right) \cdot \frac{1}{W_{oz}} a_z^2 \cdot \sin 2\psi_z + \\
 & + \left(\frac{3}{16} \frac{c^4}{u^4} \frac{1}{4 - A_x^2} - \frac{3}{64} \frac{c^2}{u^2} \right) \cdot a_z^3 \cdot \sin 3\psi_z + \\
 & + \left(\frac{3}{16} \frac{c^4}{u^4} \frac{1}{4 - A_x^2} - \frac{3}{64} \frac{c^2}{u^2} \right) \cdot a_y^2 a_z \cdot \sin(2\psi_y + \psi_z) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{3} \frac{c^3}{u^3} \left(\frac{1}{4 - A_x^2} - \frac{1}{1 - A_x^2} \right) \cdot \frac{1}{W_{oy}} a_z^2 \cdot \cos 2\psi_z + \\
 & + \frac{1}{3} \frac{c^3}{u^3} \frac{1}{1 - A_x^2} \frac{1}{W_{oz}} a_y a_z \cdot \cos(\psi_y + \psi_z) - \\
 & - \left(\frac{2}{3} \frac{c^3}{u^3} \frac{1}{4 - A_x^2} - \frac{1}{6} \frac{c}{u} \right) \cdot \frac{1}{W_{oz}} a_y^2 \cdot \sin 2\psi_y + \\
 & + \frac{1}{3} \frac{c^3}{u^3} \frac{1}{4 - A_x^2} \frac{1}{W_{oy}} a_y^2 \cdot \cos 2\psi_y
 \end{aligned} \tag{F72}$$

mit den Lösbarkeitsbedingungen

$$\begin{aligned}
 p_y^2 & = -\frac{1}{2} p_y^2 + \frac{c}{u} \frac{1}{W_{ox}} \frac{1}{p_y} + \left(\frac{1}{4} \frac{c^4}{u^4} \frac{1}{4 - A_x^2} - \frac{3}{16} \frac{c^2}{u^2} \right) \cdot a_y^2 - \\
 & - \frac{1}{8} \frac{c^2}{u^2} a_z^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{c^2}{u^2} \frac{1}{1 - A_x^2} - 1 \right) \cdot \frac{1}{W_{oy}}^2 + \frac{1}{2} \frac{c^2}{u^2} \frac{1}{1 - A_x^2} \frac{1}{W_{oz}}^2 + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{c}{u} \left[\frac{1}{W_{ox}} \frac{1}{p_z} + \frac{2}{W_{ox}} - \frac{c}{u} \frac{1}{1 - A_x^2} \left(\frac{1}{W_{oy}} \frac{1}{W_{oy}} + \frac{1}{W_{oz}} \frac{1}{W_{oz}} \right) \right] \frac{a_z}{a_y} \sin \Delta + \\
 & + \left(\frac{1}{4} \frac{c^4}{u^4} \frac{1}{4 - A_x^2} - \frac{1}{16} \frac{c^2}{u^2} \right) \cdot a_z^2 \cdot \cos 2\Delta - \frac{1}{2} \left[\frac{c^2}{u^2} \frac{1}{1 - A_x^2} \frac{1}{W_{oy}} \frac{1}{W_{oz}} - \right. \\
 & \left. - \left(\frac{c^2}{u^2} \frac{1}{1 - A_x^2} - 1 \right) \cdot \frac{1}{W_{oy}} \frac{1}{W_{oz}} \right] \frac{a_z}{a_y} \cos \Delta
 \end{aligned} \tag{F73}$$

$$p_z^2 = -\frac{1}{2} p_z^2 + \frac{c}{u} \frac{1}{W_{ox}} \frac{1}{p_z} + \left(\frac{1}{4} \frac{c^4}{u^4} \frac{1}{4 - A_x^2} - \frac{3}{16} \frac{c^2}{u^2} \right) \cdot a_z^2 -$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{8} \frac{c^2}{u^2} a_y^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{c^2}{u^2} \frac{1}{1 - A_x^2} - 1 \right) \cdot W_{Oz}^2 + \frac{1}{2} \frac{c^2}{u^2} \frac{1}{1 - A_x^2} W_{Oy}^2 + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{c}{u} \left[\overset{1}{R}_{Ox} \overset{1}{p}_y + \overset{2}{R}_{Ox} - \frac{c}{u} \frac{1}{1 - A_x^2} \left(\overset{1}{R}_{Oy} \overset{1}{W}_{Oy} + \overset{1}{R}_{Oz} \overset{1}{W}_{Oz} \right) \right] \frac{a_y}{a_z} \sin \Delta + \\
 & + \left(\frac{1}{4} \frac{c^4}{u^4} \frac{1}{4 - A_x^2} - \frac{1}{16} \frac{c^2}{u^2} \right) \cdot a_y^2 \cdot \cos 2\Delta - \frac{1}{2} \left[\frac{c^2}{u^2} \frac{1}{1 - A_x^2} \overset{1}{R}_{Oy} \overset{1}{R}_{Oz} - \right. \\
 & \left. - \left(\frac{c^2}{u^2} \frac{1}{1 - A_x^2} - 1 \right) \cdot \overset{1}{W}_{Oy} \overset{1}{W}_{Oz} \right] \frac{a_y}{a_z} \cos \Delta
 \end{aligned} \tag{F74}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\overset{1}{W}_{Oy} \overset{1}{W}_{Oz} + \frac{c^2}{u^2} \frac{1}{1 - A_x^2} \left(\overset{1}{R}_{Oy} \overset{1}{R}_{Oz} - \overset{1}{W}_{Oy} \overset{1}{W}_{Oz} \right) \right] a_z \cdot \sin \Delta - \\
 & - \frac{1}{2} \left(\frac{c^4}{u^4} \frac{1}{4 - A_x^2} - \frac{1}{4} \frac{c^2}{u^2} \right) \cdot a_y a_z^2 \cdot \sin 2\Delta + \frac{c}{u} \left[\overset{1}{R}_{Ox} \overset{1}{p}_z + \overset{2}{R}_{Ox} - \right. \\
 & \left. - \frac{c}{u} \frac{1}{1 - A_x^2} \left(\overset{1}{R}_{Oy} \overset{1}{W}_{Oy} + \overset{1}{R}_{Oz} \overset{1}{W}_{Oz} \right) \right] a_z \cdot \cos \Delta = 0
 \end{aligned} \tag{F75}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\overset{1}{W}_{Oy} \overset{1}{W}_{Oz} + \frac{c^2}{u^2} \frac{1}{1 - A_x^2} \left(\overset{1}{R}_{Oy} \overset{1}{R}_{Oz} - \overset{1}{W}_{Oy} \overset{1}{W}_{Oz} \right) \right] a_y \cdot \sin \Delta - \\
 & - \frac{1}{2} \left(\frac{c^4}{u^4} \frac{1}{4 - A_x^2} - \frac{1}{4} \frac{c^2}{u^2} \right) \cdot a_y^2 a_z \cdot \sin 2\Delta + \frac{c}{u} \left[\overset{1}{R}_{Ox} \overset{1}{p}_y + \overset{2}{R}_{Ox} - \right. \\
 & \left. - \frac{c}{u} \frac{1}{1 - A_x^2} \left(\overset{1}{R}_{Oy} \overset{1}{W}_{Oy} + \overset{1}{R}_{Oz} \overset{1}{W}_{Oz} \right) \right] a_y \cdot \cos \Delta = 0
 \end{aligned} \tag{F76}$$

Lösung der longitudinalen Anregung -

$$\begin{aligned}
 \overset{3}{H}_x &= (\overset{2}{H}_{oy}\overset{1}{W}_{oz} + \overset{1}{H}_{oy}\overset{2}{W}_{oz} - \overset{2}{H}_{oz}\overset{1}{W}_{oy} - \overset{1}{H}_{oz}\overset{2}{W}_{oy}) + \\
 &+ \left(\frac{1}{2} \frac{c}{u} - \frac{11}{6} \frac{c^2}{u^2} + \frac{8}{3} \frac{c^3}{u^3}\right) \cdot \overset{1}{W}_{ox} a_x^2 \cdot \sin 2\psi_x + \\
 &+ \left(\frac{3}{8} \frac{c^4}{u^4} - \frac{3}{64} \frac{c^2}{u^2}\right) \cdot a_x^3 \cdot \sin 3\psi_x
 \end{aligned}$$

F77

$$\begin{aligned}
 \overset{3}{H}_y &= (\overset{2}{H}_{oz}\overset{1}{W}_{ox} + \overset{1}{H}_{oz}\overset{2}{W}_{ox} - \overset{2}{H}_{ox}\overset{1}{W}_{oz} - \overset{1}{H}_{ox}\overset{2}{W}_{oz}) + \\
 &+ \frac{A^2}{A^2 - 1} \left[\left(\frac{u^2 - 2c^2}{u^2} - \frac{c^2}{u^2} \frac{2}{A^2 - 1} \right) \cdot \overset{1}{W}_{ox} \overset{1}{W}_{oy} - \right. \\
 &- \left. \frac{c^2}{u^2} \frac{1}{A^2 - 1} \overset{1}{H}_{ox} \overset{1}{W}_{oy} - \frac{c}{u} \overset{2}{W}_{oy} \right] a_x \cdot \sin \psi_x + \\
 &+ \frac{A^2}{A^2 - 4} \left(\frac{c^3}{u^3} \frac{A^2 - 2}{A^2 - 1} - \frac{1}{2} \frac{c}{u} \right) \cdot \overset{1}{W}_{oy} a_x^2 \cdot \sin 2\psi_x - \\
 &- \frac{c}{u} \frac{A^2}{A^2 - 1} \left[\frac{c}{u} \left(1 + \frac{2}{A^2 - 1} \right) \cdot \overset{1}{H}_{oz} \overset{1}{W}_{ox} + \right. \\
 &+ \left. \frac{c}{u} \frac{A^2}{A^2 - 1} \overset{1}{H}_{ox} \overset{1}{W}_{oz} - \frac{2}{H_{oz}} \right] a_x \cdot \cos \psi_x + \\
 &+ \frac{c^3}{u^3} \frac{A^2}{A^2 - 4} \frac{A^2 - 2}{A^2 - 1} \overset{1}{H}_{oz} a_x^2 \cdot \cos 2\psi_x
 \end{aligned}$$

F78

$$\overset{3}{H}_z = (\overset{2}{H}_{ox}\overset{1}{W}_{oy} + \overset{1}{H}_{ox}\overset{2}{W}_{oy} - \overset{2}{H}_{oy}\overset{1}{W}_{ox} - \overset{1}{H}_{oy}\overset{2}{W}_{ox}) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{A^2}{A^2 - 1} \left[\left(\frac{u^2 - 2c^2}{u^2} - \frac{c^2}{u^2} \frac{2}{A^2 - 1} \right) \cdot \overset{1}{W}_{ox} \overset{1}{W}_{oz} - \right. \\
 & \left. - \frac{c^2}{u^2} \frac{1}{A^2 - 1} \overset{1}{P}_{ox} \overset{1}{P}_{oz} - \frac{c}{u} \overset{2}{W}_{oz} \right] a_x \cdot \sin \psi_x + \\
 & + \frac{A^2}{A^2 - 4} \left(\frac{c^3}{u^3} \frac{A^2 - 2}{A^2 - 1} - \frac{1}{2} \frac{c}{u} \right) \cdot \overset{1}{W}_{oz} a_x^2 \cdot \sin 2\psi_x + \\
 & + \frac{c}{u} \frac{A^2}{A^2 - 1} \left[\frac{c}{u} \left(1 + \frac{2}{A^2 - 1} \right) \cdot \overset{1}{P}_{oy} \overset{1}{W}_{ox} + \right. \\
 & \left. + \frac{c}{u} \frac{A^2}{A^2 - 1} \overset{1}{P}_{ox} \overset{1}{W}_{oy} + \overset{2}{P}_{oy} \right] a_x \cdot \cos \psi_x - \\
 & - \frac{c^3}{u^3} \frac{A^2}{A^2 - 4} \frac{A^2 - 2}{A^2 - 1} \overset{1}{P}_{oy} a_x^2 \cdot \cos 2\psi_x
 \end{aligned}
 \tag{F79}$$

mit der Lösbarkeitsbedingung

$$\begin{aligned}
 \overset{2}{p}_x & = - \frac{3}{16} \frac{c^2}{u^2} a_x^2 + \left(\frac{c^2}{u^2} - \frac{1}{2} \right) \cdot \overset{1}{W}_{ox}^2 + \frac{c}{u} \overset{2}{W}_{ox} - \\
 & - \frac{1}{2} \frac{c^2}{u^2} \frac{1}{A^2 - 1} \left(\overset{1}{P}_{oy}^2 + \overset{1}{P}_{oz}^2 \right)
 \end{aligned}
 \tag{F80}$$

F.8 Zur Näherungslösung

Mit F33, F34, F37, F38, F39, F40, A17, D1 und $s = x, y, z$ gilt bei Vernachlässigung der Terme von höherer als 2. Ordnung

$$a_s = \overset{1}{a}_{os}
 \tag{F81}$$

$$\psi_s = \left(1 + \overset{1}{p}_s + \overset{2}{p}_s \right) \psi + \psi_s = \tilde{k}_s(x - ut) + \psi_s =$$

$$= \tilde{k}_s x - \omega_s t + \varphi_s \quad \text{F82}$$

$$\tilde{k}_s = (1 + p_s^1 + p_s^2) \cdot k \quad \text{F83}$$

$$\omega_s = u \tilde{k}_s \quad \text{F84}$$

Es bedeuten

\tilde{k}_s - Wellenzahlen der Lösungen F31

ω_s - Frequenzen der Lösungen F31

1. Im Fall der transversalen Anregung wird mit F39, F83, F84 und $s = y, z$

$$\omega_s^2 - c^2 \tilde{k}_s^2 = \omega_G^2 (1 + 2p_s^1 + p_s^2 + 2p_s^2) \quad \text{F85}$$

$$\tilde{k}_s^2 = \frac{1}{c^2} \left[\omega_s^2 - \omega_G^2 (1 + 2p_s^1 + p_s^2 + 2p_s^2) \right];$$

$$\omega_s^2 > \omega_G^2 (1 + 2p_s^1 + p_s^2 + 2p_s^2) \quad \text{F86}$$

F85 ist die Dispersionsbeziehung. Aus F84 und F86 folgt eine Bedingung an die Frequenzen ω_y und ω_z

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_y^2}{\omega_y^2 - \omega_G^2 (1 + 2p_y^1 + p_y^2 + 2p_y^2)} = \\ & = \frac{\omega_z^2}{\omega_z^2 - \omega_G^2 (1 + 2p_z^1 + p_z^2 + 2p_z^2)} = \frac{u^2}{c^2} \quad \text{F87} \end{aligned}$$

2. Im Fall der longitudinalen Anregung wird mit F40, F83 und F84

$$\omega_x = \omega_G (1 + p_x^1 + p_x^2) \quad \text{F88}$$

$$\tilde{k}_x = \frac{\omega_x}{u} \quad \text{F89}$$

Die möglichen bis zur 3. Ordnung stationären Schwingungsmoden lassen sich aus der Näherungslösung ablesen. In höheren Ordnungen als der 1. Ordnung können die Größen \tilde{E}_x, \tilde{E}_y und \tilde{E}_z aus wahren elektrischen Feldern und LORENTZ-Kräften bestehen. Konstante wahre elektrische Felder erlaubt die vorliegende Lösung ersichtlich nicht: Die konstanten elektrischen Feldanteile entsprechen LORENTZ-Kräften und erfüllen gerade die Gleichung F17.

F.9 Rücktransformation

Die Rücktransformation der dimensionslosen Größen $\tilde{Q}(\xi)$ und \tilde{Q}_0 in die entsprechenden dimensionsbehafteten Größen leistet F8. Speziell gilt mit F81, F86, F89, F10, F18, F19 und $s = x, y, z$

$$a_{os}^1 = \frac{e}{m_c^2 \tilde{k}_s} \tilde{E}_s ; \quad a_{os}^1 \leq 10^{-1} \quad \text{F90}$$

d.h.

$$\tilde{E}_s \leq \frac{m_c^2}{e} \tilde{k}_s \cdot 10^{-1} \quad \text{F91}$$

F.10 Rein transversaler Fall (siehe Abschnitt D)

Es seien D2, D3 und D4 erfüllt, ebenso

$$a_x = 0 ; \quad a_y = a_z ; \quad \Delta = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{F92}$$

Dann wird

$$\tilde{E}_y = \tilde{E}_z = \tilde{E}; \quad \omega_y = \omega_z = \omega;$$

$$\tilde{k}_y = \tilde{k}_z = \tilde{k}; \quad \varphi_y = \varphi_z = \varphi \quad \text{F93}$$

Die Lösung lautet

$$E_y = \tilde{E} \cdot \sin(\tilde{k}x - \omega t + \varphi) \quad \text{F94}$$

$$E_z = \pm \tilde{E} \cdot \cos(\tilde{k}x - \omega t + \varphi) \quad \text{F95}$$

$$\omega^2 - c^2 \tilde{k}^2 = \omega_G^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{e^2}{c^2 m_-^2} \frac{\tilde{E}^2}{\omega^2} \right) \quad \text{F96}$$

F94, F95 und F96 entsprechen D22, D23, D25 und D26.

F.11 Rein longitudinaler Fall (siehe Abschnitt E)

Es seien D2, D3 und D4 erfüllt, ebenso

$$a_y = a_z = 0 \quad \text{F97}$$

Die Lösung lautet

$$E_x = \tilde{E}_x \cdot \sin \psi_x - \frac{1}{2} \frac{1}{u} \frac{e}{m_- \omega_G} \tilde{E}_x^2 \cdot \sin 2\psi_x +$$

$$+ \left(\frac{3}{8} \frac{1}{u^2} - \frac{3}{64} \frac{1}{c^2} \right) \frac{e^2}{m_-^2 \omega_G^2} \tilde{E}_x^3 \cdot \sin 3\psi_x \quad \text{F98}$$

mit

$$\psi_x = \tilde{k}_x x - \omega_x t + \varphi_x \quad \text{F99}$$

$$\omega_x = \omega_G \left(1 - \frac{3}{16} \frac{e^2}{c^2 m_-^2} \frac{\tilde{E}_x^2}{\omega_G^2} \right) = \omega_{k_x} \quad \text{F100}$$

Bemerkenswert ist ein in der 2. Ordnung auftretender konstanter Term der Elektronen-Geschwindigkeit

$$V_{-xconst.}^2 = -\frac{1}{2} \frac{1}{u} \frac{e^2}{m^2} \frac{\tilde{E}_x^2}{\omega_G^2} \quad \text{F101}$$

d.h. die Plasma-Elektronen strömen den Wellen entgegen.

F.12 Spezieller gemischter Fall

Es seien D2, D3 und D4 erfüllt, ebenso

$$a_x = a_z = 0 \quad \text{F102}$$

Die Lösung lautet

$$E_y = \tilde{E}_y \cdot \sin \psi_y - \frac{9}{64} \frac{e^2}{c^2 m^2} \frac{\omega_G^2}{\omega_y^2 (4\omega_y^2 - \omega_G^2)} \tilde{E}_y^3 \cdot \sin 3\psi_y \quad \text{F103}$$

$$E_x = -\frac{1}{2} \frac{e}{cm} \frac{\omega_G^2 \sqrt{\omega_y^2 - \omega_G^2}}{\omega_y^2 (4\omega_y^2 - \omega_G^2)} \tilde{E}_y^2 \cdot \sin 2\psi_y \quad \text{F104}$$

mit

$$\psi_y = \tilde{k}_y x - \omega_y t + \varphi_y \quad \text{F105}$$

$$\omega_y^2 - c^2 \tilde{k}_y^2 =$$

$$= \omega_G^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_y^2 - \omega_G^2}{4\omega_y^2 - \omega_G^2} - \frac{3}{4} \right) \frac{e^2}{c^2 m^2} \frac{\tilde{E}_y^2}{\omega_y^2} \right] \quad \text{F106}$$

F104 ist mit dem von SLUIJTER (3) angegebenen Term (E_{2x}) identisch.

Das Bemerkenswerte der Lösung F103 liegt im Auftreten einer Partialwelle von 3. Ordnung, deren Maximalamplitude dem Quadrat der Elektronen-Grundfrequenz ω_G im wesentlichen direkt proportional ist. D.h. mit

$$\omega_G^2 \ll \omega_y^2 \quad \text{F107}$$

ist die Größe dieser Amplitude über

$$\omega_G^2 = \frac{u_0 c^2 e^2}{m_-} n_0 \quad \text{F108}$$

ein direktes Maß für die Ruh-Elektronendichte n_0 des wellenfreien Plasmas.

Ein abschließendes Zahlenbeispiel möge eine Vorstellung über die zu erwartenden Größenordnungen geben -

Für Rubin-Laser-Licht ($\omega_y = 2,7 \cdot 10^{15} \text{ sec}^{-1}$) gilt mit F91, F86 und F107

$$\tilde{E}_y \leq 4,6 \cdot 10^9 \text{ V/cm ;}$$

in F103 folgen dann aus

$$\omega_G = 10^{13} \text{ sec}^{-1} \quad \text{d.h.} \quad n_0 = 3,14 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$$

Maximalamplitudenwerte 3. Ordnung von

$$2,3 \cdot 10^{-1} \text{ V/cm} \quad \text{für} \quad \tilde{E}_y = 10^9 \text{ V/cm}$$

$$2,3 \cdot 10^{-7} \text{ V/cm} \quad \text{für} \quad \tilde{E}_y = 10^7 \text{ V/cm}$$

ABBILDUNGEN

Die beiden folgenden Abbildungsserien geben für fünf Parameter-Kombinationen Lösungsfunktionen

$$E_x = E_x(kx - \omega t)$$

des rein longitudinalen Falles (siehe E57) wieder.

Es wird jeweils eine Schwingungsperiode zur Zeit $t = 0$ betrachtet, d.h.

$$E_x = E_x(kx)$$

Die dargestellten Kurven (bzw. longitudinalen Wellen) laufen mit der Phasengeschwindigkeit u in positiver Richtung der Abszissenachse durch das Plasma.

Zum besseren Vergleich der Kurvenbilder wurden die Abszissen- und die Ordinatenwerte normiert; es gilt

x/L für die Abszissen

E_x/\tilde{E}_x für die Ordinaten

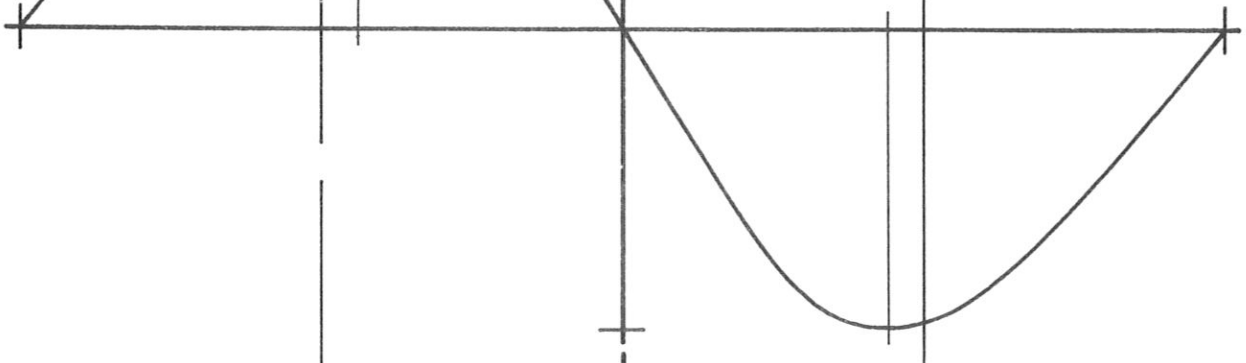
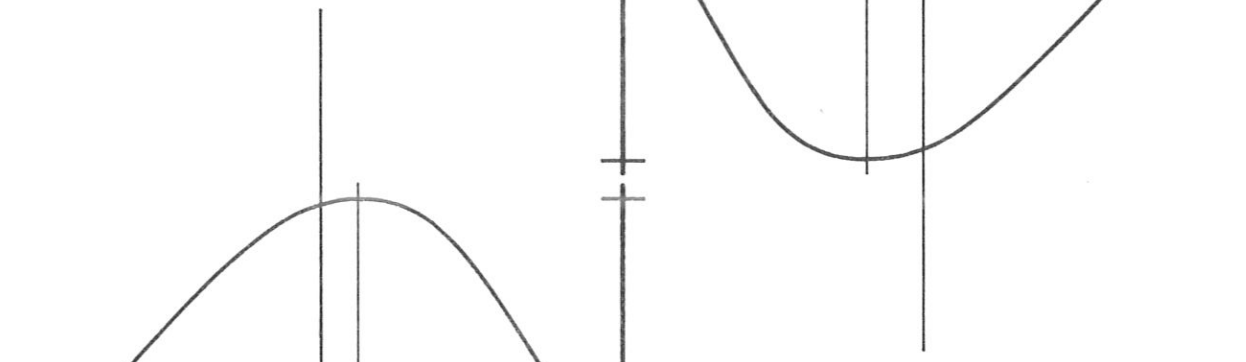
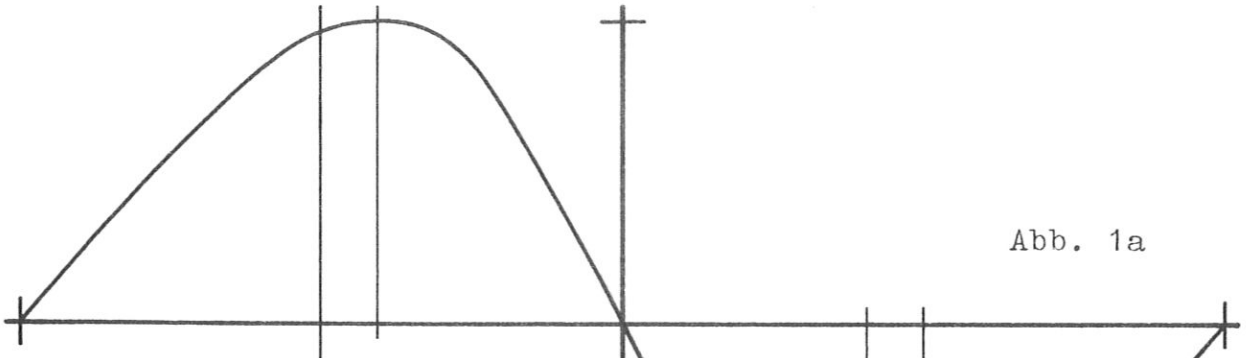
mit

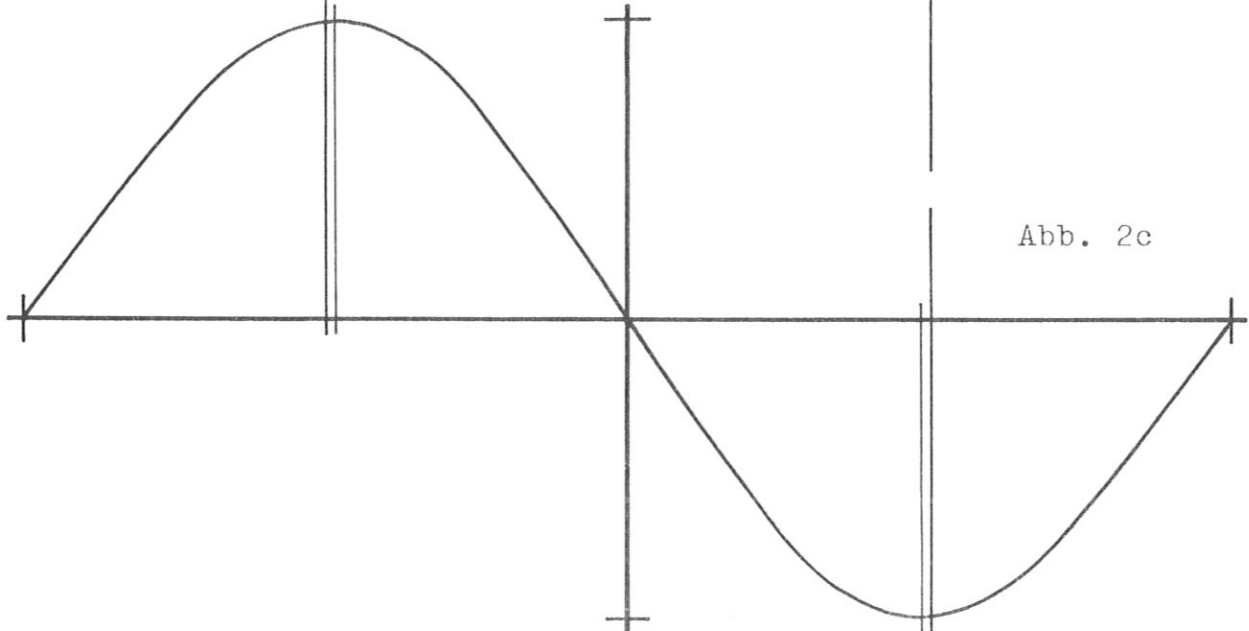
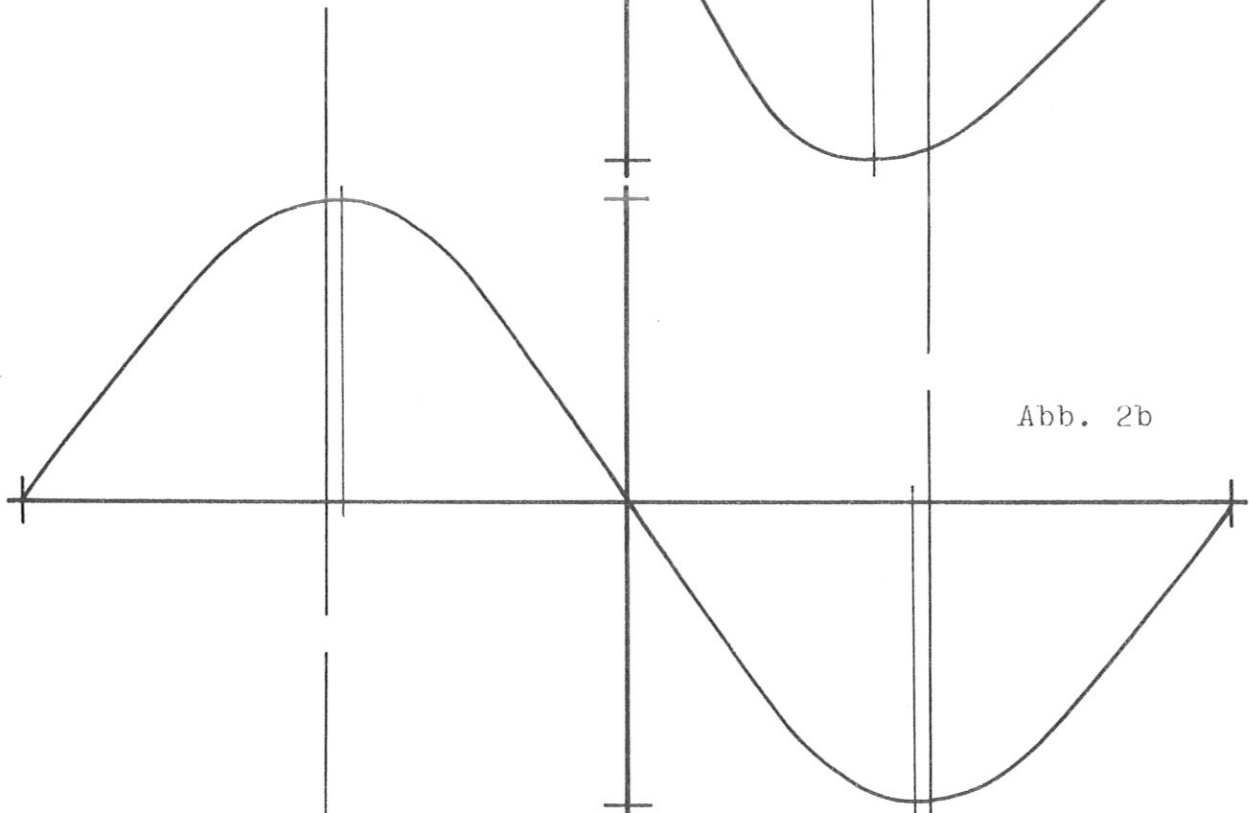
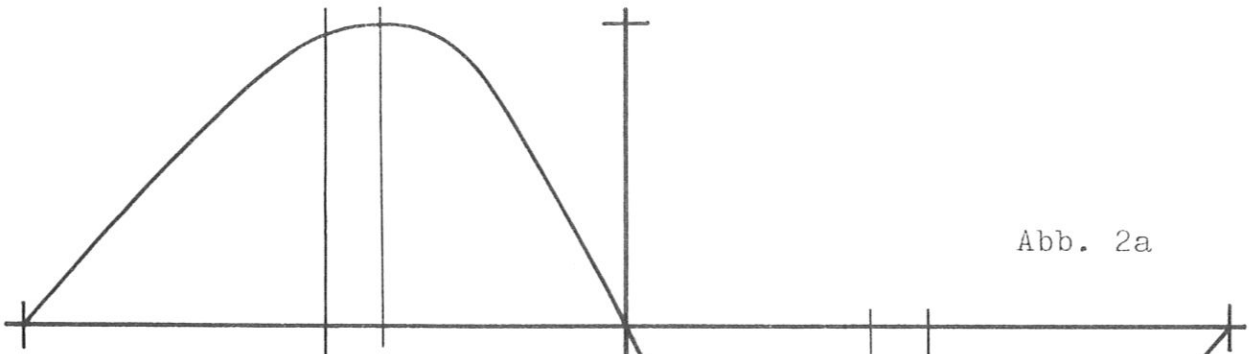
L - Länge einer Schwingungsperiode

\tilde{E}_x - maximaler Absolutwert der longitudinalen elektrischen Feldstärke E_x

Die Abbildungen sollen einen Eindruck von der Gestalt und den Veränderungen der Lösung E57 vermitteln. Das eigentliche Ergebnis der strengen analytischen Lösung des rein longitudinalen Falles liegt in der allgemeinen Aussage E54 und im Nachweis der Periodizität.

Die Parameter-Kombinationen der Abbildungsserien lauten
(Fortsetzung des Textes auf Seite 63)





1. Serie

Abb. 1a -

$$u = c = 2,99 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec}$$

$$\omega_G = 10^{12} \text{ sec}^{-1} ; \quad n_0 = 3,14 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$$

$$\omega = 0,984 \cdot 10^{12} \text{ sec}^{-1}$$

$$L = 0,191 \text{ cm}$$

$$\tilde{E}_x = 0,5 \cdot 10^7 \text{ V/cm}$$

Abb. 1b -

$$u = c = 2,99 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec}$$

$$\omega_G = 10^{12} \text{ sec}^{-1} ; \quad n_0 = 3,14 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$$

$$\omega = 0,994 \cdot 10^{12} \text{ sec}^{-1}$$

$$L = 0,189 \text{ cm}$$

$$\tilde{E}_x = 0,3 \cdot 10^7 \text{ V/cm}$$

Abb. 1c -

$$u = c = 2,99 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec}$$

$$\omega_G = 10^{12} \text{ sec}^{-1} ; \quad n_0 = 3,14 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$$

$$\omega = 0,999 \cdot 10^{12} \text{ sec}^{-1}$$

$$L = 0,188 \text{ cm}$$

$$\tilde{E}_x = 10^5 \text{ V/cm}$$

2. Serie

Abb. 2a -

wie Abb. 1a

Abb. 2b -

$$u = 5c = 14,98 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec}$$

$$\omega_G = 10^{12} \text{ sec}^{-1}; \quad n_0 = 3,14 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$$

$$\omega = 0,989 \cdot 10^{12} \text{ sec}^{-1}$$

$$L = 0,952 \text{ cm}$$

$$\tilde{E}_x = 0,4 \cdot 10^7 \text{ V/cm}$$

Abb. 2c -

$$u = c = 2,99 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec}$$

$$\omega_G = 5 \cdot 10^{12} \text{ sec}^{-1}; \quad n_0 = 7,85 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$$

$$\omega = 4,99 \cdot 10^{12} \text{ sec}^{-1}$$

$$L = 0,037 \text{ cm}$$

$$\tilde{E}_x = 0,4 \cdot 10^7 \text{ V/cm}$$

LITERATURVERZEICHNIS

- (1) L. Spitzer, physics of fully ionized gases, Interscience Publishers Inc., New York 1956, Seite 18

- (2) collected papers of L.D. Landau, ed. D. Ter Haar, Pergamon Press, Oxford 1965, Seite 451
- (3) a. F.W. Sluijter, Phys. Letters 7, 325 (63)
b. D. Montgomery and D.A. Tidman, Phys. Fluids 7, 242 (64)
c. D. Montgomery, Physica 31, 693 (65)
d. A. Salat, Phys. Letters 15, 139 (65)
e. A. Salat und A. Schlüter, Z. Naturf. 20a, 458 (65)
f. A. Salat, Z. Naturf. 20a, 689 (65)
- (4) a. L.D. Landau und E.M. Lifschiz, Lehrbuch der theoretischen Physik II Feldtheorie, Akademie-Verlag, Berlin 1963
b. A. Sommerfeld, Elektrodynamik, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.G., Leipzig 1961
c. M. v. Laue, Die Relativitätstheorie, 1. Band, Die spezielle Relativitätstheorie, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1955
d. V. Fock, Theorie von Raum, Zeit und Gravitation, Akademie-Verlag, Berlin 1960
- (5) siehe (4)b., Seite 240, § 31
- (6) siehe (4)a.
- (7) H.S.C. Wang and M.S. Lojko, Phys. Fluids 6, 1458 (63)
- (8) F. Tricomi, Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe A, Band 20, Elliptische Funktionen, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.G., Leipzig 1948
- (9) a. P.A. Sturrock, Phys. Rev. 117, 1426 (60)

b. G.D. Boyd, R.W. Gould and L.M. Field, Proc. of the IRE, December 1961, 1906

- (10) H. Goldstein, classical mechanics, Addison-Wesley Publishing Company Inc., Reading, Massachusetts, USA, 1959
- (11) P. Frank und R. v. Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Band II, Dover Publications Inc., New York 1961, Seite 84
- (12) N.N. Bogoliubov and Y.A. Mitropolsky, asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations, Hindustan Publishing Corpn. (India), Delhi-6 1961

Herrn Prof. Dr. A. Schlüter möchte ich für wertvolle Anregungen, kritische Anmerkungen und das fördernde Interesse an dieser Arbeit danken.

Herrn Dr. A. Salat und Herrn Dr. H. Wimmel danke ich herzlich für ausführliche Diskussionen.

ANHANG: Strenge analytische Lösung des rein transversalen Falles (siehe Abschnitt D) für aus mehr als einer Atomsorte bestehende Plasmen

Der rein transversale Fall besitzt eine strenge analytische Lösung nicht nur dann, wenn das Plasma aus einer einzigen Atomsorte besteht, sondern auch noch dann, wenn das Plasma mehr als eine Atomsorte enthält. Die Voraussetzungen und Schlüsse sind dabei im wesentlichen die gleichen wie im Fall einer einzigen Atomsorte. Hier werden zusammenfassend die wichtigen Abweichungen vom im Abschnitt D gelösten rein transversalen Fall zitiert.

Das vollionisierte Plasma enthalte jetzt k Atomsorten. Durch den Index k wird im Folgenden auf die Ionen der k -ten Atomsorte hingewiesen. Sämtliche Summenzeichen bedeuten eine Summation über k .

An die Stelle der Bewegungsgleichung A11 sind die Gleichungen

$$V_{+kn} \partial_n V_{+km} = \frac{Z_k e}{m_{+k}} V_{+kn} F_{mn} \quad Z1$$

zu setzen. Für die Viererstromdichte A4 ergibt sich

$$\Gamma_m = \sum \Gamma_{+km} - \Gamma_{-m} = \sum \Lambda_{+k} V_{+km} - \Lambda_{-} V_{-m} \quad Z2$$

mit

$$\Lambda_{+k} = Z_k e n_{+k} \quad Z3$$

Im spezialisierten Gleichungssystem folgt dann für C1, C3 und C5

$$U_n V_{+kn} \frac{dV_{+km}}{dt} = \frac{Z_k e}{m_{+k}} V_{+kn} F_{mn} \quad Z4$$

$$\frac{d}{d\xi} U_n F_{mn} = /u_o \Gamma_m = /u_o (\sum \Lambda_{+k} V_{+km} - \Lambda_{-} V_{-m}) \quad Z5$$

$$\frac{d}{d\xi} U_n \Gamma_n = \frac{d}{d\xi} U_n (\sum \Lambda_{+k} V_{+kn} - \Lambda_{-} V_{-n}) = 0 \quad Z6$$

oder statt Z6

$$U_n (\sum \Lambda_{+k} V_{+kn} - \Lambda_{-} V_{-n}) = J \quad Z7$$

Mit Z5, Z7, C7 und C8 wird $J = 0$. Für C10 gilt

$$\Lambda_{+k} U_n V_{+kn} = J_k \quad Z8$$

und mit Z7, Z8 und C11

$$\sum \Lambda_{+k} U_n V_{+kn} - \Lambda_{-} U_n V_{-n} = \sum J_k - J_{-} = 0 \quad Z9$$

Es sei

$$J_{-} = \tilde{J} \quad \text{und} \quad J_k = N_k \tilde{J} \quad Z10$$

mit Z9 ist also

$$\sum N_k = 1 \quad Z11$$

Für C13 ergibt sich

$$\Lambda_{+k} = N_k \tilde{J} (U_n V_{+kn})^{-1} \quad \text{und} \quad \Lambda_{-} = \tilde{J} (U_n V_{-n})^{-1} \quad Z12$$

Die Gleichungen C14 bis C32 gelten sinngemäß mit der entsprechenden Abänderung für die Ionen. Ein C33 und C34 analoger zwingender Schluß ist im Mehrkomponentenfall nicht möglich. Daher wird hier angenommen, daß das Plasma im homogenen Fall eine konstante (wirkliche) Gesamtströmungsgeschwindigkeit \bar{v}_o besitzen darf, d.h.

$$\bar{v}_0(v_{ox}; v_{oy}; v_{oz}) = \text{const.} \quad \text{und}$$

$$v_{o+kn} = v_{o-n} = v_{on} ; \quad n = x, y, z \quad \text{Z13}$$

Mit Z13 folgt

$$v_{o+km} = v_{o-m} = v_{om} ; \quad m = 1, 2, 3, 4 \quad \text{Z14}$$

$$\sum \Lambda_{o+k} = \Lambda_{o-} = \Lambda_o \quad \text{Z15}$$

$$\gamma_{o+k} = \gamma_{o-} = \gamma_o \quad \text{Z16}$$

C38 bis C50 gelten wiederum sinngemäß mit der entsprechenden Abänderung für die Ionen. An die Stelle des Gleichungssystems (C51-C58) tritt schließlich

$$(\bar{U}\bar{V}_{+k} - \gamma_{+k}ku) \frac{d\bar{V}_{+k}}{d\xi} = \frac{Z_k e}{m_{+k}} \left[\gamma_{+k} \bar{E} + (\bar{V}_{+k} \times \bar{B}) \right] \quad \text{Z17}$$

$$(\bar{U}\bar{V}_- - \gamma_-ku) \frac{d\bar{V}_-}{d\xi} = - \frac{e}{m_-} \left[\gamma_- \bar{E} + (\bar{V}_- \times \bar{B}) \right] \quad \text{Z18}$$

$$\frac{d}{d\xi} \left[\frac{ku}{c^2} \bar{E} + (\bar{U} \times \bar{B}) \right] = \frac{\omega_{Gm}^2}{ec^2} (\bar{U}\bar{V}_o - \gamma_o ku) *$$

$$* \left[\sum N_k \bar{V}_{+k} (\bar{U}\bar{V}_{+k} - \gamma_{+k}ku)^{-1} - \bar{V}_- (\bar{U}\bar{V}_- - \gamma_-ku)^{-1} \right] \quad \text{Z19}$$

$$\bar{B} = \bar{B}_o + \frac{1}{ku} \left[\bar{U} \times (\bar{E} - \bar{E}_o) \right] \quad \text{Z20}$$

$$\Lambda_{+k} = N_k \frac{\omega_{Gm}^2}{u_o c^2 e} (\bar{U}\bar{V}_o - \gamma_o ku) (\bar{U}\bar{V}_{+k} - \gamma_{+k}ku)^{-1} \quad \text{Z21}$$

$$\Lambda_- = \frac{\omega_{Gm}^2}{u_o c^2 e} (\bar{U}\bar{V}_o - \gamma_o ku)(\bar{U}\bar{V}_- - \gamma_- ku)^{-1} \quad Z22$$

$$\gamma_o \bar{E}_o + (\bar{V}_o \times \bar{B}_o) = 0 \quad Z23$$

$$\omega_G^2 = \frac{u_o c^2 e}{m_-} \Lambda_o ; \quad \sum N_k = 1 \quad Z24$$

Mit den gleichen Voraussetzungen und Bezeichnungen wie im Abschnitt D folgt aus (Z17-Z24) die Wellenlösung

$$E_y = \tilde{E} \cdot \sin(\tilde{k}x - \omega t + \tilde{\varphi}) \quad Z25$$

$$E_z = \pm \tilde{E} \cdot \cos(\tilde{k}x - \omega t + \tilde{\varphi}) \quad Z26$$

$$\omega^2 - c^2 \tilde{k}^2 = \omega_{GQ}^2 \quad Z27$$

$$Q = \left[1 + \frac{e^2}{c^2 m_-^2} \frac{\tilde{E}^2}{\omega^2} \right]^{-\frac{1}{2}} + \sum N_k \frac{z_{km_-}}{m_{+k}} \left[1 + \frac{z_k^2 e^2}{c^2 m_{+k}^2} \frac{\tilde{E}^2}{\omega^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad Z28$$

$$V_{-y} = \frac{e}{m_-} \frac{\tilde{E}}{\omega} \sin(\tilde{k}x - \omega t + \varphi) \quad Z29$$

$$V_{-z} = \pm \frac{e}{m_-} \frac{\tilde{E}}{\omega} \cos(\tilde{k}x - \omega t + \varphi) \quad Z30$$

$$V_{+kn} = - \frac{Z_k m_-}{m_{+k}} V_{-n} ; \quad n = y, z \quad \text{Z31}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{+kn} &= c V_{+kn} \left[c^2 + v_{+ky}^2 + v_{+kz}^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \\ &= V_{+kn} \left[1 + \frac{Z_k^2 e^2}{c^2 m_{+k}^2} \frac{\tilde{E}^2}{\omega^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad \text{Z32}$$

Für die Beträge der Ionengeschwindigkeiten gilt

$$\tilde{v}_{+k} = |\mathbf{v}_{+k}| = \frac{Z_k e}{m_{+k}} \frac{\tilde{E}}{\omega} \left[1 + \frac{Z_k^2 e^2}{c^2 m_{+k}^2} \frac{\tilde{E}^2}{\omega^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{Z33}$$

Die k Ionensorten laufen phasengleich auf Kreisbahnen mit den konstanten Bahngeschwindigkeiten \tilde{v}_{+k} um. Die entsprechenden Kreisbahnradien R_k lauten

$$R_k = \frac{Z_k e}{m_{+k}} \frac{\tilde{E}}{\omega^2} \left[1 + \frac{Z_k^2 e^2}{c^2 m_{+k}^2} \frac{\tilde{E}^2}{\omega^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{Z34}$$

Grundsätzlich also lassen sich im kalten Plasma Relativegeschwindigkeiten zwischen verschiedenen Ionensorten oder zwischen Ionen und Neutralgas (letzteres wird vom Feld der Welle nicht beeinflusst) mit Hilfe einer zirkular polarisierten elektromagnetischen Welle erzeugen. Die Frage nach der Verwertbarkeit dieses Effektes zur Plasmaheizung müßte in einem über die vorliegende Arbeit hinausgehenden Rahmen behandelt werden.

This report is to be treated as strictly confidential.

The 'Institut für Plasmaphysik' holds the exclusive rights of publication, mimeographing, propagation and translation into foreign languages of the original text, inclusive of the drawings, wholly or partially; also of excerpts or résumés, as well as of the technical or scientific contents of this report. Exceptions to these restrictions require written permission.

Furthermore, the 'Institut für Plasmaphysik' reserves the right of exclusive exploitation of the information contained in this report, for the purpose of obtaining protective industrial rights, particularly patent and utility patent rights at home and abroad. Actions of exploitation taken on the basis of the knowledge gained from this report cannot be regarded as grounds for obtaining the right of prior use ('Vorbenutzungsrecht') according to article 7 paragraph 1, first sentence of the German Patent Law. The reader is referred to article 5 of the Patent Law. For reasons stipulated by the Patent Law, the report must not be exhibited in public libraries, or lent out indiscriminately.

The Institute does not guarantee that the information given in this report is free from protective rights, such as patent rights, utility patent rights or trade-mark rights.

No guarantee is given in respect of the accuracy, completeness or usefulness of the information contained in this report. Thus, no liability can be accepted for damage resulting from use of the information, or of the apparatus, methods and procedures described.