

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

M H D - Stability of a Bumpy Theta-Pinch

M H D - Stabilität eines gewellten
Thetapinches

H. Wobig

IPP 6/57

April 1967

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

April 1967 (in German)

ABSTRACT

Starting from the energy principle of magnetohydrodynamics the stability of a linear bumpy theta-pinch is investigated. The normal mode equations are solved with the help of a perturbation method. The expansion parameter is $\frac{2a}{L} = \varepsilon \left(a = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{2} \right)$
 L = length of a period of the equilibrium.

Modes with $m \gg 1$ are shown to be unstable with the following growth rates

$$1) \quad \omega^2 \approx -3 \varepsilon^2 \frac{2KT_i}{m_i} \frac{m}{r_c^2} \left(1 + O\left(\frac{m}{\alpha}\right) \right)$$

$$\alpha \gg 2m$$

$$2) \quad \omega^2 \approx -3 \varepsilon^2 \frac{2KT_i}{m_i} \frac{1}{r_c^2} \frac{\alpha}{2} \left(1 + O\left(\frac{\alpha}{m}\right) \right)$$

$$2m \gg \alpha$$

m_i = Ion mass

r_c = Mean plasma radius

m = Mode number

$\frac{\alpha}{2} = \frac{d}{r_c}$; d = Thickness of the boundary layer.

I. Einleitung

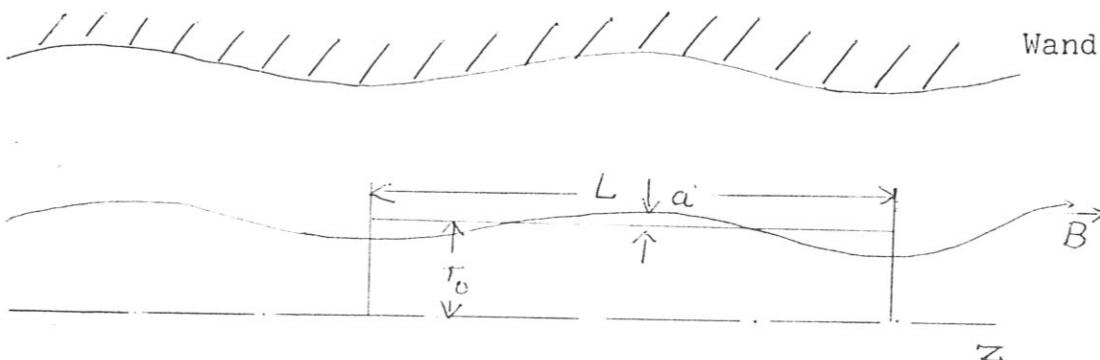
In einer früheren Arbeit⁽¹⁾ wurde bereits die Stabilität eines gewellten Thetapinches (Limpus) im Rahmen des Oberflächenstrommodells untersucht. Ähnliche Rechnungen wurden auch von F.A. Haas und J.A. Wesson⁽²⁾ sowie von D. Morse⁽³⁾ durchgeführt, wobei sich zeigte, daß ein solches Plasma auf Grund der Gebiete ungünstiger Krümmung längs der Magnetfeldlinie instabil ist.

Ausgehend von einem Plasmamodell mit Volumenströmen haben P. Merkel und A. Schlüter⁽⁴⁾ gezeigt, daß es unter bestimmten Bedingungen auch stabile Bereiche im Plasma geben kann. Diese Autoren benutzen das Energieprinzip von Bernstein et al.⁽⁵⁾ und setzen als Störung eine geeignet gewählte Testfunktion ein.

In der vorliegenden Arbeit soll nun - ausgehend von dem Energieprinzip - soweit wie möglich minimalisiert werden. Wir benutzen dazu die schon in⁽¹⁾ und⁽²⁾ angewandte Störungsrechnung nach der Amplitude des gewellten Thetapinches als Kleinheitsparameter.

II. Energieprinzip

Die Limpuskonfiguration ist ein periodisch gewellter Thetapinch mit der Amplitude a und der Wellenlänge L . Die Amplitude a der Feldlinien ist im allgemeinen eine Funktion der Feldlinie, wir nehmen aber an, daß immer gilt: $a \ll L$



Eine Periode dieser Konfiguration kann man als Näherung für ein Teilstück einer toroidalen Gleichgewichtskonfiguration ohne Rotationstransformation (M+S-Torus, Scyllac) betrachten. Der Abstand der Feldlinie von der Symmetrieachse läßt sich als Fourierreihe schreiben, von der wir aber nur das niedrigste periodische Glied betrachten. Die Feldlinien und damit auch die Druckflächen seien beschrieben durch

$$(1) \quad r(z) = r_0 - a \cos kz, \quad k = \frac{2\pi}{L}$$

a ist hier noch eine Funktion von r_0 (mittlerer Feldlinienabstand). Für $ak = 0$ wird aus dem Lirpus der ideale lineare Theta-pinch.

Es sei nun $\vec{\xi} = \vec{\xi}(x) \exp i\omega t$ eine Störung des Plasmas, die durch die Eigenwertgleichung

$$(2) \quad \rho_0(x) \omega^2 \vec{\xi} = \vec{F}(\vec{\xi}) \quad ; \quad \vec{\xi} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{auf der Wand}$$

($\rho_0(x)$ = Massendichte)

beschrieben wird. Hierbei ist

$$(3) \quad \vec{F}(\vec{\xi}) = \nabla (\rho \operatorname{div} \vec{\xi} + \vec{\xi} \cdot \nabla \rho) \\ + \vec{\rho}_0 \times \operatorname{rot} (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) - \vec{B}_0 \times \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\vec{\xi} \times \vec{B}_0)$$

$p, \vec{\rho}_0, \vec{B}_0$ sind die Gleichgewichtsgrößen.

Da sich die Gleichgewichtsgrößen nach $\varepsilon = ak$ entwickeln lassen, können wir auch schreiben

$$(4) \quad \vec{F} = \vec{F}_0 + \varepsilon \vec{F}_1 + \dots$$

\vec{F}_0 ist der Stabilitätsoperator des idealen Thetapinches. Bekanntlich ist der ideale Thetapinch marginal stabil, d.h. das Spektrum des Operators \vec{F}_0 liegt auf der positiven reellen Achse.

Um nun die Verschiebung dieses Spektrums durch $\varepsilon \neq 0$ zu untersuchen, folgen wir der Arbeit von Bernstein et al.⁽⁵⁾, die im zweiten Teil ihrer Abhandlung das Energieprinzip auf den Fall eines rotationssymmetrischen Plasmas spezialisieren. Im weiteren benutzen wir auch die Notation dieser Autoren.

Es sei γ, χ, ϑ ein orthogonales Koordinatensystem, $\gamma = \text{const}$ die magnetischen Flächen und ϑ ist der Azimutwinkel. Die Störung $\vec{\xi}(\gamma, \chi) e^{im\vartheta}$ schreibt sich:

$$\begin{aligned} \xi_\gamma &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{rB} X_m(\gamma, \chi) \cos m\vartheta \\ \xi_\vartheta &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r}{m} Y_m(\gamma, \chi) \sin m\vartheta \\ \xi_\chi &= \sum_{m=1}^{\infty} B Z_m(\gamma, \chi) \cos m\vartheta \end{aligned}$$

Für die Energieänderung erhalten Bernstein et al.

$$(6) \quad \delta W = \frac{\int \vec{\xi}^* \cdot \vec{F}(\vec{\xi}) d^3x}{\int \rho_0 |\vec{\xi}|^2 d^3x} = \frac{\int \delta W(\gamma) d\gamma}{\int \rho_0 |\vec{\xi}|^2 d^3x}$$

mit

$$\delta W(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \left(L' + \frac{V'}{\partial P} \right) f^2 + \int d\chi \left[\frac{1}{r^2 B^2} \left(\frac{\partial X}{\partial \chi} \right)^2 + P'(\gamma) \right] D X^2$$

Diese Formel wurde abgeleitet für $m \gg 1$

Hierbei sind

$$J = \frac{1}{B^2} \exp \left[- \int_0^{\chi} \frac{p'(\chi')}{B^2} d\chi' \right]$$

$$D = - \frac{1}{r B_p}, \quad L' = 2\pi \int \frac{J}{B^2} d\chi, \quad V' = 2\pi \int J d\chi$$

$$f = \frac{2\pi}{L' + \frac{V'}{B_p}} \int J D X d\chi$$

Beim idealen Thetapinch ist die Krümmung $\frac{1}{\rho} = 0$. $\delta W(\chi)$ verschwindet dann nur für $\frac{\partial X}{\partial \chi} = 0$, d.h. $X = \text{const}$ ist somit die marginale Störung des idealen Thetapinches.

Setzt man allgemein $X = \text{const}$, dann ist $\delta W(\chi) < 0$ ein hinreichendes Kriterium für Instabilität. Dieses Kriterium wurde in (4) auf die Limpuskonfiguration angewandt.

Die Störung, welche δW minimalisiert, erhält man aus der Eulerschen Gleichung

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{1}{r^2 B^2 J} \frac{\partial X}{\partial \chi} \right) + (\Lambda - p'D) J X = J D f(\chi)$$

III. Störungsrechnung

Die Eigenwertgleichung (7) für den Eigenwert Λ soll nun näherungsweise gelöst werden. Wir entwickeln alle Größen in der obigen Gleichung nach Potenzen von ε .

$$(8) \quad B = B_0 \left(1 - \varepsilon b \cos Kz \right) + o(\varepsilon^2)$$

$$r = r_0 \left(1 - \frac{\varepsilon}{r_0 K} \cos Kz \right) + o(\varepsilon^2)$$

$b = b(r_0)$ muß noch aus den Gleichgewichtsgleichungen bestimmt werden.

Gleichung (7) ist im allgemeinen eine Integro-Differentialgleichung. Entwickeln wir aber alle Größen bis zur Ordnung ε^2 , dann reduziert sich (7) zu einer Differentialgleichung. Die Krümmung $\frac{1}{\rho}$ ist von der Ordnung ε . Wegen der Periodizität der Konfiguration ist $f(\gamma)$ von der Ordnung ε^2 und somit wird die rechte Seite der Gleichung (7) von der Ordnung ε^3 .

Weiterhin ist $B \int dX = d\ell = dz (1 + o(\varepsilon^2))$

Die gesuchte Differentialgleichung hat dann die Form

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left[1 + \varepsilon \left(\frac{2}{Kr_0} + b \right) \cos kz \right] \frac{\partial X}{\partial z} \right\} + \left[\Lambda + \frac{2\rho'(r_0)}{B^2} K \varepsilon \cos kz \left(1 + \varepsilon \left(\frac{1}{Kr_0} + 2b \right) \cos kz \right) \right] X = 0$$

Für $\varepsilon = 0$ erhalten wir

$$(10) \quad \frac{\partial^2 X_0}{\partial z^2} + \Lambda_0 X_0 = 0$$

Bei periodischen Randbedingungen $X_0(0) = X_0(L)$ bilden die Eigenwerte dieser Gleichung ein nichtentartetes Punktspektrum.

$\Lambda_0 = 0$ ist der tiefste Eigenwert mit der Eigenfunktion $X_0 = \text{const}$

$\Lambda_0 = 0$ ist auch ein isolierter Eigenwert, so daß wir also die Eigenwerte und Eigenfunktionen nach Potenzen von ε entwickeln dürfen.

$$(11) \quad \begin{aligned} \Lambda &= \Lambda_0 + \varepsilon \Lambda_1 + \varepsilon^2 \Lambda_2 + \dots \\ X &= X_0 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 \end{aligned}$$

Wir wollen im weiteren nur die Störung der Eigenlösung $X_0 = \text{const}$ betrachten. In erster Ordnung erhalten wir dann

$$(12) \quad \frac{\partial^2 X_1}{\partial z^2} + \left(\Lambda_1 + \frac{2p'(r_0)}{B_0^2} K \cos Kz \right) X_0 = 0$$

Multiplizieren wir die Gleichung mit X_0 und integrieren über z , dann ergibt sich

$$(13) \quad \Lambda_1 = 0 \quad X_1 = X_0 \frac{2p'(r_0)}{B_0^2} \frac{1}{K} \cos Kz$$

Und in 2. Ordnung lautet die Gleichung dann

$$(14) \quad \frac{\partial^2 X_2}{\partial z^2} + \left(\frac{2}{Kr_0} + b \right) \cos Kz \frac{\partial^2 X_1}{\partial z^2} - K \sin Kz \left(\frac{2}{Kr_0} + b \right) \frac{\partial X_1}{\partial z} + \Lambda_2 X_0 + \frac{2p'(r_0)}{B_0^2} K \cos^2 Kz \left(\frac{1}{Kr_0} + 2b \right) X_0 + \frac{2p'(r_0)}{B_0^2} K \cos Kz X_1 = 0$$

Multiplikation mit X_0 und Integration ergibt

$$(15) \quad \Lambda_2 = - \frac{2p'(r_0)}{B_0^2} \left[\frac{1}{r_0} + 2Kb + 2 \frac{p'(r_0)}{B_0^2} \right]$$

Die Funktion $b(r_0)$ wurde in (4) berechnet

$$b = \frac{1}{K} \left(- \frac{2}{r_0} - \frac{p'(r_0)}{B_0^2} \right)$$

Damit erhalten wir

$$(16) \quad \Lambda_2 = 6 \frac{p'(r_0)}{r_0 B_0^2}$$

Da der Druckgradient negativ ist, wird somit die Konfiguration immer instabil.

Setzt in δW die Testfunktion $\chi = \text{const}$ ein und wendet dieselbe Entwicklungsmethode an, dann lautet das Ergebnis:

$$(17) \quad \mathcal{L}_2 = -\frac{3}{r_0} + \frac{2p'(r_0)}{B_0^2} \geq 0 \quad \text{für Stabilität}$$

Bei genügend großem Druckgradienten kann dieses Kriterium erfüllt werden.

Eine Grenze für die Gültigkeit der ganzen Näherungsrechnung liefert uns die Forderung

$$\varepsilon \chi_1 \ll \chi_0$$

Dies ergibt mit Formel (13)

$$(18) \quad \frac{2p'(r_0)}{B_0^2} a \ll 1$$

Oder größenordnungsmäßig: $2\beta \frac{a}{d} \ll 1$; d ist ein Maß für die Abfalllänge des Drucks.

Aus der Darstellung (13) der instabilen Störung sieht man, daß diese mehr auf die Gebiete ungünstiger Krümmung lokalisiert ist als auf die Gebiete günstiger Krümmung.

IV. Anwachsraten

Durch die Differentialgl. (7) wird nur die χ -Abhängigkeit der Funktion $X(\varphi, \chi)$ bestimmt, die φ -Abhängigkeit bleibt vollkommen willkürlich. Wir haben damit zum Beispiel noch einen Faktor $g(r)$ zu der Störung $X(\chi)$ (oder $X(z)$) frei. Diesen Faktor bestimmen wir, indem wir die oben bestimmte Störung $X(z)g(r)$ in den Ausdruck für die Anwachsraten $-i\omega$ (Gl. 6) einsetzen und nochmals nach $g(r)$ minimalisieren. Dies liefert

dann die Radialabhängigkeit der Störung $\vec{\xi}(x)$.

Um die Norm $N = \int \rho_0(x) |\vec{\xi}|^2 dx$ in niedrigster Ordnung in zu berechnen, benutzen wir den Zusammenhang zwischen den 3 Komponenten von $\vec{\xi}$, der auf Grund des Minimalisierungsprozesses besteht. ((5) Formel 6.18). \vec{Z} verschwindet in nullter Ordnung in ε .

Setzt man nun Gl. (16) in (6) ein, dann ergibt sich

$$(19) \quad \omega^2 = 2 \frac{\int_0^{r_1} \varepsilon^2(r) g^2(r) \rho'(r) dr}{\int_0^{r_1} \rho_0(r) \left[g^2(r) + \frac{1}{m^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} r g \right)^2 \right] r dr}$$

r_1 ist der mittlere Radius der Wand. In diesem Gebiet ist aber praktisch $\rho'(r_1)$ und $\rho_0(r_1)$ gleich Null, so daß ohne großen Fehler von 0 bis ∞ integriert werden darf.

Minimalisieren wir nun (19) in bezug auf $g(r)$ dann erhalten wir die Gleichung

$$(20) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \ln \rho_0(r) \frac{\partial \phi}{\partial r} - \left(1 - E \varepsilon^2 \frac{\partial \ln \rho_0}{\partial r} \right) \frac{m^2}{r^2} \phi = 0$$

mit

$$\phi(r) = r g(r) \quad E = 6\pi \frac{kT}{m_i} \frac{1}{\omega^2}$$

Für den Zusammenhang zwischen $\rho(r)$ und $\rho_0(r)$ wurde vorausgesetzt, daß die Temperatur im Raum konstant ist ($p \sim \rho$). Die Randbedingungen sind $\phi(0) = \phi(\infty) = 0$

Diese Gleichung läßt sich im allgemeinen nicht explizit lösen, wir wollen daher in einem Spezialfall die Lösung abschätzen.

Es sei r_0 die Stelle des maximalen Druckabfalls. Der Druck habe den Verlauf

$$(21) \quad p = p_0 e^{-x^\alpha} \quad x = \frac{r}{r_0}, \quad \alpha \geq 2$$

Für $\varepsilon(r)$ wählen wir eine lineare Abhängigkeit. Die Differentialgleichung (20) ist dann

$$(22) \quad 0 = x \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \alpha x^{\alpha+1} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \left(1 + \varepsilon_0^2 x^{\alpha+1} \right) m^2 \phi$$

Entwickeln wir die Lösung in der Umgebung von $x = 0$ in eine Potenzreihe, dann folgt aus der Gleichung (21), daß diese Reihe mit der Potenz x^m beginnt.

$$(23) \quad \phi(x) = x^m \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Um nun die Anwachsrate abzuschätzen, setzen wir in (19) eine Testfunktion $\phi(x)$ ein, die die verlangte Form (23) besitzt und die Randbedingungen befriedigt.

$$(24) \quad \phi(x) = x^m e^{-x^m}$$

Das Maximum der Störung liegt bei $r = r_0$, die Störung wird also mit wachsendem m auf die Randschicht lokalisiert.

Setzen wir (24), (21) in (19) ein, dann lautet das Ergebnis

$$(25) \quad \omega^2 = -3 \varepsilon_0^2 \frac{2kT}{m_i} \frac{\alpha}{r_0^2} \frac{\int_0^\infty \exp[-x^\alpha - 2x^m] x^{2m+\alpha-1} dx}{\int_0^\infty \exp[-x^\alpha - 2x^m] x^{2m-1} (2 - 2x + x^2) dx}$$

Diese Formel kann für zwei Sonderfälle näherungsweise berechnet werden

$$1) \quad \lambda \gg 2m$$

Das ergibt

$$(26) \quad \omega^2 \approx - 2 \varepsilon_0^2 \frac{2KT_i}{m_i} \frac{m}{r_0^2} \left(1 + o\left(\frac{m}{\lambda}\right) \right)$$

$$2) \quad 2m \gg \lambda$$

$$\omega^2 \approx - 3 \varepsilon_0^2 \frac{2KT_i}{m_i} \frac{1}{r_0^2} \frac{\lambda}{2} \left(1 + o\left(\frac{\lambda}{m}\right) \right)$$

Aus der Druckverteilung (21) ersieht man, daß $\frac{2}{\lambda}$ ein Maß für die Grenzschichtdicke ist.

Die beiden Grenzfälle 1) und 2) lassen sich damit folgendermaßen interpretieren:

Ist die Grenzschichtdicke kleiner als die Wellenlänge der Störung quer zum Magnetfeld, dann verhält sich die Anwachsrate ω so wie die aus dem Oberflächenstrommodell berechnete Anwachsrate (1), (2), sie wächst mit \sqrt{m} .

Wird die Wellenlänge λ_{\perp} aber kleiner als die Grenzschichtdicke, dann hängt die Anwachsrate nicht mehr von $\lambda_{\perp} = \frac{2\pi r_0}{m}$ ab, sondern nur noch von der Schichtdicke ab.

Mit $\lambda \rightarrow \infty$ haben wir also einen kontinuierlichen Übergang zu dem in (1), (2) benutzten Oberflächenstrommodell.

LITERATURHINWEISE

- (1) H. Wobig Gleichgewicht und Stabilität
eines Plasmas mit Oberflächen
strömen.
IPP 6/53 Juli 1966
- (2) F.A. Haas, J.A. Wesson The Stability of the Theta-Pinch
CLM - P 99 1966
- (3) D. Morse Stability of a Bumpy Linear,
 $\beta = 1, \odot$ -Pinch
LA - 3442 - MS
- (4) P. Merkel, A. Schlüter Axialsymmetrische magneto-
hydrostatische Gleichgewichte
IPP 6 - 48
- (5) J.B. Bernstein et. al. An Energy principle for
hydromagnetic stability problems
Proc. Roy. Soc. A 244 p 17-40
1958

This report is to be treated as strictly confidential.

The 'Institut für Plasmaphysik' holds the exclusive rights of publication, mimeographing, propagation and translation into foreign languages of the original text, inclusive of the drawings, wholly or partially; also of excerpts or résumés, as well as of the technical or scientific contents of this report. Exceptions to these restrictions require written permission.

Furthermore, the 'Institut für Plasmaphysik' reserves the right of exclusive exploitation of the information contained in this report, for the purpose of obtaining protective industrial rights, particularly patent and utility patent rights at home and abroad. Actions of exploitation taken on the basis of the knowledge gained from this report cannot be regarded as grounds for obtaining the right of prior use ('Vorbenutzungsrecht') according to article 7 paragraph 1, first sentence of the German Patent Law. The reader is referred to article 5 of the Patent Law. For reasons stipulated by the Patent Law, the report must not be exhibited in public libraries, or lent out indiscriminately.

The Institute does not guarantee that the information given in this report is free from protective rights, such as patent rights, utility patent rights or trade-mark rights.

No guarantee is given in respect of the accuracy, completeness or usefulness of the information contained in this report. Thus, no liability can be accepted for damage resulting from use of the information, or of the apparatus, methods and procedures described.