

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Nichtlineare Wechselwirkung elektro-
statischer Wellen im Plasma in höheren
Näherungen zur Quasilinearen Theorie

(Nonlinear Interaction of Electrostatic
Plasma Waves in Higher Approximations
for the Quasilinear Theory)

Herbert Gratzl

IPP 6/56

März 1967

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

ABSTRACT:

The Quasilinear Theory is often used to describe the asymptotic behaviour of a weakly unstable configuration (e.g. a two-stream instability). Altshul and Karpman extend the theory to include

- either 1) the influence of nonlinear wave processes, if the particle distribution function further changes adiabatically;
- or 2) strongly time-dependent distribution functions, if the nonlinear effects of 1 are further neglected (which can be important for small wave spectra).

The results of 1) and 2) are now derived as approximations from more extensive expansions.

Under the conditions of the Quasilinear Theory corrections taking both processes (1 and 2) into account can be given. The corrections in case 2 are at least as important as in case 1, as long as the quasilinear growth rate has not become considerably smaller than the initial value.

The conservation of energy principle of the extended equations thus gained can in general only be proved if the quasilinear dispersion relation is also corrected.

Inhalt

Einleitung	1
Kapitel I Quasilineare Theorie	5
1) Ausgangsgleichungen, verallgemeinerte quasilineare Lösung	5
2) Abschätzungen im Rahmen der Quasilinearen Theorie	10
3) Dispersionsbeziehung und kinetische Gleichungen	14
4) Energiesatz	16
Kapitel II Lösungen höherer Ordnung bei schwach zeitabhängiger Verteilungsfunktion	19
1) Ausgangsgleichungen und Verteilungsfunktion zweiter Ordnung	19
2) Gleichung für die Wellen in zweiter Ordnung	22
3) Energiesatz zweiter Ordnung	25
4) Dritte Ordnung	26
5) Zum Energiesatz höherer Ordnungen	29
Kapitel III Entwicklung der Lösung dritter Ordnung nach Amplituden quasilinearer Näherung bei Vernachlässigung von Korrelationen höherer Ordnung	30
1) Verteilungsfunktion	30
2) Gleichung für die Wellen	36
3) Zusammenfassung der wichtigsten Glieder der Gleichungen	38
Kapitel IV Lösungen höherer Ordnung der linearisierten Gleichungen bei explizit zeitabhängiger Verteilungsfunktion	42
1) Berechnung der zweiten Ordnung	42
2) Gleichungen zweiter Ordnung	45
3) Gleichungen dritter Ordnung	48
Kapitel V Höhere Näherungen bei Überlagerung der bisherigen Prozesse	50
Kapitel VI Erweiterung der verallgemeinerten quasilinearen Gleichungen für nichtlineare Wellenprozesse	53
Monochromatische Wellen	55
Literaturangaben	80

Anhang

Einleitung

zu Kapitel I:

- 1) Quasilineare Dispersionsbeziehung, Energiesatz 58
- 2) Dispersionsbeziehung der verallgemeinerten quasilinearen Gleichungen 61
- 3) Das Lenard-Balescu'sche Stoßglied mit Testteilchenmodell 62

zu Kapitel II:

- 4) Berechnung der Fluktuationen dritter Ordnung 64
- 5) Die Fluktuationen in der in [5] angegebenen Form 65

zu Kapitel III:

- 6) Näherung durch quasilineare Amplituden mit schwach zeitabhängigen Koeffizienten 67
- 7) Die Wellenprozesse des Potentialanteils dritter Ordnung 69
- 8) Die Wellenprozesse des Potentialanteils zweiter Ordnung
Der antisymmetrische Anteil 71
- 9) Der Energiesatz bei der Näherung der quasilinearen Dispersionsbeziehung 75
- 10) Der Einfluß der nichtlinearen Erweiterung auf den Realteil der Frequenz 76

zu Kapitel IV:

- 11) Der antisymmetrische Anteil der Korrektur (in der Gleichung für die Verteilungsfunktion) 78

zu Kapitel V:

- 12) Der Energiesatz bei erweiterter Dispersionsbeziehung 79

Einleitung

Die Quasilineare Theorie (im folgenden abgekürzt: QT) beschreibt die Wechselwirkung der longitudinalen Wellen mit den Elektronen in einem im Mittel homogenen Plasma, wenn dieses schwach instabil ist (z.B. durch eine Zweistrominstabilität). Die räumlich gemittelte Verteilungsfunktion hängt nur schwach von der Zeit ab.

Nach LAVAL und PELLAT [8] bzw. FRIEMAN und RUTHERFORD [16] dürfen die Amplituden der Wellen dabei nicht zu klein sein (die Energiedichte pro Wellenlänge muß z.B. groß sein gegen den Wert im Thermischen Gleichgewicht), da sonst Stoßglieder mit ins Spiel kommen, die in der Nähe des thermischen Gleichgewichtes überwiegen, wie das von LENARD-BALESCU. Die QT gilt aus damit zusammenhängenden Gründen nicht mehr in der Umgebung der Wellen, die marginal stabil sind.

Die QT gibt für die Poissongleichung eine (gute) Näherung, die in [7] abgeschätzt ist. ALTSCHUL und KARPMAN haben darüberhinaus auch kinetische Gleichungen angegeben, die über die QT hinausgehen und diese mitenthalten [4,6] :

1. Die erste Arbeit [4] behandelt Schwankungen (Fluktuationen) der Verteilungsfunktion von höherer Ordnung in den Wellenamplituden, wobei außer einem homogenen Magnetfeld auch schon beliebige elektromagnetische Wellen zugelassen werden. Die dabei angewendete Methode und die erzielten Ergebnisse sind aber erst in der Arbeit [5] ausführlicher dargelegt. Der Ausgangspunkt ist die Vlasovgleichung, wobei die räumlich gemittelte Verteilungsfunktion zunächst zeitunabhängig vorausgesetzt wird. Der Übergang zur schwach zeitabhängigen Verteilungsfunktion geschieht durch "Aufsummieren divergenter Ausdrücke".

Das Ergebnis dieses wenig durchschaubaren Verfahrens wird nun klarer werden, da jetzt von vorneherein so wie in [7] zwei Gleichungen verwendet werden, nämlich eine für die gemittelte Verteilungsfunktion und eine für die Abweichungen davon, deren Summe wieder die Vlasovgleichung liefert.

2. In [6] (der "Verallgemeinerten Quasilinearen Theorie") wird die Zeitabhängigkeit der (ortsgemittelten) Verteilungsfunktion nicht von vorneherein eingeschränkt (etwa wie in [4,5], wo sie sich nur adiabatisch ändert). Diese Arbeit weist die Richtung, in der es sich zeigt, daß die kinetischen Gleichungen mit Einschluß nichtlinearer Prozesse von [5] für gewisse Zeiten noch einer Korrektur bedürfen.

Solche Gleichungen für longitudinale Wellen, die sowohl die in 1. wie in 2. behandelten Prozesse miteinschließen und für die auch der Energiesatz gilt, sollen jetzt erhalten werden. Die nichtlinearen Wellenprozesse von 1. wie auch eine explizite Zeitabhängigkeit der Verteilungsfunktion werden nun aus den Ausgangsgleichungen als Störungen höherer Ordnung gewonnen mit der QT als Lösung erster Ordnung - unter den Voraussetzungen der QT sind die Zusätze meist klein. In dem nach der QT zu erwartenden asymptotischen (quasi-stationären) Zustand z.B. kann sich aber die spektrale Wellenenergiedichte stärker durch nichtlineare Wellenprozesse höherer Ordnung ändern als durch quasilineare.

In jeder Ordnung der Rechnung bekommt man ein kinetisches Gleichungssystem, das den Energiesatz erfüllt. Durch die Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit der Verteilungsfunktion in höherer Ordnung erhält man Zusatzglieder, die schon beim Einsetzen der Instabilität eine große relative Bedeutung haben.

Wenn ein schwacher überthermischer Strom einer Maxwellverteilung überlagert ist (wie in [1b]), sind diese Zusätze umso wichtiger, je geringer die Temperatur dieses Stromes ist. Tatsächlich wird bei Experimenten, die sonst die Bedingungen der QT annähernd erfüllen, meist mit einem Strahl sehr niedriger Temperatur gearbeitet, da man anderweitig nicht besser eine definierte Strahltemperatur erhält [22].

Für sehr niedrige Temperatur sind die hier verwendeten Zusatzglieder zwar nicht mehr brauchbar - da sie dann nicht mehr klein genug sind und daher die Näherungsentwicklung versagt - doch geben sie zumindest eine Erweiterung der QT in Richtung einer niedrigeren Strahltemperatur.

Eine andere Erweiterung der QT wäre die Einbeziehung geringer räumlicher Inhomogenitäten, die im Experiment nicht zu vermeiden sind. Diese werden in [24] behandelt - hier dagegen nur räumlich homogene Anordnungen.

Kapitel

Wenn die Verteilungsfunktion in erster Ordnung nicht mehr gut als adiabatisch mit der Zeit veränderlich betrachtet werden kann, sind die Gleichungen verwickelter: Sie erweitern dann die in [6] dargestellte Verallgemeinerte Quasilineare Theorie für Wellenprozesse höherer Ordnung. Dies sind die allgemeinsten hier erhaltenen Gleichungen, die die anderen Ergebnisse mit einschließen.

Die Gl.

Im einzelnen wird die Arbeit so aufgebaut:

Mittel

In Kapitel I wird noch einmal die QT aus den hier benutzten Ausgangsgleichungen als Näherung hergeleitet. Es macht nur die geringe Mühe einer leicht allgemeineren Schreibweise, sie zunächst in der "verallgemeinerten" Form [6] zu erhalten.

In Kapitel II werden schließlich die Wellenprozesse höherer Ordnung unter 1. berechnet, wobei explizit keine Zeitabhängigkeit der Verteilungsfunktion berücksichtigt zu werden braucht.

In Kapitel III wird das Ergebnis in der Entwicklung nach Amplituden quasilinearer Näherung betrachtet - bei Vernachlässigung höherer Korrelationen - und mit [5] verglichen. Für die spektrale Wellenenergiedichte und die Verteilungsfunktion erhält man kinetische Gleichungen, die gegenüber der QT noch weitere Glieder dazunehmen. Solange der asymptotische Zustand der QT noch nicht erreicht ist, sind diese um etwa eine Größenordnung γ_0/ω_p kleiner.

(γ_0 = maximale Anwachsrate zu Beginn der Instabilität,
 ω_p = $2\pi \cdot$ Plasmafrequenz)

Glieder, die beim Einsetzen der Instabilität maximal ungefähr von dieser Größenordnung sind, bekommt man in Kapitel IV dazu, wenn man die Zeitabhängigkeit der Verteilungsfunktion besser berücksichtigt.

Kapitel V faßt die Entwicklungen von Kapitel II und IV zusammen. Dabei treten gemischte Glieder auf, wenn man sich nicht auf die wichtigsten Zusatzglieder beschränkt. Schließlich werden die kinetischen Gleichungen von Kapitel III ergänzt.

In Kapitel VI werden die verallgemeinerten Gleichungen von Kapitel I für Wellenprozesse höherer Ordnung erweitert.

Im A n h a n g erscheinen zusammengefaßt schon bekannte Ergebnisse sowie Rechnungen ohne neuen physikalischen Gehalt oder solche, die zu sehr vom Gang der Arbeit ablenken würden. Die Gleichungen sind nur für eine Teilchensorte (Elektronen) formuliert mit der Masse m und der Ladung $-e$. Im räumlichen Mittel sei deren Ladung (durch ruhende Ionen) ausgeglichen. Bei mehreren Teilchensorten müßte also über diese noch summiert werden. Ebenso wenig würde ein konstantes Magnetfeld wesentliches ändern [5].

I.) Quasilineare Theorie

1.) Die quasilineare Lösung ist eine Lösung erster Ordnung in den Wellenamplituden aus den folgenden beiden Gleichungen:

$$(1a) \quad \frac{\partial f_0}{\partial t} = - \frac{e}{m} \langle \nabla \varphi \nabla_v f_1 \rangle$$

$$(1b) \quad \frac{\partial f_1}{\partial t} + n \nabla f_1 + \frac{e}{m} \nabla \varphi \nabla_v f_0 = - \frac{e}{m} (\nabla \varphi \nabla_v f_1 - \langle \nabla \varphi \nabla_v f_1 \rangle)$$

Dabei soll bedeuten: $f_0(n, t) = \langle f(r, n, t) \rangle$ die räumlich gemittelte Verteilungsfunktion.

Abweichungen werden beschrieben durch die Fluktuationen:

$$(2) \quad f_1(r, n, t) := f - f_0 = f - \langle f \rangle$$

$$\langle \dots \rangle := \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int d^3r$$

Die Teilchendichte $n := \int f_0 d^3v$ sei räumlich und zeitlich konstant. Das elektrische Potential $\varphi(r, t)$ (nur Potential-schwingungen sind in (1) zugelassen) genügt der Poisson-gleichung:

$$(3) \quad \Delta \varphi = 4\pi e \int f_1 d^3v$$

Der räumliche Mittelwert des elektrischen Feldes $\mathcal{E}(r, t) = -\nabla \varphi$:

$$\langle -\nabla \varphi \rangle = 0 \quad \text{verschwindet,}$$

da von außen kein Feld angelegt sein soll.

Durch Addieren der Gleichungen (1a) und (1b) erhält man die Vlasovgleichung

$$(4) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + n \nabla f + \frac{e}{m} \nabla \varphi \nabla_v f = 0$$

Aus den Gleichungen (1-3) läßt sich die Gültigkeit des Energiesatzes zeigen. Zur besseren Übersicht über die Näherungen wird er später mit den erhaltenen Lösungen gezeigt.

Wie man auch an diesen nachweisen kann, bleibt außerdem der mittlere Gesamtstrom der Elektronen konstant, denn es

gilt:

$$m \int m \frac{\partial f_0}{\partial t} d^3v \quad \text{nach (1a)} = -e \int m \langle \nabla \varphi \nabla_v f_1 \rangle d^3v$$

$$\text{durch partielle Integration mit (3)} = \frac{1}{4\pi} \langle \nabla \varphi \Delta \varphi \rangle = \frac{1}{8\pi} \langle \nabla \mathcal{E}^2 \rangle$$

Mit der Darstellung (8) des Potentials durch seine Fourier-Transformierte erhält man dafür:

$$= \frac{1}{4\pi} \int d^3k \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{k^2 \varphi(-k,t) \varphi(k,t)}{(2\pi)^{-3} V} i k \quad k \neq 0$$

Wegen der Bedingungen für die Realität von \mathcal{E} geht der Integrand in sein Negatives über, wenn man k durch das Negative ersetzt, so daß das Integral verschwindet.

Wie in [3] dargelegt, kann man die Form der Gleichungen (1a) und (1b) auch aus der Klimontovitch-Hierarchie erhalten.

Diese wäre abzuleiten aus der Gleichung:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + m \nabla N + \frac{e}{m} \nabla \varphi \nabla N = 0$$

für die Feindichte:

$$N(X) = \sum_j \delta(X - X_j(t)) \quad X = \{w; W\}$$

Dann wäre in (1) zu ersetzen: $f_0 \rightarrow \langle N \rangle$, $N := \langle N \rangle + \delta N$

und $\langle \dots \rangle$ würde die Mittelung über das Ensemble bedeuten, in dem alle möglichen Anfangswerte der $X_j(t)$ enthalten sind.

Die richtige Gleichung (1b) enthält nun nur mehr die flüssigkeitsartigen Bestandteile, in denen die Struktur der einzelnen Teilchen nicht mehr erscheint. Das wird schon in [3] bemerkt.

Nach [3] bekommt man für die Größen $\langle \nabla \varphi \nabla_v \delta N \rangle$ in (1) ($f_1 \rightarrow \delta N$) eine Gleichung, die Mittelungswerte über Dreierprodukte enthielte usf. - So könnte man auch mit der nach (1) aufgespaltenen Vlasovgleichung vorgehen und dadurch eine Art von Hierarchiegleichungen gewinnen [14]. Man spart sich aber das Anschreiben vieler Ausgangsgleichungen, wenn man zur

Berechnung der Fluktuationen die Gleichung (1b) benutzt - die gewonnenen Lösungen erfüllen auch die Gleichungen für die Mittelwerte.

Wenn in einer Lösung erster Ordnung in den Wellenamplituden alle Mittelungswerte über Produkte von drei und mehr ortsabhängigen Größen vernachlässigt werden, so entspricht dem in der Gleichung (1b) das Weglassen der rechten Seite.

Genauso wird nun hier (im Unterschied zu [7], wo von denselben Gleichungen ausgegangen wird) gleich in I. Ordnung verfahren und für (1b) näherungsweise genommen:

$$(5) \quad \frac{\partial f_1}{\partial t} + w \nabla f_1 = - \frac{e}{m} \nabla \varphi \nabla_v f_0$$

In den Lösungen höherer Ordnung in den Wellenamplituden wird das vernachlässigte Glied wieder berücksichtigt.

Das Glied auf der rechten Seite von (1a) kann man als Zusatz

zur Vlasovgleichung: $\frac{\partial f_0}{\partial t} = 0$ mit den ortsgemittelten

Größen eines homogenen Plasmas auffassen [3,13], der jetzt mit (5) zu bestimmen ist.

Zur einfacheren Integration wird die kanonische Transformation eingeführt:

$$(6) \quad w_0 : w - wt \quad w_0 : = w \quad \tau : = t$$

mit deren Hilfe die Größen Funktionen der neuen Variablen werden:

$$f_1(w, w_0, \tau) = f_1(w_0 + w_0 \tau, w_0, \tau), \quad f_0(w, t) = f_0(w_0, \tau), \quad \varphi(w, t) = \varphi(w_0 + w_0 \tau, \tau)$$

Aus der Gleichung (5) bekommt man damit als Zeitableitung längs der vom Potential ungestörten Bahnkurven

(Charakteristiken):

$$(7) \quad \frac{\partial f_1}{\partial \tau} = - \frac{e}{m} \left(\frac{\partial f_0}{\partial w_0} \frac{\partial \varphi}{\partial w_0} - \frac{\partial f_0}{\partial w_0} \frac{\partial \varphi}{\partial w_0} \right) = - \frac{\partial f_0}{\partial w_0} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial w_0}$$

Mit der Fourier-Laplace-Transformation (reelles k) von $\varphi(w, t)$ im endlichen Volumen V (außerhalb V werde $\varphi_v(w, t)$ stetig differenzierbar so fortgesetzt, daß es hinreichend rasch gegen 0 geht):

$$(8) \quad \varphi(w, t) /_{w \in V} := \varphi_v(w, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(k, t) e^{i k w} d^3 k =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} \varphi_{k\omega} \exp i(k\omega - \omega t) \frac{d\omega}{2\pi} d^3 k$$

- dabei werde definiert $\varphi_{k\omega} := \int_0^{\infty} \varphi(k, t) e^{i\omega t} dt$ -

und mit (6) folgt aus (7):

$$(9) \quad \frac{\partial f_1}{\partial \tau} = -i \frac{e}{m} \iint d^3 k \frac{d\omega}{2\pi} \varphi_{k\omega} e^{i k w_0 + i(k w_0 - \omega)\tau} k \frac{\partial f_0}{\partial w}$$

Es genügt, die Konstante c in (8): $c > \max \text{Im} \omega$ zu nehmen.

Mit der Laplace-Transformation:

$$(10) \quad f_2 := \int_0^{\infty} f_0(w, t) e^{i\tau t} dt$$

folgt schließlich aus (9) als Lösung für f_1 (wie in [7]):

$$(11) \quad f_1 = -\frac{e}{m} \iint d^3 k \frac{d\omega}{2\pi} \varphi_{k\omega} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \exp i(k\omega - \omega t) \frac{1}{k\omega - \omega - \Omega} k \frac{\partial f_2}{\partial w} e^{-i\Omega t} +$$

$$+ \frac{e}{m} \iint d^3 k \frac{d\omega}{2\pi} \varphi_{k\omega} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \exp i(k\omega - \omega t) \frac{1}{k\omega - \omega - \Omega} k \frac{\partial f_2}{\partial w} e^{-i\Omega t} +$$

$$+ \int d^3 k g_u(w) \exp i(k\omega - \omega t)$$

Bei der Integration über ω brauchen in (11) nur mehr die Pole von $\varphi_{k\omega}$ beachtet zu werden.

Das letzte Glied rührt von der Anfangsbedingung her:

$$f_1(w, \tau, 0) = \int g_u(w) \exp i k w d^3 k \quad g_0(w) = 0$$

In der QT, in großem zeitlichen Abstand vom Anfangszustand, werden ferner die Glieder $\sim \exp(-i k \omega t)$ vernachlässigt (Begründung in [7, 8, 11, 12]) für Zeiten $t \gg |k \omega_r|^{-1}$ ($|k \omega_r| = \frac{|k \omega_r|}{\|k\|}$ = Minimum der charakteristischen Breiten der Verteilungen f_0 bzw. g_k), da die zugehörigen elektrischen Felder stark gedämpft sind.

Mit der so reduzierten Lösung (11) lautet die Gleichung (1a) für die (gemittelte) Verteilungsfunktion f_0 :

$$(12) \quad \frac{\partial f_0}{\partial t} = i \left(\frac{e}{m}\right)^2 \left\langle \iint d^3 k'' \frac{d\omega''}{2\pi} \varphi_{k''\omega''} e^{i(k''r - \omega''t)} k'' \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} \iint d^3 k' \frac{d\omega'}{2\pi} \varphi_{k'\omega'} e^{i(k'r - \omega't)} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{k' \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{k'\omega - \omega' - \Omega} e^{-i\Omega t} \right\rangle$$

Die Mittelungsoperation ergibt:

$$\left\langle e^{i(k'+k'')r} \dots \right\rangle = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V d^3 r e^{i(k'+k'')r} \dots$$

Damit ist:

$$(13) \quad \frac{\partial f_0}{\partial t} = -i \left(\frac{e}{m}\right)^2 \iiint d^3 k \frac{d\omega' d\omega''}{(2\pi)^2} \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{-k\omega''} \varphi_{k\omega'}}{(2\pi)^{-3} V} k \frac{\partial}{\partial \omega} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{k\omega - \omega' - \Omega} e^{-i(\omega'+\omega''+\Omega)t}$$

Die Existenz des Grenzwertes $\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{k^2}{8\pi} \frac{\varphi_{-k\omega''} \varphi_{k\omega'}}{(2\pi)^{-3} V}$ muß dabei vorausgesetzt werden. ($\varphi_{k\omega}$ hängt nach seiner Definition in (8) auch von V ab.) Sie bedeutet, daß das ortsgemittelte Quadrat der orts- und frequenzabhängigen Feldamplituden in ein Spektrum zerlegt werden kann:

$$\left\langle \frac{1}{8\pi} \nabla \varphi(\omega_1, \omega'') \cdot \nabla \varphi(\omega_1, \omega') \right\rangle = \int d^3 k \frac{k^2}{8\pi} \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{-k\omega''} \varphi_{k\omega'}}{(2\pi)^{-3} V}$$

also durch das k -Integral über obigen Grenzwert dargestellt wird, der so die Bedeutung einer Spektraldichte hat.

Die Existenz dieses Grenzwertes ist gewährleistet, wenn die Korrelationsfunktion ($\omega_2 = \omega_1 + \omega$)

$$\left\langle \frac{1}{8\pi} \nabla \varphi(\omega_1, \omega'') \cdot \nabla \varphi(\omega_2, \omega') \right\rangle_{\omega_1} = \frac{1}{8\pi} \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V d^3 r_1 \nabla \varphi(\omega_1, \omega'') \cdot \nabla \varphi(\omega_1 + \omega, \omega')$$

absolut integrabel ist. Dann existiert der Grenzwert als deren Fourier-Transformierte.

Schwierigkeiten würden monochromatische Wellen machen, da ihre Spektraldichte zu einer δ -Funktion entartet. Bei diesen kann man aber anders vorgehen (Kap. VI).

Statt erst in den Endgleichungen den Mittelungsprozeß durchzuführen, hätte man (vgl. Bemerkungen nach (4)) auch eine Gleichung für $\langle \nabla \Phi \nabla_{\omega} f_0 \rangle$ aus den Ausgangsgleichungen gewinnen können. Damit gelangt man im Falle, daß die gemittelte Verteilungsfunktion nur adiabatisch von der Zeit abhängt (Abschnitt 2), zum gleichen Ergebnis, nämlich der QT [17].

(13) ist eine "verallgemeinerte quasilineare Gleichung" [6] für die Verteilungsfunktion. Durch Laplace-Transformation bekommt man sie in der Form, wie sie in [6], Gl. 2.23 angegeben ist (siehe Kap. VI, Gl. (93)). Zu (13) gehört noch eine Gleichung (Gl. (94)) für die Feldamplituden, die aus der Poissongleichung folgt.

2.) Vernachlässigt man (Adiabatenhypothese [3,9]) die Zeitabhängigkeit von f_0 auf der rechten Seite von Gleichung (13), so erhält man sie in der quasilinearen Form:

$$(14) \quad \frac{\partial f_0}{\partial t} = -i \left(\frac{e}{m}\right)^2 \iiint d^3k \frac{d\omega' d\omega''}{(2\pi)^2} \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{k\omega'} \varphi_{k\omega''}}{(2\pi)^3 V} e^{-i(\omega'+\omega'')t} \int \frac{1}{k\omega - \omega'} \int \frac{\partial f_0}{\partial \omega}$$

Diese Näherung ist unter der folgenden Bedingung möglich:

$$(15) \quad \left(\frac{\Delta k}{k_0} \omega_0\right)^{-1} \ll \text{übrige charakteristische Zeiten, z.B.} \ll (\text{Im} \omega)^{-1}$$

Dabei sei: Δk = charakteristische Breite des (instabilen) Wellenspektrums, k_0 soll ein mittleres $|\frac{k\omega}{m}|$ aus dem Spektrum darstellen, ω_0 den Betrag des Realteils der zugehörigen Frequenz.

In dem entgegengesetzten Grenzfall, dem Fall (zumindest nahezu) *monochromatischer Wellen* (Kap. VI) läßt sich die Integration über k in (13) in eine Summe verwandeln. In diesem Fall wären die nichtlinearen Glieder rechts in (1b) für die Berechnung des Feldes aus f_1 zu vernachlässigen, wenn ($k\omega \approx (\overline{k\omega})^{1/2}$ gesetzt in (11) - der Strich soll die Mittelung über f_0 bedeuten)

$$|k_0 \nabla f_1| \ll |k_0 \nabla f_0| \quad \text{ist. Bei Vernachlässigung}$$

$$\text{der zweiten Ableitung: } \left| \frac{\omega_0}{k_0^2} k_0 \nabla k_0 \nabla f_0 \right| \ll |k_0 \nabla f_0|$$

(vgl. die stärkere Bedingung bei der quasilinearen Lösung in Anhang 1) folgt daraus (mit (20)):

$$(16) \quad \tau^{-2} := \frac{e}{m} |k_0 \varphi(\omega, t)| \ll \omega_0^2$$

wenn die charakteristische Zeit der Verteilungsfunktion groß gegen ω_0^{-1} ist (nach [6] hat diese angenähert eine Periode von ungefähr der Größenordnung τ).

Bei dieser sehr groben Abschätzung ist angenommen, daß für die nichtlinearen Korrekturen des Potentials die Teilchen aus näherungsweise dem gleichen Geschwindigkeitsbereich wie für die linearen beitragen. Die Bedingung (16) ist also noch etwas abzuändern, wenn man die unterschiedliche Größe der betreffenden Geschwindigkeitsableitungen der Verteilungsfunktion beachtet.

Durch diesen Unterschied ändert sich bei einem breiten *Spektrum* von Wellen (wo (15) vorausgesetzt ist) die entsprechende Bedingung gegenüber (16) um einen Faktor $\approx (k_0 \lambda_D)^{-1}$. Die größten Korrekturen in Kapitel III sind asymptotisch

$$\text{von der Ordnung } \varepsilon_1 := \varepsilon_w \cdot (k_0 \lambda_D)^{\frac{5}{2}} \frac{\omega_p}{\gamma_t} \quad (\lambda_D = \text{Debyelänge,}$$

Definition von λ_D in Anhang 1) - das soll $\ll 1$ sein -

$$\text{bezüglich des Gliedes der QT. Dabei sei } \varepsilon_w := \frac{\tau^{-4}}{\omega_0^4} (k_0 \lambda_D)^{-2}$$

(sei $\ll k_0^2 \lambda_D^2$ wie in (16)), wobei jetzt $\omega_0 = \omega_p$ ist

(nach Anhang 1). γ_t sei eine mittlere Wachstumsrate zur Zeit t .

Diese Abschätzung gilt wie die folgenden im e i n d i m e n s i o n a l e n Problem [1b] und soll es wenigstens in diesem Fall ermöglichen, die Größenordnung der verschiedenen Korrekturen miteinander zu vergleichen.

Durch die Zeitabhängigkeit der Verteilungsfunktion erhält man nämlich in Kapitel IV noch Korrekturen der relativen

Ordnung $\frac{\gamma_t}{\omega_p} \frac{k_0}{\Delta k}$ ($\ll 1$ nach (15)); denn nach [1b] gilt

$(\gamma_0 \geq \gamma_t |_{t=0}) \geq \gamma_t$ für $t \lesssim \frac{1}{\gamma_0}$. Wenn beide Korrekturen

klein sind, ist die QT eine gute Näherung. Sie liefert für die Verteilungsfunktion eine charakteristische Zeit der

Größenordnung $\frac{1}{\gamma_0}$ [7], die im Eindimensionalen auch durch

den Ausdruck (14) abgeschätzt werden kann [6]:

$$(17) \quad \approx \left(\frac{\Delta k}{k_0} \omega_0 \right)^3 \tau_0^4 \quad \tau_0 = \tau \Big|_{t = \frac{1}{\gamma_0}}$$

Die Größen genügen daher dort der Beziehung:

$$\left(\frac{\Delta k}{k_0} \right)^3 \cdot \frac{\gamma_0}{\omega_p} \approx \bar{\varepsilon}_w (k_0 \lambda_D)^2 := \varepsilon_w \Big|_{t \approx \frac{1}{\gamma_0}} (k_0 \lambda_D)^2 \geq \varepsilon_w (k_0 \lambda_D)^2$$

Wenn eine schwach instabile Anordnung wie in [1b] vorliegt: eine Maxwellverteilung mit einem schwachen überthermischen Strom der dortigen Größenordnung, ist näherungsweise

$$\left(\frac{\Delta k}{k_0} \right)^3 \approx (k_0 \lambda_D)^2 \quad \text{und} \quad \frac{\gamma_0}{\omega_p} \approx (k_0 \lambda_D)^4 . \quad \text{-- Wenn daher } \gamma_t$$

nicht wesentlich kleiner ist als γ_0 , sind die Korrektur-

glieder $\sim \varepsilon_1$ und $\sim \frac{\gamma_t k_0}{\omega_p \Delta k}$ höchstens von der

Größenordnung $\frac{\gamma_t k_0}{\omega_p \Delta k}$. -- Nach (17) gilt dann:

$$(k_0 \lambda_D)^4 \approx \frac{\gamma_0}{\omega_p} \approx \bar{\varepsilon}_w = \frac{\tau_0^{-4}}{\omega_p^4} (k_0 \lambda_D)^{-2} \geq \varepsilon_w, \quad \text{so daß die Größen-}$$

ordnung von ε_1 folgendermaßen abzuschätzen ist:

$$\varepsilon_1 = (k_0 \lambda_D)^5 \frac{\varepsilon_w \cdot \omega_p}{\gamma_t} \leq (k_0 \lambda_D)^5 \frac{\bar{\varepsilon}_w \cdot \omega_p}{\gamma_t} \approx (k_0 \lambda_D)^5 \frac{\gamma_0}{\gamma_t} \approx (k_0 \lambda_D)^2 \frac{\gamma_t \cdot k_0}{\omega_p \cdot \Delta k} \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_t} \right)^2$$

Solange die Amplituden der instabilen Wellen noch nicht sehr groß sind, wenn also $\varepsilon_w < \bar{\varepsilon}_w$ ist und außerdem noch $\gamma_t \approx \gamma_0$ gilt, sind die Korrekturen $\sim \varepsilon_1$ sogar

noch klein gegen die $\sim \frac{\gamma_t k_0}{\omega_p \Delta k}$. Im asymptotischen

Bereich der QT dagegen kann man diese gegen jene vernachlässigen, da dort $\varepsilon_w \approx \bar{\varepsilon}_w$ und $\gamma_0^2 \gg \gamma_t^2$ gilt.

Wenn $\varepsilon_1 \gtrsim 1$ wird, muß man die Gleichungen der QT sicher

ergänzen. — Unter der Voraussetzung $\left(\frac{\Delta k}{k_0} \right)^3 \approx (k_0 \lambda_D)^2$

erhält man wie in [16] aus (17) die Beziehung: $\frac{\gamma_0}{\omega_p} \approx \bar{\varepsilon}_w$ (17').

ε_w hat die anschauliche Bedeutung des Verhältnisses der gesamten Wellenenergiedichte zur gesamten Teilchenenergiedichte.

Dieses Verhältnis ist im Thermischen Gleichgewicht kleiner

und nach [8]: $\approx \frac{1}{n \lambda_D^3}$, $\lambda_D' := \sqrt{\frac{3k_T T_e}{4\pi n e^2}}$

Aus der Ableitung der QT aus der BBGKY-Hierarchie in [8] folgt, daß schon im stabilen Fall, für gedämpfte Wellen, im dreidimensionalen Raum gelten muß:

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{|\varphi(k,t)|^2}{8\pi \cdot (2\pi)^{-3} V} \gg k_T T_e \quad \text{damit man die QT anwenden}$$

kann. Die in [8] erhaltene untere Schranke wird aber für kleine $|\gamma_k|$ so groß, daß die QT in der Umgebung der Stellen

$\gamma_k = 0$ versagen muß, also z.B. im asymptotischen Zustand der QT. Nach [8] und [16] kommt dann in der Gleichung für die Amplituden noch ein inhomogenes (Stoß-)Glied dazu.

Wenn man von der Vlasovgleichung ausgeht, so wie in dieser Arbeit, ist ein Stoßglied nur durch ein Testteilchenmodell zu gewinnen. In Anhang 3 ist das für das Thermische Gleichgewicht versucht.

3.) Um die zu (14) gehörende Gleichung für das Amplitudenquadrat zu gewinnen, berechnet man die Amplitude aus (3) mit den Fourier-Laplace-transformierten Größen:

$$(18) \quad k^2 \varphi_{k\omega} = -4\pi e \int f_{k\omega}^{(1)}(n) d^3V$$

wobei umgekehrt wie in Gleichung (8) ist:

$$(19) \quad f_{k\omega}^{(1)}(n) := \int_0^\infty \int_V f_1(n, n, t) e^{-i(kn - \omega t)} \frac{d^3r}{(2\pi)^3} dt$$

Dazu muß noch ein Integral addiert werden von gleicher Bauart, in dem f_1 ersetzt ist durch eine stetig differenzierbare Funktion, die f_1 außerhalb V fortsetzt und hinreichend klein wird mit großem Abstand von V . Dieser Zusatz verschwindet in dem schließlich untersuchten $\lim V \rightarrow \infty$ und ist deshalb nicht angeschrieben.

Setzte man jetzt f_1 nach (11) ein, so erhielte man die zu (13) gehörige Gleichung. In der QT, mit der Bedingung (15) für f_0 , ist dagegen einzusetzen:

$$(20) \quad f_1(n, n, t) \approx -\frac{e}{m} \iint d^3k \frac{d\omega}{2\pi} \varphi_{k\omega} e^{i(kn - \omega t)} \frac{1}{k\omega - \omega} k \frac{\partial f_0}{\partial k}$$

(bis auf die Ausdrücke $\sim e^{-i k \omega t}$)

Das Vorzeichen des Imaginärteils des Nenners $(k\omega - \omega)^{-1}$ für die instabilen Wellen bleibt auch für die Auswertung der Residuen bei stabilen Wellen richtig (allgemein in [12] festgestellt, speziell im vorliegenden Problem schon in [7], auch in [3]), was durch analytische Fortsetzung [9] gezeigt werden kann.

Wenn man bei der Transformation in (19) noch einmal (wegen (15)) die Zeitabhängigkeit von f_0 vernachlässigt, bekommt man aus (18) die Dispersionsbeziehung:

$$(21) \quad \epsilon_{k\omega} := 1 - \frac{4\pi e^2}{m k^2} \int \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{k\omega - \omega} d^3v = 0$$

(ohne Vernachlässigung von Ausdrücken $\sim e^{-i k u t}$:
Anhang 2.3) Die asymptotische Lösung für die orts-
transformierte Amplitude ist dann:

$$(22) \quad \varphi^{(a)}(k, t) := \varphi_k^{(a)} e^{-i \int \omega_k dt}$$

mit der Näherungslösung $\omega = \omega_k$ mit $|\gamma_k| = |\text{Im} \omega_k| \ll |\text{Re} \omega_k|$
nach Anhang 1.

Die wichtigsten Korrekturen zur besseren Berücksichtigung
der Zeitabhängigkeit von f_0 folgen in Kapitel IV und V.

Für die Wellenenergiedichte erhält man damit folgende
Gleichung:

$$\frac{1}{8\pi} \langle (\nabla \varphi(r, t))^2 \rangle = \frac{1}{8\pi} \langle \varphi^2 \rangle = \frac{1}{8\pi} \int d^3k k^2 \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\varphi(-k, t) \varphi(k, t)}{(2\pi)^{-3} V}$$

$$(23) \quad \frac{d}{dt} \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{k^2 \varphi(-k, t) \varphi(k, t)}{8\pi (2\pi)^{-3} V} = 2 \gamma_k \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{k^2 \varphi(-k, t) \varphi(k, t)}{8\pi (2\pi)^{-3} V}$$

Für die Verteilungsfunktion der Teilchen folgt aus (14):

$$(24) \quad \frac{\partial f_0}{\partial t} = -i \left(\frac{e}{m}\right)^2 \int d^3k \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\varphi(-k, t) \varphi(k, t)}{(2\pi)^{-3} V} k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{k\omega - \omega_k} k \frac{\partial f_0}{\partial \omega}$$

(23) und (24) sind die kinetischen Gleichungen der QT.

Für die instabilen Wellen ($\gamma_k > 0$) kann man (24) verein-
fachen; denn bei der Herleitung in (12) kann man k'' und k'

vertauschen und erhält dadurch statt des Nenners $(k\omega - \omega_k)^{-1}$ in (24):

$$(25) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k\omega - \omega_k} - \frac{1}{k\omega - \omega_{-k}} \right) = \frac{i\gamma_k}{(k\omega - \text{Re}\omega_k)^2 + \gamma_k^2}$$

Nach [5,6], vgl. [8] kann man bis auf in $\frac{\gamma_k}{\text{Re}\omega_k}$ quadratische Ausdrücke [7] ersetzen:

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{|\varphi(k,t)|^2}{8\pi (2\pi)^{-3} V} \cdot \frac{i\gamma_k}{(k\omega - \text{Re}\omega_k)^2 + \gamma_k^2}$$

durch:

$$(25') \quad \left(i\pi \frac{\gamma_k}{|\gamma_k|} \delta(k\omega - \text{Re}\omega_k) + \frac{i}{2(k\omega - \text{Re}\omega_k)^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{|\varphi(k,t)|^2}{8\pi (2\pi)^{-3} V}$$

Nähme man näherungsweise nur das Glied mit der δ -Funktion [11], könnte man den Energiesatz der QT nicht zeigen (Anhang 1).

Bei stabilen Wellen ($\gamma_k < 0$) ist wegen der Bemerkung nach (20) für solche Teilchengeschwindigkeiten, die gleich der Phasengeschwindigkeit einer Welle sind, in (25) bei der Auswertung eines Residuums γ_k durch $|\gamma_k|$ zu ersetzen. Daher ist in (25') der Faktor $\frac{\gamma_k}{|\gamma_k|}$ wieder zu streichen.

4.) Um später die Gültigkeit von Näherungen höherer Ordnung zu zeigen, ist es wünschenswert, sich nicht auf eine spezielle Lösung der Dispersionsbeziehung einzuschränken, die vielleicht dann keine hinreichend gute Näherung mehr ist.

Statt speziell für die quasilineare Lösung (22) - wie in Anhang 1 - wird deshalb hier der Energiesatz ohne diese Voraussetzung gezeigt [11]. Er fordert:

$$(26) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \int \frac{m}{2} \omega^2 f d^3v + \frac{\mathcal{E}^2}{8\pi} \right\rangle = 0$$

Im folgenden wird statt $\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V}$ zur kürzeren Schreibweise stets nur mehr $\frac{1}{V}$ geschrieben. Der Grenzübergang ist in den betreffenden Formeln dazuzudenken.

Dann ist:

$$(27) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{m}{2} \int \omega^2 f d^3v \right\rangle = \frac{m}{2} \int \omega^2 \frac{\partial f_0}{\partial t} d^3v$$

$$(28) \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\langle \varphi^2 \rangle}{8\pi} = \frac{1}{8\pi} \int d^3k \frac{\partial}{\partial t} \frac{k^2 \varphi(-k,t) \varphi(k,t)}{(2\pi)^{-3}V}$$

Mit (14) bekommt man für die Änderung der thermischen Energiedichte:

$$(29) \quad \frac{m}{2} \int \omega^2 \frac{\partial f_0}{\partial t} d^3v = -i \frac{e^2}{2m} \int d^3v \omega^2 \iiint d^3k \frac{d\omega' d\omega''}{(2\pi)^2} \frac{\varphi_{k\omega'} \varphi_{k\omega''}}{(2\pi)^{-3}V} e^{-i(\omega'+\omega'')t} k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{k\omega - \omega'}$$

Durch partielle Integration über $\frac{k\omega}{|k|}$ folgt aus (29):

$$(30) \quad = -(-i) \frac{e^2}{2m} \iiint d^3k \frac{d\omega' d\omega''}{(2\pi)^2} \frac{\varphi_{k\omega'} \varphi_{k\omega''}}{(2\pi)^{-3}V} e^{-i(\omega'+\omega'')t} \int \frac{(k\omega - \omega') + \omega'}{k\omega - \omega'} k \frac{\partial f_0}{\partial \omega} d^3v$$

$$(31) \quad = \frac{e^2}{2m} \iiint d^3k \frac{d\omega' d\omega''}{(2\pi)^2} i\omega' \frac{\varphi_{k\omega'} \varphi_{k\omega''}}{(2\pi)^{-3}V} e^{-i(\omega'+\omega'')t} \int \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{k\omega - \omega'} d^3v$$

Etwas anders geschrieben ist der Ausdruck (29) daher gleich:

$$(32) \quad = \frac{1}{8\pi} \int d^3k k^2 \frac{8\pi e^2}{m k^2} \iiint \frac{d\omega' d\omega''}{(2\pi)^2} i\omega' \frac{\varphi_{k\omega'} \varphi_{k\omega''}}{(2\pi)^{-3}V} e^{-i(\omega'+\omega'')t} \int \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{k\omega - \omega'} d^3v$$

Die Lösung für die Amplitude $\varphi_{k\omega}$, die (18) genügt, läßt sich (wegen (21)) umschreiben als:

$$(33) \quad \varphi_{k\omega} = \varphi_{k\omega}^{(1)} \quad \text{mit} \quad \varphi_{k\omega}^{(1)} := \frac{1}{k^2} M^{(1)}(k,\omega) \varphi_{k\omega}$$

und

$$(34) \quad M^{(1)}(k,\omega) := 1 - \epsilon_{k\omega} = \frac{4\pi e^2}{m k^2} \int \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{k\omega - \omega} d^3v$$

Damit erhält man für (32):

$$(35) \quad - \frac{1}{8\pi} \int d^3k \ k^2 \ 2 \frac{\varphi(-k,t) \frac{\partial}{\partial t} \varphi^{(1)}(k,t)}{(2\pi)^{-3}V}$$

Da hier wegen (33) $\varphi^{(1)}(k,t) = \varphi(k,t)$ ist, folgt schließlich dafür:

$$- \frac{1}{8\pi} \int d^3k \ k^2 \ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\varphi(-k,t) \varphi(k,t)}{(2\pi)^{-3}V}$$

Daher ist (29) negativ gleich der Änderung der Wellenenergiedichte.

Der Energiesatz gilt wie die Gleichungen der QT auch für ein Spektrum stabiler Wellen. Da nach [8] dabei die Energiedichte pro Wellenlänge aber größer als etwa die thermische sein muß, ist die QT nur in diesem Sonderfall anwendbar.

Durch nichtlineare Prozesse, z.B. wie sie im folgenden untersucht werden, könnten auch stabile Wellen angeregt werden. Ein Wellenzerfall, der dies bewirkt, kommt allerdings in der nächsten Ordnung der Rechnung nur bei weniger einfachen Dispersionsbeziehungen als hier vor.

II.) Lösungen höherer Ordnung für schwach zeitabhängiges f_0

Die Lösungen der QT werden als erste Näherung für die Lösung des exakten Systems (1a, b) betrachtet. In diesem Kapitel werden die Korrekturen durch die in den Wellenamplituden quadratischen und höheren Ausdrücke behandelt, jedoch sei von der expliziten Zeitabhängigkeit der Verteilungsfunktion f_0 in Gleichung (1b) bei den Integrationen noch abgesehen. Im Kapitel IV wird das nun vorzuführende Verfahren auch für eine zeitabhängige Verteilungsfunktion ausgedehnt. Die erhaltenen Glieder sind dann die Anfangsglieder einer asymptotischen Lösung der Ausgangsgleichungen (1a) und (1b), also der Vlasovgleichung (4).—Unter der Ordnung der Näherungsrechnung dieses Kapitels werde die Zahl der Amplituden verstanden, die in den jeweils berechneten Fluktuationen vorkommen.

1.) Der Ansatz, der bei der Berechnung der Glieder zweiter Ordnung in den Wellenamplituden gemacht wird, unterscheidet sich von (1-3) mit (5) lediglich darin, daß jetzt in dem zu berücksichtigenden Störglied $-\frac{e}{m} \nabla \varphi \nabla_v f_1$ näherungsweise $f_1 \approx \hat{f}_1^{\text{I}}$ gesetzt wird. Damit ist gemeint, daß dort die Fluktuationen näherungsweise als Funktional der Verteilungsfunktion f_0^{II} (der Index II bedeutet: in II. Ordnung) genommen werden und zwar in der Form, wie sie in (20) als Funktional der Verteilungsfunktion I. Ordnung gewonnen sind.

Die Gleichungen (1-3) lauten damit:

$$(36a) \quad \frac{\partial f_0^{\text{II}}}{\partial t} = -\frac{e}{m} \langle \nabla \varphi \nabla_v f_1^{\text{II}} \rangle$$

$$(36b) \quad \frac{\partial f_1^{\text{II}}}{\partial t} + \omega \nabla f_1^{\text{II}} + \frac{e}{m} \nabla \varphi \nabla_v f_0^{\text{II}} = -\frac{e}{m} (\nabla \varphi \nabla_v \hat{f}_1^{\text{I}} - \langle \nabla \varphi \nabla_v \hat{f}_1 \rangle)$$

$$(37) \quad f_0^{\text{II}} := \langle f^{\text{II}} \rangle \quad f^{\text{II}} := f_0^{\text{II}} + f_1^{\text{II}}$$

$$(38) \quad \Delta \varphi(x, t) = 4\pi e \int f_1^{\text{II}} d^3v$$

Um Indizes einzusparen, wird für die Rechnung in II. Ordnung jetzt bezeichnet:

$$(39) \quad f_2 := f_1^{\text{II}} - \hat{f}_1^{\text{I}}$$

$$(40) \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \quad \Delta\varphi_1 = 4\pi e \int \hat{f}_1^{\text{I}} d^3v \quad \Delta\varphi_2 = 4\pi e \int f_2 d^3v$$

Genauso wie \hat{f}_1^{I} als Bezeichnung für (20) eingeführt ist, wenn dort $f_0^{(\text{I})}$ durch f_0^{II} ersetzt wird, und ebenso unter φ das Potential in zweiter Ordnung verstanden wird, soll jetzt $\frac{\partial \hat{f}_0^{\text{I}}}{\partial t}$ den Wert (24) bedeuten, wenn dort rechts $f_0^{(\text{I})}$ durch f_0^{II} ersetzt wird.

Unter Berücksichtigung der Gleichungen und Lösungen I. Ordnung erhält man damit aus (36):

$$(41a) \quad \frac{\partial f_0^{\text{II}}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{f}_0^{\text{I}}}{\partial t} = -\frac{e}{m} \langle \nabla\varphi \nabla_v f_2 \rangle$$

$$(41b) \quad \frac{\partial f_2}{\partial t} + \omega \nabla f_2 = -\frac{e}{m} \nabla\varphi \nabla_v \hat{f}_1^{\text{I}} - \frac{\partial \hat{f}_0^{\text{I}}}{\partial t}$$

$$(42) \quad f^{\text{II}} = f_0^{\text{II}} + \hat{f}_1^{\text{I}} + f_2$$

(41a) stellt den Zuwachs in der Gleichung für f_0 dar, der von der in (41b) rechts nun auftretenden Störung herrührt.

Wie z.B. bei der Herleitung der QT in [8] gut zum Ausdruck kommt, sind in der QT f_0 und $\frac{k^2 |\varphi(k,t)|^2}{8\pi \cdot (2\pi)^{-3} V}$ Variable, deren

Anfangsbedingungen unabhängig voneinander vorgegeben werden können. Als spezielles Ziel wird auch hier versucht, in den höheren Ordnungen kinetische Gleichungen aus den Ausgangsgleichungen zu gewinnen; dazu werden die Fluktuationen zunächst einmal durch f_0 und $\varphi_{k\omega}$ ausgedrückt.

Die Gleichungen (41) enthalten nur mehr den zu eliminierenden Fluktuationsanteil f_2 . Sie gehen über eine reine Störungsrechnung (vgl. [1b]) der ungestörten Größen $f_1^{(I)}$ und $\varphi^{(I)}(k,t)$ dadurch hinaus, daß jetzt f_0 und $\varphi(k,t)$ (bzw. $\varphi_{k\omega}$) hier in II. Ordnung eine neue Bedeutung haben und insoweit die Lösungen der vorherigen Ordnung nur formal mitbenutzt werden (die deshalb ein \wedge Zeichen bekommen).

Ein Vorteil dieses Verfahrens liegt einmal darin, daß für die daraus resultierenden Gleichungen der Energiesatz ziemlich übersichtlich zu zeigen ist. Außerdem kann man später bei der Herleitung der kinetischen Gleichungen weitere Näherungen gut überblicken. Es muß aber die Poissongleichung noch näherungsweise gelöst werden. (Das geschieht in Gleichung (70)).

Ähnlich wie in erster Ordnung wird auch beim Lösen der verkürzten Gleichungen zweiter Ordnung verfahren, wobei die Zeitabhängigkeit von f_0 in (41b) zunächst ebenfalls vernachlässigt sei. Aus (41b) erhält man analog (7):

$$(43) \quad \frac{\partial(f_2 + \hat{f}_0^I)}{\partial \tau} = - \frac{e}{m} \left(\frac{\partial \hat{f}_1^I}{\partial \omega_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_0} - \frac{\partial \hat{f}_1^I}{\partial \omega_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_0} \right)$$

Darin ist nun f_1 als Funktional in der Form (20) einzusetzen ($\omega = \omega_0 + \omega_0 \tau$):

$$(44) \quad \begin{aligned} \frac{\partial(f_2 + \hat{f}_0^I)}{\partial \tau} &= i \left(\frac{e}{m}\right)^2 \left[\iint d^3 k' \frac{d\omega'}{2\pi} \varphi_{k'\omega'} e^{i(k'\tau - \omega'\tau)} k' \frac{\partial}{\partial \omega_0} \iint d^3 k'' \frac{d\omega''}{2\pi} \varphi_{k''\omega''} e^{i(k''\tau - \omega''\tau)} \frac{k'' \frac{\partial f_0}{\partial \omega_0}}{k''\omega_0 - \omega''} \right. \\ &\quad \left. - \iint d^3 k' \frac{d\omega'}{2\pi} \varphi_{k'\omega'} e^{i(k'\tau - \omega'\tau)} \frac{k' \frac{\partial}{\partial \omega_0}}{k'\omega_0 - \omega'} \iint d^3 k'' \frac{d\omega''}{2\pi} \varphi_{k''\omega''} e^{i(k''\tau - \omega''\tau)} k'' \frac{\partial f_0}{\partial \omega_0} \right] = \\ &= i \left(\frac{e}{m}\right)^2 \iint d^3 k' \frac{d\omega'}{2\pi} \varphi_{k'\omega'} e^{i(k'\tau - \omega'\tau)} \iint d^3 k'' \frac{d\omega''}{2\pi} \varphi_{k''\omega''} e^{i(k''\tau - \omega''\tau)} k' \frac{\partial}{\partial \omega_0} \frac{k'' \frac{\partial f_0}{\partial \omega_0}}{k''\omega_0 - \omega''} \end{aligned}$$

Die Integration über die Zeit unter Vernachlässigung der Glieder $\sim e^{-i k \omega t}$ wie bei Gleichung (11) ergibt:

$$(45) \quad \begin{aligned} f_2 &= \left(\frac{e}{m}\right)^2 \iint \iint d^3 k' \frac{d\omega'}{2\pi} d^3 k'' \frac{d\omega''}{2\pi} \varphi_{k'\omega'} \varphi_{k''\omega''} e^{i(k'+k'')\tau - i(\omega'+\omega'')t} \\ &\quad \cdot \frac{1}{(k'+k'')\omega_0 - \omega' - \omega''} k' \frac{\partial}{\partial \omega_0} \frac{k'' \frac{\partial f_0}{\partial \omega_0}}{k''\omega_0 - \omega''} \left(1 - \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\delta(k'+k'')}{(2\pi)^3 V} \right) \end{aligned}$$

Man erhalte in den höheren Ordnungen noch Summanden

$$\sim t^{n-1} e^{-ik\omega t} \quad (n = \text{Zahl der Ordnung}), \text{ die aber wie in}$$

I. Ordnung einen vernachlässigbaren Beitrag für die Amplituden liefern.

Der Zusatzausdruck rechts in (41a) ist dann:

$$(46) \quad \frac{\partial (f_0^{\text{II}} - \hat{f}_0^{\text{I}})}{\partial t} = -i \left(\frac{e}{m}\right)^3 \langle \iiint d^3k \frac{d\omega}{2\pi} d^3k' \frac{d\omega'}{2\pi} d^3k'' \frac{d\omega''}{2\pi} e^{i(k+k'+k'')t - i(\omega+\omega'+\omega'')t} \cdot \varphi_{k\omega} \varphi_{k'\omega'} \varphi_{k''\omega''} \left(1 - \frac{\delta(k'+k'')}{(2\pi)^3 V}\right) k' \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{(k'+k'')\omega - \omega' - \omega''} k'' \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k'' \frac{\partial f_0^{\text{II}}}{\partial \omega}}{k''\omega - \omega''} \rangle$$

$$:= \left(\frac{e}{m}\right)^3 \cdot \chi^{(2)}(k'', \omega''; k', \omega')$$

Die Existenz des hierbei auftretenden Grenzwertes

$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{k'\omega'} \varphi_{k''\omega''} \varphi_{k\omega}}{(2\pi)^3 V}$ muß nun gefordert werden (ebenso später bei noch längeren Produkten). Ähnlich wie in der ersten Ordnung die Absolutintegrierbarkeit einer Zweierkorrelationsfunktion würde dafür hier die Absolutintegrierbarkeit der entsprechenden Dreierkorrelationsfunktion hinreichen.

Die Gleichung für die Verteilungsfunktion ist nun in II.

Ordnung:
$$\frac{\partial f_0^{\text{II}}}{\partial t} = \frac{\partial \hat{f}_0^{\text{I}}}{\partial t} + \frac{\partial (f_0^{\text{II}} - \hat{f}_0^{\text{I}})}{\partial t}$$

mit den Ausdrücken (24) und (46).

2.) Um schließlich die Änderung in der Gleichung für die mittlere spektrale Energiedichte der Wellen zu erhalten, wird der von f_2 herrührende Potentialzuwachs nach Gl. (40) berechnet. Nach Fourier-Laplace-Transformation analog (19)

und (8) erhält man aus
$$\varphi_{k\omega}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi_{\nu}^{(2)}(\nu, t) e^{-i(k\nu - \omega t)} \frac{d^3\nu}{(2\pi)^3} dt$$

mit (45):

$$(47) \quad \varphi_{k\omega}^{(2)} = -\frac{4\pi e}{k^2} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \iiint d^3k' \frac{d\omega'}{2\pi} d^3k'' \frac{d\omega''}{2\pi} \varphi_{k'\omega'} \varphi_{k''\omega''} \delta(k - k' - k'') \left(1 - \frac{\delta(k'+k'')}{(2\pi)^3 V}\right) \cdot \frac{i}{(\omega - \omega' - \omega'')} \int d^3\nu \frac{1}{(k'+k'')\nu - \omega' - \omega''} k' \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k'' \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{k''\omega - \omega''}$$

Diese Beziehung gilt nämlich zunächst einmal für jedes endliche Volumen V - solange man also noch nicht zur Grenze $\lim_{V \rightarrow \infty}$ übergegangen ist. Aus der Existenz der Spektral-

dichte $\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{k^2}{8\pi} \frac{\varphi_{k\omega} \varphi_{k'\omega'}}{(2\pi)^3 V}$ (Gl. (13) ff.) folgt daher,

daß der $\lim_{V \rightarrow \infty} \varphi_{k\omega} / \sqrt{V}$ existiert.

Durch partielle Integration über $\frac{k\omega}{|k|}$ erhält man

$$(48) \quad \frac{\varphi_{k\omega}^{(2)}}{\sqrt{V}} = -\frac{4\pi e}{k^2} \frac{e}{m} \iint \int d^3k' \frac{d\omega'}{2\pi} d^3k'' \frac{d\omega''}{2\pi} \frac{\varphi_{k'\omega'} \varphi_{k''\omega''}}{\sqrt{V}} \delta(k-k'-k'') \left(1 - \frac{\delta(k+k')}{(2\pi)^3 V}\right) \cdot \frac{i}{\omega-\omega'-\omega''} \int d^3v \frac{(k'+k'') \cdot k'}{((k'+k'')\omega-\omega'-\omega'')^2 (k''\omega-\omega'')} k'' \frac{\partial f_0}{\partial \omega}$$

Das läßt sich mit einer Abkürzung, die schon in [5] verwendet wird, schreiben als:

$$(49) \quad \frac{\varphi_{k\omega}^{(2)}}{\sqrt{V}} = -\frac{1}{k^2} \iint \int d^3k' d^3k'' \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{d\omega''}{2\pi} \mu^{(2)} \frac{\varphi_{k'\omega'} \varphi_{k''\omega''}}{\sqrt{V}} \frac{\delta(k-k'-k'')}{-i(\omega-\omega'-\omega'')} \left(1 - \frac{\delta(k+k')}{(2\pi)^3 V}\right)$$

mit $\mu^{(2)}(k'', \omega''; k', \omega') := \frac{4\pi e^2}{m} \frac{e}{m} \int d^3v \frac{(k'+k'') \cdot k'}{((k'+k'')\omega-\omega'-\omega'')^2 (k''\omega-\omega'')} k'' \frac{\partial f_0}{\partial \omega} = 4\pi m \chi^{(2)} d^3v$

(wie in [5] kann man $\mu^{(2)}$ symmetrisieren $\rightarrow \frac{1}{2}(\mu^{(2)}(k'', \omega''; k', \omega') + \mu^{(2)}(k', \omega'; k'', \omega''))$).

Wegen der Zerlegung (40) lautet dann die Gleichung für die Feldamplituden in Fortführung von (33):

$$(50) \quad \varphi_{k\omega} = \varphi_{k\omega}^{(1)} + \varphi_{k\omega}^{(2)}$$

Darin ist $\varphi_{k\omega}^{(2)}$ aus (49) und das $\varphi_{k\omega}^{(1)}$ der ersten Ordnung einzusetzen:

$$(51) \quad \epsilon_{k\omega} \frac{\varphi_{k\omega}}{\sqrt{V}} = \left(1 - \frac{4\pi e^2}{m k^2} \int \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{k\omega - \omega} d^3v\right) \frac{\varphi_{k\omega}}{\sqrt{V}} = -\frac{1}{k^2} \iint \int d^3k' \frac{d\omega'}{2\pi} \mu^{(2)}(k-k', \omega-\omega'; k', \omega') \frac{\varphi_{k'\omega'} \varphi_{k-k', \omega-\omega'}}{\sqrt{V}} \left(1 - \frac{\delta(k)}{(2\pi)^3 V}\right)$$

Indem man den Ausdruck rechts nach den Amplituden $\varphi_{k\omega}^{(1)}$, den Lösungen der asymptotischen Dispersionsbeziehung $\epsilon_{k\omega} = 0$ (21), entwickelt (siehe (70)), kann man in dieser und höheren

Näherungen Abweichungen von der quasilinearen Dispersionsbeziehung prüfen.

Eine Gleichung für die spektrale Wellenenergiedichte könnte man durch Zerlegung bekommen aus:

$$(52) \quad \frac{d}{dt} \frac{k^2 \varphi(k,t) \varphi(k,t)}{(2\pi)^3 V} = \frac{d}{dt} \iint \frac{d\omega' d\omega''}{(2\pi)^2} \frac{k^2 \varphi_{k\omega'} \varphi_{k\omega''}}{8\pi (2\pi)^3 V} e^{-i(\omega'+\omega'')t} =$$

$$(53) \quad = -i \iint \frac{d\omega' d\omega''}{(2\pi)^2} (\omega'+\omega'') e^{-i(\omega'+\omega'')t} \frac{k^2}{8\pi (2\pi)^3 V} \cdot$$

$$\cdot (\varphi_{k\omega'}^{(\alpha)} \varphi_{k\omega''}^{(\alpha)} + \varphi_{k\omega'}^{(\alpha)} \varphi_{k\omega''}^{(\beta)} + \varphi_{k\omega'}^{(\beta)} \varphi_{k\omega''}^{(\alpha)} + \varphi_{k\omega'}^{(\beta)} \varphi_{k\omega''}^{(\beta)} + \dots)$$

Dabei werde die gesamte Wellenamplitude (51) nach quasilinearen Amplituden $\varphi_{k\omega}^{(\alpha)}$ entwickelt gedacht - so wie in (70) bis einschließlich des Anteils dritter Ordnung. In (53) ist diese Entwicklung nur bis zu Gliedern getrieben, die quadratisch in den Amplituden sind.

Bei Phasenmittelung mit Vernachlässigung höherer Korrelationen (Kap. III) sind die Glieder in (53) mit ungerader Zahl der Amplituden von höherer Ordnung klein.

Der Ausdruck für den "Wellenzerfall": $\frac{\partial}{\partial t} \frac{|\varphi^{(\beta)}(k,t)|^2}{(2\pi)^3 V}$ ist proportional $|\mu^{(2)}|^2 \delta(\text{Re}(\omega_u - \omega_{k'} - \omega_{k''}))$ (vgl. [5]). Er ist nach [5] schon magnetohydrodynamisch begründbar (wie in [2] abgegeben). Die quasilineare Dispersionsbeziehung (Anhang 1) erlaubt aber nicht zugleich:

$$(54) \quad \text{Re } \omega_{k'} + \text{Re } \omega_{k''} = \text{Re } \omega_k \quad \text{und} \quad k' + k'' = k$$

Daher gibt die zweite Ordnung in der angegebenen Näherung der Gleichung (53) nur den schon aus der QT bekannten Beitrag. Erst das nächste Entwicklungsglied in der Potentialgleichung, das proportional drei quasilinearen Amplituden ist, verschwindet hier nicht. Es wird im nächsten

Kapitel zusammen mit den gleich wichtigen Beiträgen der dritten Ordnung berechnet.

3.) Im folgenden soll der Energiesatz für die Zusatzausdrücke der zweiten Ordnung gezeigt werden, also die Gleichung (26) für die Zusätze aus (46) und (49):

$$(55) \int \frac{m}{2} \omega^2 \frac{\partial (f_0^{\text{II}} - \hat{f}_0^{\text{I}})}{\partial t} d^3v + \frac{e}{8\pi} \int d^3k k^2 \frac{\varphi(k,t)}{(2\pi)^3 V} \frac{\partial}{\partial t} (\varphi(k,t) - \varphi^{(1)}(k,t)) = 0$$

Daß die hier subtrahierten Glieder zusammen Null sind, wird genauso wie in (29) - (32), (34), (35) berechnet. (Das gesamte Potential besteht aber jetzt nach (50) aus zwei Anteilen - anders als nach (33)).

Es ergibt sich:
$$\int \frac{m}{2} \omega^2 \frac{\partial}{\partial t} (f_0^{\text{II}} - \hat{f}_0^{\text{I}}) d^3v =$$

$$(56) = -\left(\frac{e}{m}\right)^3 i \iiint \iiint d^3k d^3k' d^3k'' \frac{d\omega d\omega' d\omega''}{(2\pi)^3} \varphi_{k\omega} \varphi_{k'\omega'} \varphi_{k''\omega''} \left(1 - \frac{\delta(k+k'+k'')}{(2\pi)^3 V}\right) \cdot \frac{\delta(k+k'+k'')}{(2\pi)^3 V} \int d^3v \frac{m}{2} \omega^2 k^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{1}{(k'+k'')\omega - \omega' - \omega''} k' \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{k''\omega - \omega''} k'' \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \right]$$

$= M_2$

und durch partielle Integration:

$$(57) = -\frac{e^3}{m^2} M_2 \frac{\delta(k+k'+k'')}{(2\pi)^3 V} \int d^3v \frac{k\omega}{(k'+k'')\omega - \omega' - \omega''} k' \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{k''\omega - \omega''} k'' \frac{\partial f_0}{\partial \omega}$$

$$(58) = \frac{e^3}{m^2} M_2 \frac{\delta(k+k'+k'')}{(2\pi)^3 V} \int d^3v \frac{k'' \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{k''\omega - \omega''} \underbrace{k' \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k\omega}{(k'+k'')\omega - \omega' - \omega''}}$$

$$\frac{(k'k) [(k'+k'')\omega - \omega' - \omega''] - (k\omega) [k'(k'+k'')] }{((k'+k'')\omega - \omega' - \omega'')^2} = \frac{-(\omega'+\omega'') k k'}{((k'+k'')\omega - \omega' - \omega'')^2}$$

durch Vergleich mit (48) folgt für (58):

$$(59) = \frac{1}{4\pi} \iiint d^3k \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} \cdot (i\omega') \cdot k^2 \frac{\varphi_{k\omega} \varphi_{k'\omega'}}{(2\pi)^3 V} e^{-i(\omega+\omega')t} =$$

$$(60) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3k k^2 \frac{\varphi(-k,t) \frac{\partial}{\partial t} \varphi^{(2)}(k,t)}{(2\pi)^{-3} V}$$

wie nach (55) zu verlangen ist.

4.) Die Gleichungen III. Ordnung lassen sich genauso aus den Fluktuationen f_2 der zweiten Ordnung berechnen, wie die Gleichungen der zweiten Ordnung aus den Fluktuationen $f_1^{(I)}$ der ersten Ordnung. Wenn man nämlich im nichtlinearen Glied rechts in (1b) für das dortige $f_1^{(III)}$ die in der zweiten Ordnung der Rechnung gewonnenen Fluktuationsanteile f_2 einsetzt, bekommt man Fluktuationen III. Ordnung in den Wellenamplituden (d.h. proportional einem Dreierprodukt von Wellenamplituden).

Man erhält (mit den Fluktuationen III. Ordnung wie in Anhang 4) zusammen mit den früheren Ergebnissen (24) bzw. (14) und (46) als Gleichung für die Verteilungsfunktion:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} = & -i \iiint d^3k_1 \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2} e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} \frac{\varphi_{k_1 \omega_1} \varphi_{k_2 \omega_2}}{(2\pi)^{-3} V} k_1 \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial \omega} (k_1, \omega_1) + \\ (61) & + i \iiint \iiint d^3k_1 d^3k_2 \frac{\prod_1^3 d\omega_i}{(2\pi)^3} e^{-i(\sum_1^3 \omega_i)t} \frac{\varphi_{k_1 - k_2, \omega_1} \varphi_{k_2, \omega_2} \varphi_{k_2 \omega_2}}{(2\pi)^{-3} V} (k_1 + k_2) \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial \omega} (k_1, \omega_1; k_2, \omega_2) - \\ & - i \iiint \iiint \iiint \frac{\prod_1^4 d\omega_i}{(2\pi)^4} e^{-i(\sum_1^4 \omega_i)t} \frac{\varphi_{k_1 - k_2 - k_3, \omega_1} \varphi_{k_2, \omega_2} \varphi_{k_3, \omega_3} \varphi_{k_3 \omega_3}}{(2\pi)^{-3} V} (k_1 + k_2 + k_3) \frac{\partial \chi^{(3)}}{\partial \omega} \cdot \left(1 - \frac{\delta(k_1 + k_2)}{(2\pi)^{-3} V}\right) \end{aligned}$$

Da nach den Voraussetzungen $\langle -\nabla \varphi(u, t) \rangle = 0$ sein soll, ist stets $k \varphi_{k\omega} \Big|_{k=0} = 0$. Dadurch sind gegenüber der Darstellung (46) noch Faktoren mit δ -Funktionen einzusparen.

Folgende Abkürzungen sind verwendet:

$$(62) \quad \chi^{(1)}(k_1, \omega_1) := \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{1}{k_1 \omega_1 - \omega_1} k_1 \frac{\partial f_0}{\partial \omega}$$

$$(63) \quad \chi^{(n+1)}(k_1, \omega_1; \dots; k_n, \omega_n; k_{n+1}, \omega_{n+1}) := \frac{\frac{e}{m}}{\left(\sum_1^{n+1} k_i\right)\omega - \sum_1^{n+1} \omega_i} k_{n+1} \frac{\partial \chi^{(n)}}{\partial \omega}$$

Aus der Poissongleichung folgt mit den früheren Ergebnissen (33) und (49) - in Erweiterung der Gleichung (51) der zweiten Ordnung:

$$(64) \quad \frac{\varphi_{k\omega}}{\sqrt{V}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\varphi_{k\omega}^{(i)}}{\sqrt{V}} = \frac{1}{k^2} \mu^{(1)}(k, \omega) \frac{\varphi_{k\omega}}{\sqrt{V}} -$$

$$- \frac{1}{k^2} \iint d^3k_1 \frac{d\omega_1}{2\pi} \mu^{(2)}(k_1, \omega_1; k-k_1, \omega-\omega_1) \frac{\varphi_{k_1\omega_1} \varphi_{k-k_1, \omega-\omega_1}}{\sqrt{V}} +$$

$$+ \frac{1}{k^2} \iiint d^3k_1 d^3k_2 \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2} \mu^{(3)}(k_1, \omega_1; k_2, \omega_2; k-k_1-k_2, \omega-\omega_1-\omega_2) \cdot$$

$$\cdot \left(1 - \frac{d(k_1+k_2)}{(2\pi)^3 V}\right) \frac{\varphi_{k_1\omega_1} \varphi_{k_2\omega_2} \varphi_{k-k_1-k_2, \omega-\omega_1-\omega_2}}{\sqrt{V}}$$

mit den Abkürzungen:

$$\mu^{(1)}(k, \omega) \text{ nach (34)} = \frac{4\pi e^2}{m} \int \frac{k_1 \frac{\partial f_0}{\partial \omega_1}}{k_1 \omega - \omega_1} d^3v = 4\pi m \int \chi^{(1)} d^3v$$

$$(65) \quad \mu^{(2)}(k_1, \omega_1; k_2, \omega_2) \text{ nach (49)} = \frac{e}{m} \frac{4\pi e^2}{m} \int d^3v \frac{k_2 (k_1+k_2) \cdot k_1 \frac{\partial f_0}{\partial \omega_1}}{((k_1+k_2)\omega - \omega_1 - \omega_2)^2 (k_1 \omega - \omega_1)} =$$

$$= 4\pi m \int \chi^{(2)} d^3v$$

$$\mu^{(3)}(k_1, \omega_1; k_2, \omega_2; k_3, \omega_3) := \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{4\pi e^2}{m} \int d^3v \frac{k_3 (k_1+k_2+k_3)}{((k_1+k_2+k_3)\omega - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3)^2 ((k_1+k_2)\omega - \omega_1 - \omega_2)} \cdot$$

$$\cdot k_2 \frac{\partial}{\partial \omega_1} \frac{1}{k_1 \omega - \omega_1} k_1 \frac{\partial f_0}{\partial \omega_1} = 4\pi m \int \chi^{(3)} d^3v$$

Damit stehen die Gleichungen III. Ordnung explizit da bis auf eine Gleichung für die spektrale Wellenenergiedichte, die z.B. in der Form (53) dazuzudenken ist mit den Potentialanteilen aus (64).

Der Nachteil der in zweiter und dritter Ordnung erhaltenen Gleichungen gegenüber den quasilinearen (23), (24) besteht aber darin, daß in ihnen statt der spektralen Wellenenergie-dichte noch die frequenzabhängigen Amplituden stehen.

Um die Form von kinetischen Gleichungen zu erhalten, empfiehlt sich daher wie in [5] die Entwicklung nach Amplituden, die die Dispersionsbeziehung der ersten Ordnung erfüllen (siehe Kap. III).

Der **E n e r g i e s a t z** für die Zusätze dritter Ordnung wird analog wie in zweiter Ordnung bewiesen. Dabei werden die Abkürzungen (63) und (65) benützt.

Statt der Umformung des Ausdrucks (58) der zweiten Ordnung muß umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
 m M_3 & \frac{\delta(k+k'+k''+k''')}{(2\pi)^3 V} \int d^3v \chi^{(2)}(k, \omega; k', \omega') k'' \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k'' \omega}{(k+k'+k'')\omega - \omega - \omega' - \omega''} = \\
 & \frac{k'' k''' [(k'+k''+k''')\omega - \omega - \omega' - \omega''] - k'' \omega [k''(k+k'+k'')] }{((k+k'+k'')\omega - \omega - \omega' - \omega'')^2} \\
 & = m M_3 \frac{\delta(k+k'+k''+k''')}{(2\pi)^3 V} \int d^3v \chi^{(2)} \frac{k'' k''' (-k'' \omega - \omega - \omega' - \omega'') + k'' \omega (k'' \cdot k''')}{((k+k'+k'')\omega - \omega - \omega' - \omega'')^2} = \\
 & = m M_3 \frac{\delta(k+k'+k'')}{(2\pi)^3 V} \int d^3v \chi^{(2)}(k, \omega; k', \omega') \frac{-k'' k''' (\omega + \omega' + \omega'')}{((k+k'+k'')\omega - \omega - \omega' - \omega'')^2} \\
 (66) \quad & \text{nach (65)} = \frac{\omega + \omega' + \omega''}{4\pi e} \mu^{(3)}(k, \omega; k', \omega'; k'', \omega'')
 \end{aligned}$$

Daraus folgt wie in der zweiten Ordnung der Energiesatz.

Aus der Umrechnung (66) läßt sich noch folgende Beziehung zwischen $\mu^{(3)}$ und $\chi^{(2)}$ angeben:

$$(67) \quad \frac{-4\pi e}{\omega + \omega' + \omega''} \int d^3v \chi^{(2)}(k, \omega; k', \omega') k'' \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{(k+k'+k'')\omega}{(k+k'+k'')\omega - \omega - \omega' - \omega''} = \mu^{(3)}(k, \omega; k', \omega'; k'', \omega'')$$

Diese Beziehung ist also der Ausdruck des Energiesatzes.

Ersetzt man $\chi^{(2)}$ durch $\chi^{(1)}$ und $\mu^{(3)}$ durch $\mu^{(2)}$ und ebenso die entsprechenden Variablen, so erhält man die Beziehung, die bereits durch die Umrechnung von (58) in (59) für den Energiesatz II. Ordnung bewiesen ist.

5.) Die Gleichungen (61) - (65) lassen sich auch für beliebige höhere Ordnungen anschreiben.

Die Gleichungen (n+1)-ter Ordnung sind aus denen n-ter Ordnung genauso abzuleiten, wie die Gleichungen der zweiten und dritten Ordnung aus den vorhergehenden.

Wie aus der zweiten Ordnung und Anhang 4, 5 hervorgeht,

treten die $\chi^{(n)}(k_1, \omega_1; \dots; k_n, \omega_n)$ immer zusammen mit dem Faktor $\prod_{i=2}^{n-1} \left(1 - \frac{\delta(k_1 + k_2 + \dots + k_n)}{(2\pi)^3 V}\right)$ auf, ebenso die Größen $\mu^{(n)}$

für $n \geq 3$. Der Energiesatz der n-ten Ordnung kann nach dem bisherigen Schema bewiesen werden. Er stützt sich auf die Gültigkeit einer Beziehung ähnlich (67), die $\mu^{(n+1)}$ mit $\chi^{(n)}$ verbindet. Der Beweis ist sofort erbracht, wenn man beachtet, daß ähnlich wie in (66) gilt:

$$(68) \quad 4\pi e \int d^3v \chi^{(n)}(k_1, \omega_1; \dots; k_n, \omega_n) \frac{k_{n+1}(k_1 + k_2 + \dots + k_{n+1})}{((k_1 + k_2 + \dots + k_{n+1})\omega - \omega_1 - \omega_2 - \dots - \omega_{n+1})^2} = \\ = \mu^{(n+1)}(k_1, \omega_1; \dots; k_n, \omega_n; k_{n+1}, \omega_{n+1})$$

III.) Entwicklung der Lösung III. Ordnung nach Amplituden
quasilinearer Näherung bei Vernachlässigung von
Korrelationen höherer Ordnung

1.) Die erhaltenen Abweichungen von der QT können besser übersehen werden, wenn man sie nach den asymptotischen Lösungen der quasilinearen Dispersionsbeziehung (wie in der QT, aber mit der Verteilungsfunktion III. Ordnung):

$\epsilon_{k\omega} = 0$, nämlich $\omega \approx \omega_k$ bzw. dem Potential

$$(69) \quad \varphi_{k\omega}^{(\alpha)} := \varphi_k^{(\alpha)} \frac{i}{\omega - \omega_k}$$

entwickelt.

Durch die Entwicklung von (64) bis zur dritten Ordnung in diesen quasilinearen Amplituden folgt für das Potential (siehe [5]):

$$(70) \quad \begin{aligned} \varphi_{k\omega} &\approx \varphi_{k\omega}^{(\alpha)} + \varphi_{k\omega}^{(\beta)} + \varphi_{k\omega}^{(\gamma)} + \varphi_{k\omega}^{(\delta)} := \\ &= \varphi_{k\omega}^{(\alpha)} - \frac{1}{\epsilon_{k\omega} k^2} \int d^3 k_1 d^3 k_2 \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2} \mathcal{M}^{(2)} \varphi_{k_1 \omega_1}^{(\alpha)} \varphi_{k_2 \omega_2}^{(\alpha)} \frac{\delta(k - k_1 - k_2)}{-i(\omega - \omega_1 - \omega_2)} + \\ &+ \frac{2}{\epsilon_{k\omega} k^2} \int d^3 k_1 d^3 k_2 \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2} \mathcal{M}^{(2)} \varphi_{k_1 \omega_1}^{(\alpha)} \frac{\delta(k - k_1 - k_2)}{-i(\omega - \omega_1 - \omega_2)} \cdot \\ &\cdot \left\{ \frac{1}{k_2^2 \epsilon_{k_2 \omega_2}} \cdot \int d^3 k'_1 d^3 k'_2 \frac{d\omega'_1 d\omega'_2}{(2\pi)^2} \mathcal{M}^{(2)} \varphi_{k'_1 \omega'_1}^{(\alpha)} \varphi_{k'_2 \omega'_2}^{(\alpha)} \frac{\delta(k - k_1 - k_2)}{-i(\omega - \omega_1 - \omega_2)} \right\} + \\ &+ \frac{1}{\epsilon_{k\omega} k^2} \int d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 k_3 \frac{d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3}{(2\pi)^3} \mathcal{M}^{(3)} \varphi_{k_1 \omega_1}^{(\alpha)} \varphi_{k_2 \omega_2}^{(\alpha)} \varphi_{k_3 \omega_3}^{(\alpha)} \cdot \\ &\cdot \frac{\delta(k - k_1 - k_2 - k_3)}{\omega - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3} \frac{i}{(2\pi)^3 V} \left(1 - \frac{\delta(k_1 + k_2)}{(2\pi)^3 V} \right) \end{aligned}$$

Für $\mathcal{M}^{(2)}$ muß hier die symmetrische Form (nach (49) ff.) genommen werden.

(70) wird in (61) eingesetzt. Es werden nur Glieder bis zu vier Amplituden behalten. Nur die Zusatzausdrücke gegenüber der QT sind zunächst explizit entwickelt:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_0}{\partial t} &= -i \left(\frac{e}{m}\right)^2 \int d^3k \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2} \frac{\varphi_{-k\omega_2} \varphi_{k\omega_1}}{(2\pi)^{-3} V} e^{-i(\omega_1+\omega_2)t} k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{k\omega - \omega_1} + \\
 &+ i \left(\frac{e}{m}\right)^3 \int d^3k_1 d^3k_2 \frac{d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3}{(2\pi)^3} \frac{\varphi_{-k_1-k_2, \omega_3}^{(\alpha)} \varphi_{k_1, \omega_1}^{(\alpha)} \varphi_{k_2, \omega_2}^{(\alpha)}}{(2\pi)^{-3} V} e^{-i(\omega_1+\omega_2+\omega_3)t} \cdot \\
 &\quad \cdot \left[\frac{(-k_3)}{k_3 = -k_1 - k_2} \left| \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_2}{(k_1+k_2)\omega - \omega_1 - \omega_2} \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_1 \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{k_1\omega - \omega_1} \right] + \right. \\
 (71) \quad &+ i \left(\frac{e}{m}\right)^3 \int d^3k_1 d^3k_2 \frac{d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3}{(2\pi)^3} \frac{\varphi_{-k_1-k_2, \omega_3}^{(\beta)} \varphi_{k_1, \omega_1}^{(\alpha)} \varphi_{k_2, \omega_2}^{(\alpha)}}{(2\pi)^{-3} V} e^{-i(\omega_1+\omega_2+\omega_3)t} \cdot \\
 &\quad \cdot 3 \left[\frac{(-k_3)}{k_3 = -k_1 - k_2} \left| \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_2}{(k_1+k_2)\omega - \omega_1 - \omega_2} \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_1 \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{k_1\omega - \omega_1} \right]_{\text{sym.}} \right. \\
 &- i \left(\frac{e}{m}\right)^4 \int d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3 \frac{d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 d\omega_4}{(2\pi)^4} \frac{\varphi_{-k_1-k_2-k_3, \omega_4}^{(\alpha)} \varphi_{k_1, \omega_1}^{(\alpha)} \varphi_{k_2, \omega_2}^{(\alpha)} \varphi_{k_3, \omega_3}^{(\alpha)}}{(2\pi)^{-3} V} \cdot \\
 &\quad \cdot \exp\left(-i\left(\sum_1^4 \omega_i\right)t\right) \left(1 - \frac{\delta(k_1+k_2)}{(2\pi)^{-3} V}\right) \cdot \\
 &\quad \cdot \left[(k_1+k_2+k_3) \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_3}{(k_1+k_2+k_3)\omega - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3} \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_2}{(k_1+k_2)\omega - \omega_1 - \omega_2} \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_1 \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{k_1\omega - \omega_1} \right]
 \end{aligned}$$

Im dritten Summanden muß der Faktor mit dem angehängten **sym.**

bezüglich der (k_i, ω_i) ($i=1,2,3$) symmetrisch genommen werden.

Um alle schnell von der Zeit abhängigen Phasenfaktoren loszuwerden, werden wie in [5] die Phasen gemittelt ($\langle \dots \rangle$).

(Ein neues, weniger einschränkendes Verfahren stammt von Dupree - s.S.77).

Dabei werden höhere "Momente" vernachlässigt von der Bauart:

$$\int d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3 d^3k_4 A(k_1, k_2, k_3, k_4) \frac{\varphi_{k_1}^{(\alpha)} \varphi_{k_2}^{(\alpha)} \varphi_{k_3}^{(\alpha)} \varphi_{k_4}^{(\alpha)}}{(2\pi)^{-3} V} \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) -$$

$$- 3 \int d^3k_1 d^3k_2 A(k_1, k_1, k_2, k_2) \frac{\varphi_{k_1}^{(\alpha)} \varphi_{k_1}^{(\alpha)}}{(2\pi)^{-3} V} \cdot \frac{\varphi_{k_2}^{(\alpha)} \varphi_{k_2}^{(\alpha)}}{(2\pi)^{-3} V}$$

(der Ausdruck A ist in den k_i ($i=1,2,3,4$) symmetrisch vorausgesetzt), d.h. es werden Ortsmittlungen $\langle \dots \rangle$, die mehr als zwei ortsabhängige Faktoren enthalten, angenähert durch die Summe der möglichen Ortsmittlungen über je zwei Faktoren.

Ein Beispiel: Die Energiedichte in der Näherung durch

quasilineare Amplituden: $E := \frac{\mathcal{E}^2(\mathbf{r}, t)}{8\pi} \Big|_{\text{qu. lin.}}$ besitzt das

örtliche Mittel: $\langle E \rangle = \frac{1}{8\pi} \int d^3k \frac{\varphi(-k, t) \varphi(k, t)}{(2\pi)^{-3} V} k^2$.

Ihr Quadrat im Mittel $\langle E^2 \rangle$ wird angenähert durch:

$$\langle E^2 \rangle = 3 \langle E \rangle^2$$

Das heißt, die Momente (von der oben angegebenen Form): $\langle E^2 \rangle - 3 \langle E \rangle^2 = \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle - 2 \langle E \rangle^2$

werden vernachlässigt.

Dafür darf also etwa E im quadratischen Mittel nicht um Größenordnungen von seinem Mittelwert abweichen. Diese zusätzliche Bedingung (zu (15), (16), die üblicherweise in der QT gefordert werden) macht sich erst bei in den Wellenamplituden nichtlinearen Gliedern bemerkbar. In der QT selbst sind diese Abweichungen noch von den dortigen kinetischen Gleichungen entkoppelt.

Allgemein ist hinreichende statistische Unabhängigkeit der Phasen der Amplituden mit verschiedenem k zu fordern, damit die Phasenmittlung sinnvoll ist.

Aber statt z.B. die Momente der Bauart $\langle E^2 \rangle - 3 \langle E \rangle^2$ zu vernachlässigen, könnte man auch eine Gleichung dafür aufstellen und erst entsprechende Dreiermomente vernachlässigen. Dadurch wären Viererkorrelationen der quasilinearen Amplituden berücksichtigt.

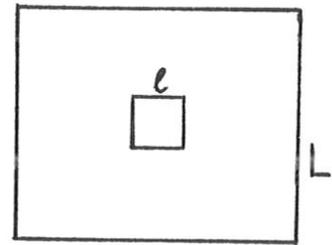
Vor den Viererkorrelationen wären natürlich noch die Dreierkorrelationen der quasilinearen Amplituden zu beachten und als neue Variable in dem Gleichungssystem einzuführen. In einigen Fällen kann man aber höhere Korrelationen (und daher auch die hier definierten höheren Momente) überhaupt nicht mehr als klein ansehen und nach einer endlichen Anzahl abbrechen: Bei monochromatischen Wellen oder bei räumlich stark konzentrierten Wellenpaketen.

Ein Beispiel für letzteres: In einem Volumen V_0 , das periodisch fortgesetzt gedacht wird, befinde sich ein Wellenpaket der mittleren Energiedichte E_0 .

Wenn es auf ein Volumen $\ell^3 \ll V_0 \equiv L^3$

konzentriert ist, ist die mittlere

Energiedichte in V_0 : $\langle E \rangle \approx E_0 \left(\frac{\ell}{L}\right)^3$



und für das Zweiermoment $\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle \approx 2 \langle E \rangle^2$

erhält man:

$$\approx E_0^2 \left[3 \left(\frac{\ell}{L}\right)^3 - 3 \left(\frac{\ell}{L}\right)^6 \right] \approx 3 E_0^2 \left(\frac{\ell}{L}\right)^3 \quad \gg 3 E_0^2 \left(\frac{\ell}{L}\right)^6 \approx 3 \langle E \rangle^2$$

Es ist also keineswegs gegen $3 \langle E \rangle^2$ zu vernachlässigen.

Die QT wäre vielleicht dann noch eine gute Näherung,

wenn $\epsilon_1 \ll \left(\frac{\ell}{L}\right)^3$ - und $\epsilon_1 \ll 1$ ist (für ϵ_1 siehe (16) ff. und Anhang 7).

Bei einem räumlich angenähert homogenen System sollten die höheren Korrelationen bei geringen Abweichungen vom Thermischen Gleichgewicht klein bleiben [8, 16]. Sie können vernachlässigt werden, wenn man sich auf Korrekturen niedriger Ordnung beschränkt.

Durch die Phasenmittelung ^{4.4} erhält man aus (71):

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{\partial f_0}{\partial t} \right\rangle &= -i \left(\frac{e}{m}\right)^2 \int d^3k \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2} \left\langle \frac{\varphi_{k_1 \omega_1} \varphi_{k_2 \omega_2}}{(2\pi)^{-3} V} \right\rangle \left\langle k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{k\omega - \omega_1} \right. \\
 &- \left(\frac{e}{m}\right)^3 \text{Im} \int d^3k d^3k_1 d^3k_2 \frac{\delta(k - k_1 - k_2)}{k^2 \varepsilon_{k, \omega_{k_1} + \omega_{k_2}}} \mu^{(2)}(k_1, \omega_{k_1}; k_2, \omega_{k_2}) \cdot \\
 &\cdot \frac{|\varphi^{(\alpha)}(k_1, t)|^2}{(2\pi)^{-3} V} \cdot \frac{|\varphi^{(\alpha)}(k_2, t)|^2}{(2\pi)^{-3} V} \cdot \left\langle k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{(k_1 + k_2)\omega + \omega_{-k_1} + \omega_{-k_2}} \left(k_2 \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_2}{k_2 \omega + \omega_{-k_2}} + k_1 \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_1}{k_1 \omega + \omega_{-k_1}} \right) \right. \\
 &+ \left. 2 k_1 \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{k_1 \omega - \omega_{k_1} - 2i\gamma_{k_2}} \left(k_2 \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k}{k\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}} - k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_2}{k_2 \omega + \omega_{-k_2}} \right) \right\rangle \frac{\partial f_0}{\partial \omega} + \\
 (72) \quad &+ \left(\frac{e}{m}\right)^4 \text{Im} \int d^3k_1 d^3k_2 \frac{|\varphi^{(\alpha)}(k_1, t)|^2}{(2\pi)^{-3} V} \cdot \frac{|\varphi^{(\alpha)}(k_2, t)|^2}{(2\pi)^{-3} V} \cdot \\
 &\cdot k_1 \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_2}{k_1 \omega - \omega_{k_1} - 2i\gamma_{k_2}} \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{(k_1 - k_2)\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}} \cdot \\
 &\cdot \left(k_1 \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_2}{k_2 \omega + \omega_{-k_2}} - k_2 \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_1}{k_1 \omega - \omega_{k_1}} \right) \frac{\partial f_0}{\partial \omega}
 \end{aligned}$$

Der erste Ausdruck ist gegenüber der QT durch zusätzliche Potentialanteile erweitert. Bis auf Größen, die um etwa $\left(\frac{\gamma_t}{\omega_p}\right)^2$ kleiner sind, kann man ihn annähern durch (vgl. (25')):

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{e}{m}\right)^2 \int d^3k k \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \left[\delta(k\omega - k\omega_{k_1}) + \frac{(P)}{2(k\omega - k\omega_{k_1})^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] \cdot \right. \\
 (72') \quad &\left. \left\langle \frac{k \varphi(-k, t) \varphi(k, t)}{(2\pi)^{-3} V} \right\rangle k \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \right\}
 \end{aligned}$$

Der Operator $\frac{\partial}{\partial t}$ soll hier nur auf die Amplituden wirken, nicht auf die Verteilungsfunktion.

Der zweite Ausdruck rührt von den Fluktuationen zweiter Ordnung her. Der erste Summand in der geschweiften Klammer entspricht bei der Energiebilanz dem in der Rechnung zweiter Ordnung besprochenen "Wellenzerfall". Dessen Beitrag zur Amplitudenänderung ist vernachlässigbar. Daher beschreibt dieser Summand nur einen Energieaustausch der Teilchen untereinander.

Der zweite Summand (in der geschweiften Klammer) braucht wie

der erste nicht an dem Pol $\frac{1}{\epsilon_{k_1, \omega_{k_1} + \omega_{k_2}}} \approx \frac{1}{\frac{\partial \epsilon_{k\omega}}{\partial \omega} (\omega - \omega_k)} \Big|_{\omega = \omega_{k_1} + \omega_{k_2}}$ ausgewertet zu werden, da für das Residuum die Bedingungen (54) nicht erfüllt sind. Der Hauptwert kann vernachlässigt werden, da er einen Beitrag kleinerer Größenordnung gibt (so wie der in (25')).

Wie im ersten Ausdruck in (72) kann man auch in den restlichen zum Grenzwert $\frac{\gamma_k}{\omega_p} \rightarrow 0$ übergehen und die Pole als Residuum und Hauptwert auswerten. Dabei braucht nur jeweils ein Pol so ausgewertet zu werden.

Um ein vollständiges kinetisches Gleichungssystem zu bekommen, bräuchte man zwar zu (72) nur die Gleichung für die spektrale Wellenenergiedichte in quasilinearer Näherung dazuzunehmen (formal dieselbe wie Gl. (23)), doch ist der

Übergang zur Variablen $\frac{|\varphi(k,t)|^2}{(2\pi)^{-3}V}$ statt $\frac{|\varphi^{(k)}(k,t)|^2}{(2\pi)^{-3}V}$

zweckmäßiger, wie noch gezeigt wird.

Im Gegensatz zu [5] ist hier der Energiesatz für die Gleichungen exakt bewiesen, aus denen näherungsweise das vollständige kinetische Gleichungssystem folgt (und für das er auch noch gezeigt werden kann - Anhang 9). Es bliebe aber das H-Theorem zu zeigen, das bisher nur für die QT untersucht ist [8].

Dadurch, daß von vorneherein die Vlasovgleichung aufgespalten ist, hat man sich das wenig durchschaubare Verfahren von [5] sparen können, mit dem die (räumlich homogenen)

Zusätze zur gemittelten Verteilungsfunktion in den höheren Ordnungen aus der dort berechneten Verteilungsfunktion (samt Fluktuationen) herausgesucht werden - was also strenggenommen nichts mit "Renormierung" [18] zu tun hat, zumindest kann man diese nach der hier durchgeführten Rechnung harmlos als die Rückwirkung der Fluktuationen auf die gemittelte Verteilungsfunktion verstehen.

Das Ergebnis (72) mit (72') stimmt im wesentlichen mit dem von [5], Gl. (65) und [21] überein. Die Gleichung für die Amplituden wird jetzt noch genauer untersucht als dort. Dadurch kann man sie auch noch mit anderen Arbeiten vergleichen.

2.) Der Ausdruck (72') müßte mit Hilfe von (70) noch genauer berechnet werden. Die dabei anfallenden umständlichen Integrationen kann man umgehen, wenn man statt der quasilinearen die gesamte spektrale Wellenenergiedichte als Variable einführt. Die quasilineare wird dabei schließlich zu eliminieren sein.

In der Gleichung für die spektrale Wellenenergiedichte bekommt man mehrere Beiträge, wenn man die Zerlegung (70) benutzt. Wie in der Gleichung für die Verteilungsfunktion sollen die Phasen gemittelt und nur die Glieder einschließlich behalten werden, die quadratisch in der Wellenenergiedichte sind.

Am einfachsten ist der Beitrag des Amplitudenteils $\varphi^{(d)}(k,t)$ zur Änderung der gesamten spektralen Wellenenergiedichte zu übersehen:

$$2 \operatorname{Re} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \frac{\varphi^{(\alpha)}(-k,t) \varphi^{(d)}(k,t)}{(2\pi)^{-3} V} \right\rangle =$$

$$(73) = 2 \operatorname{Re} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \varphi^{(\alpha)}(-k,t) \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{\epsilon_{\omega\omega} (\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k-k_1-k_2})} \left(1 - \frac{\delta(k_1+k_2)}{(2\pi)^{-3} V} \right) \right\rangle$$

$$\cdot \frac{1}{k^2} \frac{\varphi_{k_1}^{(\alpha)} \varphi_{k_2}^{(\alpha)} \varphi_{k-k_1-k_2}^{(\alpha)}}{(2\pi)^{-3} V} \mu^{(3)}(k_1, \omega_{k_1}; k_2, \omega_{k_2}, k-k_1-k_2, \omega_{k-k_1-k_2}) \right\rangle =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\varphi_{k_1}^{(\alpha)} \varphi_{k_2}^{(\alpha)}}{(2\pi)^{-3} V} e^{-i(\omega_k t)} \frac{1}{k^2} \cdot \int d^3 k_1 \frac{\varphi_{k_1}^{(\alpha)} \varphi_{k_2}^{(\alpha)}}{(2\pi)^{-3} V} \frac{i}{\epsilon_{k\omega} \cdot (\omega - \omega_{k_1} - 2i\gamma_{k_1})} \right]$$

$$\cdot 2 \left[\mu^{(3)}(k, \omega_k; -k_1, \omega_{k_1}; k_2, \omega_{k_2}) + \mu^{(3)}(-k_1, \omega_{k_1}; k, \omega_k; k_2, \omega_{k_2}) \right]$$

$$= \text{Im} \int d^3 k_1 \left(\mu^{(3)}(k, \omega_k; -k_1, \omega_{k_1}; k_2, \omega_{k_2}) + \mu^{(3)}(-k_1, \omega_{k_1}; k, \omega_k; k_2, \omega_{k_2}) \right)$$

$$(74) \cdot \frac{1}{k^2} \frac{\partial \epsilon_{k\omega}}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_k} \cdot \frac{|\varphi_{k_1}^{(\alpha)}|^2}{(2\pi)^{-3} V} \cdot \frac{|\varphi_{k_2}^{(\alpha)}|^2}{(2\pi)^{-3} V} \frac{1}{2\gamma_{k_1}} \left[(2\gamma_{k_1} + 2\gamma_{k_2}) e^{\int \gamma_{k_1} + \gamma_{k_2} dt} \frac{\partial \gamma_{k_1} dt}{-2\gamma_{k_1} e} \right]$$

Ebenso läßt sich der Beitrag von $\varphi^{(1)}(k, t)$ berechnen (Anhang 8.2). Nur in diesem Glied treten, verschachtelt, die in der zweiten Ordnung berechneten Amplitudenanteile auf. Es ist etwa von gleicher Größenordnung wie (74), wie sich herausstellen wird.

Wegen der Bedingungen (54) tragen dagegen die aus der Rechnung zweiter Ordnung folgenden Amplituden $\varphi^{(2)}(k, t)$ sehr wenig bei.

Zusammengefaßt läßt sich dann die Gleichung für die spektrale Wellenenergiedichte schreiben als:

$$(75) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \ln \left\{ \frac{|\varphi(k, t)|^2}{(2\pi)^{-3} V} \right\} = 2\gamma_k + \frac{2}{k^2} \text{Im} \int d^3 k_1 \frac{1}{\frac{\partial \epsilon_{k\omega}}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_k}} \cdot \left[2 \mu^{(2)}(k_1, \omega_{k_1}; k - k_1, \omega_k + \omega_{k_1}) \frac{1}{(k - k_1)^2 \epsilon_{k - k_1, \omega_k + \omega_{k_1}}} \mu^{(2)}(-k_1, \omega_{k_1}; k, \omega_k) + \mu^{(3)}(k, \omega_k; -k_1, \omega_{k_1}; k_2, \omega_{k_2}) + \mu^{(3)}(-k_1, \omega_{k_1}; k, \omega_k; k_2, \omega_{k_2}) \right] \cdot \frac{|\varphi^{(\alpha)}(k_1, t)|^2}{(2\pi)^{-3} V}$$

Wenn man (wie auch in (72)) die $\frac{|\varphi^{(\alpha)}(k, t)|^2}{(2\pi)^{-3} V}$ durch $\frac{|\varphi(k, t)|^2}{(2\pi)^{-3} V}$ ersetzt, macht man einen weiteren geringen "Fehler" von der Größenordnung $\left(\frac{\gamma_k}{\omega_p}\right)^2$ bezüglich des Gliedes der QT (der

in Wirklichkeit die Größe des Amplitudenquadrates genauer berücksichtigt und im nächsten Abschnitt begründet wird). In [5] wird diese Gleichung erhalten bis auf einen hier unverständlichen Faktor β mehr bei $\mu^{(3)}$.

Wie in der Gleichung (72) für die Verteilungsfunktion können alle Pole im $\lim_{\frac{\gamma_k}{\omega_p} \rightarrow 0}$ betrachtet und in Hauptwert und Residuum zerlegt werden. Für den Integrationsweg über die Pole ist (wegen der analytischen Fortsetzbarkeit aus der oberen Halbebene nach (20) ff.) stets der gleiche Weg - unter den Polen - zu nehmen wie bei instabilen Wellen (für die $\gamma_k > 0$ ist).

3.) Bei der Entwicklung nach quasilinearen Amplituden mit Phasenmittelung sind nur Amplitudenanteile übriggeblieben, die aus einer ungeraden Anzahl quasilinearere Amplituden zusammengebaut sind. Man kann nun die Phasenmittelung schon in den einzelnen Amplituden durchführen, bevor eine Gleichung für ihr Quadrat berechnet wird, und für die gesamte Amplitude

einen Ansatz $\varphi(k,t) = \alpha_k(t) e^{-i \int \omega_k dt}$ (79) mit schwach zeitabhängigen Koeffizienten α_k versuchen.

Dadurch erhält man tatsächlich die Gleichungen (72) mit den angegebenen Vereinfachungen und (74), wenn dort schon

$$\frac{|\varphi^{(k)}(k,t)|^2}{(2\pi)^3 V} \quad \text{durch} \quad \frac{|\varphi(k,t)|^2}{(2\pi)^3 V} \quad \text{ersetzt ist (Anhang 6).}$$

In Anhang 10 wird weiter eine Änderung der Periode $\frac{2\pi}{\text{Re } \omega_k}$ der quasilinearen Amplituden durch den nichtlinearen Zusatz abgeschätzt. Diese Änderung ist bisher noch nicht beachtet, obwohl sie nach ihrer Größenordnung mit anderen hier erhaltenen Korrekturen durchaus zu vergleichen ist.

Die in diesem Kapitel gewonnene Gleichung für die Verteilungsfunktion nach (72) ff. ist:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} \approx \left(\frac{e}{m}\right)^2 \int d^3k \, k \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \left[(\pi \delta(k\omega) - \text{Re} \omega_k) + \frac{(P)}{2(k\omega) - \text{Re} \omega_k} \right] \frac{|\varphi(k,t)|^2}{(2\pi)^3 V} \right\} k \frac{\partial f_0}{\partial \omega}$$

$$- \left(\frac{e}{m}\right)^3 \int d^3k_1 d^3k_2 \frac{|\varphi(k_1,t)|^2}{(2\pi)^3 V} \frac{|\varphi(k_2,t)|^2}{(2\pi)^3 V} \text{Im} \frac{\mu^{(2)}(k_1, \omega_{k_1}; k_2, \omega_{k_2})}{(k_1 + k_2)^2 \varepsilon_{k_1 + k_2, \omega_{k_1} + \omega_{k_2}}}$$

$$(76) \quad \cdot \left[(k_1 + k_2) \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{(k_1 + k_2)\omega + \omega_{k_1} + \omega_{k_2}} \left(k_1 \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_2}{k_2\omega + \omega_{k_2}} + k_2 \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_1}{k_1\omega + \omega_{k_1}} \right) + \right. \\ \left. + 2k_1 \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{k_1\omega - \omega_{k_1} - 2i\gamma_{k_2}} \left(-(k_1 + k_2) \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_2}{k_2\omega + \omega_{k_2}} + k_2 \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_1 + k_2}{(k_1 + k_2)\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}} \right) \right] \frac{\partial f_0}{\partial \omega} + \\ + \left(\frac{e}{m}\right)^4 \int d^3k_1 d^3k_2 \frac{|\varphi(k_1,t)|^2}{(2\pi)^3 V} \cdot \frac{|\varphi(k_2,t)|^2}{(2\pi)^3 V} \text{Im} k_1 \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_2}{k_1\omega - \omega_{k_1} - 2i\gamma_{k_2}} \cdot \\ \cdot \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{(k_1 - k_2)\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}} \left(k_1 \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_2}{k_2\omega + \omega_{k_2}} - k_2 \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_1}{k_1\omega - \omega_{k_1}} \right) \frac{\partial f_0}{\partial \omega}$$

Der zweite Ausdruck darf jedoch nur in einer bestimmten Näherung betrachtet werden, um mit der Näherung in Übereinstimmung zu bleiben, die zur Berechnung des - hier nahezu verschwindenden - Wellenzerfalls (der Rechnung zweiter Ordnung) gemacht wird [5]. Dort wird bei der Integration über k_1, k_2 der folgende Pol näherungsweise ausgewertet:

$$\frac{1}{\varepsilon_{k_1 + k_2, \omega_{k_1} + \omega_{k_2}}} \approx \frac{1}{\frac{\partial \varepsilon_{k_1 + k_2, \omega}}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_{k_1} + \omega_{k_2}} \cdot (\omega_{k_1 + k_2} - \omega_{k_1} - \omega_{k_2})}$$

Dadurch ergibt sich für den Wellenzerfall ein Ausdruck proportional $\delta(\text{Re}(\omega_{k_1 + k_2} - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}))$, der bei der Dispersionsbeziehung hier verschwindet. Andernfalls wäre das nächstgrößere Glied um $\approx \frac{\gamma_t}{\omega_p}$ kleiner, es ist asymptotisch $(\frac{\gamma_t}{\omega_p} \rightarrow 0)$ also nicht wichtig.

Ebenso wie dort muß daher dieser Bruch auch in folgendem Teilausdruck von (76) ausgewertet werden:

$$(77) \quad -\left(\frac{e}{m}\right)^3 \int d^3k_1 d^3k_2 \frac{|\varphi(k_1, t)|^2}{(2\pi)^3 V} \frac{|\varphi(k_2, t)|^2}{(2\pi)^3 V} \operatorname{Im} \frac{n^{(2)}(k_1, \omega_{k_1}; k_2, \omega_{k_2})}{(k_1+k_2)^2 \varepsilon_{k_1+k_2, \omega_{k_1}+\omega_{k_2}}}$$

$$\cdot (k_1+k_2) \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{(k_1+k_2)\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}} \left(k_1 \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_2}{k_2\omega + \omega_{k_2}} + k_2 \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_1}{k_1\omega + \omega_{k_1}} \right) \frac{\partial f_0}{\partial \omega}$$

Wenn man ihn noch genauer oder anders berücksichtigte (wie bei der Behandlung des Restes von (76) - in Anhang 8), müßte man das auch in der oben zitierten Berechnung der Wellenenergieänderung tun, damit der Energiesatz in gleicher Genauigkeit gilt.

Der Teilausdruck (77) ergibt bei obiger Auswertung der Energiebilanz dann keine Änderung der gesamten Teilchenenergiedichte.

Für die spektrale Wellenenergiedichte folgt aus (75)ff. und Anhang 8.3:

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{k^2 |\varphi(k, t)|^2}{(2\pi)^3 V} \approx 2\gamma_k + \frac{2}{k^2} \left[-\frac{\omega_p^2}{k^2} \int \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \cdot \frac{1}{n}}{(k\omega - k_1\omega_{k_1})^2} d^3v \right]^{-1} \cdot \frac{e^2}{m^2}$$

$$\cdot \int d^3k_1 \frac{|\varphi(k_1, t)|^2}{(2\pi)^3 V} \operatorname{Im} \left[\int \frac{\omega_p^2 \cdot n^{-1}}{(k-k_1)\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}} \left(k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_1}{k_1\omega + \omega_{k_1}} - k_1 \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k}{k\omega - \omega_{k_1}} \right) \frac{\partial f_0}{\partial \omega} d^3v \right.$$

$$\cdot \frac{\omega_p^2 \cdot n^{-1} \cdot (k-k_1)^{-2}}{\varepsilon_{k-k_1, \omega_k + \omega_{k_1}}} \left. \frac{1}{(k\omega - \omega_{k_1} - 2i\gamma_{k_1})^2} \left(\frac{k(k-k_1)}{k_1\omega - \omega_{k_1}} k_1 + \frac{(k-k_1) \cdot (k-k_1)}{(k-k_1)\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}} \right) \frac{\partial f_0}{\partial \omega} d^3v + \right.$$

$$(78) \quad \left. + \int \frac{\omega_p^2 \cdot n^{-1}}{(k\omega - \omega_{k_1} - 2i\gamma_{k_1})^2} \cdot \frac{k k_1}{(k-k_1)\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}} \cdot \left(k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_1}{k_1\omega + \omega_{k_1}} - k_1 \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k}{k\omega - \omega_{k_1}} \right) \frac{\partial f_0}{\partial \omega} d^3v \right]$$

$$\text{mit } \varepsilon_{k-k_1, \omega_k + \omega_{k_1}} = 1 - \frac{\omega_p^2 n^{-1}}{(k-k_1)^2} \int \frac{(k-k_1) \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{(k-k_1)\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}} d^3v$$

Die Zusätze der QT sind im asymptotischen Verlauf wichtig,

wo $\frac{\gamma_t}{\gamma_0} \rightarrow 0$ geht und die Wellenenergiedichte einen quasi-

stationären Wert erreicht. Dort sind die verschiedenen Wellenprozesse von unterschiedlicher Bedeutung: Am wichtigsten sind dann die Wellenprozesse, die durch Resonanz mit Teilchen außerhalb des instabilen Bereichs zustande kommen. Für diese brauchen die Pole mit den einfachen Resonanzen in (76) und (78) nicht ausgewertet zu werden. Die Größenordnung der nichtlinearen Prozesse, die - asymptotisch - übrig bleiben, bezüglich der quasilinearen, ist (nach Anhang 7.3) im Eindimensionalen abzuschätzen als:

$$k_0 \lambda_D \cdot \varepsilon_w \frac{\omega_p}{\gamma t}$$

Doch heben sich die Beiträge dieser Ordnung dort gerade heraus. Es bleibt nur ein um $(k_0 \lambda_D)^4$ kleinerer Beitrag, darunter der gut bekannte antisymmetrische [1b,16].

Im asymptotischen Verlauf müßte man außerdem die Stoßglieder beachten, die nicht aus der Vlasovgleichung zu erhalten sind.

Die vernachlässigten höheren Korrelationen sollten sich nach [16] in der Genauigkeit hier noch nicht bemerkbar machen.

Die Energiebilanz wird in Anhang 9 betrachtet. Wenn man die einfachen Pole behält, können einige Ausdrücke erst erklärt und verstanden werden, wenn man die Dispersionsbeziehung genauer als in quasilinearer Näherung untersucht (Anhang 12).

IV.) Lösungen höherer Ordnung der linearisierten Gleichungen bei explizit zeitabhängiger Verteilungsfunktion

Im Kapitel II werden aus den Gleichungen (1-3) Lösungen höherer Ordnung berechnet durch Berücksichtigung des in der QT zunächst vernachlässigten Gliedes rechts in (1b). Wenn die in der ersten Ordnung, der QT, gemachte Annahme (15) gerechtfertigt ist, kann es (z.B. bei genügend kleiner quasilinearer Wachstumsrate) auch in den höheren Ordnungen sinnvoll sein, die Zeitabhängigkeit der Verteilungsfunktion nur in adiabatischer Näherung zu berücksichtigen. Ohne eine solche Beschränkung dagegen ist sie genauer zu untersuchen.

Um den Umfang der Rechnungen dafür zunächst wieder etwas einzuschränken, wird jetzt das nichtlineare Glied rechts in (1b) vernachlässigt - und damit die bisher untersuchten nichtlinearen Wellenprozesse.

Die vollständige Lösung wäre in diesem Fall die verallgemeinerte Gleichung (13) zusammen mit der zugehörigen Gleichung für die Wellenamplituden. Dafür wird nun eine Näherungslösung gesucht, indem wie in Kapitel II von der QT als I. Näherung ausgegangen wird. Die Ordnung der Rechnung wird in diesem Kapitel gezählt nach den in den Fluktuationen berücksichtigten Zeitableitungen der Verteilungsfunktion:

In denen II. Ordnung kommt die erste Zeitableitung vor, in den Fluktuationen III. Ordnung auch die zweite usf.

1.) Ähnlich wie in Kapitel II in Gl. (1b) rechts die Fluktuationen als Funktional eingesetzt werden, wie sie in der nächstniedereren Ordnung erhalten werden, so könnte man nun auch mit der Zeitabhängigkeit von f_0 verfahren:

Die linearisierte Gleichung für die Fluktuationen

$$(4) \quad \frac{\partial f_1}{\partial t} + \omega \nabla f_1 + \frac{e}{m} \nabla \varphi \nabla f_0 = 0$$

ergibt zu der Lösung (20) dazu einen Zusatz, wenn man für die Zeitableitung von f_0 nach partieller Integration das Ergebnis (14) der ersten Ordnung einsetzt:

$$f_1(\tau) \approx - \int_{\tau'}^{\tau} \frac{e}{m} \nabla \varphi(\tau') d\tau' \cdot \nabla_v f_0(\tau) + \int_{\tau'}^{\tau} d\tau' \int \frac{e}{m} \nabla \varphi(\tau'') d\tau'' \cdot \nabla_v \frac{\partial f_0^I}{\partial \tau}(\tau, f_0(\tau))$$

Wie bei (11) ff. braucht man nur die Integrale an der oberen Grenze zu nehmen. - Auch höhere Ordnungen kann man berechnen.

Wenn man die Gleichungen für Wellenenergiedichte und Verteilungsfunktion aufstellt, ist näherungsweise auch eine Dispersionsbeziehung einzuführen.

Zumindest in erster Näherung wird man die quasilineare Dispersionsbeziehung benutzen - die lineare ist nur für einen recht kurzen Zeitraum eine gute Näherung.

Durch die Verwendung der quasilinearen Lösung $\omega_k(t)$ nähert man die Amplituden also zuerst durch die quasilinearere Näherung an.

Die geringe Zeitabhängigkeit der Lösungen $\omega_k(t)$ im Exponentialfaktor der quasilinearen Amplituden ist aber dann ebenso wie die der Verteilungsfunktion f_0 durch partielle Integration zu berücksichtigen - jedenfalls wenn man die Gültigkeit des Energiesatzes für die zu gewinnenden Gleichungen verlangt.

Geht man von einem Ansatz für die Amplituden

$$(79) \quad \varphi(k,t) = \alpha_k(t) e^{-i \int \omega_k dt}$$

mit noch (gering) zeitabhängigen Koeffizienten α_k aus, dann bekommt man als Lösung von (4) statt (20):

$$(80) \quad f_1(v,w,t) = - \frac{e}{m} \int d^3k e^{i(kw - \int \omega_k dt)} \frac{\alpha_k k \frac{\partial f_0}{\partial w}}{kw - \omega_k} + \\ + \frac{e}{m} \int d^3k e^{i(kw - \int \omega_k dt)} \frac{1}{i(kw - \omega_k)^2} \cdot \\ \cdot \left[\alpha_k k \frac{\partial}{\partial w} \frac{\partial f_0^I}{\partial t} + \frac{\alpha_k k \frac{\partial f_0}{\partial w}}{kw - \omega_k} \frac{\partial \omega_k}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} k \frac{\partial f_0}{\partial w} \right]$$

$\frac{\partial \hat{f}_0^I}{\partial t}$ sei der Ausdruck (24), wie schon bei (41) definiert,
 $\frac{\partial^{(I)} \omega_k}{\partial t}$ sei die Ableitung von ω_k , wenn sich f_0 nach (24) ändert. Die schwach zeitabhängigen Größen sind jetzt mit ihrer ersten Ableitung berücksichtigt ^{+) -} in höheren Näherungen sind später auch höhere Ableitungen zu beachten.

Nach der Poissongleichung (3) folgt aus dem Ansatz (79) und den damit berechneten Fluktuationen (80):

$$(81) \quad \epsilon_{kk} \omega_k = 1 - \frac{4\pi e^2}{m k^2} \int \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{k\omega - \omega_k} d^3v = i \frac{4\pi e^2}{m k^2} \int \frac{d^3v}{(k\omega - \omega_k)^2} \cdot \left[k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\partial \hat{f}_0^I}{\partial t} + \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{k\omega - \omega_k} \frac{\partial^{(I)} \omega_k}{\partial t} + \frac{1}{\alpha_k} \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} k \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \right]$$

Da $\omega = \omega_k(t)$ eine Lösung der Dispersionsbeziehung $\epsilon_{kk} \omega = 0$ sein soll, bestimmt diese Gleichung nunmehr die Zeitabhängigkeit der Koeffizienten α_k :

$$(82) \quad (Re) \quad \frac{\partial \ln \alpha_k}{\partial t} = (Re) \left[\frac{\partial \epsilon_{kk}}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_k} \right]^{-1} \frac{4\pi e^2}{m k^2} \cdot \left[\int \frac{k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\partial \hat{f}_0^I}{\partial t}}{(k\omega - \omega_k)^2} d^3v + \int \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{(k\omega - \omega_k)^3} d^3v \frac{\partial^{(I)} \omega_k}{\partial t} \right]$$

$$Re \frac{\partial \omega_k}{\partial t} \approx \frac{Re \omega_k}{|Re \omega_k|} \frac{3 k^2}{2 \omega_p} \int \frac{\partial^{(I)} F(u_n)}{\partial t} u_n^2 \frac{\partial F(u_n)}{\partial t} := \frac{1}{n} \int d^3v d(u_n - \frac{k\omega}{|k|}) \frac{\partial \hat{f}_0^I}{\partial t}$$

(Anhang 1.1)

Durch den Ansatz (79), dessen Koeffizienten α_k hier in gewisser Näherung bestimmt sind, kann man kleine nichtlineare Abweichungen von den quasilinearen Amplituden beschreiben.

Von $\frac{1}{\alpha_k} \frac{\partial \alpha_k}{\partial t}$ ist nur der Realteil $Re \frac{1}{\alpha_k} \frac{\partial \alpha_k}{\partial t}$ berücksichtigt, von $\frac{\partial^{(I)} \omega_k}{\partial t}$ braucht man dann auch nur den Realteil zu nehmen. Andernfalls würde man außer der Größe der Amplitude auch noch etwas den Realteil der Frequenz korrigieren (Anhang 10).

+) die näherungsweise aus der QT eingesetzt wird

2.) Die Gleichung für die spektrale Wellenenergiedichte lautet damit:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{k^2 |\varphi(k,t)|^2}{(2\pi)^{-3} V} &= 2\gamma_k + 2 \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial t} \ln \alpha_k = \\
 (83) \quad &= 2\gamma_k + 2 \left[\operatorname{Re} \frac{\partial \epsilon_{k\omega}}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_k} \right]^{-1} \frac{4\pi e^2}{m k^2} \left(\frac{1}{k\omega - \operatorname{Re} \omega_k} \frac{\partial^{(I)}}{\partial t} k \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \right) d^3 v \\
 \frac{\partial^{(I)}}{\partial t} f_0 &:= \frac{\partial f_0^{(I)}}{\partial t}
 \end{aligned}$$

Setzt man die Fluktuationen (80) in Gleichung (1a) ein, so folgt für die Verteilungsfunktion:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_0}{\partial t} &= \left(\frac{e}{m} \right)^2 \int d^3 k k \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\left(\frac{1}{\pi} \delta(k\omega - \operatorname{Re} \omega_k) + \frac{(P)}{2(k\omega - \operatorname{Re} \omega_k)^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{|\varphi(k,t)|^2}{(2\pi)^{-3} V} \right] k \frac{\partial f_0}{\partial \omega} + \\
 (84) \quad &+ \left(\frac{e}{m} \right)^2 \int d^3 k k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{(k\omega - \operatorname{Re} \omega_k)^2} \frac{|\varphi(k,t)|^2}{(2\pi)^{-3} V} k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\partial f_0^{(I)}}{\partial t} + \\
 &+ \left(\frac{e}{m} \right)^2 \int d^3 k k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{(k\omega - \operatorname{Re} \omega_k)^3} \frac{|\varphi(k,t)|^2}{(2\pi)^{-3} V} k \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial^{(I)}}{\partial t} \operatorname{Re} \omega_k
 \end{aligned}$$

Der Energiesatz verlangt, daß die Zusatzglieder in (83), (84) zur QT insgesamt eine Änderung der Teilchenenergie ergeben, die entgegengesetzt gleich der zusätzlichen Wellenenergieänderung ist:

$$\begin{aligned}
 &\frac{e^2}{m} \int d^3 k \int d^3 v \frac{k\omega}{2(k\omega - \operatorname{Re} \omega_k)^2} \left(-2 \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial t} \ln \alpha_k \right) \frac{|\varphi(k,t)|^2}{(2\pi)^{-3} V} k \frac{\partial f_0}{\partial \omega} - \\
 &- \frac{e^2}{m} \int d^3 k \int d^3 v \frac{k\omega}{(k\omega - \operatorname{Re} \omega_k)^2} \left(k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\partial f_0^{(I)}}{\partial t} + \frac{\partial^{(I)}}{\partial t} \operatorname{Re} \omega_k k \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \right) \frac{|\varphi(k,t)|^2}{(2\pi)^{-3} V} = \\
 (85) \quad &\text{unter Benützung von } \frac{\partial^{(I)}}{\partial t} \epsilon_{k\omega} = 0 \\
 &= \frac{1}{8\pi} \int d^3 k \frac{k^2 |\varphi(k,t)|^2}{(2\pi)^{-3} V} \left(-2 \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial t} \ln \alpha \right)
 \end{aligned}$$

Die Energiebilanz für die Glieder in den Gleichungen, die schon in der QT vorkommen, ist dieselbe wie in Anhang 1.

Die neuen Wellenprozesse in Gleichung (83) hat schon Baldwin [15] erhalten, das erste der beiden neuen Glieder in (84) Altshul und Karpman [6]. Dieses ist das wichtigste der hier gewonnenen Korrekturglieder: Legt man für die charakteristische Zeit der Verteilungsfunktion gemäß der QT: $\approx \frac{1}{\gamma_0}$ zugrunde, so ist es etwa von der Größenordnung:

$\frac{\gamma_t}{\omega_p} \frac{k_0}{\Delta k}$ bezüglich des Gliedes der QT im Bereich der Resonanzteilchen.

Dagegen ist das letzte Glied in (84) von der relativen

Größenordnung $\approx \epsilon_w \cdot \frac{k_0}{\Delta k}$, die neuen Glieder

in (83) haben eine relative Größenordnung ϵ_w und dämpfen die instabilen Wellen.

Wenn man in der Energiebilanz Fehler dieser Ordnung zuließe, könnte man die gerade erwähnten Glieder in den Gleichungen vernachlässigen. In dieser Näherung ändert die hier gewonnene Erweiterung nicht direkt die Größe der nach der QT zwischen Teilchen und Wellen ausgetauschten Energie, nur mittelbar, insofern das zweite Glied in (84) die Gestalt der Verteilungsfunktion verändert.⁺)

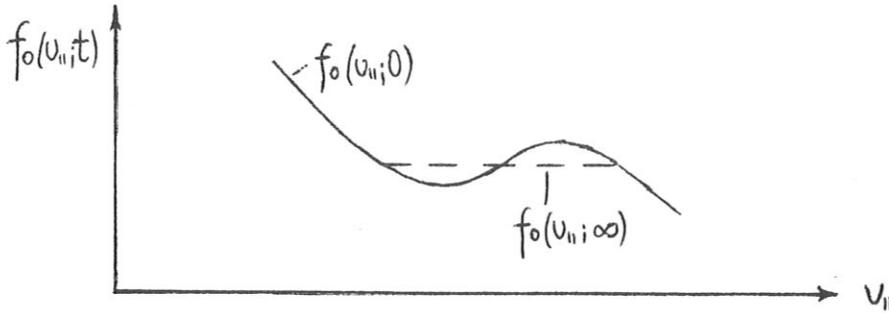
Wenn nach der QT die Verteilungsfunktion ihren asymptotischen Zustand im Bereich der Resonanzteilchen erreicht (wenn nämlich ihre Geschwindigkeitsableitung dort gegen Null geht), verschwindet aber die Bedeutung dieses Gliedes gegenüber dem der QT.

Nach folgender Abschätzung sollte es im Eindimensionalen (in der Größenordnung ungefähr gleich) - in seinem Vorzeichen - entgegengesetzt gleich dem schon in der QT

⁺) (Anhang 11) Dieses, gegenüber dem Ausdruck der QT kleine Glied vermehrt im Bereich der resonanten Teilchen die Zahl der schnelleren Teilchen im wesentlichen auf Kosten der langsameren Teilchen.

erhaltenen Hauptwertglied sein:

Es werde das spezielle eindimensionale Beispiel der QT wie in [1b] gewählt: Im Bereich der Resonanzteilchen sieht die Verteilungsfunktion im Lauf der zeitlichen Entwicklung nach [1b] folgendermaßen aus:



Die Änderung der Verteilungsfunktion ist durch den Ausdruck (24) der QT abgeschätzt - mit dem ersten Glied der Taylorentwicklung (vielleicht etwas zu groß, da die Instabilität nach [1b] schwächer wird und einem quasi-stationären Zustand zustrebt):

$$(86) \quad f_0\left(\frac{1}{\gamma_0}\right) - f_0(t) \approx \frac{1}{\gamma t} \frac{\partial f_0(t)}{\partial t} \quad f_0\left(\frac{1}{\gamma_0}\right) \approx f_0(\infty)$$

Für die Resonanzteilchen erhält man dadurch aus (84) - ohne das letzte Glied - die Abschätzung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} \approx & \int d^3k \, k \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\left\{ (\pi \delta(k\omega - R\omega_u) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{|\varphi(k,t)|^2}{2(k\omega - R\omega_u)^2}) \frac{|\varphi(k,t)|^2}{(2\pi)^{-3}V} \right\} k \frac{\partial f_0(t)}{\partial \omega} + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma t}{(k\omega - R\omega_u)^2} \frac{|\varphi(k,t)|^2}{(2\pi)^{-3}V} k \frac{\partial}{\partial \omega} \left(f_0\left(\frac{1}{\gamma_0}\right) - f_0(t) \right) \right] \end{aligned}$$

Nach der Skizze ist $-\frac{\partial}{\partial \omega} \left(f_0\left(\frac{1}{\gamma_0}\right) - f_0(t) \right)$ nicht viel kleiner als $\frac{\partial f_0(t)}{\partial t}$ für $t < \frac{1}{\gamma_0}$, so daß man damit erhält:

$$(87) \quad \frac{\partial f_0}{\partial t} \approx \int d^3k \, k \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\left(\pi \delta(k\omega - R\omega_u) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{|\varphi(k,t)|^2}{2(k\omega - R\omega_u)^2} - \frac{\gamma t}{(k\omega - R\omega_u)^2} \right) \frac{|\varphi(k,t)|^2}{(2\pi)^{-3}V} \right] k \frac{\partial f_0}{\partial \omega}$$

Wenn man sich bei der Zeitableitung der Wellenenergiedichte auf die quasilineare Änderung beschränken kann, sind die

letzten beiden Glieder in der Klammer von ähnlicher Größenordnung, aber von entgegengesetztem Vorzeichen.

3.) Ebenso wie in erster Ordnung von $\frac{\gamma_t}{\omega_p} \frac{k_0}{\Delta k}$ kann man die Zeitabhängigkeit von f_0 auch bis zu quadratischen Gliedern dieser Größe verfolgen:

Dann kommen zu den Fluktuationen (80) noch folgende dazu:

$$\begin{aligned}
 f_3 = & \frac{e}{m} \int d^3k \exp(i(ku - \omega_k t)) (k\omega - \omega_k)^{-3} \cdot \left[\alpha_k k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\partial^{\text{II}}}{\partial t} \frac{\partial^{\text{II}} f_0}{\partial t} + \right. \\
 & + (k\omega - \omega_k) (-i) \cdot \alpha_k \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\partial^{\text{II}} f_0}{\partial t} - \frac{\partial^{\text{I}} f_0}{\partial t} \right) + \frac{\alpha_k k \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{k\omega - \omega_k} \left(\frac{\partial^{\text{II} 2} \omega_k}{\partial t^2} + \frac{3}{k\omega - \omega_k} \left(\frac{\partial^{\text{II}} \omega_k}{\partial t} \right)^2 - \right. \\
 (88) \quad & \left. - i(k\omega - \omega_k) \left(\frac{\partial^{\text{II}} \omega_k}{\partial t} - \frac{\partial^{\text{I}} \omega_k}{\partial t} \right) \right] + \frac{2}{k\omega - \omega_k} \frac{\partial \omega_k}{\partial t} \left(\alpha_k k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\partial^{\text{II}} f_0}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} k \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \right) + \\
 & + k \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^{\text{II}} \alpha_k}{\partial t} - i(k\omega - \omega_k) k \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \left(\frac{\partial^{\text{III}} \alpha_k}{\partial t} - \frac{\partial^{\text{II}} \alpha_k}{\partial t} \right) + 2 \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\partial^{\text{II}} f_0}{\partial t} \left. \right]
 \end{aligned}$$

Aus der Poissongleichung (3) erhält man damit folgende (zusätzliche) Zeitabhängigkeit der Wellenamplituden durch die Koeffizienten α_k :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \ln \alpha_k}{\partial t} = & \frac{\partial \ln \alpha_k}{\partial t} + i \left[\frac{\partial \epsilon \omega}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_k} \right]^{-1} \frac{4\pi e^2}{m k^2} \int d^3v \left[\frac{-i}{(k\omega - \omega_k)^2} \cdot \right. \\
 (89) \quad & \left. \left(k \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\partial^{\text{II}} f_0}{\partial t} - \frac{\partial^{\text{I}} f_0}{\partial t} \right) + \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{k\omega - \omega_k} \left(\frac{\partial^{\text{II}} \omega_k}{\partial t} - \frac{\partial^{\text{I}} \omega_k}{\partial t} \right) \right) + \frac{1}{(k\omega - \omega_k)^3} \left(k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\partial^{\text{II} 2} f_0}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \ln \alpha_k}{\partial t} \cdot \right. \right. \\
 & \left. \left. \cdot k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\partial^{\text{II}} f_0}{\partial t} + \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{\alpha_k} \frac{\partial^{\text{II} 2} \alpha_k}{\partial t^2} \right) + \frac{1}{(k\omega - \omega_k)^4} \left(k \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \frac{\partial^{\text{II} 2} \omega_k}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \omega_k}{\partial t} \left(k \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \frac{\partial \ln \alpha_k}{\partial t} + k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\partial f_0}{\partial t} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{3k \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{(k\omega - \omega_k)^5} \left(\frac{\partial^{\text{II}} \omega_k}{\partial t} \right)^2 \right]
 \end{aligned}$$

Dabei sei $\frac{\partial \ln \alpha_k}{\partial t}$ der Ausdruck (82).

Die zeitabhängige Verteilungsfunktion ist damit zu bestimmen aus:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_0}{\partial t} = & \frac{\partial f_0}{\partial t} + i \left(\frac{e}{m} \right)^2 \int d^3k k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{(k\omega - \omega_k)^3} \frac{|\varphi(k,t)|^2}{(2\pi)^{-3} V} \left[k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\partial^{\text{II} 2} f_0}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \ln \alpha_k}{\partial t} k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\partial^{\text{II}} f_0}{\partial t} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\alpha_k} \frac{\partial^{\text{II} 2} \alpha_k}{\partial t^2} k \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \right] + i \left(\frac{e}{m} \right)^2 \int d^3k k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{(k\omega - \omega_k)^4} \frac{|\varphi(k,t)|^2}{(2\pi)^{-3} V} \left[k \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \frac{\partial^{\text{II} 2} \omega_k}{\partial t^2} + \right. \\
 (90) \quad & \left. + 2 \left(k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\partial^{\text{II}} f_0}{\partial t} + \frac{\partial \ln \alpha_k}{\partial t} k \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \right) \frac{\partial^{\text{II}} \omega_k}{\partial t} \right] + i \left(\frac{e}{m} \right)^2 \int d^3k k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{(k\omega - \omega_k)^5} \frac{|\varphi(k,t)|^2}{(2\pi)^{-3} V} 3k \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \left(\frac{\partial^{\text{II}} \omega_k}{\partial t} \right)^2
 \end{aligned}$$

Dabei sei $\frac{\partial^I f_0}{\partial t} = \frac{\partial^{\hat{I}} f_0}{\partial t}$ der Ausdruck (84), wenn auf der rechten Seite die Ableitungen $\frac{\partial^{(I)}}{\partial t}$ durch $\frac{\partial^{(II)}}{\partial t}$ ersetzt werden und außerdem wieder eine Näherung rückgängig gemacht wird:
nämlich wieder $\kappa \omega_u$ durch ω_u ersetzt wird.

Wenn man den Energiesatz für die Gleichung (90) und die Gleichung für die Wellenenergiedichte:

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{k^2 |\varphi(k,t)|^2}{8\pi (2\pi)^{-3} V} = 2\gamma_u + 2 \frac{\partial}{\partial t} \ln \omega_u$$

mit dem Ausdruck $\frac{\partial \ln \omega_u}{\partial t}$ nach (89) zeigen will, gelingt das in der Genauigkeit der Dispersionsbeziehung der vorigen (zweiten) Ordnung:

In dieser selbst ist der Beweis des Energiesatzes nur in der Genauigkeit der Dispersionsbeziehung der QT gelungen,

da $\frac{\partial^I}{\partial t} \epsilon_{k\omega_u} = 0$ benützt ist.

Die dritte Ordnung ist nun ebenso konsequent behandelt wie die vorhergehende, da man für den Beweis des Energie-

satzes benötigt, daß $\frac{\partial^{II}}{\partial t} \epsilon_{k\omega_u} \approx 0$ ist. Dabei werde für $\epsilon_{k\omega_u}$ näherungsweise das Ergebnis der zweiten Ordnung,

die rechte Seite von (81), eingesetzt und dazu dort ebenso wie oben $\frac{\partial^I}{\partial t}$ durch $\frac{\partial^{II}}{\partial t}$ ersetzt.

Die hier in dritter Ordnung erhaltenen Korrekturen sind jedoch (wegen des Faktors i) so klein wie die der vierten Ordnung. Man müßte daher diese gleich dazunehmen.

V.) Höhere Näherungen bei Überlagerung der bisherigen Prozesse

Es ist also möglich, die Zeitabhängigkeit der Verteilungsfunktion in höheren Ordnungen zu berechnen, wenn man von der QT als erster Näherung ausgeht.

Die Berücksichtigung der ersten Zeitableitung der Verteilungsfunktion ergibt einen Zusatz, der mindestens so groß ist wie der Zusatz von Kapitel III durch das nichtlineare Glied der Vlasovgleichung, solange die Größenordnungen von γ_t und γ_0 noch dieselben sind. Asymptotisch, mit $\frac{\gamma_t}{\omega_p} \rightarrow 0$ aber verschwindet diese Zeitableitung. Dort sind allein Wellenprozesse wichtig, die durch das nichtlineare Glied der Vlasovgleichung erzeugt werden. In einem Zwischenbereich sind beide Arten von Zusatzgliedern zugleich zu verwenden.

Will man die Zeitabhängigkeit der Verteilungsfunktion in noch höherer Ordnung, z.B. wie eben: in dritter, beachten, dann dürfte man auch nicht immer die Zeitabhängigkeit der Verteilungsfunktion im nichtlinearen Glied der Vlasovgleichung vernachlässigen und erhielte dadurch noch weitere Glieder, die bei der Überlagerung der beiden Entwicklungen: der nach der Zeitabhängigkeit der Verteilungsfunktion und der nach dem nichtlinearen Glied entstehen.

Beide bisherigen Entwicklungen kann man aus einem übergeordneten Gesichtspunkt ordnungsweise erhalten:

Man kann beide als höhere Näherungen für den Ausdruck $\nabla \varphi \nabla_0 f_1$ auffassen. In nullter Näherung sei er Null gesetzt, so daß

man näherungsweise aus (1a) $\frac{\partial f_0}{\partial t} \approx 0$ bekommt.

Berechnet man unter diesen beiden Annahmen die Fluktuationen mit Hilfe der Gleichung (1b), so folgt für den Ausdruck

$\nabla \varphi \nabla_0 f_1$ in (1a) derjenige, der der QT zugrunde liegt.

In zweiter Ordnung kann man die berechneten Fluktuationen und die berechnete Zeitabhängigkeit der Verteilungsfunktion wieder in Gleichung (1b) benützen, woraus man die Fluktuationen zweiter Ordnung von Kapitel II bzw. Kapitel IV bekommt (diese sind dort für den Ansatz (79) der Amplituden angegeben).

Will man Zusatzglieder zur QT berücksichtigen, die in der spektralen Wellenenergiedichte höchstens quadratisch sind, dann benötigt man nur die Zusätze dritter Ordnung von Kap. III und die Zusätze zweiter Ordnung von Kap. IV - ohne weitere Glieder aus der Überlagerung:

In der Gleichung der Verteilungsfunktion braucht man nur die Zusätze der Gleichungen (76) und (84), in der Gleichung der spektralen Wellenenergiedichte die von (78) und (83) zusammen zu nehmen.

Dadurch sind zu Beginn der Instabilität die Korrekturen

der Ordnung $\frac{\gamma_t \cdot k_0}{\omega_p \cdot \Delta k}$, asymptotisch die der Ordnung $\epsilon_1 = (k_0 \lambda_D)^5 \cdot \epsilon_w \frac{\omega_p}{\gamma_t}$ eingeschlossen. Beide Größenordnungen wären in einem mittleren Bereich miteinander vergleichbar, in dem

$\left(\frac{\gamma_t}{\omega_p}\right)^2 \approx \epsilon_w \cdot (k_0 \lambda_D)^6$ ist. Der Energiesatz ist für diese zusammengefaßten Gleichungen zu zeigen (Anhang 12), wenn man die erweiterte Dispersionsbeziehung von Anhang 10 benützt.

Einige wichtige Korrekturen ändern im Eindimensionalen die gesamte Wellenenergiedichte bzw. thermische Energiedichte in geringerem Maße als die Zeitabhängigkeit der spektralen Wellenenergiedichte bzw. der Verteilungsfunktion: Die asymptotisch bedeutsamen antisymmetrischen Wellenprozesse (Anhang 8) lassen die längeren Wellen auf Kosten der kürzeren anwachsen, wenn nur in einem einzigen Geschwindigkeitsbereich eine Abweichung von der Gleichgewichtsverteilungsfunktion vorkommt.

Die Rückwirkung der Zeitabhängigkeit der Verteilungsfunktion auf diese selbst verschwindet dagegen im asymptotischen

Bereich, ist aber beim Einsetzen einer Zweistrominstabilität wichtiger als die Korrektur durch das nichtlineare Glied der Vlasovgleichung. Im Bereich der Resonanzteilchen ist sie bei Voraussetzung der QT größenordnungsmäßig ungefähr negativ gleich dem in der QT erhaltenen Hauptwertglied (in (25')). Schnellere Teilchen gewinnen dadurch Energie auf Kosten der Zahl der langsameren Teilchen.

Die eigentlichen nichtlinearen Wellenprozesse, wie die antisymmetrischen, werden bei großer Wellenenergiedichte und in den Zeiten mit kleiner quasilinearer Wachstumsrate wichtig, diese Teilchenenergieänderung - durch die Zeitabhängigkeit der Verteilungsfunktion - dagegen bei schmalen Wellenspektrum (geringerer Temperatur des überthermischen Stromes als die der thermischen Elektronen). Sie verschwindet aber im zeitlichen Verlauf zusammen mit der quasilinearen Wachstumsrate.

Freilich darf auch das Wellenspektrum nicht zu schmal werden, da mit schmälere Spektrum höhere Korrelationen zunehmend eine Bedeutung erlangen und schließlich zu einer zeitlich periodisch veränderlichen Verteilungsfunktion führen können. Dann müßten die entsprechenden verallgemeinerten Gleichungen des folgenden Kapitels herangezogen werden.

Folgende Eigenschaften der höheren Näherungen sind hier erstmals erarbeitet:

Die Zeitabhängigkeit der Verteilungsfunktion kann wie das nichtlineare Glied der Vlasovgleichung in höheren Ordnungen berücksichtigt werden und liefert wie dieses Korrekturen zur QT. Für nicht zu große Zeiten ist es die wichtigste Korrektur. Der Energiesatz wird für die erweiterten Gleichungen gezeigt. Dabei ist auch die quasilineare Dispersionsbeziehung zu erweitern. - Im asymptotischen Bereich

($\frac{\gamma t}{\omega_p} \rightarrow 0$) ist die Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit der Verteilungsfunktion weniger bedeutsam.

VI.) Die verallgemeinerten quasilinearen Gleichungen
bei Erweiterung durch nichtlineare Wellenprozesse

Es ist gezeigt worden, daß sich in den höheren Näherungen zur QT zwei verschiedene Entwicklungen überlagern:
 Die nach nichtlinearen Wellenprozessen im engeren Sinn und die nach der Zeitabhängigkeit der Verteilungsfunktion.

Bei einem sehr schmalen Wellenspektrum (vgl. [6]) wäre es günstiger, die Zeitabhängigkeit gleich exakt zu berücksichtigen (statt eine schlecht konvergierende Entwicklung zu versuchen), auch wenn man nicht mehr die Form von kinetischen Gleichungen (für die gemittelte Verteilungsfunktion und die Wellenenergiedichte) bekommen kann.

Vernachlässigt man das nichtlineare Glied der Vlasovgleichung, so bekommt man die verallgemeinerten quasilinearen Gleichungen (Kapitel I). Man kann die Gleichung (13) für die Verteilungsfunktion mit der Transformation (10) umschreiben zu:

$$(93) \quad \Omega f_2 = \int d^3k \frac{d\omega' d\omega''}{(2\pi)^2} \frac{\varphi_{k\omega} \varphi_{k\omega'}}{(2\pi)^{-3} V} \underbrace{\left(\frac{e}{m} \right)^2 k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{k\omega - \omega' - \omega''} k \frac{\partial f_{k-\omega'-\omega''}}{\partial \omega}}_{\chi^{(1)}(k, \omega' + \omega'') [f_{k-\omega'-\omega''}]}$$

Nach Anhang 2.2 gehört zu (93) die Dispersionsbeziehung (bis auf Glieder $\sim \exp(-i k \omega t)$):

$$(94) \quad \int \frac{d\omega'}{2\pi} \varphi_{k\omega'} \left[\frac{i}{\omega' - \omega} - \frac{4\pi e^2}{m k^2} \int d^3v \frac{k \frac{\partial f_{k-\omega-\omega'}}{\partial \omega}}{k\omega - \omega} \right] = 0$$

1.) Die nichtlineare Wechselwirkung kann man in zweiter Ordnung ähnlich wie früher in Kapitel II berücksichtigen.

Anstatt (44) erhält man jetzt in II. Ordnung für die Fluktuationen:

$$(95) \quad \frac{\partial(f_2 + \hat{f}_0^I)}{\partial t} = i \left(\frac{e}{m}\right)^2 \int d^3k' \frac{d\omega'}{2\pi} \varphi_{k'\omega'} e^{i(k'u - \omega't)} \int d^3k'' \frac{d\omega''}{2\pi} e^{i(k''u - \omega''t)} \\ \cdot k' \frac{\partial}{\partial \omega'} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{k'' \frac{\partial f_2}{\partial \omega''}}{k''\omega'' - \omega' - \Omega}$$

$$(95') \quad f_2 + \hat{f}_0^I = \left(\frac{e}{m}\right)^2 \int d^3k_1 d^3k_2 \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2} e^{i((k_1+k_2)u - (\omega_1+\omega_2)t)} \\ \cdot \varphi_{k_1\omega_1} \varphi_{k_2\omega_2} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{1}{(k_1+k_2)\omega - \omega_1 - \omega_2 - \Omega} k_1 \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_2 \frac{\partial f_2}{\partial \omega}}{k_2\omega - \omega_2 - \Omega} e^{-i\Omega t}$$

Der räumlich homogene Anteil davon ist:

$$\langle f_2 + \hat{f}_0^I \rangle = \hat{f}_0^I = \left(\frac{e}{m}\right)^2 \int d^3k \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2} \frac{\varphi_{k\omega_1} \varphi_{k\omega_2}}{(2\pi)^3 V} e^{-i(\omega_1+\omega_2)t} \\ \cdot \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{1}{\omega_1+\omega_2+\Omega} k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k \frac{\partial f_2}{\partial \omega}}{k\omega - \omega_2 - \Omega} e^{-i\Omega t}$$

\hat{f}_0^I ist also identisch mit dem f_0 , das aus der Gleichung (13) durch Integration gewonnen wird.

Als zusätzlichen Potentialanteil erhält man aus (95) statt der früheren Gleichung (47):

$$\begin{aligned} \varphi_{k\omega}^{(2)} &= - \frac{4\pi e}{k^2} \int d^3v \int f_2(v, u, t) e^{-i(kv - \omega t)} \frac{d^3r}{(2\pi)^3} dt = \\ &= - \frac{4\pi e}{k^2} \int d^3v \left(\frac{e}{m}\right)^2 \int d^3k_1 \frac{d\omega_1}{2\pi} \varphi_{k_1\omega_1} \varphi_{k-k_1, \omega-\omega_1} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \\ &\quad \cdot \frac{1}{k\omega - \omega} \cdot (k-k_1) \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_1 \frac{\partial f_2}{\partial \omega}}{k_1\omega + \omega_1 - \omega} \cdot \left(1 - \frac{d(kr)}{(2\pi)^3 V}\right) = \\ (96) \quad &= - \frac{1}{k^2} \int d^3k_1 d^3k_2 \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2} \varphi_{k_1\omega_1} \varphi_{k_2\omega_2} \delta(k-k_1-k_2) \\ &\quad \cdot \int \frac{d\Omega}{2\pi} \frac{i}{\omega - \omega_1 - \omega_2 - \Omega} \frac{4\pi e^2}{m} \frac{e}{m} \int d^3v \frac{k_2(k_1+k_2)}{((k_1+k_2)\omega - \omega_1 - \omega_2 - \Omega)^2 (k_2\omega - \omega_2 - \Omega)} k_2 \frac{\partial f_2}{\partial \omega} \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck tritt an die Stelle des früheren $\frac{i\mu^{(2)}}{\omega - \omega_1 - \omega_2}$ in (49)

Genauso verläuft die Rechnung in höheren Ordnungen, so daß man als Ergebnis wieder Gleichungen vom Typ (61)-(65) erhält, nur daß jetzt die Verteilungsfunktion Fourier-transformiert wird und in den Definitionen der $\mu^{(i)}$ und $\chi^{(i)}$ auch die Frequenz \mathcal{L} dieser Verteilungsfunktion vorkommt ebenso wie in den δ -Funktionen, die die (i.a. komplexen) Frequenzen der Amplituden enthalten.

Diese Gleichungen sind die Erweiterung der verallgemeinerten quasilinearen Gleichungen von [6] für die Wellenprozesse höherer Ordnung. Sie werden unter den angegebenen Bedingungen gut angenähert durch die im vorigen Kapitel erhaltene d o p p e l t e Entwicklung.

Bei einer sehr schnell zeitabhängigen Verteilungsfunktion, wie bei einer starken nahezu monochromatischen Welle etwa, ist aber (15) nicht erfüllt und sind daher die früheren Gleichungen dafür unbrauchbar.

Man könnte auf die hier beschriebenen verallgemeinerten quasilinearen Gleichungen, u.U. mit Berücksichtigung von nichtlinearen Wellenprozessen, zurückgreifen. Doch sind sie um vieles schwieriger zu behandeln, da bei ihnen auch noch die Zeit transformiert ist.

2.) Zuletzt soll noch gezeigt werden, wie die verallgemeinerten quasilinearen Gleichungen - so wie in [6] bereits in gewisser Näherung verwendet - auch auf den Fall einer monochromatischen Welle ausgedehnt werden können, obwohl für diese die durch Grenzübergang (Gl. (13) ff.) zu gewinnende Funktion $\frac{\varphi_{k\omega} \varphi_{k\omega'}}{8\pi \cdot (2\pi)^{-3} V}$ nicht mehr beschränkt ist.

Läßt man solch eine idealisierte Spektrallinie zu, braucht man gar nicht zur Ortstransformierten der Wellenamplitude übergehen. Die Welle mit dem Potential:

$$(97) \quad \varphi(r,t) = \alpha(t) e^{ikr} + \alpha^*(t) e^{-ikr}$$

ist durch die Fluktuationen auszudrücken als:

$$f_1 = -\frac{4\pi e}{k^2} \int f_1(\omega, \omega, t) d^3v$$

(97')

Wenn man daher f_1 ansetzt als $b(\omega, t)e^{ik\omega} + b^*(\omega, t)e^{-ik\omega}$

und die Laplacetransformierten Größen einführt:

$$a_\omega := \int_0^\infty a(t)e^{i\omega t} dt, \quad b_\omega := \int_0^\infty b(\omega, t)e^{i\omega t} dt, \text{ erh\u00e4lt man aus (5)}$$

die Gleichung:

$$(98) \quad (k\omega - \omega) b_\omega = -\frac{e}{m} \int k \frac{\partial f_{\omega-\Omega}}{\partial \omega} a_\Omega d\Omega$$

F\u00fcr b_ω^* gilt die konjugiert komplexe Gleichung.

Damit hat man statt der Gleichungen (12), (13) f\u00fcr die gemittelte Verteilungsfunktion:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = i \left(\frac{e}{m}\right)^2 < \left(\int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} a_\omega e^{ik\omega} - k.k. \right) k \frac{\partial}{\partial \omega} \cdot \\ \cdot \left(\int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} a_\omega \int \frac{d\Omega}{2\pi} e^{-i\Omega t} \frac{k \frac{\partial f_\Omega}{\partial \omega}}{k\omega - \omega - \Omega} e^{ik\omega} + k.k. \right) >$$

Nach der Ortsmittelung $\langle \dots \rangle$ bleibt nur mehr \u00fcrig:

$$(99) \quad \frac{\partial f_0}{\partial t} = -i \left(\frac{e}{m}\right)^2 \left[a^*(t) k \frac{\partial}{\partial \omega} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} a_\omega \int \frac{d\Omega}{2\pi} e^{-i\Omega t} \frac{k \frac{\partial f_\Omega}{\partial \omega}}{k\omega - \omega - \Omega} \right. \\ \left. - k.k. \right]$$

Aus (97') und (98) erh\u00e4lt man dazu als asymptotische Gleichung f\u00fcr die Amplituden:

$$(100) \quad a_\omega = \frac{4\pi e^2}{m k^2} \int d^3v \int \frac{d\Omega}{2\pi} k \frac{\partial f_{\omega-\Omega}}{\partial \omega} a_\Omega$$

Eine N\u00e4herung f\u00fcr schwach zeitabh\u00e4ngige Verteilungsfunktion ist hier nicht sinnvoll: Die Absch\u00e4tzung in [6] zeigt, da\u00df diese in der N\u00e4he der Phasengeschwindigkeit einer monochromatischen Welle angen\u00e4hert periodisch (mit einer D\u00e4mpfung) schwankt.

Ebenso können die in der Wellenamplitude nichtlinearen Glieder (Oberwellen) dazugenommen werden, die bei genügend starker Energie der Welle angeregt werden.

Danksagung

Herrn Prof. Dr. A. Schlüter danke ich für das fördernde Interesse und die Anteilnahme am Verlauf der Arbeit.

Zur Abgrenzung und Klärung des Themas halfen mir besonders die Diskussionen, die ich mit Herrn Dr. D. Pfirsch und Herrn Dr. P.P.J.M. Schram über verschiedene Ansätze zur Beschreibung eines turbulenten Plasmas führen konnte.

Herrn Dr. A. Salat danke ich viele kritische Bemerkungen und Anregungen.

Anhang 1

Als asymptotische Lösung von $\epsilon_{\kappa\omega} = 0$ (21) erhält man nach [7]:

$$1.1 \quad \operatorname{Re} \omega_{\kappa} \approx k \bar{w}_{11} \pm \omega_p \left(1 + \frac{3}{2} \frac{k^2}{\omega_p^2} \bar{w}_{11}^2 \right)^{\pm} \quad \omega_p = \left(\frac{4\pi n e^2}{m} \right)^{1/2}$$

$$1.2 \quad \gamma_{\kappa} = \operatorname{Im} \omega_{\kappa} \approx \frac{\pi}{2} \frac{\omega_p^3}{k^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial U_{11}} \Big|_{U_{11} = \frac{\operatorname{Re} \omega_{\kappa}}{|k|}} \cdot \frac{\operatorname{Re} \omega_{\kappa} \cdot \|k\|}{|\operatorname{Re} \omega_{\kappa}| |k|}$$

also näherungsweise wie in der linearen Theorie [10], wo f_0 zeitunabhängig ist.

Dabei bedeuten: $U_{11} = \frac{k\omega}{|k|}$ $\bar{U}_{11} = \int F(U_{11}) U_{11} dU_{11}$ $\bar{U}_{11}^2 = \int F(U_{11}) U_{11}^2 dU_{11}$

$$\bar{w}_{11} = \bar{U}_{11} \cdot \frac{k}{|k|} \quad F(w) := \frac{1}{n} \int d^3v \delta(w - \frac{k\omega}{|k|}) f_0(w)$$

Die Bedingungen, unter denen nach [7] diese Lösungen gelten, sind:

$$1.3 \quad \gamma_{\kappa}^2 \ll (\operatorname{Re} \omega_{\kappa})^2 \approx \omega_p^2 \quad \text{und} \quad k^2 (\bar{U}_{11}^2 - \bar{U}_{11}^2) \ll \omega_p^2$$

(Letzteres bedeutet nahe dem Thermischen Gleichgewicht und

bei $\bar{U}_{11} = 0$: Wellenlängen \gg Debyelänge $\lambda_D := (\bar{U}_{11}^2)^{1/2} \cdot \omega_p^{-1}$)

Außerdem muß gelten:

$$1.4 \quad \left| \frac{\gamma_{\kappa}}{|k|} \right| \ll \left| \left(\frac{\partial F}{\partial U_{11}} \frac{\partial^2 F}{\partial U_{11}^2} \right) \Big|_{U_{11} = \frac{\omega_{\kappa}}{|k|}} \right|$$

daraus folgt nach 1.2:

$$1.5 \quad \left| \frac{\partial^2 F}{\partial U_{11}^2} \Big|_{U_{11} = \frac{\omega_{\kappa}}{|k|}} \right| \ll \frac{\|k\|^3}{\omega_p^3}$$

Aus 1.3 und 1.2 bekommt man die Bedingung:

$$1.6 \quad \left(\frac{\partial F}{\partial U_{11}} \Big|_{U_{11} = \frac{\operatorname{Re} \omega_{\kappa}}{|k|}} \right)^2 \ll \frac{k^4}{\omega_p^4}$$

* Bei den Ausgangsgleichungen (1) ist $\bar{w}_{11} \Big|_{t=0} = 0$ zu fordern.
Nach (4) ff. gilt dann stets $\bar{w}_{11} = 0$.

Instabilität bedeutet $\gamma_k > 0$, also für $\frac{\text{Re } \omega_k}{|k|} > 0$: $\frac{\partial F}{\partial u_{11}} \Big|_{u_{11}} = \frac{\text{Re } \omega_k}{|k|} > 0$

Wenn man außerdem nichtlineare Prozesse betrachtet, die um etwa $\frac{\gamma_0}{\omega_p}$ kleiner sind als die quasilinearen, genügt nicht mehr die Näherung 1.2 für die quasilineare Dispersionsbeziehung. Man muß die Lösungen von $\epsilon_k \omega = 0$ ebenfalls bis zu der gefragten Genauigkeit berechnen, die nach [7] bis auf Größen der Ordnung $\left(\frac{\gamma_0}{\omega_p}\right)^2$ zu gewinnen sind aus:

$$\text{Re } \epsilon_k \omega_k \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \int P \frac{f_0}{(\text{Re } \omega_k - k v)^2} d^3 v = 0 \quad \text{und} \quad \text{Im } \epsilon_k \omega_k = 0$$

$$\text{Im } \omega_k = \gamma_k \approx \frac{\pi}{2} \frac{\partial F}{\partial u_{11}} \Big|_{u_{11}} = \frac{\text{Re } \omega_k}{|k|} \cdot k^2 \cdot \left[\frac{1}{\omega} \int \frac{f_0}{(\text{Re } \omega_k - k v)^3} d^3 v \right]^{-1}$$

Der Energiesatz der QT für diese Lösung (ähnlich wie in [1b]): Die Gleichung für die Verteilungsfunktion in der QT mit dieser Lösung lautet (nach (24) und (25)):

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{e^2}{m^2} \int d^3 k \left(\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\varphi(-k, t) \varphi(k, t)}{(2\pi)^3 \cdot V} \right) k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\gamma_k}{(k \omega - \text{Re } \omega_k)^2 + \gamma_k^2} k \frac{\partial f_0}{\partial \omega}$$

Dann ist für $\gamma_k > 0$ beim Beweis des Energiesatzes in (29) die quasilineare Lösung einzusetzen und zu ersetzen:

$$\frac{k \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{k \omega - \omega_k} \quad \text{durch} \quad \frac{i \gamma_k}{(k \omega - \text{Re } \omega_k)^2 + \gamma_k^2} k \frac{\partial f_0}{\partial \omega}$$

Dann erhält man in (30) statt

$$i \int \frac{k \omega}{k \omega - \omega_k} k \frac{\partial f_0}{\partial \omega} d^3 v \quad :$$

$$- \gamma_k \int \frac{k \omega}{(k \omega - \text{Re } \omega_k)^2 + \gamma_k^2} k \frac{\partial f_0}{\partial \omega} d^3 v$$

Durch Zerlegen wird daraus:

$$= - \gamma_k \int k \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \frac{k \omega - \text{Re } \omega_k}{(k \omega - \text{Re } \omega_k)^2 + \gamma_k^2} d^3 v - \text{Re } \omega_k \int k \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \frac{\gamma_k}{(k \omega - \text{Re } \omega_k)^2 + \gamma_k^2} d^3 v$$

Bis auf Korrekturen quadratischer Ordnung in $\frac{\gamma_u}{Re\omega_u}$ (nach der Behandlung der Dispersionsbeziehung in [7]) kann man für die Integrale in 1.11 zum $\lim_{\gamma_u \rightarrow 0}$ übergehen und erhält damit aus den einzelnen Gliedern als Beiträge (für alle $\gamma_u \geq 0$ gültig):

$$1.12 \approx -\gamma_u \int (P) \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{k\omega - Re\omega_u} d^3v - \gamma_u Re\omega_u \int (P) \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{(k\omega - Re\omega_u)^2} d^3v - Re\omega_u \pi \int k \frac{\partial f_0}{\partial \omega} d(k\omega - Re\omega_u) d^3v$$

Dieses Ergebnis würde direkt aus (25') folgen, statt wie hier näherungsweise aus (25). Nach 1.7 heben sich die letzten beiden Summanden in 1.12 gegenseitig auf. Nach Gl. (26) - (28) ist der Energiesatz erfüllt.

In der Näherung $|Re\omega_u| \approx \omega_p$ erhält man

$$1.13 \approx -\gamma_u \frac{mk^2}{4\pi e^2} + 2\gamma_u \frac{mk^2}{4\pi e^2} (1-1)$$

Bei instabilen Wellen tragen die mit diesen in Resonanz stehenden Teilchen nur über das dritte Glied in 1.12 bei. Daher kann man für 1.13, nach den Beiträgen von diesen resonanten und den übrigen, nichtresonanten Teilchen aufgespalten, auch schreiben:

$$\approx -2\gamma_u \frac{mk^2}{4\pi e^2} + \gamma_u \frac{mk^2}{4\pi e^2}$$

Die nichtresonanten Teilchen dämpfen also die instabilen Wellen [1b].

Das Ergebnis 1.13 folgt auch kürzer aus der Umrechnung des Ausdrucks 1.9:

$$i \int \frac{k\omega}{k\omega - Re\omega_u} k \frac{\partial f_0}{\partial \omega} d^3v$$

(wie in Abschnitt I.4)

$$= i\omega_u \int \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{k\omega - \omega_u} d^3v$$

mit (21) erhält man weiter

$$= i\omega_u \frac{mk^2}{4\pi e^2}$$

Der Realteil davon stimmt aber mit 1.13 überein.

Anhang 2

Aus (18) zusammen mit (11) folgt als exakte Dispersionsbeziehung der ersten Ordnung (vgl. Gl. 2.22 in [6]) - betrachtet im $\lim_{V \rightarrow \infty}$:

$$\begin{aligned}
 k^2 \varphi_{k\omega} &= \frac{4\pi e^2}{m} \int d^3v \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \iint \frac{d\omega' d\omega''}{(2\pi)^2} e^{-i(\omega'+\omega'')t} \varphi_{k\omega'} \frac{k \frac{\partial f_{\omega''}}{\partial \omega''}}{k\omega - \omega' - \omega''} - \\
 2.1 \quad &- \frac{4\pi e^2}{m} \int d^3v \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \iint \frac{d\omega' d\omega''}{(2\pi)^2} e^{-ik\omega t - i\omega' t} \varphi_{k\omega'} \frac{k \frac{\partial f_{\omega''}}{\partial \omega''}}{k\omega - \omega' - \omega''} - \\
 &- 4\pi e \int d^3v \int dt e^{i\omega t} e^{-ik\omega t} g_u(\omega)
 \end{aligned}$$

Daraus folgt in anderer Zusammenfassung:

$$\begin{aligned}
 &\int_{ic'-\infty}^{ic'+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \varphi_{k\omega'} \left[\frac{1}{-i(\omega' - \omega)} - \frac{4\pi e^2}{m k^2} \int d^3v \frac{k \frac{\partial f_{\omega - \omega'}}{\partial \omega}}{k\omega - \omega} \right] = \\
 2.2 \quad &= - \frac{4\pi e}{k^2} \int d^3v \frac{1}{i(k\omega - \omega)} g_u(\omega) - \\
 &- \frac{4\pi e^2}{m k^2} \int d^3v \int \frac{d\omega'}{2\pi} \varphi_{k\omega'} \frac{k \frac{\partial f_{\omega - \omega'}}{\partial \omega}}{2 k\omega - \omega'}
 \end{aligned}$$

Bei Vernachlässigung der zeitlichen Veränderlichkeit von f_0 wie in der QT gilt näherungsweise:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{k\omega} \varphi_{k\omega} &= \left(1 - \frac{4\pi e^2}{m k^2} \int d^3v \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{k\omega - \omega} \right) \varphi_{k\omega} = \\
 2.3 \quad &\approx - \frac{4\pi e}{k^2} \int d^3v \frac{1}{i(k\omega - \omega)} \left(g_u(\omega) + \frac{e}{m} \int \frac{d\omega'}{2\pi} \varphi_{k\omega'} \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{k\omega - \omega'} \right)
 \end{aligned}$$

Bei Vernachlässigung der zeitlich gedämpften Potentialanteile rechts und bis auf die Korrekturen höherer Ordnung für die Zeitabhängigkeit der Verteilungsfunktion (Kapitel IV) erhält man aus dem Ansatz $\varphi(k,t) \approx \alpha_u(t) e^{-i\omega_u t}$ (79) die Dispersionsbeziehung $\varepsilon_{k\omega_u} \approx 0$ (Lösung: Anhang 1).

Anhang 3

Für ein stark gedämpftes Plasma gilt die Lenard-Balescu-Gleichung (Literatur in [8]). Dabei spielt die spezielle Gestalt der Anfangsbedingungen der Fluktuationen (11) keine Rolle [19] (aber auch keine Wellenprozesse höherer Ordnung - und die Verteilungsfunktion ist annähernd zeitunabhängig).

Man kommt mit dem Ausdruck (20) für die Fluktuationen aus, erhält aber eine andere asymptotische Lösung für das Potential als (22). Nach [8] ist dieses für ein Testelektron am Ort \mathbf{w}_0 mit der Geschwindigkeit w_0 :

$$3.1 \quad \varphi_{\mathbf{w}\omega} = \frac{-e}{(2\pi)^3} \cdot \frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{w}_0}}{\epsilon_0 k^2 \epsilon_{\mathbf{k}\omega}} \cdot \frac{i}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{w}_0} \quad \epsilon_0 := \frac{1}{4\pi} \quad \epsilon_{\mathbf{k}\omega}^* = \epsilon_{-\mathbf{k}, -\omega^*}$$

Dabei braucht für die asymptotische Zeitabhängigkeit jetzt nur der Pol bei $\omega = \mathbf{k}\mathbf{w}_0$ berücksichtigt zu werden. Als Beitrag dieses Testteilchens zur Änderung der Verteilungsfunktion erhält man nach (14) - die Verteilungsfunktion wird dort rechts zeitunabhängig angenommen:

$$3.2 \quad \left(\frac{\partial f_0}{\partial t} \right)_{\text{tt}} = -i \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{e^2}{\epsilon_0^2} \int \frac{d^3k}{k^4} \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3 V} \frac{1}{\epsilon_{\mathbf{k}, \mathbf{w}_0} \cdot \epsilon_{-\mathbf{k}, -\mathbf{w}_0}} k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{k\omega - \mathbf{k}\mathbf{w}_0}$$

Hier ist, wie bei (20) erklärt, bei der Integration über $\frac{k\omega}{|k|}$ unter allen Polen zu integrieren. Der Hauptwert trägt aus Symmetriegründen hier in Strenge nichts bei, da der Pol ganz nahe der reellen Achse liegt. Nun wird 3.2 noch vor dem $\lim_{V \rightarrow \infty}$ über alle im Volumen vorkommenden Testelektronen mit den verschiedenen Geschwindigkeiten w_0 summiert (jetzt ist also über alle Pole hinweg zu integrieren):

$$3.3 \quad \frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\pi e^4}{(2\pi)^6 m^2 \epsilon_0^2} \int \frac{d^3k}{k^4} k \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{V f_0(w_0) k \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{V \cdot |\epsilon_{\mathbf{k}, \mathbf{w}_0}|^2} \delta(k\omega_0 - \mathbf{k}\mathbf{w}_0) d^3v_0 \right)$$

$$3.4 \quad = \frac{\pi e^4}{(2\pi)^6 m^2 \epsilon_0^2} \int \frac{d^3k}{|k|^5} k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{nF\left(\frac{k\omega}{|k|}\right) k \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{|\epsilon_{\mathbf{k}, \mathbf{w}_0}|^2}$$

$$nF\left(\frac{k\omega}{|k|}\right) := \int d^3v' f_0(v') \delta\left(\frac{k\omega}{|k|} - \frac{k\omega'}{|k|}\right)$$

Das ist die eine Hälfte der Lenard-Balescu-Gleichung.
Die andere Hälfte erhielte man hinzu, wenn man in 3.2
bzw. 3.3 im Ausdruck

$$\frac{f_0(\omega_0) \& \frac{\partial f_0}{\partial \omega}(\omega)}{\& \omega - \& \omega_0}$$

die Argumente ω_0 und ω vertauscht, so daß statt $f_0(\omega_0) \& \frac{\partial f_0}{\partial \omega}(\omega)$

in 3.3 $-f_0(\omega) \& \frac{\partial f_0}{\partial \omega_0}(\omega_0)$ erscheint.

Dadurch wird außer der Wirkung der von Testteilchen erzeugten
Fluktuationen auf die Verteilungsfunktion auch noch die Rück-
wirkung der letzteren berücksichtigt. (Dieser zweite Teil
ohne Beweis).

Anhang 4

Die Fluktuationen, die in dritter Ordnung dazukommen, erhält man aus denen der zweiten Ordnung (\hat{f}_2 nach (45)) - analog der Berechnung der Fluktuationen zweiter Ordnung aus denen der ersten Ordnung (Gl. (44)). Wie bei Gl. (47) bemerkt, existieren die Potentialanteile und daher auch die Fluktuationen im $\lim V \rightarrow \infty$ zwar nicht, wohl aber der Wert, den man erhält, wenn man vor dem Grenzübergang durch \sqrt{V} teilt. Daher wird gleich dieser Wert angegeben - das Zeichen $\lim V \rightarrow \infty$ wird zur Abkürzung wie bisher nicht eigens dazugeschrieben:

$$4.1 \quad V^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial f_3}{\partial t} = -i \left(\frac{c}{m}\right)^3 \int d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 k_3 \frac{d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3}{(2\pi)^3} e^{i(k_1+k_2+k_3)x - i(\omega_1+\omega_2+\omega_3)t} \cdot \\ \cdot \frac{\varphi_{k_1\omega_1} \varphi_{k_2\omega_2} \varphi_{k_3\omega_3}}{\sqrt{V}} \left(1 - \frac{\delta(k_1+k_2)}{(2\pi)^3 V}\right) \left(1 - \frac{\delta(k_1+k_2+k_3)}{(2\pi)^3 V}\right) k_3 \frac{\partial}{\partial \omega_3} \frac{k_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2} k_1 \frac{\partial f_0}{\partial \omega_1}}{k_1+k_2 \omega_1 - \omega_2 - \omega_3}$$

Die Zeitintegration nach Muster der Gleichungen (9) - (11) ergibt noch einen Faktor

$$\frac{-i}{(k_1+k_2+k_3)\omega_1 - \omega_2 - \omega_3}$$

unter dem Integral. Damit können dann die Zusätze dritter Ordnung für die Gleichungen der Verteilungsfunktion bzw. die Dispersionsbeziehung berechnet werden.

Durch den Faktor $\left(1 - \frac{1}{(2\pi)^3 V} \delta(k_1+k_2+k_3)\right)$ in 4.1 ist der räumlich homogene Teil abgezogen, der die Form des Zusatzes zweiter Ordnung in der Gleichung für die Verteilungsfunktion

hat: $\frac{\hat{f}_0^{\text{II}}}{\partial t} - \frac{\hat{f}_0^{\text{I}}}{\partial t}$

Anhang 5

Die Fluktuationen aus Kapitel II können in einer Form an-
geschrieben werden, die der Darstellung in [5], Gl. (56)
entspricht. Dabei sind die Ergebnisse von (20), (45) und
Anhang 4 mitverwertet:

Dabei werden die Abkürzungen verwendet:

$$g(k_i, \omega_i) = -2\pi e^{i k \omega_0} \delta(\omega_i - k_i \omega_0) \quad v := v_0 + v_0 t, \quad \omega := \omega_0$$

$$\text{und} \quad [g, f] := \frac{1}{m} \left(\frac{\partial g}{\partial \omega_0} \frac{\partial f}{\partial \omega_0} - \frac{\partial g}{\partial v_0} \frac{\partial f}{\partial v_0} \right)$$

Dann ist, wenn der Integrationsweg der ω_i' (nicht von ω_i)
längs der reellen Achse verläuft:

$$\begin{aligned} (\hat{f}_1^2 + f_2 + f_3) \cdot V^{-\frac{1}{2}} &= \frac{i}{(2\pi)^2} \int d^3 k_1 d\omega_1 d\omega_1' e^{i(\omega_1' - \omega_1)t} \frac{[g(k_1, \omega_1), f_0]}{\omega_1' - \omega_1} \frac{\varphi_{k_1 \omega_1}}{\sqrt{V}} + \\ &+ \frac{(i)^2}{(2\pi)^4} \int d^3 k_1 d^3 k_2 d\omega_1 d\omega_2 d\omega_1' d\omega_2' e^{i(\omega_1' + \omega_2' - \omega_1 - \omega_2)t} \\ &\cdot \frac{[g(k_2, \omega_2), [g(k_1, \omega_1), f_0]]}{(\omega_1' - \omega_1)(\omega_1' + \omega_2' - \omega_1 - \omega_2)} \frac{\varphi_{k_1 \omega_1} \varphi_{k_2 \omega_2}}{\sqrt{V}} \left(1 - \frac{\delta(k_1 + k_2)}{(2\pi)^3 V} \right) + \\ &+ \frac{(i)^3}{(2\pi)^6} \int \left(\prod_1^3 d^3 k_i \right) \cdot \left(\prod_1^3 d\omega_i \right) \cdot \left(\prod_1^3 d\omega_i' \right) e^{i \sum_1^3 (\omega_i' - \omega_i)t} \\ &\cdot \frac{[g(k_3, \omega_3), [g(k_2, \omega_2), [g(k_1, \omega_1), f_0]]]}{(\omega_1' - \omega_1)(\omega_1' + \omega_2' - \omega_1 - \omega_2)(\omega_1' + \omega_2' + \omega_3' - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3)} \\ &\cdot \frac{\varphi_{k_1 \omega_1} \varphi_{k_2 \omega_2} \varphi_{k_3 \omega_3}}{\sqrt{V}} \left(1 - \frac{\delta(k_1 + k_2)}{(2\pi)^3 V} \right) \cdot \left(1 - \frac{\delta(k_1 + k_2 + k_3)}{(2\pi)^3 V} \right) \end{aligned}$$

Bei elektrostatischen Schwingungen in einem äußeren Magnetfeld z.B. müßte für obiges $\varrho(k; \omega)$ eingesetzt werden [5]:

$(-e) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i k w(\tau) - i \omega \tau) d\tau$, wobei $w(\tau)$ die von den Schwingungen ungestörte Bahn beschreibt.

Im Orts-Zeit-Raum lautet diese Funktion $\varrho(\omega, t) = (-e) \int \exp(i k w(\tau) - i k w) d^3k =$
 $= (-e) (2\pi)^3 \delta(\omega - w(\tau))$ und beschreibt

bis auf den Normierungsfaktor die Ladungsdichte eines (ungestörten) Teilchens in Abhängigkeit von seinen Anfangsbedingungen.

Anhang 6

Wenn man die Amplituden $\rho(k,t) \approx \alpha_k(t) e^{-i \int \omega_k dt}$ (79) benützt und - anders als zu Beginn des Kapitels II - eine Störungsrechnung der quasilinearen Näherung durchführt (vgl. [16]), erhält man gleich die nichtlinearen Potentialanteile von (70) bzw. die entsprechenden Fluktuationen. Durch die schwache Zeitabhängigkeit der α_k bekommt man dazu noch einen weiteren Anteil - wie in (80). Dieser ist nur durch die Art des Ansatzes (79) bedingt und ändert nichts an den kinetischen Gleichungen von Kapitel III. Wie dort sei die Zeitabhängigkeit von f_0 vernachlässigt.

Statt bei der Herleitung der Gleichungen (76) und (78) kann man jedoch schon in den Fluktuationen die Phasen mitteln, wenn sie ungerader Ordnung in α_k sind. Diese lauten somit - bis auf den Anteil gerader Ordnung, der in (33) untersucht ist:

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{f_1(k_1, \omega_1, t)}{V} \right\rangle = \\ & = - \frac{e}{m} \int d^3 k e^{i(k\omega - \int \omega_k dt)} \frac{1}{k\omega - \omega_k} \alpha_k k \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \cdot V^{-\frac{1}{2}} + \\ & + \frac{e}{m} \int d^3 k e^{i(k\omega - \int \omega_k dt)} \frac{1}{i(k\omega - \omega_k)^2} k \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} V^{-\frac{1}{2}} + \\ & + \left(\frac{e}{m}\right)^2 \int d^3 k_1 d^3 k_2 e^{i(k_1 \omega_1 - \int \omega_{k_1} dt)} \frac{1}{(k_1 + k_2)^2 \varepsilon_{k_1, \omega_{k_1} + \omega_{k_2}}} \mu^{(2)}(k_1, \omega_{k_1}; k_2, \omega_{k_2}) \frac{\alpha_k}{V} \cdot \\ & \cdot \frac{|\alpha_{k_2}|^2}{(2\pi)^3 V} e^{2i\int \gamma_{k_2} dt} \left[\frac{2}{k_1 \omega_1 - \omega_{k_1} - 2i\gamma_{k_2}} \left(k_2 \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_1 + k_2}{(k_1 + k_2)\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}} - (k_1 + k_2) \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_2}{k_2 \omega + \omega_{k_2}} \right) \right] \frac{\partial f_0}{\partial \omega} - \\ & - \left(\frac{e}{m}\right)^3 \int d^3 k_1 d^3 k_2 e^{i(k_1 \omega_1 - \int \omega_{k_1} dt)} \frac{\alpha_{k_1}}{V} \frac{|\alpha_{k_2}|^2}{(2\pi)^3 V} e^{2i\int \gamma_{k_2} dt} \cdot \\ & \cdot \frac{1}{k_1 \omega_1 - \omega_{k_1} - 2i\gamma_{k_2}} \cdot k_2 \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{(k_1 - k_2)\omega - \omega_{k_1} + \omega_{k_2}^*} \left(k_1 \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_2}{k_2 \omega - \omega_{k_2}^*} - k_2 \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_1}{k_1 \omega - \omega_{k_1}} \right) \frac{\partial f_0}{\partial \omega} \end{aligned}$$

Von der zweiten Ordnung bekommt man den vorletzten Summanden als Beitrag niedrigster Ordnung, wenn man vor der Phasenmittelung die Amplituden mittels der Poissongleichung (wie Gleichung (64) bis auf den Ansatz (79) für die Amplituden) durch nichtlineare Größen ausdrückt.

Die Wachstumsrate für die nichtlinearen Wellenprozesse:

$\operatorname{Re} \frac{\partial \ln \alpha_k}{\partial t}$ ist gegen die quasilineare: γ_k sehr klein angenommen. Daher kann sie in den Fluktuationsanteilen vernachlässigt werden, die in den Amplituden α_k nicht-linear sind.

Wenn diese Annahme nicht mehr zutrifft (wie z.B. im asymptotischen Zustand nach der QT), müßte man dort γ_k durch $\gamma_k + \operatorname{Re} \frac{\partial \ln \alpha_k}{\partial t}$ ersetzen. Wenn diese Korrektur noch klein ist, kann man nach $\frac{\partial \ln \alpha_k}{\partial t}$ entwickeln.

(So ist z.B. auch der zweite Summand in 6.1 das erste Entwicklungsglied des ersten Summanden danach).

Anhang 7

Die Wellenenergiedichte ändert sich in Gleichung (74) bzw. (75) nicht nur quasilinear, sondern auch wesentlich nicht-linear. In diesem nichtlinearen Ausdruck kommt außer den bisherigen einfachen Resonanzen auch eine neue Resonanz bei $(k-k_1)\omega = \text{Re}(\omega_k - \omega_{k_1})$ vor. Da sich bei ihr die Verteilungsfunktion im allgemeinen wenig ändert, ist diese insbesondere im asymptotischen Zustand der QT wichtig

(wo $\frac{\gamma_t}{\omega_p} \rightarrow 0$ geht; mit γ_t verschwindet die Geschwindigkeitsableitung der Verteilungsfunktion an den einfachen Resonanzen: $k_i \omega = \text{Re} \omega_{k_i}$). Die Prozesse mit diesen Resonanzteilchen hängen im wesentlichen nur von der augenblicklichen Größe der Wellenenergiedichte ab - während die quasilinearen Prozesse mit der Geschwindigkeitsableitung der Verteilungsfunktion gegen Null gehen können.

Der nichtlineare Anteil von (74) durch den neu auftretenden Pol wird nun untersucht - die übrigen Pole werden als Hauptwerte genommen. Deren Beiträge wären etwa um die Größenordnung $(k_0 \lambda_D)^3 \frac{\gamma_t}{\omega_p} \approx \frac{\gamma_t}{\gamma_0} (k_0 \lambda_D)$ kleiner als die von 7.2, also um $\approx \epsilon_\omega \cdot (k_0 \lambda_D)^2$ ($\approx (k_0 \lambda_D)^2$ nach (17)f.) kleiner als die quasilinearen. Bis auf Größen, die etwa um $\frac{\gamma_t \cdot k_0}{\omega_p \Delta k}$ kleiner sind, kann man zur δ -Funktion übergehen und erhält damit von dem zu untersuchenden Pol aus (74)f.:

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{k^2 |\varphi(k,t)|^2}{(2\pi)^{-3} V} - 2\gamma_k - 2 \left(\frac{\partial}{\partial t} \text{Re} \left\{ \frac{\varphi^{(\alpha)}(-k,t) \varphi^{(\beta)}(k,t)}{(2\pi)^{-3} V} \right\} \right) \cdot \left(\frac{|\varphi(k,t)|^2}{(2\pi)^{-3} V} \right)^{-1} \approx$$

7.1

$$\approx 2 \left(\frac{\partial \epsilon_{k\omega}}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_k} \right)^{-1} \cdot \pi \left(\frac{e}{m} \right)^2 \omega_p^2 \int d^3 k_1 \frac{(k k_1)^2 |\varphi(k_1,t)|^2}{k^2 (2\pi)^{-3} V} \int d^3 v \delta((k-k_1)\omega - \text{Re}(\omega_k - \omega_{k_1})) \frac{k-k_1}{(\text{Re}\omega - \text{Re}\omega_{k_1})^4} \frac{\partial f_0}{\partial v} \cdot n^{-1}$$

Ebenso bekommt man eine asymptotische Gleichung für die Verteilungsfunktion, wenn man in (76) nur diesen Pol beachtet. -

Bis auf Größen, die um $\approx (k_0 \lambda_D)^2$ kleiner sind, kann man

ferner $\frac{\partial \epsilon_{k\omega}}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_k}$ durch $\frac{2}{\omega_p} \frac{\text{Re} \omega_k}{|\text{Re} \omega_k|}$ ersetzen und nur den

Anteil herausnehmen, der zur gesamten Wellenenergieänderung nichts beiträgt:

Dieser ist antisymmetrisch in den Variablen k, k_1 . Man erhält ihn, wenn man sich auf den Integrationsbereich beschränkt, wo ω_k und ω_{k_1} gleiches Vorzeichen haben.

Im Eindimensionalen ist er übersichtlich zusammenzufassen, bis auf Glieder $\sim (k_0 \lambda_D)^2$ ist er dort gleich:

$$\approx \frac{\pi}{\omega_p} \cdot \left(\frac{e}{m}\right)^2 \left(d^3 k_1 \frac{k_1^2 |\varphi(k_1, t)|^2}{(2\pi)^3 V} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{Re} \omega_k}{|\operatorname{Re} \omega_k|} + \frac{\operatorname{Re} \omega_{k_1}}{|\operatorname{Re} \omega_{k_1}|} \right) \right).$$

7.2

$$\cdot \frac{k-k_1}{|k-k_1|} \frac{\partial}{\partial v_{||}} \frac{1}{n} \left(f_0 \delta\left(\frac{k v}{|k|} - v_{||}\right) d^3 v \right) \Bigg|_{v_{||} = \frac{3}{2} \frac{U_{||}^2}{\omega_p} (k+k_1)} \frac{\operatorname{Re} \omega_k}{|\operatorname{Re} \omega_k|}$$

Definition von $\overline{v_{||}^2}$ wie in Anhang 1.2

Wenn ein kleiner überthermischer Elektronenstrom über die Maxwellverteilung überlagert ist, ergibt dieses Glied positive Integrationsbeiträge für $|k| > |k_1|$, negative für $|k| < |k_1|$. Es gibt daher ein mittleres k_m , wofür das Integral über k_1 verschwindet. Die Wellen großer Länge wachsen, kurze werden gedämpft. 7.1 ist eine nichtlineare Stoßfrequenz von etwa der Größenordnung

$$7.3 \quad (k_0 \lambda_D) \cdot \varepsilon_\omega \cdot \omega_p \quad \text{mit} \quad \varepsilon_\omega := \frac{\langle \mathcal{E}^2(u_1^+) \rangle}{8\pi} \left(n \frac{m}{2} \overline{v_{||}^2} \right)^{-1}$$

Im folgenden Anhang wird nun ebenso der Rest des Gliedes (75) an der Resonanz der Kombinationswellen untersucht. Man erhält ebenfalls den Anteil 7.2, aber mit negativem Vorzeichen, insgesamt bleiben nur Glieder übrig, die um etwa $(k_0 \lambda_D)^4$ kleiner sind, also etwa von der Größenordnung [1b]

$$7.4 \quad (k_0 \lambda_D)^5 \varepsilon_\omega \cdot \omega_p$$

In einem Elektronen-Ionen-Plasma, in dem die Ionentemperatur T_i groß gegen die Elektronentemperatur T_e ist, gewinnt man dagegen das Glied 7.2 bis auf einen Faktor $\approx \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^2$ [23].

Anhang 8

Von dem Potentialanteil in der Entwicklung (70) aus der zweiten Ordnung erhält man folgenden Beitrag in der Gleichung für die spektrale Wellenenergiedichte:

$$\begin{aligned}
 & 2 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re} \left\langle \frac{\varphi^{(\alpha)}(k, t) \varphi^{(\beta)}(k, t)}{(2\pi)^{-3} V} \right\rangle = \\
 & = 2 \operatorname{Re} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \frac{(2\pi)^{-3}}{V} \varphi^{(\alpha)}(-k, t) \frac{2}{\varepsilon_{\alpha\omega} k^2} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int d^3k_1 \frac{i}{\omega - \omega_{k_1} - \omega_2} \mu^{(2)}(k_1, \omega_{k_1}; k - k_1, \omega_2) \right. \\
 & 8.1 \\
 & \cdot \varphi_{k_2}^{(\alpha)} \frac{1}{(k - k_1)^2 \varepsilon_{\alpha\omega_2}} \int d^3k_1' \frac{i}{\omega_2 - \omega_{k_1'} - \omega_{k - k_1'}} \mu^{(2)}(k_1', \omega_{k_1'}; k - k_1', \omega_{k - k_1'}) \varphi_{k_1'}^{(\alpha)} \varphi_{k - k_1'}^{(\alpha)} = \\
 & = 2\gamma_{\alpha} \operatorname{Re} \left\langle \frac{\varphi^{(\alpha)}(-k, t) \varphi^{(\beta)}(k, t)}{(2\pi)^{-3} V} \right\rangle + \\
 & + 8 \operatorname{Im} \frac{|\varphi^{(\alpha)}(k, t)|^2}{k^2 (2\pi)^{-3} V} \cdot \frac{1}{\frac{\partial \varepsilon_{\alpha\omega}}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_{\alpha}}} \int d^3k_1 \mu^{(2)}(k_1, \omega_{k_1}; k - k_1, \omega_{\alpha} + \omega_{k_1}) \cdot \\
 & 8.2 \\
 & \cdot \frac{1}{\varepsilon_{\alpha\omega_2} \omega_{\alpha} + \omega_{k_1}} (k - k_1)^2 \mu^{(2)}(k_1, \omega_{k_1}; k, \omega_{\alpha}) \frac{|\varphi^{(\alpha)}(k_1, t)|^2}{(2\pi)^{-3} V} = \\
 & = 2\gamma_{\alpha} \operatorname{Re} \left\langle \frac{\varphi^{(\alpha)}(-k, t) \varphi^{(\beta)}(k, t)}{(2\pi)^{-3} V} \right\rangle + \\
 & + 2 \frac{|\varphi^{(\alpha)}(k, t)|^2}{(2\pi)^{-3} V} \operatorname{Im} \frac{1}{\frac{\partial \varepsilon_{\alpha\omega}}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_{\alpha}}} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \int d^3k_1 \frac{|\varphi^{(\alpha)}(k_1, t)|^2}{(2\pi)^{-3} V} \frac{1}{(k - k_1)^2 \varepsilon_{\alpha\omega_2} \omega_{\alpha} + \omega_{k_1}} \cdot \\
 & 8.3 \\
 & \cdot \frac{4\pi e^2}{m} \left[\int \frac{(k - k_1) k}{(k\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_1} - \omega_{\alpha})^2 (k\omega - \omega_{k_1})} d^3v + \int \frac{k k_1 (k - k_1) \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{(k\omega - \omega_{\alpha} - 2i\gamma_{\alpha})^2 ((k - k_1)\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_1})} d^3v \right] \\
 & \cdot \frac{4\pi e^2}{m} \int \frac{1}{(k - k_1)\omega - \omega_{k_1} - \omega_{k_1}} \left(k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_1}{k_1\omega + \omega_{k_1}} - k_1 \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k}{k\omega - \omega_{k_1}} \right) \frac{\partial f_0}{\partial \omega} d^3v
 \end{aligned}$$

Asymptotisch sind nur die Pole an der Resonanz

$(k - k_1)\omega = \operatorname{Re}(\omega_{\alpha} + \omega_{k_1})$ von Bedeutung. Beschränkt man sich auf diese, so folgt bei einem **e i n d i m e n s i o n a l e n** Wellenspektrum für den nichtlinearen Anteil von 8.3:

$$2 \frac{|\varphi^{(k)}(k_1, t)|^2}{k^2 (2\pi)^{-3} V} \left(\frac{\partial \varepsilon_{k, \omega}}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_k} \right)^{-1} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \int d^3 k_2 \frac{|\varphi^{(k)}(k_2, t)|^2}{(k-k_2)^2 (2\pi)^{-3} V} \frac{4\pi e^2}{m} \cdot \frac{1}{\operatorname{Re} \varepsilon_{k-k_2, \omega_k + \omega_{k_2}}}$$

$$\left[\left\{ \int \frac{(k-k_2)k \cdot k_2 \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{(k-k_2-\omega_k - 2i\eta_k)^2 (k-k_2-\omega_{k_2})} d^3 v \cdot \left(\frac{4\pi e^2}{m} \right) \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_2}{k_2 \omega - \operatorname{Re} \omega_{k_2}} - k_2 \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k}{k \omega - \operatorname{Re} \omega_k} \right\} \frac{\partial f_0}{\partial \omega} d^3 v \right.$$

$$\left. + \frac{(-\operatorname{Im} \varepsilon_{k-k_2, \omega_k + \omega_{k_2}})}{\operatorname{Re} \varepsilon_{k-k_2, \omega_k + \omega_{k_2}}} + \frac{k-k_2}{|k-k_2|} \pi \left(\delta(U_{11} - \frac{\operatorname{Re}(\omega_k - \omega_{k_2})}{k-k_2}) \frac{\partial}{\partial U_{11}} \left(\frac{1}{k_1 U_{11} - \operatorname{Re} \omega_{k_2}} - \frac{1}{k U_{11} - \operatorname{Re} \omega_k} \right) \right) \frac{\partial F}{\partial U_{11}} dU_{11} \right\} +$$

$$+ \frac{(-\operatorname{Im} \varepsilon_{k-k_2, \omega_k + \omega_{k_2}})}{\operatorname{Re} \varepsilon_{k-k_2, \omega_k + \omega_{k_2}}} \omega_p^2 k^2 k_2^2 (k-k_2) \left(\frac{n \frac{\partial F(U_{11})}{\partial U_{11}} dU_{11}}{(k U_{11} - \operatorname{Re} \omega_k)^2 ((k-k_2) U_{11} - \operatorname{Re}(\omega_k - \omega_{k_2}))} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial U_{11}} \left(\frac{1}{k_1 U_{11} - \operatorname{Re} \omega_{k_2}} - \frac{1}{k U_{11} - \operatorname{Re} \omega_k} \right) \right) \frac{\partial F}{\partial U_{11}} dU_{11}$$

$$+ \omega_p^2 k^2 k_2^2 \frac{k-k_2}{|k-k_2|} \left(\pi \left(\delta(U_{11} - \frac{\operatorname{Re}(\omega_k - \omega_{k_2})}{k-k_2}) \right) \frac{n \frac{\partial F}{\partial U_{11}} dU_{11}}{(k U_{11} - \operatorname{Re} \omega_k)^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial U_{11}} \left(\frac{1}{k_1 U_{11} - \operatorname{Re} \omega_{k_2}} - \frac{1}{k U_{11} - \operatorname{Re} \omega_k} \right) \right) \frac{\partial F}{\partial U_{11}} dU_{11} +$$

$$+ \left(\frac{n \frac{\partial F(U_{11})}{\partial U_{11}} dU_{11}}{(k U_{11} - \operatorname{Re} \omega_k)^2 ((k-k_2) U_{11} - \operatorname{Re}(\omega_k - \omega_{k_2}))} \right) \cdot \pi \left(\delta(U_{11} - \frac{\operatorname{Re}(\omega_k - \omega_{k_2})}{k-k_2}) \right) \frac{\partial}{\partial U_{11}} \left(\frac{1}{k_1 U_{11} - \operatorname{Re} \omega_{k_2}} - \frac{1}{k U_{11} - \operatorname{Re} \omega_k} \right) \frac{\partial F}{\partial U_{11}} dU_{11} \Big]$$

8.4

Dabei sei nach (21):

$$\varepsilon_{k-k_2, \omega_k + \omega_{k_2}} = 1 - \frac{4\pi e^2}{m(k-k_2)^2} \int \frac{(k-k_2) \frac{\partial f_0}{\partial \omega}}{(k-k_2)\omega - \omega_k - \omega_{k_2}} d^3 v$$

und im Eindimensionalen gleich:

$$8.5 \quad 1 - \frac{\omega_p^2}{(k-k_2)^2} \int \frac{\frac{\partial F}{\partial U_{11}}}{U_{11} - \frac{\omega_k + \omega_{k_2}}{k-k_2}} dU_{11}$$

Wie in Anhang 7 braucht man in 8.4 und 8.5 asymptotisch

$$\text{nur die Pole bei } U_{11} = U_0, \quad U_0 = \frac{\operatorname{Re}(\omega_k - \omega_{k_2})}{k-k_2} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\omega_{k_2} \cdot |\omega_{k_2}|}{\omega_k \cdot |\omega_{k_2}|} \right)$$

zu beachten.

Für kleine Abweichungen vom Thermischen Gleichgewicht ist

$$8.6 \quad \operatorname{Re} \varepsilon_{k-k_1, \omega_k + \omega_{k_1}} \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{(k-k_1)^2} \left\{ \frac{U_{11} \cdot F(k_1, t) dU_{11}}{k T_e \cdot (U_{11} - \frac{\operatorname{Re}(\omega_k + \omega_{k_1})}{k-k_1})} \right\} \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{(k-k_1)^2 U_{11}^2} \approx (k-k_1)^{-2} \lambda_D^2$$

Von dem Ausdruck in den geschweiften Klammern $\{ \}$ in 8.4 heben sich die größten Beiträge gegenseitig auf. Es bleiben nur Glieder übrig, die (mit 8.6) um $\approx (k_0 \lambda_D)^2$ kleiner sind.

Diese hätten dieselbe Größenordnung wie der Rest von 8.4, wenn dort nur Glieder übrigblieben, die um $\approx (k_0 \lambda_D)^4$ kleiner sind.

Wenn man zu dem Rest von 8.4 nun den Ausdruck 7.1 addiert, ist das wirklich der Fall:

$$\approx 2 \frac{|\varphi(k, t)|^2}{k^2 (2\pi)^3 V} \left(\frac{\partial \varepsilon_{k\omega}}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_k} \right)^{-1} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \int d^3 k_1 \frac{|\varphi(k_1, t)|^2}{(k-k_1)^2 (2\pi)^3 V} \frac{4\pi e^2}{m} \cdot \omega_p^2 k^2 k_1^2 (k-k_1)^2.$$

$$8.7 \quad \left[\frac{(-\operatorname{Im} \varepsilon_{k-k_1, \omega_k + \omega_{k_1}})}{(\operatorname{Re} \varepsilon_{k-k_1, \omega_k + \omega_{k_1}})^2} \cdot \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial U_{11}} dU_{11}}{(kU_{11} - \operatorname{Re} \omega_k)^2 ((k-k_1)U_{11} - \operatorname{Re}(\omega_k + \omega_{k_1}))} \right) \cdot \left(\frac{1}{k_1 U_{11} - \operatorname{Re} \omega_{k_1}} - \frac{1}{k U_{11} - \operatorname{Re} \omega_k} \right) \frac{\partial F}{\partial U_{11}} dU_{11} + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega_p^2 \cdot |k-k_1|^{-1}}{\operatorname{Re} \varepsilon_{k-k_1, \omega_k + \omega_{k_1}}} \left(\pi \int \delta(U_{11} - \frac{\operatorname{Re}(\omega_k + \omega_{k_1})}{k-k_1}) \frac{\partial F}{\partial U_{11}} \frac{dU_{11}}{(kU_{11} - \operatorname{Re} \omega_k)^2} \left(\frac{1}{k_1 U_{11} - \operatorname{Re} \omega_{k_1}} - \frac{1}{k U_{11} - \operatorname{Re} \omega_k} \right) \frac{\partial F}{\partial U_{11}} dU_{11} + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi}{k-k_1} \int \delta(U_{11} - \frac{\operatorname{Re}(\omega_k + \omega_{k_1})}{k-k_1}) \frac{\partial}{\partial U_{11}} \left(\frac{1}{k_1 U_{11} - \operatorname{Re} \omega_{k_1}} - \frac{1}{k U_{11} - \operatorname{Re} \omega_k} \right) \frac{\partial F}{\partial U_{11}} dU_{11} \cdot \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial U_{11}} dU_{11}}{(kU_{11} - \operatorname{Re} \omega_k)^2 ((k-k_1)U_{11} - \operatorname{Re}(\omega_k + \omega_{k_1}))} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{k-k_1}{|k-k_1|} \pi \int \delta(U_{11} - \frac{\operatorname{Re}(\omega_k + \omega_{k_1})}{k-k_1}) \frac{1}{(kU_{11} - \operatorname{Re} \omega_k)^4} \frac{\partial F}{\partial U_{11}} dU_{11} \right]$$

8.7 ergibt zusammengefaßt:

$$\approx 2 \frac{|\varphi(k, t)|^2}{k^2 (2\pi)^3 V} \left(\frac{\partial \varepsilon_{k\omega}}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_k} \right)^{-1} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \int d^3 k_1 \frac{|\varphi(k_1, t)|^2}{(k-k_1)^2 (2\pi)^3 V} \omega_p^4 k^2 k_1^2 \frac{(k-k_1)^2}{|k-k_1|}.$$

$$\left[\frac{1}{(\operatorname{Re} \varepsilon_{k-k_1, \omega_k + \omega_{k_1}})^2} \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial U_{11}} dU_{11}}{((k-k_1)U_{11} - \operatorname{Re}(\omega_k + \omega_{k_1}))(kU_{11} - \operatorname{Re} \omega_k)^2} \right) \left(\frac{1}{k_1 U_{11} - \operatorname{Re} \omega_{k_1}} - \frac{1}{k U_{11} - \operatorname{Re} \omega_k} \right) \frac{\partial F}{\partial U_{11}} dU_{11} \cdot \right.$$

$$\left. + \frac{\pi \omega_p^2}{k-k_1} \int \delta(U_{11} - U_0) \frac{\partial F}{\partial U_{11}} dU_{11} + \right]$$

$$+ \frac{1}{\operatorname{Re} \varepsilon_{k, \omega_k, \omega_k + \omega_{k_1}}} \cdot \left(\frac{1}{((k-k_1)v_{ii} - \operatorname{Re}(\omega_k - \omega_{k_1})) (kv_{ii} - \operatorname{Re} \omega_k)^2} + \frac{1}{((k-k_1)v_{ii} - \operatorname{Re}(\omega_k - \omega_{k_1}))^2 \cdot (k-k_1)} \right)$$

8.8

$$\cdot \left(\frac{1}{kv_{ii} - \operatorname{Re} \omega_k} - \frac{1}{kv_{ii} - \operatorname{Re} \omega_{k_1}} \right) \frac{\partial F}{\partial v_{ii}} dv_{ii} \cdot \pi \int \delta(v_{ii} - v_0) \frac{1}{(kv_{ii} - \operatorname{Re} \omega_k)^2} \frac{\partial F}{\partial v_{ii}} dv_{ii} +$$

$$+ \frac{k-k_1}{\omega_p^2} \cdot \pi \int \delta(v_{ii} - v_0) \frac{1}{(kv_{ii} - \operatorname{Re} \omega_k)^4} \frac{\partial F}{\partial v_{ii}} dv_{ii}]$$

Es bleiben nur Glieder übrig, die um $\approx (k_0 \lambda_D)^4$ kleiner sind als das letzte Glied (das von Anhang 7 übernommen ist).

Wenn man nur die einander ähnlichen Integrale mit den δ -Funktionen weiter entwickelt, bekommt man die antisymmetrischen Wellenprozesse von [1b] und [16]:

Vom letzten Glied erhält man:

$$\approx 2 \frac{|\varphi(k, t)|^2}{k^2 (2\pi)^3 V} \left(\frac{\partial \varepsilon_{k, \omega}}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_k} \right)^{-1} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \int d^3 k_1 \frac{|\varphi(k_1, t)|^2}{(k-k_1)^2 (2\pi)^3 V} \cdot \omega_p^2 \cdot k^2 \cdot k_1^2 \cdot (k-k_1)^2 \cdot$$

$$\cdot \frac{k-k_1}{|k-k_1|} \cdot \pi \int \delta(v_{ii} - v_0) \frac{\partial F}{\partial v_{ii}} dv_{ii} \cdot \omega_p^{-4} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{3}{2} k k_1 \lambda_D^2)^4}$$

8.9

aus den übrigen zusammen dagegen statt des letzten

Bruches:

$$\frac{-2}{(1 - \frac{3}{2} k k_1 \lambda_D^2)^2}$$

Die Summe ergibt gegenüber dem Ausdruck 7.2 den zusätz-

lichen Faktor:

$$4 \cdot \frac{9}{4} (k k_1 \lambda_D^2)^2 = (3 k k_1 \lambda_D^2)^4$$

Um diesen sind also die Summen der Prozesse von Anhang 7 und 8 kleiner als der Ausdruck 7.2.

Anhang 9

Wenn man den Energiesatz für die Gleichungen (76) und (78) zu beweisen sucht und dabei die Näherungslösung

$\omega \approx \omega_k$ der quasilinearen Dispersionsbeziehung

$\epsilon_{k\omega} = 0$ benützt, muß man einen bestimmten Fehler in Kauf nehmen:

Um die Rechnung nicht zu umfangreich werden zu lassen, sei sie auf einen Teil beschränkt: Statt der gesamten nichtlinearen Anteile in (78) werde nur der nichtlineare Zusatz (74) betrachtet, entsprechend in der Gleichung (78) für die Verteilungsfunktion.

Die zeitliche Änderung der thermischen Energiedichte dieses Teils ist:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{m}{2} v^2 f_0 d^3v = \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int d^3k \frac{k^2 |\varphi(k,t)|^2}{(2\pi)^{-3}V} \left[(2\gamma_k + 2\operatorname{Re} \frac{\partial \ln \alpha_k}{\partial t}) \frac{\omega_p^2}{k^2} \left(\int \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial m} d^3v}{k_{\parallel} v - \omega_k} + (\operatorname{Re} \omega_k) \int \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial m} d^3v}{(k_{\parallel} v - \omega_k)^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + (\operatorname{Re} \omega_k) \cdot \pi \int \delta(k_{\parallel} v - \omega_k) \frac{\partial f_0}{\partial m} d^3v + \left(\frac{e}{m}\right)^2 \operatorname{Im} \int d^3k_1 \frac{|\varphi(k_1, t)|^2}{(2\pi)^{-3}V} \right] \end{aligned}$$

9.1

$$\left[\frac{\omega_k + 2i\gamma_k}{k_{\parallel} v - \omega_k - 2i\gamma_k} k_1 \frac{\partial}{\partial m} \frac{1}{(k_{\parallel} v - \omega_k) - \omega_k + \omega_{k_1}} \left(k_1 \frac{\partial}{\partial m} \frac{k_1}{k_{\parallel} v - \omega_{k_1}} - k_1 \frac{\partial}{\partial m} \frac{k}{k_{\parallel} v - \omega_k} \right) \frac{\partial f_0}{\partial m} \right]$$

Mit Hilfe der Beziehung $\epsilon_{k\omega} = 0$ folgt daraus:

$$9.2 \quad = -\frac{1}{8\pi} \int d^3k_1 \frac{k^2 |\varphi(k,t)|^2}{(2\pi)^{-3}V} \cdot \left[2\gamma_k (1 - E_w) + 2\operatorname{Re} \frac{\partial \ln \alpha_k}{\partial t} - 2 \frac{\partial E_w}{\partial t} \right]$$

Der Energiesatz gilt, wenn man hier die Größen der Ordnung E_w vernachlässigt. E_w ist wie im folgenden Anhang 10 definiert (und im Eindimensionalen von der Größenordnung ϵ_w). Wenn man die quasilineare Dispersionsbeziehung entsprechend erweitert, können auch die hier zu vernachlässigenden Glieder im Energiesatz berücksichtigt werden (Anhang 12).

Anhang 10

In Kapitel III ist nur die Änderung des Imaginärteiles der Frequenz durch die Fluktuationen höherer Ordnung beachtet.

Diese beeinflussen jedoch auch den Realteil. Aus der Poissongleichung (3) folgt für diesen, wenn man sich auf die Fluktuationen von Anhang 6 beschränkt (dies genügt, um den Energiesatz - Anhang 12 - zeigen zu können) :

$$\frac{k^2}{\omega_p^2} \approx \int (P) \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial \omega} n^{-1}}{k\omega - \text{Re}\omega_U} d^3v - \left(\frac{e}{m} \right)^2 \int d^3k_1 k_1 \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{(k-k_1)\omega - \text{Re}(\omega_U + \omega_{U_1})} \cdot \left(k_1 \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k}{k\omega - \text{Re}\omega_U} - k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_1}{k_1\omega + \text{Re}\omega_{U_1}} \right) \frac{\partial f_0}{\partial \omega} n^{-1} \frac{|\varphi(k_1, t)|^2}{(2\pi)^3 V}$$

$$= E_w \cdot \frac{k^2}{\omega_p^2}$$

10.1

$$-\left(\frac{e}{m} \right)^2 \int d^3k_1 \frac{\omega_p^2}{(k+k_1)^2 \text{Re}\epsilon_{U_1, \omega_U + \omega_{U_1}}} \cdot \frac{|\varphi(k_1, t)|^2}{(2\pi)^3 V}$$

$$\cdot \int (P) \frac{n^{-1}}{(k+k_1)\omega - \text{Re}(\omega_U + \omega_{U_1})} \left(k \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_1}{k_1\omega - \text{Re}\omega_{U_1}} + k_1 \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k}{k\omega - \text{Re}\omega_U} \right) \frac{\partial f_0}{\partial \omega} d^3v$$

$$\cdot 2 \int (P) \frac{n^{-1}}{k\omega - \text{Re}\omega_U} \left(k_1 \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k+k_1}{(k+k_1)\omega - \text{Re}(\omega_U + \omega_{U_1})} - (k+k_1) \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{k_1}{k_1\omega - \text{Re}\omega_{U_1}} \right) \frac{\partial f_0}{\partial \omega} d^3v$$

Zur Veranschaulichung soll diese erweiterte Dispersionsbeziehung im eindimensionalen Beispiel näherungsweise für den in Anhang 9 betrachteten Fluktuationsanteil ausgewertet werden. Dafür ist das letzte Glied in 10.1 wegzulassen. Man erhält:

$$\frac{k^2}{\omega_p^2} \approx \frac{k^2}{(\text{Re}\omega_U)^2} + 3 \frac{k^4 \bar{u}_1^2}{(\text{Re}\omega_U)^4} \dots - \underbrace{\left(\frac{e}{m} \right)^2 \int d^3k_1 \frac{k_1^2 |\varphi(k_1, t)|^2}{(2\pi)^3 V} \cdot \frac{k^2}{\omega_p^2 \bar{u}_1^2}}_{= E_w \cdot \frac{k^2}{\omega_p^2}}$$

10.2

Durch diese Erweiterung würde sich der Realteil der Frequenz gegenüber dem quasilinearen Wert um den Faktor

$$\approx \left(1 - \frac{E_w}{2} \right) \quad \text{ändern, dadurch wiederum die quasilineare}$$

Wachstumsrate nach 1.7 um den Faktor: $\left(1 - \frac{3}{2} E_w \right) -$

- abgesehen von der Änderung von $\frac{\partial F}{\partial u_{11}} \Big|_{u_{11} = \frac{|\operatorname{Re} \omega_{cl}|}{|\kappa|}}$

Wenn man jedoch die ganze Erweiterung 10.1 vornimmt, bleibt nur noch eine Korrektur der Größenordnung $(k_0 \lambda_p)^2 \cdot \epsilon_w$ übrig.

Asymptotisch, mit $\frac{\chi t}{\omega_p} \rightarrow 0$, verschwindet auch die Korrektur der quasilinearen Wachstumsrate.

Der dann verbleibende nichtlineare Ausdruck ändert sich ebenfalls durch die Korrektur des Realteils der Frequenz. Solange aber der asymptotische Zustand noch nicht erreicht ist und die QT gilt, ist diese Änderung aber von kleinerer Ordnung.

Bass et al. [20] haben die QT formal auch schon für eine endliche Autokorrelationszeit des elektrischen Feldes erweitert. Für größere Zeiten könnte dadurch - in besserer Näherung - weiter ein Spektrum der Lösungen von 10.1 berücksichtigt werden.

Nach Abschluß der vorliegenden Arbeit wurde eine Untersuchung von Dupree (Phys. Fl. 9, 1773 (66)) bekannt. Er definiert eine "trapping time" für Teilchen. Wenn diese groß genug ist gegen die Autokorrelationszeit des Feldes, bleibt die QT eine gute Näherung.

Die Phasenbeziehungen werden dabei genauer betrachtet als hier im Kapitel III, wo über die Phasen gemittelt wird.

Anhang 11

Die Fluktuationen in (80) kann man näherungsweise aufspalten in zwei Anteile: einen, der nur die Verteilungsfunktion beeinflusst, aber die spektrale Wellenenergiedichte nicht ändert und einen anderen, der diese ändert, aber keinen nennenswerten Beitrag zur Änderung der Verteilungsfunktion liefert.

Dazu wird allerdings auf Größen, die von der Ordnung

$$(k_0 \lambda_D)^2 \quad \text{klein sind, verzichtet.}$$

Die zusätzlichen Fluktuationen (80) - vom quasilinearen Glied sei abgesehen - kann man aufspalten in die Teile:

$$\frac{e}{m} \int d^3k \frac{e^{i(k \cdot r - \omega t)}}{i(k \cdot v - \omega)} \left(\left[\alpha_u k \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial f_0^I}{\partial t} + \frac{8}{3} \frac{\alpha_u k \frac{\partial f_0}{\partial v}}{k \cdot v - \omega} \frac{\partial \omega^{(I)}}{\partial t} \right] - \left[\frac{5}{3} \frac{\alpha_u k \frac{\partial f_0}{\partial v}}{k \cdot v - \omega} \frac{\partial \omega^{(I)}}{\partial t} - \frac{\partial \alpha_u}{\partial t} k \frac{\partial f_0}{\partial v} \right] \right)$$

11.1

In der Gleichung für die spektrale Wellenenergiedichte ergeben diese über die Poissongleichung das Glied (wie

$$\text{in (82))}: 2 \operatorname{Re} \frac{\partial n \alpha_u}{\partial t} = \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \varepsilon_{\omega}}{\partial \omega / \omega - \omega_u} \right)^{-1} \cdot \left\{ -\frac{5}{3} \frac{4\pi e^2}{m k^2} \int \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial v}}{(k \cdot v - \omega)^3} d^3v \frac{\partial \omega^{(I)}}{\partial t} + \right.$$

11.2

$$\left. + \frac{4\pi e^2}{m k^2} \left[\int \frac{k \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial f_0^I}{\partial t}}{(k \cdot v - \omega)^2} d^3v + \frac{8}{3} \int \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial v}}{(k \cdot v - \omega)^3} d^3v \frac{\partial \omega^{(I)}}{\partial t} \right] \right\}$$

Dabei ist

$$\operatorname{Re} \left[\int \frac{k \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial f_0^I}{\partial t}}{(k \cdot v - \omega)^2} d^3v + \frac{8}{3} \int \frac{k \frac{\partial f_0}{\partial v}}{(k \cdot v - \omega)^3} d^3v \frac{\partial \omega^{(I)}}{\partial t} \right] \approx 2k^2 \frac{\partial^{(I)}}{\partial t} \int \frac{f_0 d^3v}{(k \cdot v - \omega)^3} -$$

$$- k^2 \left(\frac{(6-8)f_0}{(k \cdot v - \omega)^4} \int d^3v \frac{\partial \omega^{(I)}}{\partial t} = 8 k^2 \left(\frac{f_0 d^3v}{(k \cdot v - \omega)^4} \frac{\partial \omega^{(I)}}{\partial t} - \frac{2k^2}{(k \cdot v)^3} \frac{\partial^{(I)}}{\partial t} \int \frac{f_0 d^3v}{(1 - \frac{k \cdot v}{k \cdot v})^3} \right) \approx 0 \right.$$

bis auf Größen $\sim (k_0 \lambda_D)^2$

Läßt man den geringen zweiten Teil der Fluktuationen 11.1 weg, so fallen - in dieser Näherung bis auf Größen

$\sim (k_0 \lambda_D)^2$ - die Zusätze in der Gleichung für die spektrale Wellenenergiedichte heraus. Die Gleichung für die Verteilungsfunktion lautete dann statt (84):

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \left(\frac{e}{m} \right)^2 \int d^3k k \frac{\partial}{\partial v} \left[\left(\pi \delta(k \cdot v - \omega) + \frac{(P)}{2(k \cdot v - \omega)^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{|\varphi(k, t)|^2}{(2\pi)^3 V} k \frac{\partial f_0}{\partial v} + \right.$$

11.3

$$\left. + \left(\frac{e}{m} \right)^2 \int d^3k k \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{(k \cdot v - \omega)^2} \frac{|\varphi(k, t)|^2}{(2\pi)^3 V} \left[k \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial f_0^I}{\partial t} + \frac{8}{3} \frac{1}{k \cdot v - \omega} k \frac{\partial f_0}{\partial v} \frac{\partial \omega^{(I)}}{\partial t} \right] \right)$$

Anhang 12

Benützt man zum Beweis des Energiesatzes für den Ausdruck 9.1 (Anhang 9) statt der quasilinearen Dispersionsbeziehung die Beziehung 10.1 (wobei das letzte Glied von 10.1 wegzulassen ist wie für 10.2), so brauchen keine Glieder mehr vernachlässigt werden - die asymptotisch eine Bedeutung haben können.

Statt des Ausdrucks 9.2 erhält man dann:

$$12.1 \quad -\frac{1}{8\pi} \int d^3k \frac{k^2 |\varphi(k,t)|^2}{(2\pi)^{-3}V} \left[2\gamma_k (1-E_w) + 2 \operatorname{Re} \frac{\partial n \alpha_k}{\partial t} - 2 \frac{\partial E_w}{\partial t} + \right. \\ \left. + E_w (2\gamma_k + 2 \operatorname{Re} \frac{\partial n \alpha_k}{\partial t}) - E_w (2 \operatorname{Re} \frac{\partial n \alpha_k}{\partial t}) \right]$$

und mit Hilfe der (gekürzten) Beziehung 10.1 folgt:

$$12.2 \quad -\frac{1}{8\pi} \int d^3k \frac{k^2 |\varphi(k,t)|^2}{(2\pi)^{-3}V} \left[2\gamma_k + 2 \operatorname{Re} \frac{\partial n \alpha_k}{\partial t} - 2 \frac{\partial E_w}{\partial t} \right]$$

Das letzte Glied in 12.1 erhält man dann, wenn man in 9.1

auch im nichtlinearen Ausdruck γ_k durch $(\gamma_k + \frac{\partial n \alpha_k}{\partial t})$

ersetzt (was in höherer Genauigkeit aus dem Ansatz (79) folgt - vgl. Schluß von Anhang 6).

In 12.2 stört noch das Glied $-2 \frac{\partial E_w}{\partial t}$. Wenn man aber

die Zeitabhängigkeit der Verteilungsfunktion durch einmalige partielle Integration berücksichtigte, erhielte man - nach (85) - noch den weiteren Ausdruck $-\frac{\partial \epsilon_{kw}}{\partial t}$

dazu; dieser ergibt mit jenem zusammen Null, da (mit 10.1) vorausgesetzt werden darf, daß die folgende Zeitableitung verschwindet:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_{kw} + E_w) = 0$$

Literaturangaben

- 1a Vedenov, Velikhov, Sagdeev, Nucl. Fus. Suppl: Conf. Salzb. 2, 465 (1962)
- 1b Drummond, Pines, Nucl. Fus. Suppl: Conf. Salzb. 3, 1049 (1962) und Ann. of Phys. 28, 478 (1964)
- 2 Camac et al. Conf. Salzb. 2, 423 (1962)
- 3 Dupree, Phys. Fl. 6, 1714 (1963)
- 4 Altshul, Karpman, Jetp. 47, 1552 (1964)
- 5 Galeev, Karpman, Sagdeev, Nucl. Fus. 5, 20 (1965)
- 6 Altshul, Karpman, Jetp. 49, 515 (1965)
- 7 Bernstein, Engelmann, Phys. Fl. 9, 937 (1966)
- 8 Laval, Pellat, Eur CEA-FC 316 (1965)
- 9 Montgomery, Tidman, Plasma Kinetic Theory, McGraw-Hill (1964)
- 10 Landau, Jetp. 7, 574 (1946)
- 11 Knorr, Zeitschr. f. Naturf. 18a, 1304 (1963)
- 12 Pfirsch, Habilitationsschrift München MPI/PA 8 (1964)
- 13 Trocheris, Eur CEA-FC 335 (1965)
- 14 Kadomtsev, Petviashvili, Jetp. 43, 2234 (1962)
- 15 Baldwin, Phys. Fl. 7, 782 (1964)
- 16 Frieman, Rutherford, Ann. of Phys. 28, 134 (1964)
- 17 Gräff, MPI München unveröffentlicht
- 18 Kennel, IC/66/17 (Triest) (1966)
- 19 Salat, Dissertation München, IPP 6/49 (1966)
- 20 Bass, Fainberg, Shapiro, Jetp. 49, 329 (1965)
- 21 Rostoker, Matsuda, Conf. Proc. Culham, Vol. I, 747 (Sept.1965)
- 22 Böhmer, Raether, Phys. Rev. Lett. 16, 1145 (1966) und persönliche Mitteilung von Prof. Raether
- 23 Tsytovich, Shapiro, Übersetzung: AEC tr. 6671, Nucl. Fus. 5, 228 (1965)
- 24 Bloomberg, MPI-PAE/P1, 25 (1966)

This report is to be treated as strictly confidential.

The 'Institut für Plasmaphysik' holds the exclusive rights of publication, mimeographing, propagation and translation into foreign languages of the original text, inclusive of the drawings, wholly or partially; also of excerpts or résumés, as well as of the technical or scientific contents of this report. Exceptions to these restrictions require written permission.

Furthermore, the 'Institut für Plasmaphysik' reserves the right of exclusive exploitation of the information contained in this report, for the purpose of obtaining protective industrial rights, particularly patent and utility patent rights at home and abroad. Actions of exploitation taken on the basis of the knowledge gained from this report cannot be regarded as grounds for obtaining the right of prior use ('Vorbenutzungsrecht') according to article 7 paragraph 1, first sentence of the German Patent Law. The reader is referred to article 5 of the Patent Law. For reasons stipulated by the Patent Law, the report must not be exhibited in public libraries, or lent out indiscriminately.

The Institute does not guarantee that the information given in this report is free from protective rights, such as patent rights, utility patent rights or trade-mark rights.

No guarantee is given in respect of the accuracy, completeness or usefulness of the information contained in this report. Thus, no liability can be accepted for damage resulting from use of the information, or of the apparatus, methods and procedures described.