

Untersuchungen zur Drift eines Plasmarings  
im toroidalen Magnetfeld

(Investigations on the drift of a plasma  
ring in a toroidal magnetic field)

Josef Junker

IPP 1/53

Oktober 1966

**I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K**

**G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N**

# INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

IPP 1/53

J. Junker

Investigation on the  
of a plasma ring in a  
toroidal magnetic field.

## GARCHING BEI MÜNCHEN

October 1966 (in German)

### Untersuchungen zur Drift eines Plasmarings im toroidalen Magnetfeld

Abstract:

(Investigations on the drift of a plasma  
ring in a toroidal magnetic field)

A plasma ring confined by a toroidal magnetic field drifts outward in a radial direction. This drift is caused by an acceleration proportional to an average plasma temperature. This temperature spectroscopically using the  $H_{\alpha}$  line intensity and the intensity of a continuum interval allows us to calculate the acceleration. Integrating this acceleration twice with respect to time yields the drift of the meridional centre of mass of the plasma. The drift motion obtained in this way is compared with the motion directly observed by smear photographs. Within the margins of error of the temperature determination both results give the same drift motion. As a consequence of successive compression and decompression of the plasma ring, magnetohydrodynamic theory shows an oscillating motion of the plasma centre in the meridional plane in addition to the gross drift motion. This oscillation can be observed and agrees well in phase but not in amplitude with the theoretical results.

IPP 1/53

Oktober 1966

The investigations described here were conducted on a toroidal  $\theta$ -pinch plasma in a tube with a major diameter of 50 cm and a minor diameter of 6 cm. The preionized plasma is compressed and heated by a 4 kJoule capacitor bank. The average temperature rises to 7 eV. At a time 2.5  $\mu$ s after the onset of the compression, the plasma touches the outer wall of the glass vessel.

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

Abstract:

A plasma ring confined by a toroidal magnetic field drifts outward in a radial direction. This drift is caused by an acceleration proportional to an average plasma temperature. Measuring this temperature spectroscopically using the  $H_{\beta}$  line intensity and the intensity of a continuum interval allows us to calculate the acceleration. Integrating this acceleration twice with respect to time yields the motion of the meridional centre of mass of the plasma. The drift motion obtained in this way is compared with the motion directly observed by smear photographs. Within the margins of error of the temperature determination both results give the same drift motion. As a consequence of successive compression and decompression of the plasma ring, magnetohydrodynamic theory shows an oscillating motion of the plasma centre in the meridional plane in addition to the gross drift motion. This oscillation can be observed and agrees well in phase but not in amplitude with the theoretical results.

The investigations described here were conducted on a toroidal  $\theta$ -pinch plasma in a tube with a major diameter of 50 cm and a minor diameter of 6 cm. The preionized plasma is compressed and heated by a 4 kJoule capacitor bank. The average temperature rises to 7 eV. At a time 2.5  $\mu$ s after the onset of the compression, the plasma touches the outer wall of the glass vessel.

# I n h a l t s v e r z e i c h n i s

	Seite
1. Einleitung	1
2. Entladungsanordnung	2
3. Magneto hydrodynamische Theorie der Drift	5
Kraft auf ein Plasma im inhomogenen Magnetfeld	5
Kraft im rein toroidalen Magnetfeld	5
Schwerpunktsbeschleunigung und Driftbewegung	7
Kompressionsschwingungen und Driftweg	8
4. Methode der spektroskopischen Temperatur- und Dichtebestimmung	9
Gültigkeitsbereich der angewandten Methode	13
Benutzte Emissionskoeffizienten	15
Emissionskoeffizient der Wasserstofflinie $H_{\beta}$	15
Emissionskoeffizient der Kontinuumsstrahlung	16
5. Ermittlung der lokalen Intensitäten	17
Mängel der side-on-Beobachtung	18
Lösung der ABEL'schen Integralgleichung	18
Abbildungsstrahlengang und optischer Aufbau	19
6. Vorbereitende Messungen	22
Standspektrum	22
Verunreinigungslinien	24
Vergleich verschiedener Kontinuumsbänder	24
Reproduzierbarkeit der Entladung	24
Strahlungseichung	25
7. Meß- und Auswerteverfahren	26
8. Ergebnisse	28
Dichte- und Temperaturverlauf während der Vorionisierung	28
Verunreinigungsgrad der Hauptentladung	31
Dichte- und Temperaturprofile in der Hauptentladung	34
Liniendichte	38
Mittlere Temperaturen	39
Bahnkurve des Plasmaschwerpunktes	40
9. Fehlerbetrachtung und Diskussion	43
Fehler der Mittelwerte	44
Fehlerrechnung zur ABEL'schen Gleichung	44
Fehler der Bahnkurve	47
Startzeitpunkt der Drift	48
10. Zusammenfassung	49
11. Literaturverzeichnis	51

## 1. Einleitung

Ein Plasma durch äußere Magnetfelder über längere Zeit in einem endlichen Volumen einzuschließen, ist eines der Hauptprobleme der experimentellen Plasmaphysik, welches bis heute noch nicht zufriedenstellend gelöst ist. Lineare Entladungsanordnungen haben den grundsätzlichen Nachteil, daß das Plasma durch Ausströmen aus den unvermeidlichen Enden verlorenght. In rein toroidalen Anordnungen wird die Einschlußzeit begrenzt durch die in einem inhomogenen Magnetfeld auftretende Driftbewegung des Plasmas zur äußeren Wand. Die Unterdrückung dieser beiden Mechanismen - des Teilchenverlusts längs der Magnetfeldlinien sowie der Drift quer zum Magnetfeld - ist das Ziel einer großen Zahl von experimentellen und theoretischen Untersuchungen. Eine unvermeidbare Begrenzung der Einschlußzeit ist gegeben durch die Diffusion der Teilchen quer zum Magnetfeld, bedingt durch die, wenn auch gegebenenfalls große, so doch endliche Leitfähigkeit des Plasmas. Dieser Effekt wird mit steigender Plasmatemperatur geringer und spielt bei den bestehenden Gasentladungsapparaturen eine untergeordnete Rolle, verglichen mit den oben genannten Mechanismen.

Gegenstand der vorliegenden Untersuchungen ist die Driftbewegung eines Plasmarings im toroidalen Magnetfeld. Diese Drift wird verursacht durch eine radiale Beschleunigung, welche nach der magnetohydrodynamischen Theorie proportional ist einer mittleren Plasmatemperatur. Durch diesen Zusammenhang ist es möglich, aus einfachen optischen Beobachtungen der Driftbewegung Aussagen zu gewinnen über diese mittlere Temperatur. Geprüft werden soll, inwieweit diese Temperatur übereinstimmt mit der aus spektroskopischen Messungen gewonnenen Temperatur. Diese Frage läßt sich entscheiden durch Vergleich einer berechneten Driftbewegung mit der beobachteten. Die Bahnkurve des driftenden Plasmas läßt sich berechnen durch zweimalige Integration der Beschleunigung über die Zeit, wobei die instantane Beschleunigung sich ergibt aus der spektroskopisch gemessenen mittleren Temperatur.

Die in der Tab. 1 angegebenen Parameterwerte für die Strom- und Magnetfeldstärke beziehen sich auf die erste Halbwelle der Hauptentladung und wurden unter Berücksichtigung der räumlichen Ausdehnung des Entladungsplases berechnet.

## 2. Entladungsanordnung

Das Entladungsgefäß besteht aus einem toroidalen Glasrohr kreisförmigen Querschnitts (Innendurchmesser des Glasrohrs  $d = 6,2$  cm, Durchmesser des Torus  $D = 52$  cm) mit einem Aspektverhältnis  $A = d : D = 1 : 8,4$ . Zur Erzeugung des toroidalen Magnetfeldes dient eine 16-windige Spule, deren jede einzelne Windung aus 12 parallel geschalteten Drahtbügeln besteht, um eine möglichst gleichförmige Stromverteilung zu erzielen. Durch geeignete Rückführung des Stromes wird vermieden, daß eine toroidale Stromkomponente auftritt. Gespeist wird diese Spule über zwei Kollektoren und Bandleiter aus einer Kondensatorbatterie von maximal 16 kJoule Energieinhalt bei 16 kVolt Ladespannung. Die in dieser Arbeit wiedergegebenen Untersuchungen wurden sämtlich mit einer Ladespannung von 8 kVolt, entsprechend 4 kJoule Energieinhalt, durchgeführt. Eine Liste der Batteriedaten ist in Tabelle 1 zusammengestellt. Die in Klammern angegebenen Daten beziehen sich auf die maximale Ladespannung von 16 kVolt, während die Daten ohne Klammern der benutzten Ladespannung von 8 kVolt entsprechen.

Zur Vorionisierung dient eine zweite Kondensatorbatterie, die durch dieselbe Spule wie die Hauptbatterie entladen wird. Diese Vorionisierungsbatterie hat einen Energieinhalt von 600 Joule bei einer Ladespannung von 25 kVolt. Die Entladungsfrequenz ist 8mal so groß wie die der Hauptentladung. Die wichtigsten Daten dieser Batterie sind ebenfalls der Tabelle 1 zu entnehmen.

Die elektrische Schaltung der Anlage ist in Abb. 1 schematisch wiedergegeben. Jede Hälfte der Vorionisierungsbatterie besteht aus zwei parallel geschalteten Kondensatoren zu je  $0,5 \mu\text{F}$ , die über eine gemeinsame Funkenstrecke gezündet werden. Jede Hälfte der Hauptbatterie besteht aus acht parallel geschalteten Kondensatoren zu je  $7,7 \mu\text{F}$ , von denen je vier über ein Ignitron gezündet werden. Die Stromstärke läßt sich mit Rogowskispulen messen. Die in der Tab. 1 angegebenen Maximalwerte für die Strom- und Magnetfeldstärke beziehen sich auf die erste Halbwelle der Hauptentladung und wurden unter Berücksichtigung der Ohm'schen Dämpfung des Entladungskreises berechnet.

Geometrische Daten

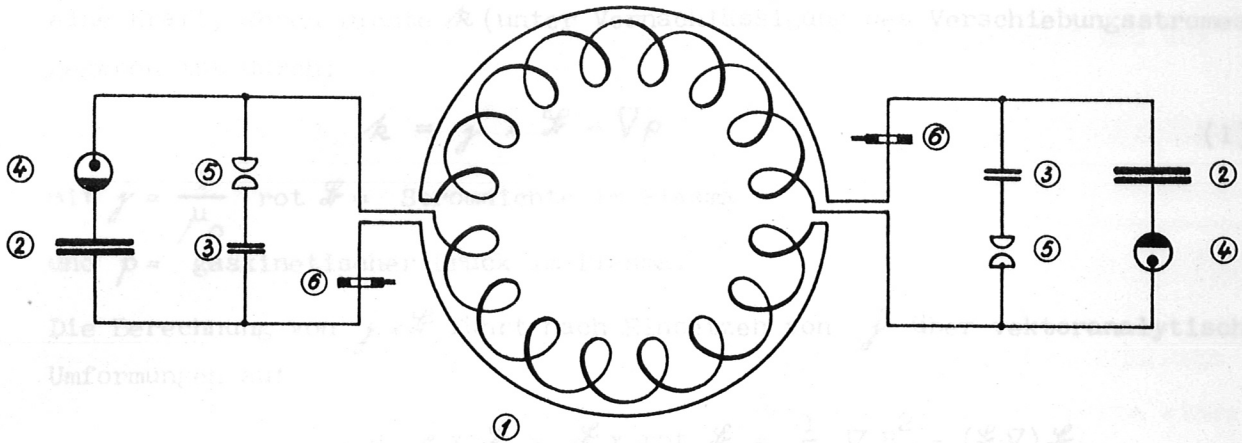
Kleiner Torusdurchmesser	$d_{\text{Torus}}$	=	6,2 cm
Kleiner Spulendurchmesser	$d_{\text{Spule}}$	=	8,4 cm
Großer Torusdurchmesser	$D$	=	52 cm
Länge der Seele	$l$	=	163 cm
Windungszahl			8

Elektrische Daten

		Vorionisierung	Hauptentladung
Kapazität	C	4 x 0,5 = 2 $\mu\text{F}$	16 x 7,7 = 123 $\mu\text{F}$
Ladespannung	$U_0$	25 kV	8 (16) kV
Energieinhalt	W	600 J	4 (16) kJ
Entladungsfrequenz	$\nu$	185 kHz	23,8 kHz
Dauer einer Viertelwelle	$\tau/4$	1,35 $\mu\text{s}$	10,5 $\mu\text{s}$
Torusinduktivität	$L_{\text{Torus}}$	0,28 $\mu\text{H}$	
Gesamtinduktivität	$L_{\text{gesamt}}$	0,37 $\mu\text{H}$	0,36 $\mu\text{H}$
Umfangsspannung	U	2,38 kV	0,78 (1,56) kV
Max. elektrische Feldstärke	$E_{\text{max}}$	122 V/cm	40 (80) V/cm
Max. Stromstärke	$I_{\text{max}}$		1,08 (2,16) mA
Max. Stromanstieg	$\dot{I}_{\text{max}}$		177 (354) kA/ $\mu\text{s}$
Max. magnetische Feldstärke	$B_{\text{max}}$		8,35 (16,7) kG
Max. Feldanstieg	$\dot{B}_{\text{max}}$		1,4 (2,7) kG/ $\mu\text{s}$

Tab. 1 Geometrische und elektrische Daten der Entladungsanordnung

Im wesentlichen ist die gesamte Entladungsanordnung die gleiche wie die von W. LOTZ, F. RAU, E. REMY und G.H. WOLF betriebene Theta-Pinch Anlage "Lupus" [1].



- |                               |                 |
|-------------------------------|-----------------|
| ① Torus, 2 x 8 Windungen      | ④ Ignitron      |
| ② 1/2 Hauptentladungsbatterie | ⑤ Funkenstrecke |
| ③ 1/2 Vorionisierungsbatterie | ⑥ Rogowskispule |

Abb. 1 Schema des Entladungskreises

Als Zündzeitpunkt für die Hauptentladung wurde der Nulldurchgang des Stromes nach der 7. Halbwelle der Vorionisierung gewählt. Für einen stetigen Übergang von Strom und Spannung waren die Batterien entsprechend gepolt. Die relativ hohe Zahl der Vorionisierungshalbwellen erwies sich als notwendig, um einerseits ein möglichst vollständig ionisiertes Plasma zu erzeugen und andererseits gut reproduzierbare Meßsignale zum Zündzeitpunkt der Hauptentladung zu erhalten. In den früheren Halbwellen ließ die Irreproduzierbarkeit der Lichtintensitäten keinen gut definierbaren Anfangszustand zum Zünden der Hauptentladung erwarten. Alle auf die Drift bezogenen Messungen wurden während der 1. Halbwelle der Hauptentladung durchgeführt. Für die spektroskopischen Messungen wurde ein Spektrograph verwendet. Als ständiger Monitor diente ein Monochromator. Mit einer Drehspiegelkamera wurde die Kompression und Bewegung des Plasmas aufgenommen. Alle Messungen wurden durchgeführt mit durchströmendem Wasserstoff als Füllgas. Der Fülldruck betrug 40 mtorr. Die Durchströmgeschwindigkeit war so bemessen, daß in der Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Entladungen (30 s) die Gasfüllung erneuert wurde.



### 3. Magnetohydrodynamische Theorie der Drift

#### Kraft auf ein Plasma im inhomogenen Magnetfeld

Unter der Einwirkung eines inhomogenen Magnetfeldes  $\mathcal{L}$  erfährt ein Plasma eine Kraft, deren Dichte  $k$  (unter Vernachlässigung des Verschiebungsstromes) gegeben ist durch:

$$k = j \times \mathcal{L} - \nabla p \quad (1)$$

mit  $j = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathcal{L} =$  Stromdichte im Plasma

und  $p =$  gaskinetischer Druck im Plasma.

Die Berechnung von  $j \times \mathcal{L}$  führt nach Einsetzen von  $j$  über vektoranalytische Umformungen auf

$$-\mu_0 j \times \mathcal{L} = \mathcal{L} \times \text{rot } \mathcal{L} = \frac{1}{2} \nabla B^2 - (\mathcal{L} \cdot \nabla) \mathcal{L}.$$

Führt man längs der Magnetfeldlinien die Tangenten- und Normalen-Einheitsvektoren  $A$  und  $u$  ein, so ergibt sich wegen  $\mathcal{L} = BA$  für den Vektorgradienten:

$$(\mathcal{L} \cdot \nabla) \mathcal{L} = (BA \cdot \nabla) BA = B^2 (A \cdot \nabla) A + \frac{1}{2} A (A \cdot \nabla B^2).$$

Unter Benützung der FRENET'schen Formel  $(A \cdot \nabla) A = u/\rho$  ( $\rho =$  Krümmungsradius der Feldlinien) erhält man

$$-\mu_0 j \times \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left\{ \nabla B^2 - A (A \cdot \nabla B^2) \right\} - \frac{B^2}{\rho} u. \quad (2)$$

In diesem allgemeinen Ausdruck für die von der Wechselwirkung zwischen Strom und Magnetfeld herrührenden Kraftdichte läßt sich zweierlei erkennen. Zum einen setzt sich diese Kraft zusammen aus zwei Termen, deren erster die vom Feldgradienten herrührende Kraft beschreibt, während der zweite Term eine "Zentrifugalkraft" darstellt, die lediglich auf Grund der Feldlinienkrümmung zustande kommt. Zum anderen haben beide Terme nur Komponenten senkrecht zu  $\mathcal{L}$ . Es gibt keine tangential gerichtete Kraft.

#### Kraft im rein toroidalen Magnetfeld

Ein rein toroidales Magnetfeld habe nach Einführung von Zylinderkoordinaten  $(R, \varphi, z)$  die Form:

$$\mathcal{L} = (0, B(R, z), 0).$$

In diesem Magnetfeld befinde sich ein torusförmiges Plasma (Plasmaring), das

nirgends im Kontakt mit einer materiellen Wand stehe. Alle Größen mögen von  $\varphi$  unabhängig sein. Außerhalb des Plasmas hat  $B$  die Form des Vakuumfeldes:

$$B(R,z) = \frac{B_0 R_0}{R} \quad (3)$$

Für die von Null verschiedenen Komponenten der Kraftdichte erhält man aus (1) und (2)

$$k_R = - \frac{1}{2\mu_0 R^2} \frac{\partial(B^2 R^2)}{\partial R} - \frac{\partial p}{\partial R} \quad (4)$$

$$k_z = - \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (5)$$

Die folgenden Ergebnisse sind im wesentlichen einer Arbeit von A. SCHLÜTER [2] entnommen. Mit der dort eingeführten Definition für Mittelwerte einer Funktion  $F(R,z)$  durch

$$\langle F \rangle = \frac{1}{M} \iint_{p \neq 0} F(R,z) \rho(R,z) R \, dR \, dz \quad (6)$$

wobei  $\rho$  die Dichte und  $M = \iint_{p \neq 0} \rho R \, dR \, dz$  die Masse pro Einheitswinkel  $\varphi$ , d.h. die Gesamtmasse  $= 2\pi M$  ist, ergeben sich die Beziehungen (als Plasmaschwerpunkt sei der meridionale Schwerpunkt mit dem Ortsvektor  $\langle \mathbf{r} \rangle$  verstanden):

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{r} \rangle = \left\langle \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\rangle = \langle \mathbf{v} \rangle \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{v} \rangle = \left\langle \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{\mathbf{a}}{\rho} \right\rangle \quad (8)$$

Die mittlere Geschwindigkeit  $\langle \mathbf{v} \rangle$  bzw. Beschleunigung  $\left\langle \frac{\mathbf{a}}{\rho} \right\rangle$  ist gleich der Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung des Plasmaschwerpunkts. Aus den Gl.(4) und (5) läßt sich mit (3) folgende allgemeine Beziehung herleiten:

$$\iint_{p \neq 0} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \, dR \, dz = 2 \iint_{p \neq 0} p \, dR \, dz \quad (9)$$

Aus (8) und (9) ergibt sich für die radiale Kraft auf den Plasmaschwerpunkt:

$$M \frac{d^2}{dt^2} \langle R \rangle = \iint_{p \neq 0} k_R R \, dR \, dz = 2 \iint_{p \neq 0} p \, dR \, dz - \iint_{p \neq 0} k_z z \, dR \, dz \quad (10)$$

Unter der wegen des in z-Richtung möglichen Gleichgewichtes gerechtfertigten Annahme, daß  $k_z \ll k_R$  ist, läßt sich in Gl. (10) das Integral, welches  $k_z$  enthält - und zwar mit einem um die Größenordnung des Aspektverhältnisses kleineren Gewicht als das  $k_R$  enthaltende Integral - gegenüber dem  $k_R$  enthaltenden

Integral vernachlässigen. Damit folgt aus (10) unter Benutzung von (6) für die radiale Beschleunigung des Plasmaschwerpunktes:

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle R \rangle = \frac{2}{M} \iint_{p \neq 0} p \, dR \, dz = 2 \left\langle \frac{p}{\rho R} \right\rangle. \quad (11)$$

### Schwerpunktsbeschleunigung und Driftbewegung

Die Gl. (11) zeigt, daß die Schwerpunktsbeschleunigung unabhängig ist von  $\beta = p : B^2 / 2 \mu_0$  und in der betrachteten Näherung nicht einmal vom Aspektverhältnis  $A$  abhängt. Unter der Annahme konstanter Temperaturverteilung erhält man aus (11):

$$\frac{d^2}{dt^2} R_0 = \frac{2 kT (1 + Z)}{m_i R_0}, \quad (kT = \text{const}) \quad \left. \begin{array}{l} m_i = \text{Masse} \\ Z = \text{Ladung} \end{array} \right\} \text{ der Ionen} \quad (12)$$

wobei  $R_0$  den Abstand des Plasmamittelpunktes von der Achse bedeutet. Das Aspektverhältnis geht nur quadratisch als Korrektur in diese Gleichung ein und kann daher vernachlässigt werden ( $A^2 \approx 10^{-2}$ ). Zu dem gleichen Resultat führt die von W. LOTZ, F. RAU und G.H. WOLF [3] gemachte Annahme eines lokalen magnetohydrodynamischen Gleichgewichtes an der Oberfläche des Plasmas, woraus  $\rho \sim R^{-2}$  folgt.

Ohne Voraussetzungen über die Temperaturverteilung läßt sich Gl. (11) umformen zu:

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle R \rangle = \frac{2 \overline{kT} (1 + Z)}{m_i} \left\langle \frac{1}{R} \right\rangle, \quad (13)$$

wobei  $\overline{kT}$  eine über die Teilchen gemittelte Temperatur bedeutet, deren Dichte mit dem reziproken Abstand von der Torusachse zu wichten ist.

$$\overline{kT} = \frac{\iint_{p \neq 0} kT n \, dR \, dz}{\iint_{p \neq 0} n \, dR \, dz} \quad (n = \text{Ionendichte}). \quad (14)$$

Benutzt man zur Berechnung von  $\langle R^{-1} \rangle$  den Ansatz  $\rho = \text{const}$  oder  $\rho \sim R^{-2}$ , so folgt für beide Fälle

$$\langle R^{-1} \rangle \langle R \rangle = 1 + \frac{1}{4} A^2 \quad \text{und} \quad R_0^{-1} \langle R \rangle = \begin{cases} 1 + \frac{1}{4} A^2 & \text{für } \rho = \text{const} \\ 1 - \frac{1}{4} A^2 & \text{für } \rho \sim R^{-2}. \end{cases} \quad (15)$$

Vernachlässigt man wieder alle vom Aspektverhältnis  $A$  herrührenden Korrekturen, so erhält man aus Gl. (13) schließlich für die Beschleunigung des Plasmaschwerpunktes bzw. -mittelpunktes:

$$\frac{d^2}{dt^2} R_o = \frac{2 \overline{kT} (1 + Z)}{m_1 R_o} \quad (kT \text{ beliebig}), \quad (16)$$

Bei vorgegebenem  $\overline{kT}(t)$  läßt sich hieraus durch zweimalige Integration über die Zeit die Bahnkurve des Plasmaschwerpunktes berechnen.

Es sei der Vollständigkeit halber erwähnt, daß verschiedene andere Modellvorstellungen (Einteilchenmodell, thermodynamisches Modell oder das Modell des magnetischen Dipols im Feldgradienten) zu der gleichen Driftbeschleunigung führen. Eine Zusammenstellung der verschiedenen Rechnungen findet sich bei P.C.T. VAN DER LAAN [4] oder U. GROSSMANN-DOERTH et al. [5].

#### Kompressionsschwingungen und Driftweg

Eine weitergehende Betrachtung von A. SCHLÜTER [2] führt über den Ansatz

$$\frac{1}{2} \frac{R^2}{R_o^2} B^2 + (1 + \alpha) p = \frac{1}{2} B_o^2 \quad (17)$$

mit den freien zeitabhängigen Parametern  $B_o$  und  $\alpha$  auf ein Modell, bei dem der Einfluß einer beschleunigten radialen Kompression bzw. Expansion auf die Driftbeschleunigung betrachtet wird. Es zeigt sich, daß  $k_z \ll k_R$  ist, wenn der Plasmaring weder beschleunigt komprimiert noch expandiert wird, d.h. wenn  $\alpha = 0$  ist. Für die Driftbeschleunigung ergibt sich aber (wieder unter Vernachlässigung aller Korrekturterme in der Ordnung  $A^2$ ) anstelle der Gl.(16):

$$\frac{d^2}{dt^2} R_o = \frac{2 \overline{kT} (1 + Z)}{m_1 R_o} \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \quad (18)$$

mit

$$\alpha = -\frac{1}{4} \frac{\rho}{p} r_p \ddot{r}_p \quad r_p = \text{kleiner Radius des Plasmaringes.} \quad (19)$$

Während der Kompression sowie bei den darauffolgenden Schwingungen erfährt das Plasma Beschleunigungen, die im wesentlichen auf den Mittelpunkt des Plasmaquerschnitts hin gerichtet sind. Macht man für diese Schwingungen einen harmonischen Ansatz, in dem der Plasmaradius mit der Amplitude  $C$  um die Ruhelage  $r_p = r_{po}$  schwingt, so ergibt sich aus Gl. (19)

$$\alpha = \frac{1}{4} \frac{\rho}{p} \omega^2 r_p (r_p - r_{po}), \quad \omega = \text{Kreisfrequenz,} \quad (20)$$

d.h.  $\alpha$  hat dasselbe Vorzeichen wie  $r_p - r_{po}$ . Während einer beschleunigten Kompression ( $\alpha > 0$ ) ist die Schwerpunktsbeschleunigung größer als während einer beschleunigten Expansion ( $\alpha < 0$ ).

Aus Gl. (20) läßt sich eine Korrektur der aus Gl. (16) folgenden Bahnkurve berechnen. Durch zweimalige Integration der Zusatzbeschleunigung des Schwerpunkts über die Zeit erhält man aus Gl. (18) unter Verwendung von Gl. (20) für diese Korrektur:

$$\frac{\omega^2}{4 R_0} \iint r_p (r_p - r_{po}) dt dt' = -\frac{A}{4} (r_p - r_{po}) \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{r_p}{r_{po}} - 1 \right) \right] + \frac{C^2}{16 R_0} (\omega t)^2. \quad (21)$$

Eine Abschätzung für den letzten Term, der eine zur eigentlichen Drift hinzukommende monotone Bewegung darstellt, ergibt für kleine Aspektverhältnisse  $A \ll 1 : C^2/R_0 < CA \ll C$ . Nach einer vollen Schwingung ist die von diesem Term herrührende Korrektur der Bahnkurve noch klein gegen die doppelte Amplitude der Schwingungen und soll daher nicht weiter betrachtet werden.

Der erste Term von Gl. (21) stellt eine oszillierende Korrektur zur Bahnkurve dar. Diese Oszillationen haben das entgegengesetzte Vorzeichen wie  $r_p - r_{po}$  und eine im wesentlichen um das Aspektverhältnis  $A$  kleinere Amplitude als die Amplitude der Kompressionsschwingung. Der Ausdruck in der eckigen Klammer kann sein Vorzeichen wegen  $C < r_{po}$  nicht wechseln und weicht für  $C \ll r_{po}$  nur wenig von 1 ab.

#### 4. Methode der spektroskopischen Temperatur- und Dichtebestimmung

Die Berechnung der Bahnkurve des Plasmaschwerpunkts nach Gl. (16) setzt wegen der Rechenvorschrift für  $\overline{kT}$  nach Gl. (14) die Kenntnis der Temperatur und Dichteprofile zu jedem Zeitpunkt der Driftbewegung voraus.

Die Spektroskopie bietet eine Fülle von Möglichkeiten zur Bestimmung von Temperatur und Dichte eines Plasmas. Eine umfassende Übersicht gibt H.R. GRIEM in seinem Buch "Plasma Spectroscopy" [6]. Die hier angewandte Methode benutzt den Zusammenhang zwischen Plasmadichte, Temperatur und den Emissionskoeffizienten für eine Wasserstofflinie bzw. ein Kontinuumsband, wenn man von der Annahme eines lokalen thermischen Gleichgewichts ausgeht.

Der Emissionskoeffizient einer Linie ist eine Funktion der Ionendichte, der Elektronendichte und der Temperatur der Elektronen. Mit der das Plasma definierenden Voraussetzung der Quasineutralität ergibt sich der funktionale Zusammenhang:

$$\mathcal{E}_{\text{Linie}} = n_e^2 f(kT). \quad (Z = 1) \quad (22)$$

Der Emissionskoeffizient eines Kontinuumsbandes der frei-frei- und frei-gebunden-Strahlung hängt von denselben Plasmametern ab und ist ebenfalls dem Quadrat der Elektronendichte proportional:

$$\mathcal{E}_{\text{Kont}} = n_e^2 g(kT). \quad (23)$$

Das Verhältnis beider Emissionskoeffizienten ergibt sich daher als reine Temperaturfunktion:

$$\frac{\mathcal{E}_{\text{Linie}}}{\mathcal{E}_{\text{Kont}}} = \frac{f(kT)}{g(kT)} = V(kT). \quad (24)$$

Bei gleichzeitiger Messung einer Linienintensität und der Intensität eines Kontinuumsbandes läßt sich aus deren Verhältnis ohne Kenntnis der Dichte die Elektronentemperatur bestimmen.

Bei Kenntnis der Temperatur läßt sich aus der absoluten Messung der Kontinuumsintensität die Dichte bestimmen.

Für den Temperaturbereich  $kT < 1,5 \text{ eV}$  muß außer der frei-frei- und frei-gebunden-Strahlung noch das Elektronenaffinitätskontinuum des negativ geladenen Wasserstoff-Ions berücksichtigt werden, dessen Emissionskoeffizient die Form

$$\mathcal{E}_{\text{H}^-} = n_e^3 h(kT) \quad (25)$$

hat. Gl. (23) ist dann zu ersetzen durch

$$\mathcal{E}_{\text{Kont}} = n_e^2 \left\{ g(kT) + n_e h(kT) \right\}. \quad (26)$$

Dies führt dazu, daß das Intensitätsverhältnis  $V$  für  $kT < 1,5 \text{ eV}$  dichteabhängig wird:

$$V = \frac{f(kT)}{g(kT) + n_e h(kT)}. \quad (27)$$

Dichte und Temperatur lassen sich aber auch in diesem Temperaturbereich auf folgende Weise iterativ bestimmen:

Ausgehend von einer beliebigen Dichte läßt sich aus dem gemessenen Intensitätsverhältnis mit Hilfe der Funktion  $V$  nach Gl. (27) eine Temperatur bestimmen. Aus dem Kontinuumssignal ergibt sich zusammen mit dieser Temperatur und der Gl. (26) ein besserer Wert für die Dichte. Damit läßt sich eine neue Tempera-

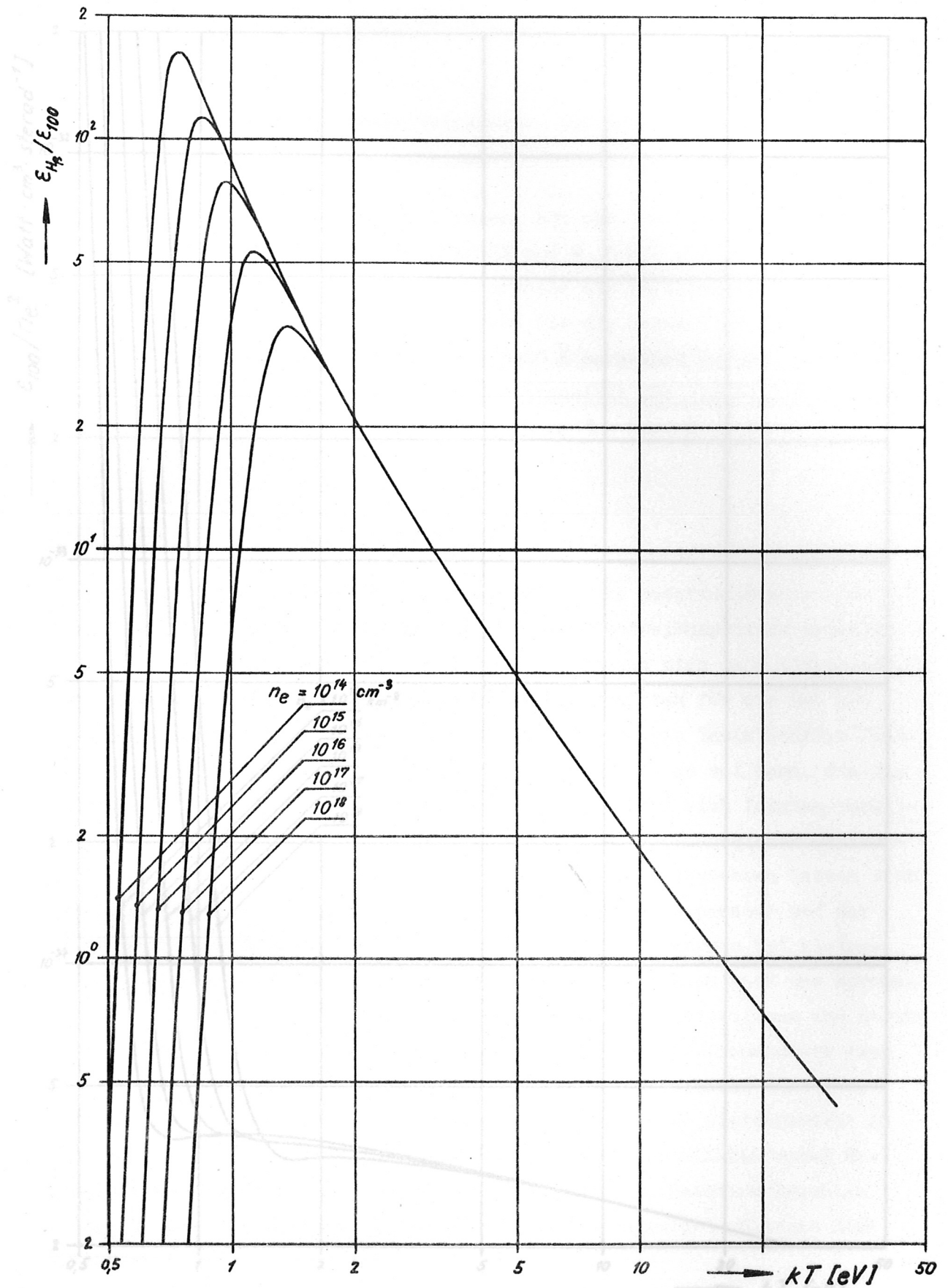


Abb. 2 Verhältnis  $V$  der Emissionskoeffizienten  $\epsilon_{H\beta} / \epsilon_{100}$  in Abhängigkeit von der Temperatur  $kT$  für verschiedene Elektronendichten  $n_e$ .

$\epsilon_{H\beta}$  ist der Emissionskoeffizient der Wasserstofflinie  $H\beta$ .  
 $\epsilon_{100}$  ist der Emissionskoeffizient eines  $100 \text{ \AA}$  breiten Kontinuumsbandes bei einer mittleren Wellenlänge von  $5000 \text{ \AA}$ .

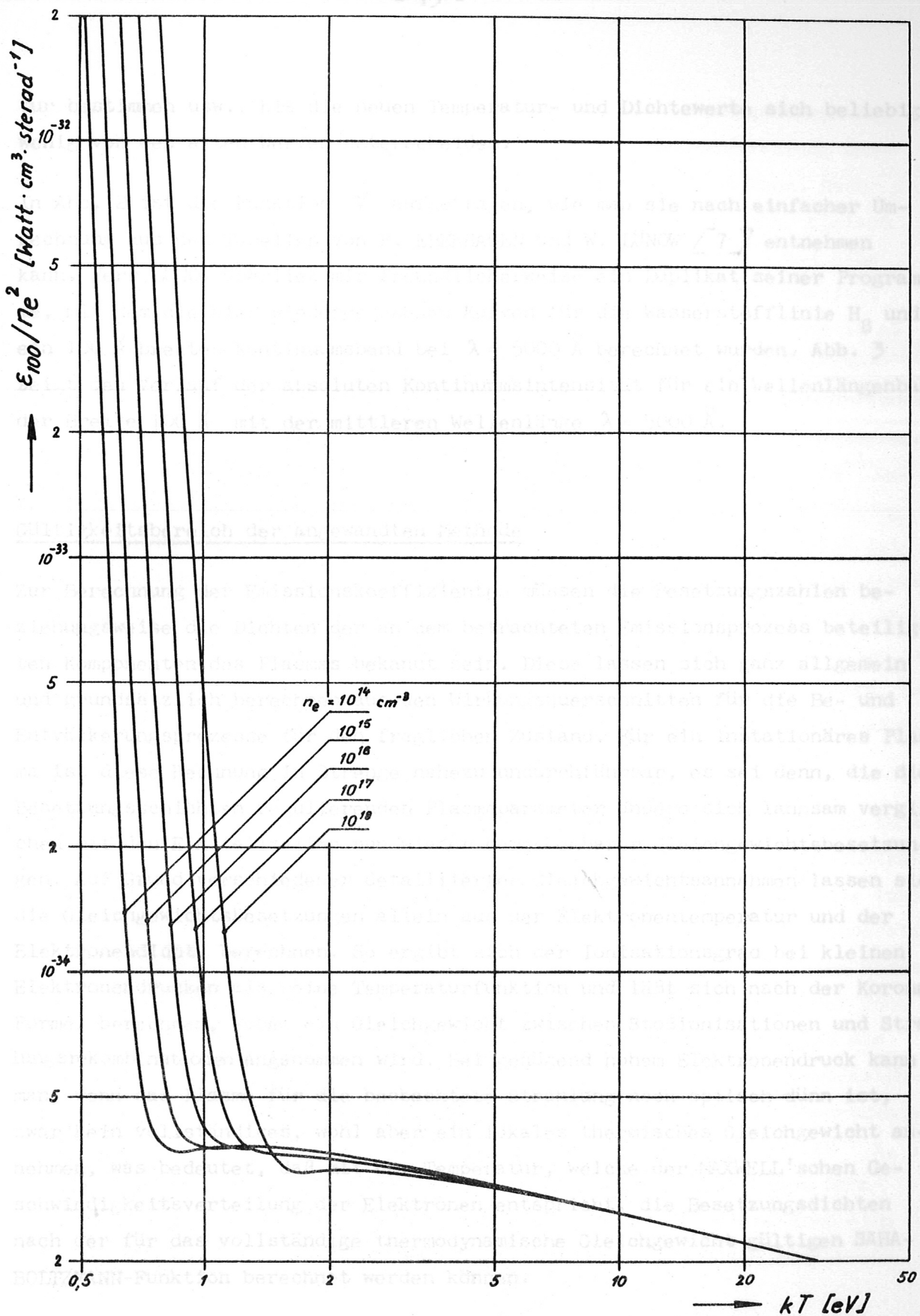


Abb. 3 Kontinuumemissionskoeffizient  $\epsilon_{100}/n_e^2$  in Abhängigkeit von der Temperatur  $kT$  für verschiedene Elektronendichten  $n_e$ .

$\epsilon_{100}$  ist der Emissionskoeffizient eines  $100 \text{ \AA}$  breiten Kontinuumsbandes bei einer mittleren Wellenlänge von  $5000 \text{ \AA}$ .



tur bestimmen usw., bis die neuen Temperatur- und Dichtewerte sich beliebig wenig von den alten Werten unterscheiden.

In Abb. 2 ist die Funktion  $V$  aufgetragen, wie man sie nach einfacher Umrechnung aus den Tabellen von E. EBERHAGEN und W. LÜNOW [7] entnehmen kann. Herr LÜNOW überließ mir freundlicherweise ein Duplikat seiner Programme, mit dem die hier wiedergegebenen Kurven für die Wasserstofflinie  $H_{\beta}$  und ein  $100 \text{ \AA}$  breites Kontinuumsband bei  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$  berechnet wurden. Abb. 3 zeigt den Verlauf der absoluten Kontinuumsintensität für ein Wellenlängenband der Breite  $100 \text{ \AA}$  mit der mittleren Wellenlänge  $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ .

#### Gültigkeitsbereich der angewandten Methode

Zur Berechnung der Emissionskoeffizienten müssen die Besetzungszahlen beziehungsweise die Dichten der an dem betrachteten Emissionsprozess beteiligten Komponenten des Plasmas bekannt sein. Diese lassen sich ganz allgemein und grundsätzlich berechnen aus den Wirkungsquerschnitten für die Be- und Entvölkerungsprozesse für den fraglichen Zustand. Für ein instationäres Plasma ist diese Rechnung in Strenge nahezu undurchführbar, es sei denn, die die Besetzungsschichten regulierenden Plasmamparameter ändern sich langsam verglichen mit den Einstellzeiten nun wieder berechenbarer Gleichgewichtsbesetzungen. Auf Grund verschiedener detaillierter Gleichgewichtsannahmen lassen sich die Gleichgewichtsbesetzungen allein aus der Elektronentemperatur und der Elektronendichte berechnen. So ergibt sich der Ionisationsgrad bei kleinen Elektronendrücken als reine Temperaturfunktion und läßt sich nach der Korona-Formel berechnen, wobei ein Gleichgewicht zwischen Stoßionisationen und Strahlungsrekombinationen angenommen wird. Bei genügend hohem Elektronendruck kann man, wenn das Plasma für die beobachtete Strahlung noch optisch dünn ist, zwar kein vollständiges, wohl aber ein lokales thermisches Gleichgewicht annehmen, was bedeutet, daß mit der Temperatur, welche der MAXWELL'schen Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen entspricht, die Besetzungsdichten nach der für das vollständige thermodynamische Gleichgewicht gültigen SAHA-BOLTZMANN-Funktion berechnet werden können.

Es sollen nun die Kriterien und Gültigkeitsbereiche dafür angegeben werden, daß man die beschriebene Methode der Temperatur- und Elektronendichtebestimmung in einem reinen Wasserstoffplasma unter Verwendung der SAHA-BOLTZMANN-Funktion anwenden kann. Zunächst einmal müssen die Elektronen untereinander

in den vorliegenden charakteristischen Zeiten von ca.  $0,1 \mu\text{s}$  genügend oft stoßen, damit man von einer MAXWELL'schen Geschwindigkeitsverteilung ausgehen und demzufolge von einer Elektronentemperatur sprechen kann. Nach L. SPITZER [8] liegen diese Stoßzeiten bei der vernachlässigbar kleinen Zeit von  $10^{-9}$  s für eine Elektronendichte von einigen  $10^{13} \text{ cm}^{-3}$  und eine Elektronentemperatur von 1 eV beziehungsweise wegen der Proportionalität zu  $(kT)^{3/2}/n_e$  für eine Dichte von  $10^{15} \text{ cm}^{-3}$  und eine Temperatur von 10 eV. Dann muß der obere Anregungsterm (Hauptquantenzahl = 4) für den Übergang der  $H_{\beta}$ -Linie im thermischen Gleichgewicht stehen mit dem Elektronenkontinuum. Dies ist nach R.W.P. McWHIRTER und A.G. HEARN [9] bis auf einen Fehler von höchstens 10 % gegeben für eine Elektronendichte oberhalb  $5 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$  und eine Elektronentemperatur oberhalb 0,8 eV. Die Einhaltung dieser Bedingung schließt nicht ein, daß auch der Grundterm nach SAHA-BOLTZMANN besetzt ist. Dessen Besetzungsdichte und damit der Ionisationsgrad ist bei den angegebenen Grenzen durch die Korona-Formel bestimmt. Die Einstellzeiten für die Gleichgewichtsbesetzung der angeregten Terme mit der Hauptquantenzahl 4 und höher ist kleiner als  $10^{-10}$  s. Unter Vorwegnahme des Ergebnisses ist damit gezeigt, daß die verwendete Methode uneingeschränkt gültig ist für die Untersuchung während der Hauptentladung.

Für die Messungen während der Vorionisation, welche ebenfalls unter der Annahme eines SAHA-Gleichgewichtes ausgewertet wurden, möge eine grobe Abschätzung für die Fehler genügen, da es hierbei im wesentlichen darauf ankam, die Plasmaparameter zum Zündzeitpunkt der Hauptentladung zu bestimmen. Für Temperaturen unterhalb 1,5 eV, bei denen das Elektronenaffinitätskontinuum eine wesentliche Rolle spielt, ist es fraglich, ob das Gleichgewicht zwischen der Zahl der  $H^{-}$ -Ionen und der Elektronen sich nach SAHA einstellt. Sicher wird die Zahl der H-Atome im Koronagleichgewicht mit den Elektronen sein. Berücksichtigt man außerdem, daß die Einstellzeiten für diese Gleichgewichtsbesetzungen bei niedrigen Temperaturen sehr groß werden können, verglichen mit  $10^{-7}$  s, so zeigt eine rein qualitative Überlegung, daß die unter Annahme eines SAHA-Gleichgewichtes ermittelten Elektronendichten sowie deren Temperaturen eine obere Grenze für die wirklich vorhandene darstellen, sofern die Elektronen eine Temperatur unter 1 eV besitzen.

$E_{\beta} = 12,75 \text{ eV}$

und unter Berücksichtigung der durch die Coulomb-Felder der Nachbarionen ver-

Benutzte Emissionskoeffizienten

Der Vollständigkeit halber seien die der Literatur entnommenen und den Rechnungen zugrunde liegenden Emissionskoeffizienten hier zusammengestellt:

Emissionskoeffizient der Wasserstofflinie H<sub>β</sub>

Die von der Volumeneinheit eines Plasmas in die Raumwinkeleinheit als Spektrallinie abgestrahlte Leistung ist proportional der für die spontane Emission gegebenen Übergangswahrscheinlichkeit A<sub>nm</sub> vom Term m zum Term n, der bei solchem Übergang emittierten Energie hν<sub>nm</sub> und der Besetzungsdichte n<sub>m</sub> des oberen angeregten Terms:

$$\epsilon_{\text{Linie}} = \frac{1}{4\pi} A_{nm} h\nu_{nm} n_m \quad (28)$$

Mit einer BOLTZMANN-Verteilung für die Besetzungsdichte der angeregten Terme und einem SAHA-Gleichgewicht zwischen dem oberen Anregungsterm und dem Elektronenkontinuum erhält man für die Besetzungsdichte

$$n_m = n_i n_e \frac{g_m}{2 g_i} h^3 (2\pi m_e kT)^{-3/2} e^{\frac{E_i - E_m}{kT}}, \quad (29)$$

mit

- n<sub>i</sub>, n<sub>e</sub> : Ionen- bzw. Elektronendichte,
- g<sub>m</sub> = 2 m<sup>2</sup> : statistisches Gewicht des Anregungsterms m,
- g<sub>i</sub> = 1 : statistisches Gewicht des ionisierten Atoms, Einheiten,
- m<sub>e</sub> : Elektronenmasse,
- E<sub>i</sub> : Ionisierungsenergie,
- E<sub>m</sub> : Anregungsenergie des Terms m.

Durch Einsetzen der Werte

$$A_{nm} = 8,6 \times 10^6 \text{ s}^{-1} \quad (\text{nach A. UNSÖLD [10]}),$$

$$h\nu_{nm} = 2,55 \text{ eV},$$

$$g_m = 32,$$

$$E_i = 13,6 \text{ eV},$$

$$E_m = 12,75 \text{ eV}$$

und unter Berücksichtigung der durch die COULOMB-Felder der Nachbarionen verursachten Erniedrigung ΔE<sub>i</sub> der Ionisierungsarbeit erhält man schließlich

für den Emissionskoeffizienten der  $H_{\beta}$ -Linie:

$$\varepsilon_{H_{\beta}} = 1,425 \times 10^{-33} n_e^2 (kT)^{-3/2} \exp(0,85 \frac{\Delta E_i}{kT}) \left[ \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^3 \text{ sterad}} \right], \quad (30)$$

wenn man  $n_e$  in  $\text{cm}^{-3}$  und  $kT$  in eV einsetzt.

### Emissionskoeffizient der Kontinuumsstrahlung

Die im Frequenzintervall von  $\nu$  bis  $\nu + d\nu$  (bzw. im Wellenlängenintervall von  $\lambda$  bis  $\lambda + d\lambda$ ) von der Volumeneinheit in die Raumwinkeleinheit abgestrahlte Leistung nennt man den Emissionskoeffizienten.

Im sichtbaren Spektralbereich ist neben der frei-frei-Strahlung die frei-gebunden-Strahlung zu berücksichtigen. Nach W. FINKLENBURG und T. PETERS [11] erhält man für den Emissionskoeffizienten der frei-frei-Strahlung

$$\varepsilon_{\nu}^{ff} = C \frac{n_e^2}{(kT)^{1/2}} g_{ff} e^{-\frac{h\nu - h\nu_{\lambda}}{kT}} \quad (31)$$

und den der frei-gebunden-Strahlung

$$\varepsilon_{\nu}^{fg} = C \frac{n_e^2}{(kT)^{1/2}} e^{-\frac{h\nu - h\nu_{\lambda}}{kT}} \frac{2 E_i}{kT} \sum_{n=n^*}^{n=l-1} \frac{g_{fg}}{n^3} e^{-\frac{h\nu_{\lambda} - h\nu_n}{kT}}, \quad (32)$$

mit 
$$C = \frac{32\pi^2 e^6}{3\sqrt{3} c^3 (2\pi m_e)^{3/2}} = 6,36 \times 10^{-47} \quad \text{c.g.s. Einheiten,}$$

$g_{ff}$  : GAUNT-Faktoren für frei-frei-Übergänge nach J.M. BERGER [12],

$g_{fg}$  : GAUNT-Faktoren für frei-gebunden-Übergänge nach W.J. KARZAS und R. LATTEY [13],

$l$  : Hauptquantenzahl, von der ab die Termfolge hinreichend dicht wird,

$n^*$  : Hauptquantenzahl des tiefsten Terms, der die Bedingung  $h\nu_{n^*l} \leq h\nu$  erfüllt.

Für ein  $100 \text{ \AA}$  breites Kontinuumsband bei einer mittleren Wellenlänge von  $5000 \text{ \AA}$  erhält man nach Einsetzen aller Zahlenwerte und unter Berücksichtigung der erniedrigten Ionisierungsarbeit für den Emissionskoeffizienten

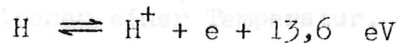
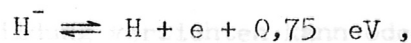
$$\varepsilon_{100}^+ = 6,0 \times 10^{-35} \frac{n_e^2}{(kT)^{1/2}} e^{-\frac{2,48}{kT}} \left\{ g_{ff} e^{\frac{0,378}{kT}} + \frac{27,20}{kT} \sum_{n=3}^5 \frac{g_{fg}}{n^3} e^{\frac{13,60}{n^2 kT}} \right\} e^{-\frac{\Delta E_i}{kT}} \left[ \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^3 \text{ sterad}} \right], \quad (33)$$

wenn man  $n_e$  in  $\text{cm}^{-3}$  und  $kT$  in eV einsetzt.

Der Emissionskoeffizient pro Frequenzintervall für das Elektronenaffinitätskontinuum berechnet sich aus dem bei S. CHANDRASEKHAR [14] angegebenen Absorptionskoeffizienten  $\sigma_{H^-}$  durch Multiplikation mit der KIRCHHOFF-PLANCK-Funktion und der Dichte der negativ geladenen Wasserstoffionen  $n_{H^-}$ :

$$\epsilon_{\nu}^{-} = \frac{2 h \nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}} n_{H^-} \sigma_{H^-} . \quad (34)$$

Wendet man die SAHA-Gleichung an auf die beiden Prozesse



und setzt man alle Konstanten ein, so erhält man für ein 100 Å breites Band bei einer Wellenlänge von 5000 Å für den Emissionskoeffizienten:

$$\epsilon_{100}^{-} = 1,045 \times 10^{-40} \left(\frac{n_e}{kT}\right)^3 e^{-\frac{2,48}{kT}} e^{-\frac{14,35 - \Delta E_i}{kT}} \sigma_{H^-} \left[ \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^3 \text{sterad}} \right] , \quad (35)$$

wenn man  $n_e$  in  $\text{cm}^{-3}$ ,  $kT$  in eV und  $\sigma_{H^-}$  in  $\text{cm}^2$  einsetzt. Der gesamte Emissionskoeffizient für das Kontinuum wird somit  $\epsilon_{100} = \epsilon_{100}^{+} + \epsilon_{100}^{-}$ . In den Abbildungen 2 und 3 sind die für die Auswertung der gemessenen Intensitäten benutzten Kurven unter Berücksichtigung dieses Affinitätskontinuums wiedergegeben, wodurch sowohl  $V(kT)$  als auch  $\epsilon_{100}/n_e^2(kT)$  für Temperaturen  $< 1,5$  eV dichteabhängig werden.

## 5. Ermittlung der lokalen Intensitäten

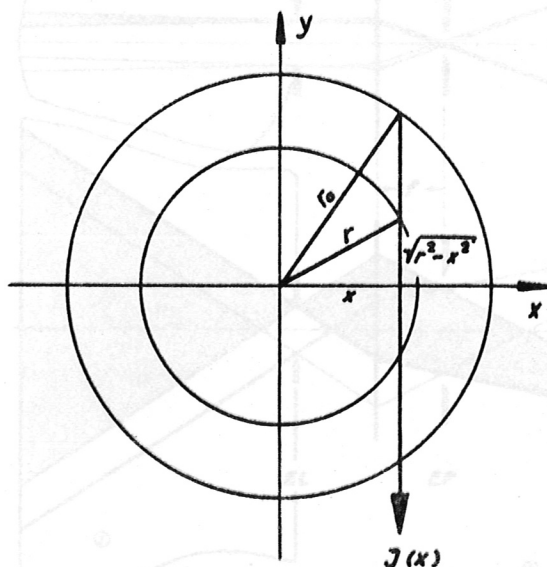
Dichte und Temperatur gehen in die Theorie der Emissionskoeffizienten als lokale Größen ein. Bei der Messung spektral aufgelöster Intensitäten, z.B. mit einem Spektrographen, tragen aber immer endlich ausgedehnte Volumina mit ihrer Leuchterscheinung zur gemessenen Intensität bei. Solange diese Volumina homogene Temperatur- und Dichteverteilungen haben, bereitet die Ermittlung der lokalen Intensitäten keine Schwierigkeiten. So liefern end-on Beobachtungen, wie sie bei zylindrischen Entladungsgefäßen möglich sind, verlässliche Werte für die Temperatur und Dichte.

Mängel der side-on Beobachtung

Die bei toroidalen Anordnungen einzig mögliche side-on Beobachtung dagegen liefert für die Temperatur und Dichte irgendwelche und in ihrer Art nur schwer - wenn überhaupt explizit - angebbare Mittelwerte über ein Volumen stark inhomogener Plasmaparameter. Hinzu kommt wegen der Form der abbildenden Lichtbündel noch eine konische Begrenzung des leuchtenden Plasmavolumens; ein Nachteil, der um so störender ist, je weniger man auf eine lichtstarke Abbildung verzichten kann oder will. So läßt sich keine Korrelation angeben zwischen einer Temperatur, die aus den integralen side-on gemessenen Intensitäten ermittelt werden kann, und der durch Gl. (14) definierten mittleren Temperatur. Dies schließt jedoch nicht aus, daß dennoch Temperaturen aus integral gemessenen Intensitäten auch bei side-on Beobachtungen häufig eine verlässliche relative Meßgröße darstellen.

Lösung der ABEL'schen Integralgleichung

Von einer zylindersymmetrischen Lichtquelle vom Radius  $r_0$  sei die Intensitätsverteilung  $I(x)$  für  $0 \leq x \leq r_0$  bekannt.  $I(x)$  ist die Gesamtintensität längs einer geraden Linie im Abstand  $x$  vom Mittelpunkt des Zylinders. Ist  $i(r)$  die lokale Intensität längs der Kreislinie im Abstand  $r$  vom Zentrum, so ergibt sich (siehe Abb. 4)



$$\begin{aligned}
 J(x) &= \int_{-\sqrt{r_0^2 - x^2}}^{+\sqrt{r_0^2 - x^2}} i(r) d(\sqrt{r^2 - x^2}) \\
 &= \int_{r=|x|}^{r_0} \frac{i(r) 2r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr.
 \end{aligned}
 \tag{36}$$

Abb. 4 Skizze zur Herleitung der ABEL'schen Integralgleichung

Dies ist eine ABEL'sche Integralgleichung für  $i(r)$ . Die Auflösung nach  $i(r)$  ist möglich und führt auf eine Quadratur, welche im allgemeinen nicht mit elementaren Funktionen ausführbar ist. Numerische Lösungsmethoden werden von R. GORENFLO [15] beschrieben, und G. BOLDT [16] entwickelte einen Analogrechner für dieses Problem. Somit ist es möglich, aus einer Serie von side-on Beobachtungen die lokalen Intensitäten und damit die lokalen Werte für Temperatur und Dichte zu berechnen. Entscheidend für die Anwendbarkeit dieses Verfahrens ist jedoch die Forderung nach Zylindersymmetrie, die - wie sich zeigen wird - sehr gut erfüllt sein muß.

### Abbildungsstrahlengang und optischer Aufbau

An die optische Abbildung wurden zwei Forderungen gestellt:

1. Die Abbildung soll lichtstark sein.
2. Die Abbildung soll in der X-Richtung ein möglichst parallel begrenztes Volumen aus dem Plasmaschlauch "herausschneiden". Soweit man das Plasma in der zur x-y-Ebene senkrechten Richtung als homogen ansehen kann, spielt in dieser Richtung die Art der Volumenbegrenzung keine Rolle.

Diese beiden Forderungen werden sehr gut erfüllt durch einen verflochtenen, dingseitig telezentrischen Strahlengang (siehe Abb. 5).

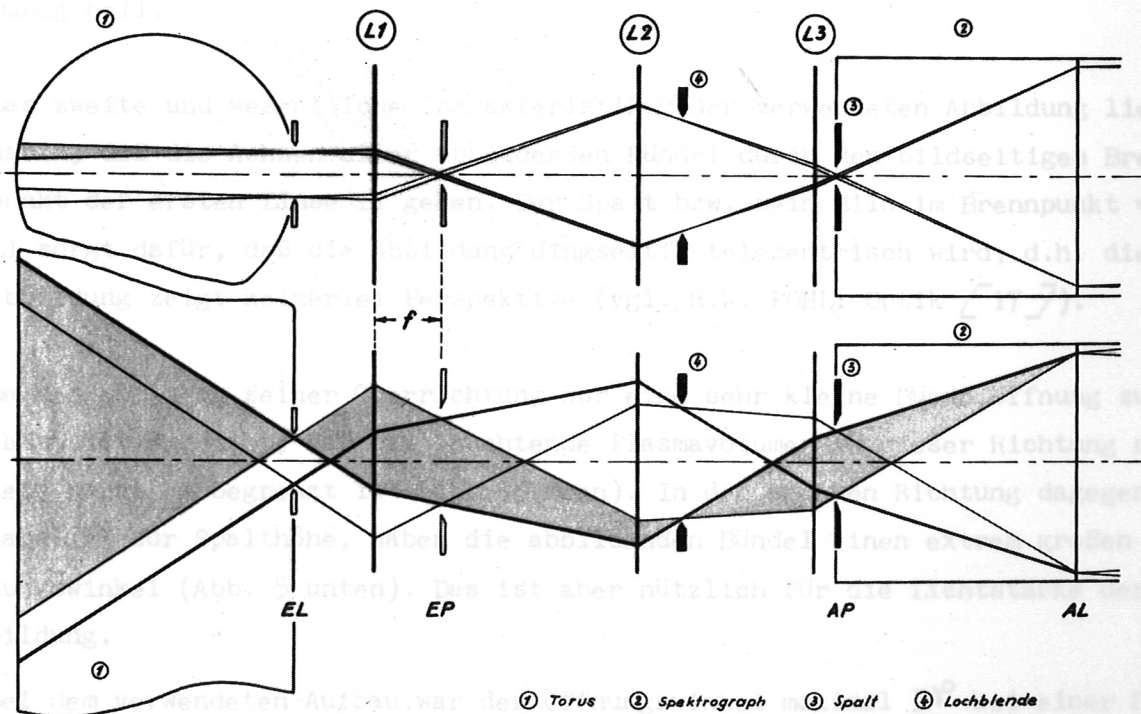


Abb. 5 Schema der optischen Abbildung:  
Verflochtener, dingseitig telezentrischer Strahlengang

Das abbildende System besteht aus 3 Linsen - L1, L2 und L3 - und einer Lochblende zwischen L2 und der Spaltlinse L3. - Der Spektrograph stellt ein zweites Abbildungssystem dar, in dem bekanntlich der Spalt in die Filmebene abgebildet wird. - Die Lochblende fungiert als Gesichtsfeldblende. Ihr Bild im Dingraum, die Eintrittsluke (EL) bestimmt in ihrer Einstellebene den Querschnitt des leuchtenden Plasmas, das vom Spektrographen aus "gesehen" wird. Das Bild der EL, die Austrittsluke (AL) liegt in der Kollimatorebene des Spektrographen. Der Spektrographenspalt ist Aperturblende und zugleich Austrittspupille (AP) für das System der 3 Linsen L1, L2 und L3. Sein Bild im Dingraum ist die Eintrittspupille (EP). Auf der anderen Seite ist der Spalt EL und der Kollimator EP des Spektrographen selbst.

Zusammenfassend läßt sich der Strahlengang dadurch charakterisieren, daß bei den beiden abbildenden Systemen - die Linsen L1, L2 und L3 einerseits und der Spektrograph andererseits - die Luken des einen Systems in die Pupillen des anderen und die Pupillen des einen in die Luken des anderen abgebildet werden. Dies nennt man einen "verflochtenen" Strahlengang. Der Vorteil dieser Abbildung liegt darin, daß eine Ortszuordnung zwischen der leuchtenden Fläche und der Spektrallinie völlig aufgehoben ist. Der Spalt ist vollkommen gleichmäßig ausgeleuchtet, und damit wird das Spektrum in seiner Höhe gleichmäßig hell.

Das zweite und wesentliche Charakteristikum der verwendeten Abbildung liegt darin, daß die Achsen aller abbildenden Bündel durch den bildseitigen Brennpunkt der ersten Linse L1 gehen. Der Spalt bzw. sein Bild im Brennpunkt von L1 sorgt dafür, daß die Abbildung dingseitig telezentrisch wird; d.h. diese Abbildung zeigt keinerlei Perspektive (vgl. R.W. POHL: Optik [17]).

Da der Spalt in seiner Querrichtung nur eine sehr kleine Bündelöffnung zuläßt, ist erreicht, daß das leuchtende Plasmavolumen in dieser Richtung nahezu parallel begrenzt ist (Abb. 5 oben). In der anderen Richtung dagegen, parallel zur Spalthöhe, haben die abbildenden Bündel einen extrem großen Öffnungswinkel (Abb. 5 unten). Das ist aber nützlich für die Lichtstärke der Abbildung.

Bei dem verwendeten Aufbau war der Öffnungswinkel maximal  $34^{\circ}$  bei einer Spalthöhe von 14 mm. Die Breite des leuchtenden Plasmavolumens betrug maximal 3 mm bei einem Lochblendendurchmesser von 7,5 mm, und bei einer Spaltbreite von 100  $\mu\text{m}$  war die Abweichung von einer parallelen Begrenzung unmeßbar klein.



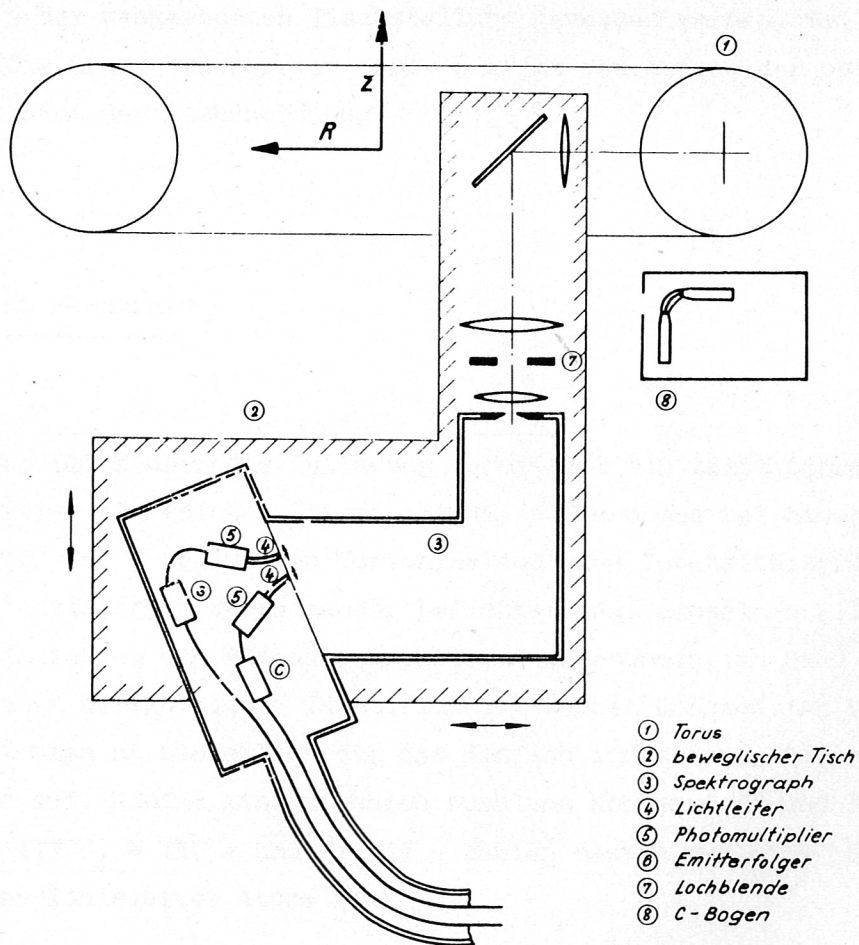
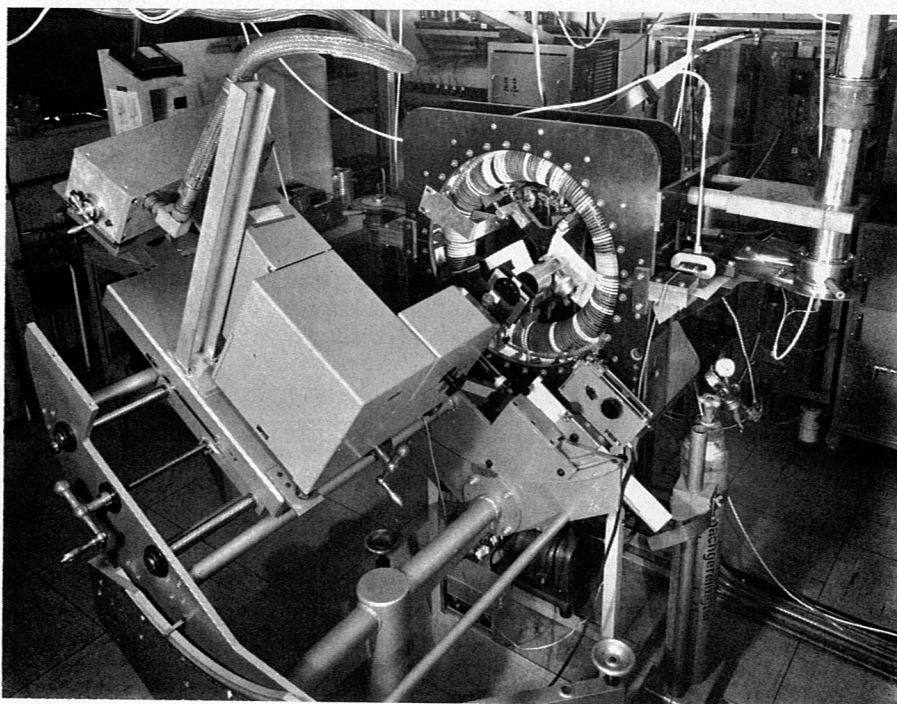


Abb. 6 Aufbau der optischen Meßeinrichtung

Für die Messungen wurde ein Zeiß- $\beta$ -Prismen-Spektrograph verwendet. Zur photoelektrischen Messung der spektralen Intensitäten befanden sich in der Filmebene zwei Lichtleiter, die zusammen mit den dahinterliegenden Photomultipliern unabhängig voneinander in der Dispersionsrichtung des Spektrographen bewegt werden konnten. Die Ausgangssignale aus den Photomultipliern wurden über Emitterfolger und durch mit Kupfergeflecht gegen Störungen abgeschirmte Koaxialleitungen zu den Oszillographen in der Meßkabinen geleitet. Jedes der beiden Lichtsignale wurde zusammen mit dem Strom als Referenzsignal für die zeitliche Zuordnung auf einem Zweistrahloszillographen registriert.

Die gesamte Meßanordnung einschließlich der abbildenden Optik war auf einem speziellen Tisch montiert, der eine Verschiebung in R- und in z-Richtung erlaubte. Außerdem ließ sich dieser Tisch um die Torusachse drehen, wodurch es möglich war, innerhalb eines Drehwinkelbereiches von  $-10^\circ$  bis  $+50^\circ$  an einer beliebigen Stelle in den Torus "hineinzuschauen". In dem verwendeten Aufbau konnte nicht in der waagerechten Tischstellung gemessen werden, weil die Kollektoren hier die Sicht versperrten. Abb. 6 zeigt den Aufbau der optischen Meßeinrichtung samt der Eichanordnung.

## 6. Vorbereitende Messungen

### Standspektrum

Einen groben Überblick über die Entladung vermittelt ein zeitintegrales Spektrum. Abb. 7 zeigt ein solches Standspektrum, aufgenommen bei einem Fülldruck von 40 mTorr und 7 Halwellen Vorionisation. Aus Intensitätsgründen wurden bis zu 500 Entladungen übereinander belichtet. Auf demselben Film wurde zur Wellenlängeneichung ein Eisenbogenspektrum aufgenommen, an Hand dessen nahezu alle Linien der Entladung identifiziert werden konnten. An Verunreinigungslinien treten hauptsächlich die des einfach ionisierten Sauerstoffs und Stickstoffs auf. Wenige Linien rühren auch von Kohlenstoff und Silizium her. Einige C III -, N III - und Si III - Linien deuten auf eine geringe Konzentration höher ionisierter Atome hin.

Abb. 7 Zeitintegrales Spektrum der Entladung mit Fe-Spektrum  
Fülldruck: 40 m Torr Vorionisierung: 7 Halwellen  
Füllladung: 400 bis 500 Hauptladung: 18 mV

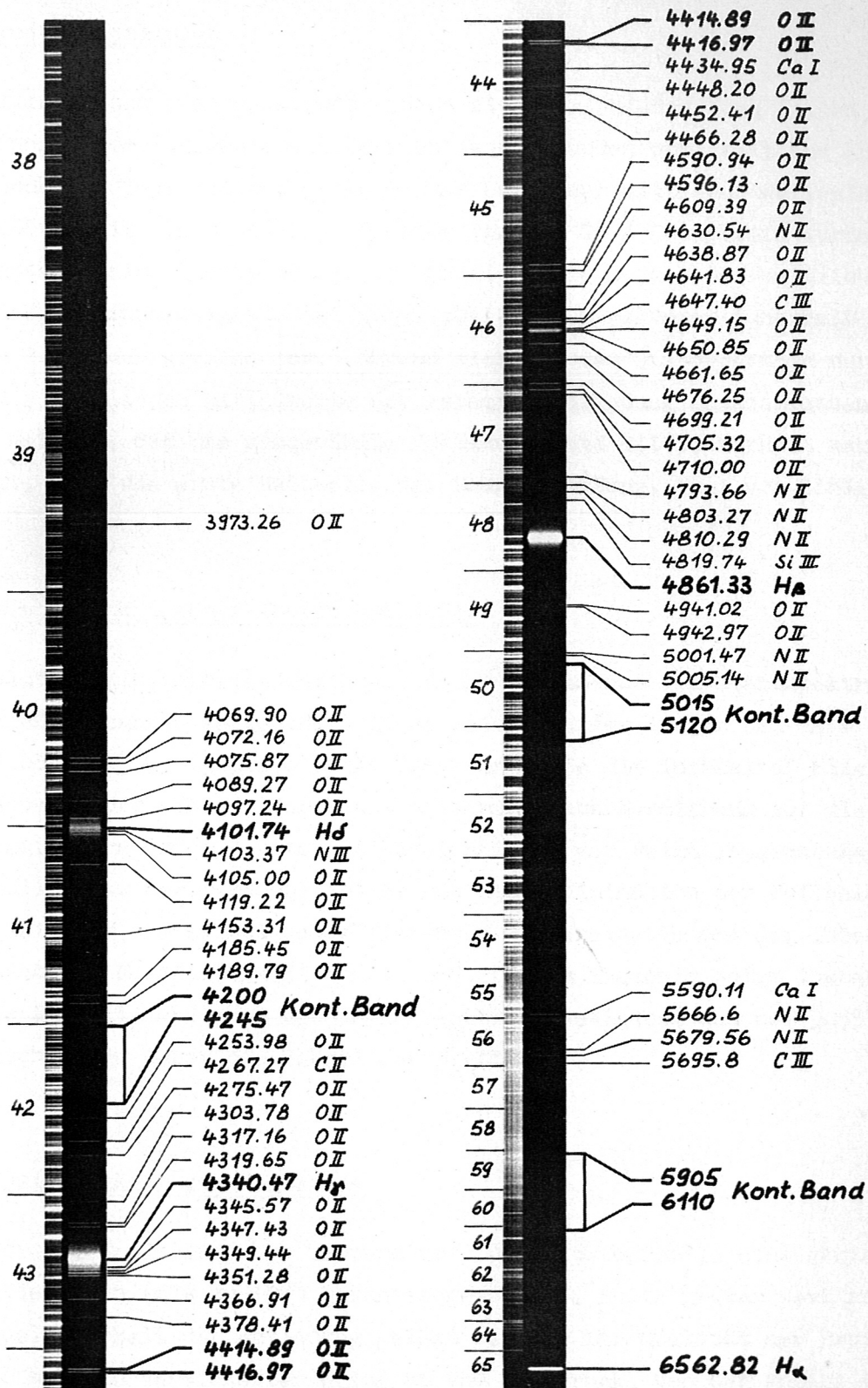


Abb. 7 Zeitintegrales Spektrum der Entladung mit Fe-Spektrum  
 Füllgas: H<sub>2</sub> Vorionisierung: 25 kV, 7 Halbwellen  
 Fülldruck: 40  $\mu$  Hg Hauptentladung: 8 kV

### Verunreinigungslinien

Mit Hilfe dieses Standspektrums lassen sich verschiedene von Linien freie Kontinuumsbänder auswählen. Alle Dichtewerte wurden ermittelt aus Kontinuumsmessungen eines  $110 \text{ \AA}$  breiten Bandes bei einer mittleren Wellenlänge von  $5055 \text{ \AA}$ . Mit einem schmalen Fenster von ca.  $10 \text{ \AA}$  Bandbreite wurde dieser Kontinuumsbereich durchgemessen, wobei sich zeigte, daß der zeitliche Verlauf des Kontinuums signals bei allen möglichen Stellungen innerhalb der fraglichen  $110 \text{ \AA}$  der gleiche war. Während sich aus den Standspektren nur Aussagen über die zeitlichen Mittelwerte der gesamten Entladung machen lassen, zeigt diese Methode, daß das ausgewählte Kontinuumsband mit Sicherheit während der Meßzeit, d.i. die erste Halbwelle der Hauptentladung, frei von Linien ist.

### Vergleich verschiedener Kontinuumsbänder

Zwei weitere linienfreie Kontinuumsbänder wurden aus dem Standspektrum für Vergleichsmessungen ausgewählt. Diese beiden Bänder liegen bei  $\lambda = 4200 \dots 4245 \text{ \AA}$  und bei  $\lambda = 5905 \dots 6110 \text{ \AA}$ . Gemessen wurde die Intensität aller drei Kontinuumsbänder während der Hauptentladung. Nach Normierung auf gleiche Bandbreite ergab sich - unter Berücksichtigung der wellenlängenabhängigen Empfindlichkeit der Photomultiplier und nach Elimination der Wellenlängenabhängigkeit für den Emissionskoeffizienten - Übereinstimmung der Intensitäten innerhalb der Meßgenauigkeit von  $\pm 10 \%$ . Dieses Ergebnis zeigt insbesondere, daß das für alle späteren Messungen benutzte Kontinuumsband bei  $5055 \text{ \AA}$  nicht verfälscht wird durch die Flügel der  $H_{\beta}$ -Linie.

### Reproduzierbarkeit der Entladung

Weil für die Ermittlung der Temperatur- und Dichteprofile eine ganze Serie von Entladungen (bis zu 100) herangezogen wurde, mußte großer Wert auf die Reproduzierbarkeit der Entladung gelegt werden. Die Qualität der Reproduzierbarkeit hing in verwickelter Weise ab vom Fülldruck, von der Anzahl der Halbwellen der Vorionisation, nach denen die Hauptentladung gezündet wurde und von der Phasenlage der Vorionisation zum Zeitpunkt der Zündung der Hauptentladung. Jeder dieser Parameter wurde experimentell bezüglich der Reproduzierbarkeit optimiert und während aller Messungen beibehalten. Es erwies sich vor Beginn einer Messung als notwendig, bis zu 500 Leerentladungen zu machen einzig

zu dem Zweck, das Entladungsgefäß zu "reinigen", so daß die Intensitätssignale für Linie und Kontinuum gut reproduzierbar wurden und sich während einer Meßserie bis zu 100 Entladungen nicht mehr in der Amplitude veränderten.

Abb. 8 zeigt an je 10 übereinander belichteten Kontinuumssignalen gemessen in axialer Richtung bei  $R = R_c$  sowohl die erreichte Reproduzierbarkeit aufeinanderfolgender Entladungen als auch deren Reproduzierbarkeit über lange Zeiten (die Meßreihe erstreckte sich über zwei Tage). Die Liniensignale dieser Meßreihe sowie die in radialer Richtung gemessenen Signale zeigten gleich gute Reproduzierbarkeit.

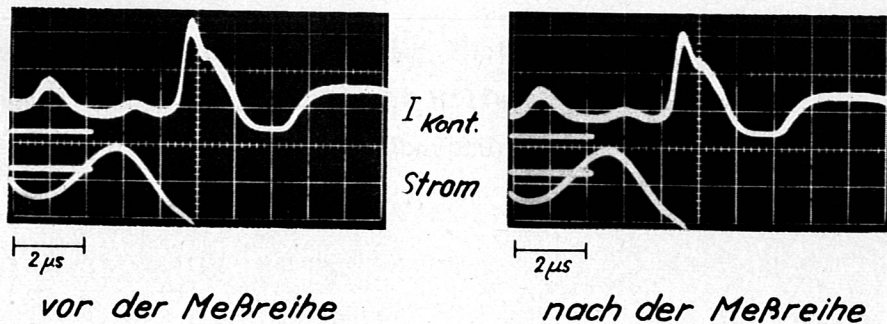


Abb. 8 Oszillogramme zur Reproduzierbarkeit der Entladung.

Jedes Bild zeigt die übereinander belichteten Signale von 10 verschiedenen Entladungen.

### Strahlungseichung

Zur Absoluteichung der Photomultiplier wurde ein Kohlebogen benutzt, dessen Strahlung von J. EULER [18] angegeben wird. Neuere Messungen von H. MAGDEBURG [19] bestätigen diese Werte. Zur Vermeidung systematischer Fehler bei der Eichung empfiehlt es sich generell, mit einem identischen Strahlengang zu eichen und zu messen (siehe Abb. 6). Da bei geöffneter Lochblende des Abbildungsstrahlengangs das kreisrunde Gesichtsfeld einen Durchmesser von ca. 3 mm hatte, der positive Krater des Kohlebogens aber höchstens auf einer Fläche dieses Durchmessers als homogen strahlend anzusehen ist, machte die Justierung des Bogens erhebliche Schwierigkeiten. Zu deren Umgehung und um sicher zu sein, daß inhomogene Randschichten des Bogens nicht in die Eichung eingehen, wurde die Eichmessung bei einem verkleinerten Gesichtsfeld durchgeführt. Mit einer

Messung am Plasma selbst wurde dann dieser Eichfaktor auf den bei der eigentlichen Messung verwendeten größeren Gesichtsfelddurchmesser korrigiert.

Aus räumlichen Gründen ließ sich keine Eichmessung ohne einen Umlenkspiegel im Strahlengang durchführen. Abb. 6 zeigt den Aufbau für eine Messung in der R-Richtung. Für eine Messung in der z-Richtung aber wurde der Umlenkspiegel herausgenommen. Für diese Messung mußten bei der Eichung die Reflexionsverluste am Spiegel berücksichtigt werden, die sich durch eine gesonderte Messung zu 18 % ergaben. Schließlich mußte noch die Absorption der Strahlung beim Durchgang durch die Glaswand des Entladungsgefäßes berücksichtigt werden. Zu diesem Zweck befand sich vor dem Kohlebogen eine bezüglich ihres Absorptionsvermögens der Toruswand gleiche Glasplatte.

Die relative Empfindlichkeit der Photomultiplier in Abhängigkeit von der angelegten Hochspannung wurde mit Hilfe einer W-Bandlampe als Lichtquelle ermittelt und von Zeit zu Zeit überprüft.

## 7. Meß- und Auswerteverfahren

Gemessen wurde in zwei verschiedenen Richtungen. Bei einer Messung in der R-Richtung (siehe Abb. 6) verläuft die optische Achse in radialer Richtung und läßt sich durch Verschieben des Spektrographentisches auf verschiedene z-Werte einstellen. Die Symmetrieebene des Torus wird mit  $z = 0$  charakterisiert.

Für eine Messung in der z-Richtung wird der Umlenkspiegel fortgelassen und die zwischen Spiegel und Plasma gelegene Linse entsprechend geschwenkt. Durch Verschieben des Tisches läßt sich die optische Achse auf verschiedene Abstände  $R$  von der Symmetrieachse einstellen. Als neue Koordinate wird  $r = R - R_c$  eingeführt, wobei  $R_c$  den Abstand des geometrischen Mittelpunktes des Torusquerschnitts von der Achse bedeutet.

Für eine Messung von Intensitätsmittelwerten und den daraus folgenden Temperaturen und Dichten genügt eine Messung in radialer Richtung bei  $z = 0$ . Ein gleichzeitig aufgenommenes Drehspiegelbild liefert den zur Berechnung der mittleren Intensität pro Volumeneinheit notwendigen Plasmadurchmesser. Die radiale Driftbewegung des Plasmas hat auf Grund des verwendeten Strahlenganges keinerlei Einfluß auf die gemessene Intensität.

Für eine Messung von Intensitätsprofilen werden in radialer (axialer) Richtung bei verschiedenen z- (R-) Werten die Intensitäten gemessen. Eine Meßreihe bestand darin, daß an 33 verschiedenen - in der z- (R-) Richtung um jeweils 2 mm verschobenen - Tischstellungen bei je einer Entladung die Intensität gemessen wurde. Diese Prozedur wurde dreimal durchgeführt, um Mittelwerte jeweils dreier zusammengehöriger Signale bilden zu können.

Die photographisch aufgenommenen Oszillographenbilder lassen sich mit einem Auswertegerät von Ferranti weiter verarbeiten. Dieses Auswertegerät besteht aus einem Kreuztisch, einem Mikroskop mit Fadenkreuz und zwei elektronischen Digitalzählern, die die Stellung des Kreuztisches angeben. Durch Verschieben des Kreuztisches lassen sich einzelne Punkte einer Kurve zur Deckung bringen mit dem Fadenkreuz des feststehenden Mikroskops. Die von den Digitalzählern angegebenen Koordinaten werden auf Lochband ausgegeben. Mittels eines Rechenprogramms erhält man aus der Rechenmaschine G3 von diesem Lochband eine Wertetabelle der Oszillographenkurven für vorgebbare Zeitwerte. Dabei werden die Koordinatenachsen mittels der Ablenkgeschwindigkeit und der Empfindlichkeit des Oszillographen in  $\mu\text{s}$  und Volt geeicht. Mit Hilfe einer ebenfalls in die G3 eingegebenen Hochspannungsfunktion für die Empfindlichkeit der Photomultiplier lassen sich die Amplituden auf eine feste Hochspannung normieren. Und schließlich werden die zu den gleichen Versuchsparametern gehörigen Kurven noch gemittelt. Der Ausdruck dieses "ADC" genannten Programms (Analog-Digital-Convertierung) liefert eine Orts-Zeit-Matrix für die gemessenen Lichtintensitäten.

Mit einem Analogrechner von G. BOLDT [16] wurden die gemessenen  $H_{\beta}$ - bzw. Kontinuums-Intensitäten umgerechnet in die lokalen Intensitäten.

Zur Ermittlung von Temperatur und Dichte aus einem Wert für die  $H_{\beta}$ -Intensität und dem dazugehörigen für die Kontinuumsintensität wurde für die G3 ein Auswerteprogramm "ENTE" erstellt, welches die Gleichungen (26) und (27) und das dort beschriebene Iterationsverfahren benutzt.

## 8. Ergebnisse

### Dichte- und Temperaturverlauf während der Vorionisierung

Der Strom der Vorionisierung zeigt den Verlauf einer gedämpften Schwingung, nach deren 7. Halbwelle die Hauptentladung gezündet wurde. Untersucht wurde der zeitliche Verlauf der Dichte und Temperatur während dieser 7 Halbwellen. Genauer: es wurden Dichte und Temperatur bestimmt aus den in radialer Richtung bei  $z = 0$  gemessenen mittleren Intensitäten der Linie  $H_{\beta}$  und des Kontinuumsbandes bei  $5000 \text{ \AA}$ .

Das Ergebnis dieser Messungen zeigt Abb. 9. Die beiden oberen Kurven zeigen den Dichte- und Temperaturverlauf. Darunter ist der Verlauf des Stromes und ganz unten im gleichen Zeitmaßstab zwei Drehspiegelbilder wiedergegeben. Das obere der beiden Drehspiegelbilder entspricht der axialen Blickrichtung, d.h. senkrecht zur Torusebene, während das untere in radialer Blickrichtung, d.h. parallel zur Torusebene aufgenommen wurde. Die an der 7. Halbwelle anschließende Hauptentladung ist ebenfalls in Abb. 9 wiedergegeben. Die beiden Drehspiegelbilder zeigen die Kompression des Plasmas mit den darauffolgenden Kompressionsschwingungen sowie die radiale Driftbewegung. Die Dichte und Temperatur während der Hauptentladung wurden unter Zuhilfenahme des Drehspiegelbildes ebenfalls aus den gemessenen mittleren Intensitäten bestimmt.

Der Verlauf des Verhältnisses  $V$  der Linienintensität zu der eines Kontinuumsbandes in Abhängigkeit von der Temperatur ist, wie Abb. 2 zeigt, bezüglich der Temperaturbestimmung aus einem vorgegebenen Wert für  $V$  zweideutig. Es muß daher nach Kriterien gesucht werden, an Hand derer entschieden werden kann, welcher der beiden Temperaturwerte jeweils zu nehmen ist. In Abb. 9 wurden zunächst beide möglichen Temperatur- und die daraus resultierenden beiden Dichtewerte berechnet und eingezeichnet. Die ausgezogenen Kurven geben den als richtig anzunehmenden Temperatur- und Dichteverlauf wieder. Bis zum Beginn der 4. Halbwelle wurden die zum linken Ast der  $V$ -Kurven (siehe Abb. 2) gehörigen Temperaturwerte gewählt, die zum rechten Ast gehörigen Temperatur- und Dichtewerte sind gestrichelt eingetragen. Zu späteren Zeiten muß man sich für die zum rechten Ast der  $V$ -Kurven gehörigen Temperaturwerte entscheiden; entsprechend sind hier die zum linken Ast gehörigen Werte gestrichelt eingezeichnet.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. Halbwelle der Vorionisierung

Hauptentladung

Abb. 9. Drehspiegelbilder und zeitlicher Verlauf von Dichte, Temperatur und Strom



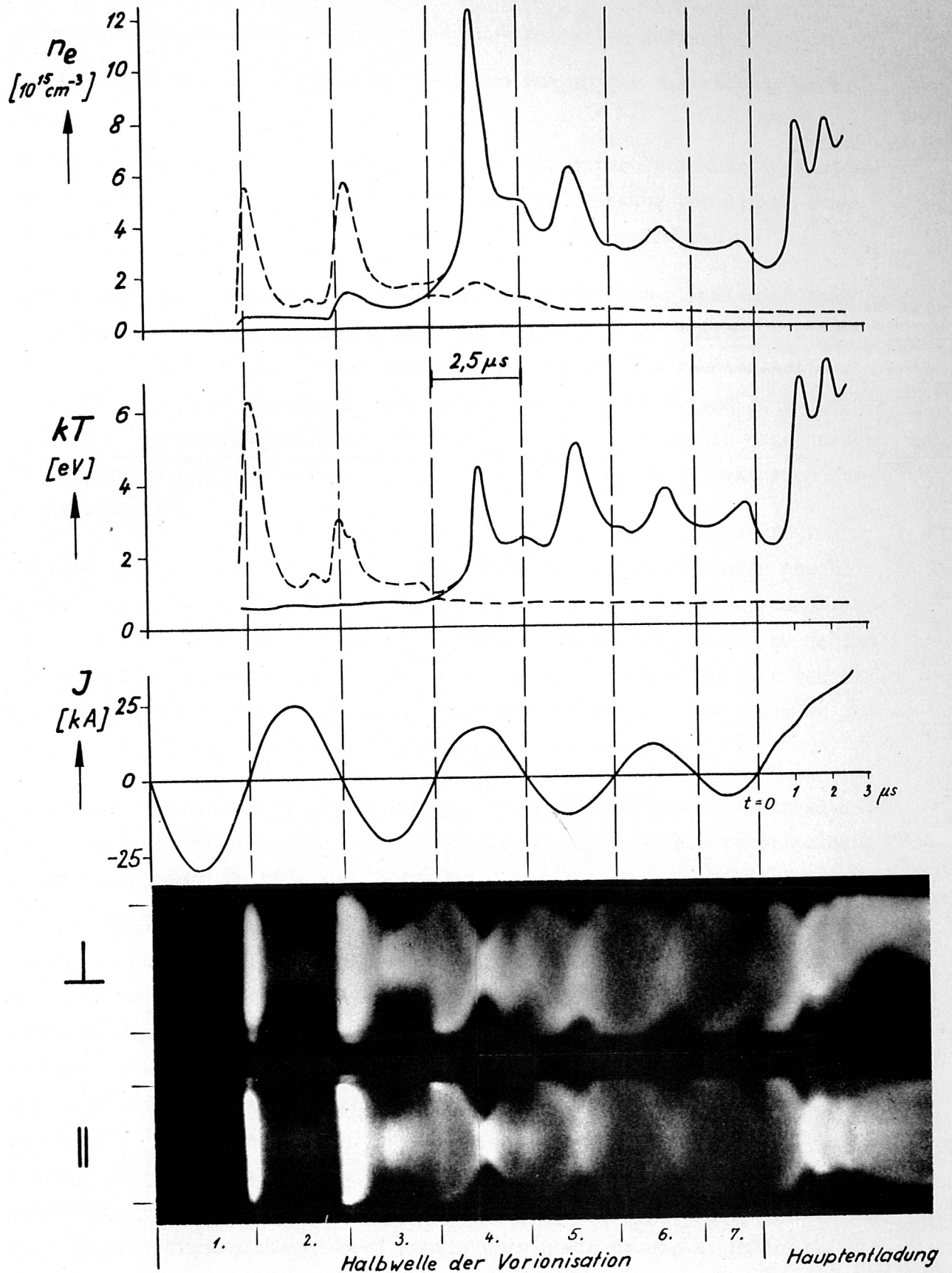


Abb. 9    Drehspiegelbild und zeitlicher Verlauf von Dichte, Temperatur und Strom

Diese Entscheidung läßt sich nach folgenden 4 Kriterien fällen:

1. Der Übergang über das Maximum der V-Kurven muß in der Zeit stetig erfolgen.

Berücksichtigt man, daß der Fehler in der Temperaturbestimmung am Maximum der V-Kurven am größten wird, so läßt sich der Übergang vom linken zum rechten Ast zwanglos zu Beginn der 4. Halbwelle durchführen.

2. Maxima der Temperatur und Dichte sind zu Zeitpunkten der maximalen Kompression zu erwarten. Betrachtet man die Phasenlage der Maxima relativ zum Stromverlauf in Abb. 9, so erkennt man, daß die zum rechten Ast der V-Kurven gehörigen Temperatur- und Dichtemaxima in der 2. und 3. Halbwelle beim Nulldurchgang des Stromes auftreten, ab der 4. Halbwelle dagegen zum Zeitpunkt der auf dem Drehspiegelbild deutlich erkennbaren maximalen Kompression.

3. Zu erwarten ist eine stufenweise Ionisation bei fortschreitender Anzahl der Stromnulldurchgänge. Dieser stufenförmige Anstieg der Elektronendichte ist in Abb. 9 deutlich zu erkennen bei den Stromnulldurchgängen zu Beginn der 2. und 3. Halbwelle, wenn man die zum linken Ast der V-Kurven gehörigen Werte betrachtet. Hiermit korreliert ist ein Aufleuchten des gesamten Querschnitts des Torus, wie es das Drehspiegelbild wiedergibt.

4. Bei Temperaturen unter 1 eV liefern die vornehmlich im roten Spektralbereich emittierten Rotations- und Schwingungsbanden des Wasserstoffmoleküls einen erheblichen Beitrag zum Kontinuum.

Nach R. PEARSE und A. GAYDON [20] ist dieser Beitrag maximal bei Wellenlängen um  $6000 \text{ \AA}$ . Eliminiert man die Wellenlängenabhängigkeit, so sollten ohne Berücksichtigung dieser Banden die bei  $4200 \text{ \AA}$ ,  $5000 \text{ \AA}$  und  $6000 \text{ \AA}$  gemessenen Kontinua denselben zeitlichen Verlauf haben. Unter Einbeziehung der von der Wellenlänge abhängigen Empfindlichkeit der Photomultiplier wurden die Amplituden dieser drei Kontinua gemessen und - bezogen auf gleiche Bandbreite - miteinander verglichen. Das Ergebnis zeigt die Abb. 10. Die Messung zeigt innerhalb der während der Vorionisation relativ groß anzusetzenden Meßfehler (wegen der schlechten Reproduzierbarkeit zu diesen Zeiten) Übereinstimmung dieser drei Kontinuumssignale ab der 4. Halbwelle der Vorionisation. Zu früheren Zeiten ist das bei  $6000 \text{ \AA}$  gemessene Kontinuums-signal bis zu einem Faktor 4 größer als das der beiden kurzwelligeren Bereiche. Es kann demnach aus dem Verschwinden der Molekülbanden geschlossen

bestätigt.

werden, daß die Temperatur ab der 4. Halbwelle größer als 1 eV wird.

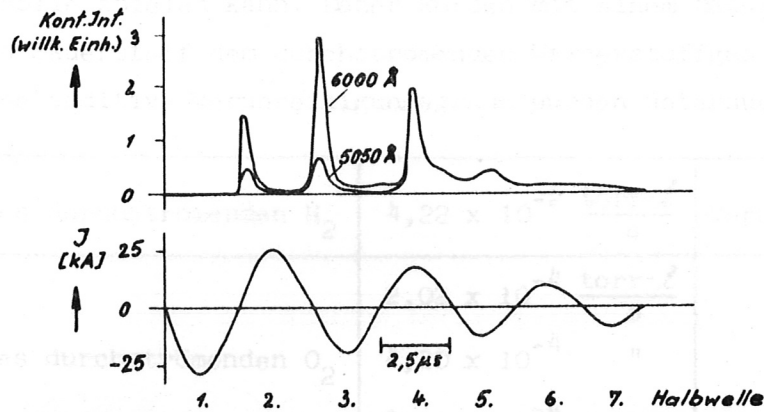


Abb. 10 Vergleich verschiedener Kontinuumsintensitäten während der Vorionisierung

Das Ergebnis der Untersuchung der Vorionisierung läßt sich wie folgt zusammenfassen:

Die Zündung erfolgt in der 2. Halbwelle der Vorionisierung. In der 4. Halbwelle steigt die Temperatur erstmals über 1,5 eV. Am Ende der 7. Halbwelle, d.h. zum Zündzeitpunkt der Hauptentladung ist das Plasma vollständig ionisiert und hat eine mittlere Temperatur von 3 eV. Die vollständige Ionisation ist konsistent mit dem für diese Temperatur berechneten SAHA-Gleichgewicht zwischen Protonen und Wasserstoffatomen.

#### Verunreinigungsgrad der Hauptentladung

Die hier angewandte Methode der Temperatur- und Dichtebestimmung setzt ein reines Wasserstoffplasma voraus. Der Einfluß von - sicher vorhandenen - Verunreinigungs-komponenten bleibt unberücksichtigt. Diese Vernachlässigung ist berechtigt, solange das Verhalten des Plasmas durch die Parameter des Wasserstoffs allein gut beschrieben werden kann.

Die für ein reines Wasserstoffplasma berechneten Emissionskoeffizienten sollen auch für das verunreinigte Plasma gelten, d.h. die Temperatur und die Kontinuumsstrahlung eines reinen Wasserstoffplasmas sollen durch die vorhandenen Verunreinigungen nicht bzw. weniger als die Meßgenauigkeit verändert werden. Die Erfüllung dieser Forderung wird durch folgende Messung bestätigt.

Die Vielzahl der Sauerstofflinien im Standspektrum läßt den Schluß zu, daß von den möglichen Verunreinigungs-komponenten lediglich Sauerstoff eine wesentliche Rolle spielen kann. Daher wurden mit einem Nadelventil dosierte Zusätze von Sauerstoff dem durchströmenden Wasserstoffgas zugegeben. Drei verschiedene additive Verunreinigungsgrade wurden untersucht (siehe Tab. 2).

Menge des durchströmenden H <sub>2</sub>	$4,22 \times 10^{-2} \frac{\text{torr} \cdot \ell}{\text{s}}$	Verunreinigungsgrad
Menge des durchströmenden O <sub>2</sub>	$2,02 \times 10^{-4} \frac{\text{torr} \cdot \ell}{\text{s}}$	0,48 %
	$4,20 \times 10^{-4}$ "	1,0 %
	$8,20 \times 10^{-4}$ "	1,94 %
Druckanstieg im abgeschlossenen Torus	$1 \times 10^{-5} \frac{\text{torr} \cdot \ell}{\text{s}}$	0,025 %

Tab. 2 Eingestellte Verunreinigungsgrade

Zum Vergleich ist in der letzten Zeile der Tab. 2 die Leckrate des Torus angegeben, die als klein gegenüber den Sauerstoffzusätzen vernachlässigt werden kann. Bei jedem dieser Verunreinigungsgrade wurde die Kontinuumsintensität bei 5000 Å und gleichzeitig die Intensität zweier eng benachbarter O II-Linien (4415 Å und 4417 Å) gemessen. Außerdem wurden Drehspiegelbilder zur Bestimmung der Temperatur aus der Driftzeit bis zum Berühren der Wand aufgenommen. Die Ergebnisse dieser Messungen sind in Tab. 3 und Abb. 11 zusammengestellt. Die bei den verschiedenen Verunreinigungsgraden gemessenen Driftzeiten und Kontinuumsintensitäten (bezogen auf die entsprechenden Größen des Plasmas ohne Zusatz) sind in Tab. 3 notiert. Die Temperatur ist umgekehrt proportional dem Quadrat der Driftzeit. Damit ist die relative Temperaturänderung gegeben durch

$$\frac{d kT}{kT} = - 2 \frac{d \tau}{\tau}, \quad \tau = \text{Driftzeit.} \quad (37)$$

Die Dichte ist proportional der Wurzel aus der Kontinuumsintensität. Damit ist die relative Dichteänderung gegeben durch

$$\frac{d n}{n} = \frac{1}{2} \frac{d \epsilon}{\epsilon}, \quad \epsilon = \text{Kontinuumsintensität.} \quad (38)$$

Die letzte Zeile der Tab. 3 gibt die aus den Meßfehlern resultierenden mittleren Fehler für die Driftzeit und die Kontinuumsintensitäten an.

Verunreinigungsgrad	Driftzeit (normiert)	Temperaturänderung	Kont. Int. (normiert)	Dichteänderung
0 %	1	-	1	-
0,48 %	1,01	2 %	1,04	2 %
1,0 %	1,076	15 %	1,16	8 %
1,94	1,149	30 %	1,47	24 %
Fehler	$\pm 2 \%$		$\pm 8 \%$	

Tab. 3 Einfluß der Verunreinigungen

Ein Zusatz von  $1/2 \%$   $O_2$  läßt noch keinen Einfluß auf die Driftzeit und die Kontinuumsintensität erkennen, der größer wäre als die Fehlerschranken.

Bei  $1 \%$  Zusatz ändert sich die Kontinuumsintensität immer noch so wenig, daß sie innerhalb der Fehlerschranken gleich der ohne Zusatz ist, während die Driftzeit gerade meßbar von 1 abweicht. Bei  $1 \%$  Zusatz dürfte demnach die Grenze liegen, oberhalb welcher ein weiterer Zusatz von  $O_2$  nicht mehr unberücksichtigt bleiben darf.

Die Messung mit ca.  $2 \%$  Zusatz bestätigt diese Vermutung, indem hierbei eine schon beachtliche Temperatur- und Dichteänderung resultiert.

Zur Abschätzung des ohne Zusatz vorhandenen Verunreinigungsgrades diene die Messung der 0 II-Linienintensität, die sich bei konstanter Temperatur proportional zum Verunreinigungsgrad ergeben sollte. Aus dem vorher gesagten läßt sich schließen, daß die bei  $2 \%$  Zusatz gemessene 0 II-Intensität in der Proportionalitätsbeziehung nicht mehr berücksichtigt werden kann.

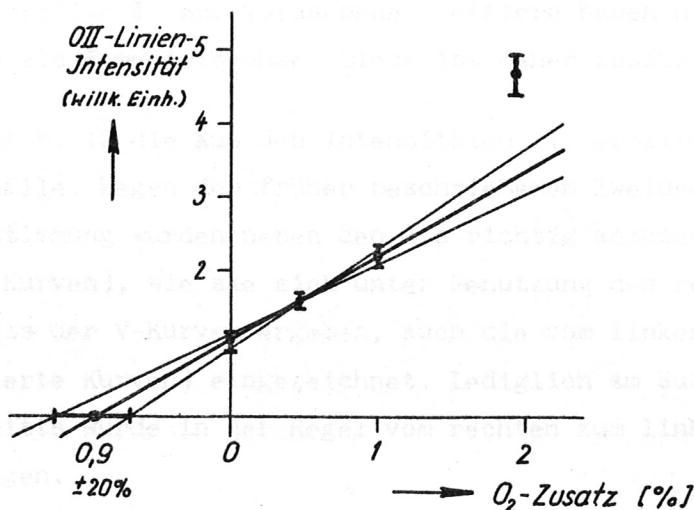


Abb. 11 Intensität der Sauerstofflinien in Abhängigkeit vom  $O_2$ -Zusatz

Abb. 11 zeigt die O II-Linienintensität in Abhängigkeit von den O<sub>2</sub>-Zusätzen. Durch Extrapolation auf die Intensität Null erhält man unter Berücksichtigung der Fehlerschranken für den ohne Zusatz vorhandenen Verunreinigungsgrad den Wert 0,9 % ( $\pm 20$  %).

Dieses Ergebnis rechtfertigt die Vernachlässigung der Verunreinigungsstrahlung bei der Berechnung der Emissionskoeffizienten.

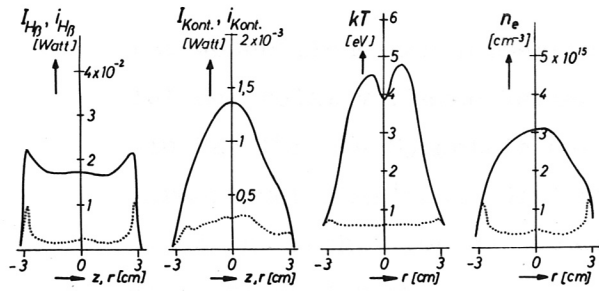
### Dichte- und Temperaturprofile in der Hauptentladung

Zur Bestimmung der Dichte- und Temperaturprofile in der Hauptentladung wurden zwei Meßreihen durchgeführt und ausgewertet. Im ersten Fall lag die Blickrichtung in Richtung der radialen Drift. Die hieraus gewonnenen Profile geben die Verteilung  $\perp$  zur Torusebene wieder. Bei dieser Messung muß man Symmetrie bezüglich der Torusebene ( $z = 0$ ) erwarten. Im zweiten Fall lag die Blickrichtung in Richtung der z-Achse, womit diese Profile die Verteilung  $\parallel$  zur Torusebene (genauer: in der Torusebene) wiedergeben. In diesem Fall erwartet man Symmetrie bezüglich des driftenden Plasmaschwerpunktes bzw. -mittelpunktes.

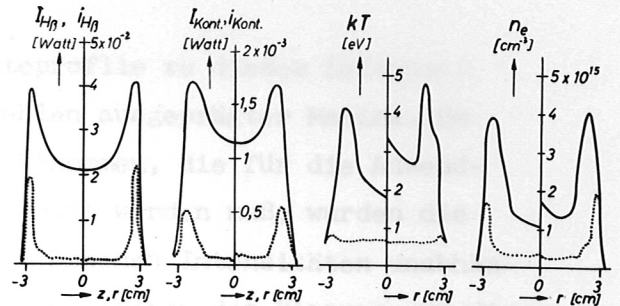
Unterscheiden lassen sich drei charakteristische Profile:

1. Zum Zündzeitpunkt der Hauptentladung ( $t = 0$ ) erfüllt das Plasma den gesamten Torusquerschnitt. Abb. 12 zeigt links die gemessenen Intensitäten  $I$  (ausgezogene Kurven) und die aus der ABEL'schen Gleichung folgenden lokalen Intensitäten  $i$  (punktierte Kurven).  $I$  und  $i$  beziehen sich auf die Raumwinkel- und Flächen- bzw. Volumeneinheit. In Abb. 12a sind die Ergebnisse für die Profile  $\perp$  zur Torusebene wiedergegeben und darunter zeigt Abb. 12b die Profile  $\parallel$  zur Torusebene. Letztere haben nicht mehr die Mitte des Glastorus als Symmetrieachse. Diese ist daher zusätzlich eingezeichnet.

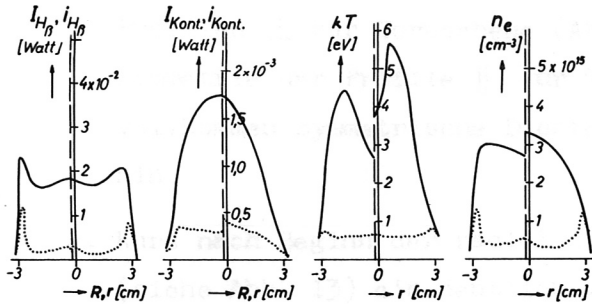
Rechts zeigt Abb. 12 die aus den Intensitäten  $i$  ermittelten Temperatur- und Dichteprofile. Wegen der früher beschriebenen Zweideutigkeit in der Temperaturbestimmung wurden neben den als richtig anzusehenden Profilen (ausgezogene Kurven), wie sie sich unter Benutzung des rechts vom Maximum liegenden Teils der V-Kurven ergeben, auch die vom linken Ast herrührenden Werte (punktierte Kurven) eingezeichnet. Lediglich am äußersten Rand des Torusquerschnitts wurde in der Regel vom rechten zum linken Ast der V-Kurven übergegangen.



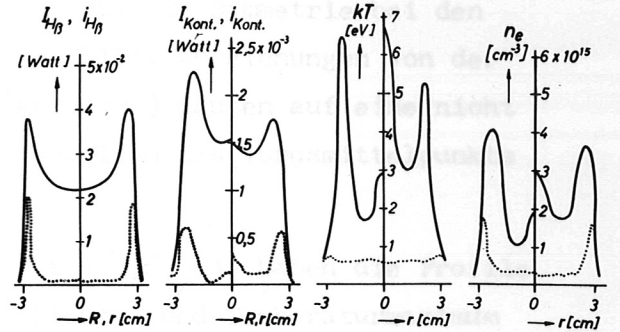
a) Profile  $\perp$  zur Torusebene ( $R = R_0$ )



a) Profile  $\perp$  zur Torusebene ( $R = R_0$ )



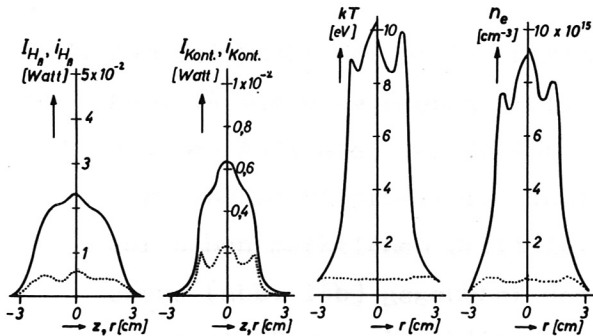
b) Profile  $\parallel$  zur Torusebene ( $z = 0$ )



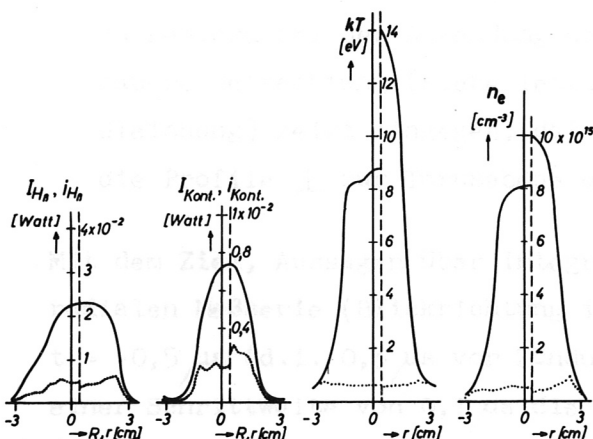
b) Profile  $\parallel$  zur Torusebene ( $z = 0$ )

Abb. 12  $t = 0 \mu s$

Abb. 13  $t = 0,6 \mu s$



a) Profile  $\perp$  zur Torusebene ( $R = R_0$ )



b) Profile  $\parallel$  zur Torusebene ( $z = 0$ )

Abb. 14  $t = 1,3 \mu s$

### Intensitäts-, Temperatur- und Dichteprofile zu verschiedenen Zeitpunkten der Entladung

$I_{H\beta}$ ,  $I_{Kont.}$  : Gemessene Intensitäten pro Flächen- und Raumwinkeleinheit (ausgezogen)

$i_{H\beta}$ ,  $i_{Kont.}$  : Lokale Intensitäten pro Volumen- und Raumwinkeleinheit (punktiert)

$kT$ ,  $n_e$  : Temperatur- und Dichteprofile  
ausgezogen: Ergebnis aus dem rechts vom Maximum liegenden Teil der V-Kurven.

punktiert: Ergebnis aus dem links vom Maximum liegenden Teil der V-Kurven.

Das Wesentliche der Temperatur- und Dichteprofile zu diesem Zeitpunkt ist der relativ flache Verlauf und das Fehlen ausgeprägter Maxima. Um ein Maß für die Symmetrie der Profile zu bekommen, die für die Anwendbarkeit der ABEL'schen Gleichung vorausgesetzt werden muß, wurden die links und rechts von der Symmetrieachse gemessenen Intensitäten unabhängig voneinander ausgewertet. Abgesehen von der Mitte des Plasmas, wo die vom Entabeln herrührenden Fehler leicht 100 % betragen (eine genauere Fehlerbetrachtung folgt im letzten Kapitel), ist die Symmetrie bei den Profilen  $\perp$  zur Torusebene (Abb. 12a) gut erfüllt. Abweichungen von der Symmetrie der Profile  $\parallel$  zur Torusebene (Abb. 12b) deuten auf eine nicht vollkommen symmetrische Dichteverteilung bezüglich des Torusmittelpunkts hin.

2. Kurz nach Beginn der radialen Kompression ( $t = 0,6 \mu\text{s}$ ) haben die Profile (siehe Abb. 13) ein deutlich ausgeprägtes Dichte- und Temperaturmaximum in der Nähe der Glaswand. Die Lage wie auch die Amplituden dieser Maxima zeigen gute Symmetrie bezüglich des geometrischen Mittelpunktes des Torusquerschnitts. Auch hier dürfen die großen Abweichungen in der Mitte als zufällig angesehen werden. Die Meßfehler erlauben keine genauere Aussage für diese Werte.
3. Zum Zeitpunkt der ersten maximalen Kompression ( $t = 1,3 \mu\text{s}$ ) zeigen die in Abb. 14 wiedergegebenen Profile im wesentlichen die Form einer Glockenkurve. Das Auftreten der in Abb. 14a wiedergegebenen Nebenmaxima im Temperatur- und Dichteprofil ist innerhalb der Fehlergrenzen unsicher. Auf Grund der schon merklichen Drift ist die Mittelachse der Profile  $\parallel$  zur Torusebene (Abb. 14b) gegenüber dem geometrischen Mittelpunkt des Glasgefäßes versetzt. Demzufolge bildet sich in diesen Profilen eine schon in den gemessenen Intensitäten  $I(R)$  erkennbare Unsymmetrie aus, die zwangsläufig zu Fehlern bei der Anwendung der ABEL'schen Gleichung führen muß. Eine genauere Betrachtung (siehe letztes Kapitel: Fehlerrechnung zur ABEL'schen Gleichung) zeigt hingegen, daß die Anwendung der ABEL'schen Gleichung auf die Profile  $\perp$  zur Torusebene dennoch richtige Resultate liefern kann.

Mit dem Ziel, Aussagen über integrale Mittelwerte zu erhalten, wurden aus der radialen Meßserie (Blickrichtung in Richtung der Drift) für die Zeit von  $t = -0,5 \mu\text{s}$  (d.i.  $0,5 \mu\text{s}$  vor Zündung der Hauptentladung) bis  $t = 2,5 \mu\text{s}$  mit einer Schrittweite von  $0,1 \mu\text{s}$  die Temperatur- und Dichteprofile ermittelt.



Abb. 15 zeigt das Ergebnis in Form einer 3-dimensionalen Darstellung: Temperatur bzw. Dichte als Funktion von Ort und Zeit. Für diese Darstellung wurden die gemessenen Intensitätsprofile  $I(z)$  für  $-r_0 \leq z \leq r_0$  ( $2 r_0$  ist der innere Durchmesser des Glasgefäßes) für  $z = \pm r$  gemittelt und dann ausgewertet. Die in Abb. 15 gezeigte Symmetrie der Profile ist also kein Meßergebnis, sondern wurde zur Verbesserung der Anschaulichkeit durch Spiegelung der radialen Verteilung an der Symmetrieachse erreicht.

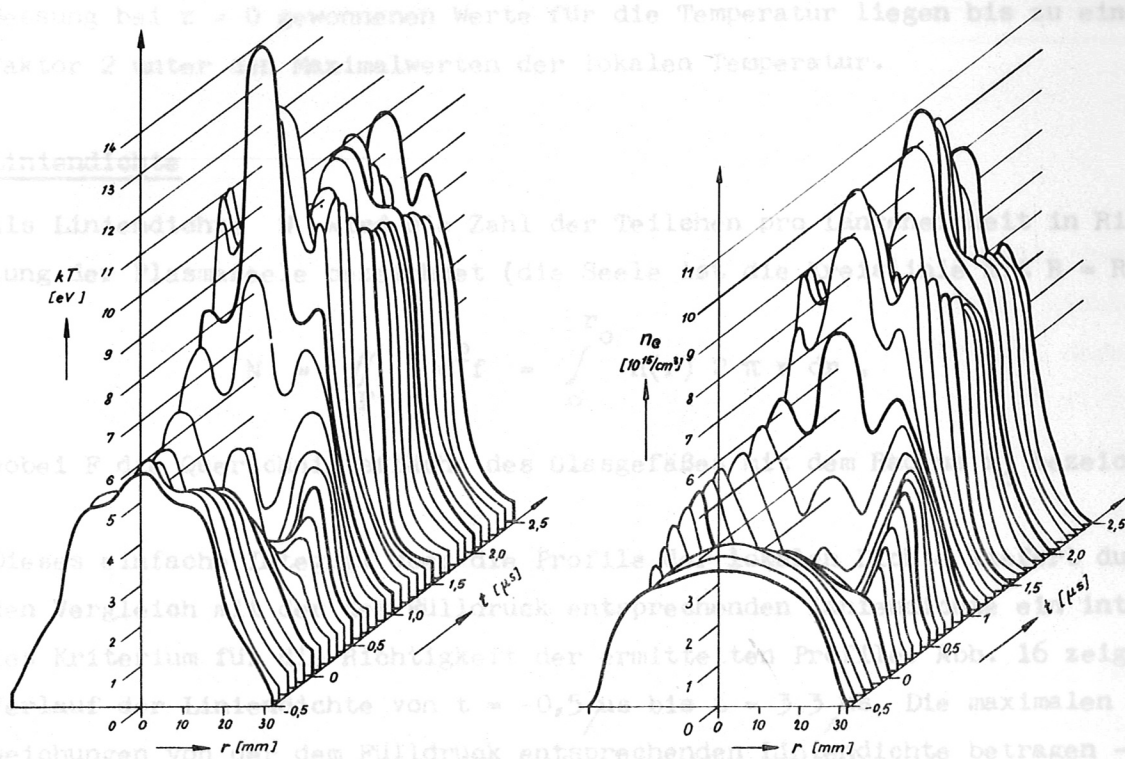


Abb. 15 Dichte- und Temperaturprofile als Funktion der Zeit während der Hauptentladung

Zu Beginn der Hauptentladung erfüllt das Plasma nahezu gleichförmig den ganzen Torusquerschnitt. Auch die Temperatur zeigt ein breites Profil ohne ausgeprägtes Maximum. Die Maximalwerte für die Dichte und Temperatur liegen bzw. bei  $3 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  und 5 eV. Während der Kompressionsphase bilden sich an der Glaswand Temperatur- und Dichtemaxima aus, deren Amplitude mit der Zeit ansteigt und deren Ort sich mit einer Geschwindigkeit von  $3 \text{ cm}/\mu\text{s}$  in Richtung auf die Achse zu bewegt. Dadurch erfahren Dichte und Temperatur auf der Achse einen Anstieg bis auf Maximalwerte von  $10^{16} \text{ cm}^{-3}$  bzw. 12 eV zum Zeitpunkt der ersten maximalen Kompression. Die anschließenden Kompressionsschwingungen äußern sich

Abb. 16 Zeitlicher Verlauf der Liniendichte  $N$ , bezogen auf die dem Fülldruck entsprechende Liniendichte.

in einem periodischen Absinken und Ansteigen der Maximalwerte und einer phasengleichen Schwankung der Profildichten. Zum Zeitpunkt der dritten maximalen Kompression ( $t \approx 2,5 \mu\text{s}$ ) berührt das Plasma infolge der Driftbewegung die Glaswand.

Die bei  $z = 0$  gemessenen Intensitäten liefern Mittelwerte für Temperatur und Dichte (siehe Abb. 9), deren Vergleich mit den hier gezeigten Maximalwerten folgendes zeigt:

Die aus einer einzigen Messung bei  $z = 0$  gewonnenen Werte für die Dichte entsprechen etwa den Maximalwerten der lokalen Dichte. Die aus einer einzigen Messung bei  $z = 0$  gewonnenen Werte für die Temperatur liegen bis zu einem Faktor 2 unter den Maximalwerten der lokalen Temperatur.

### Liniendichte

Als Liniendichte  $N$  wird die Zahl der Teilchen pro Längeneinheit in Richtung der Plasmaseele bezeichnet (die Seele ist die Kreislinie mit  $R = R_0$ ):

$$N = \iint_F n d^2f = \int_0^{r_0} n(r) 2\pi r dr, \quad (39)$$

wobei  $F$  die Querschnittsfläche des Glasgefäßes mit dem Radius  $r_0$  bezeichnet.

Dieses einfache Integral über die Profile der lokalen Dichte liefert durch den Vergleich mit der dem Fülldruck entsprechenden Liniendichte ein integrales Kriterium für die Richtigkeit der ermittelten Profile. Abb. 16 zeigt den Verlauf der Liniendichte von  $t = -0,5 \mu\text{s}$  bis  $t = 3,3 \mu\text{s}$ . Die maximalen Abweichungen von der dem Fülldruck entsprechenden Liniendichte betragen  $-20\%$  bis  $+25\%$ . Nachdem das Plasma die Wand berührt hat ( $t = 2,5 \mu\text{s}$ ), darf der nach Gl. (39) berechnete Zahlenwert nicht mehr als Liniendichte interpretiert werden.

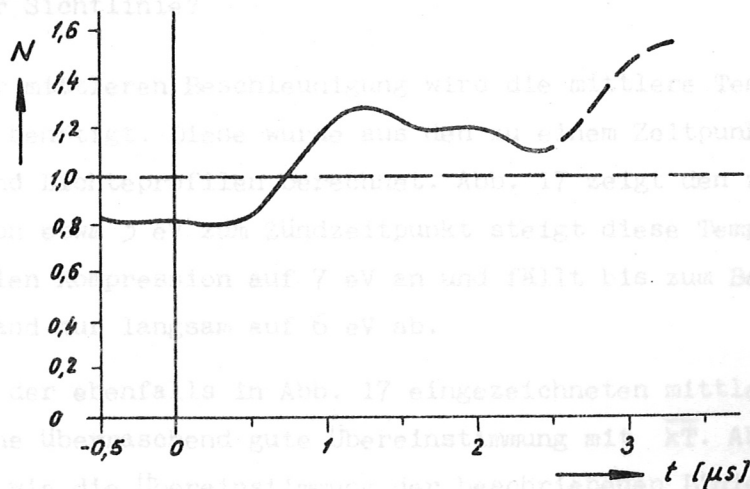


Abb. 16 Zeitlicher Verlauf der Liniendichte  $N$ , bezogen auf die dem Fülldruck entsprechende Liniendichte.

Auch hier wurde wieder ein Vergleich mit der aus einer einzigen Messung bei  $z = 0$  berechenbaren Liniendichte durchgeführt. Es zeigte sich, daß die aus der Messung bei  $z = 0$  gewonnene Dichte (siehe Abb. 9), multipliziert mit der Fläche, deren Durchmesser dem Drehspiegelbild entnommen wurde, Werte ergab, deren Übereinstimmung mit der dem Fülldruck entsprechenden Liniendichte nicht schlechter war als die oben explizit berechneten Liniendichten. Mindestens bei der hier betrachteten Entladung liefert also eine einzige Messung bei  $z = 0$  unter Hinzunahme eines Drehspiegelbildes verlässliche Werte für die Liniendichte; ein Ergebnis, dessen Übertragung auf andere Gasentladungen nicht vorbehaltlos zulässig ist.

### Mittlere Temperaturen

Ein einfach zu gewinnender, aber unanschaulicher Mittelwert für die Temperatur ergibt sich aus den in der Torusebene (bei  $z = 0$ ) in radialer Richtung gemessenen mittleren Intensitäten der  $H_{\beta}$ -Linie und des Kontinuums, deren Verhältnis nach Gl. (27) eine Temperatur bestimmt. Rein formal ergibt sich für diesen Mittelwert  $\{kT\}$  aus den Gl. (30) und (33) die Proportionalitätsbeziehung:

$$\{kT\} \sim \frac{I_{\text{Kont}}}{I_{H_{\beta}}} \sim \frac{\int n^2(R) (kT(R))^{-1/2} dR}{\int n^2(R) (kT(R))^{-3/2} dR} \quad (40)$$

So einfach dieser Mittelwert aus einer einzelnen Messung zu gewinnen ist, bereitet seine Interpretation doch erhebliche Schwierigkeiten. Was besagt schon die durch obige Definition gegebene Mittelungsvorschrift: Der Mittelwert einer Funktion ist gegeben durch die mit  $n^2/(kT)^{3/2}$  gewichtete Integration dieser Funktion längs der Sichtlinie?

Zur Berechnung der mittleren Beschleunigung wird die mittlere Temperatur  $\overline{kT}$  (siehe Gl. (14)) benötigt. Diese wurde aus den zu einem Zeitpunkt ermittelten Temperatur- und Dichteprofilen berechnet. Abb. 17 zeigt den zeitlichen Verlauf von  $\overline{kT}$ . Von etwa 3 eV zum Zündzeitpunkt steigt diese Temperatur bis zur ersten maximalen Kompression auf 7 eV an und fällt bis zum Berühren des Plasmas mit der Wand nur langsam auf 6 eV ab.

Ein Vergleich mit der ebenfalls in Abb. 17 eingezeichneten mittleren Temperatur  $\{kT\}$  zeigt eine überraschend gute Übereinstimmung mit  $\overline{kT}$ . Aber auch dieses Ergebnis darf wie die Übereinstimmung der beschriebenen Liniendichten nicht ohne Einschränkungen verallgemeinert werden.

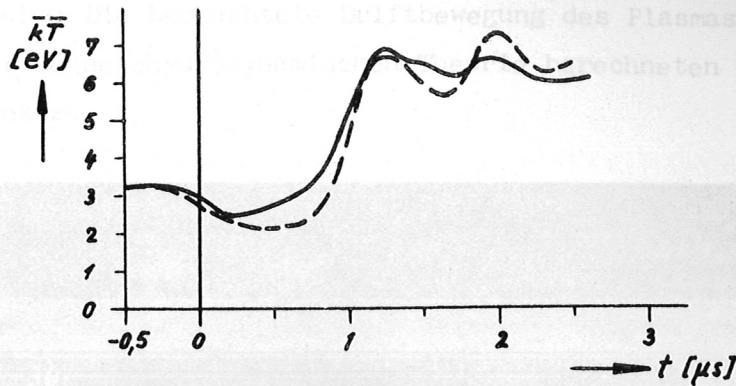


Abb. 17 Zeitlicher Verlauf der mittleren Temperatur  $\bar{kT}$ . Die den gemessenen mittleren Intensitäten entsprechende Temperatur ist gestrichelt eingezeichnet.

#### Bahnkurve des Plasmaschwerpunktes

Aus den Temperaturmittelwerten  $\bar{kT}$  wurden zu den verschiedenen Zeitpunkten aus der Driftformel ( Gl. (16) mit  $Z = 1$  ) die instantanen mittleren Beschleunigungen berechnet. Zum Zeitpunkt  $t = 0,5 \mu\text{s}$  beginnt das Plasma sich von der Glaswand abzulösen, was man aus den Drehspiegelbildern ersehen kann. Zusätzliche Messungen mit einer Magnetfeldsonde zeigen, daß die zeitlich ansteigende Energiedichte des Magnetfeldes zu diesem Zeitpunkt an der Innenwand des Glasgefäßes einen Betrag erreicht hat, der dem gaskinetischen Druck entspricht. Daher kann erst zu diesem Zeitpunkt die Kompression des Plasmas beginnen. Die zweimalige Integration der Gl. (16) liefert die Bahnkurve des Plasmaschwerpunktes. Die beiden Integrationskonstanten werden derart festgelegt, daß zum Zeitpunkt  $t = 0,5 \mu\text{s}$   $\frac{d}{dt} R_0 = 0$  und  $R_0 = R_c$  gesetzt wird. In Abb. 18 ist ein in axialer Richtung aufgenommenes Drehspiegelbild wiedergegeben, welches die Driftbewegung des Plasmas in radialer Richtung zeigt. Die beiden ausgezogenen Kurven geben die aus der Driftformel folgenden Bahnkurven des Plasmaschwerpunktes wieder, wobei einmal die obere und ein anderes Mal die untere Grenze der aus den Meßfehlern resultierenden Fehler-schranke für  $\bar{kT}$  eingesetzt wurde.

Die zusätzlich in Abb. 18 eingetragenen Punkte mit ihren Fehlerbreiten zeigen die Lage des Plasmamittelpunktes an. Diese Punkte entsprechen der Lage der Symmetrieachse der in axialer Richtung gemessenen Profile der Kontinuumsintensitäten. Innerhalb ihrer Fehlergrenzen stimmen diese beiden Bahnkurven

überein. D.h.: Die beobachtete Driftbewegung des Plasmas stimmt überein mit der aus der magnetohydrodynamischen Theorie berechneten Bahnkurve des Plasmaschwerpunkts.

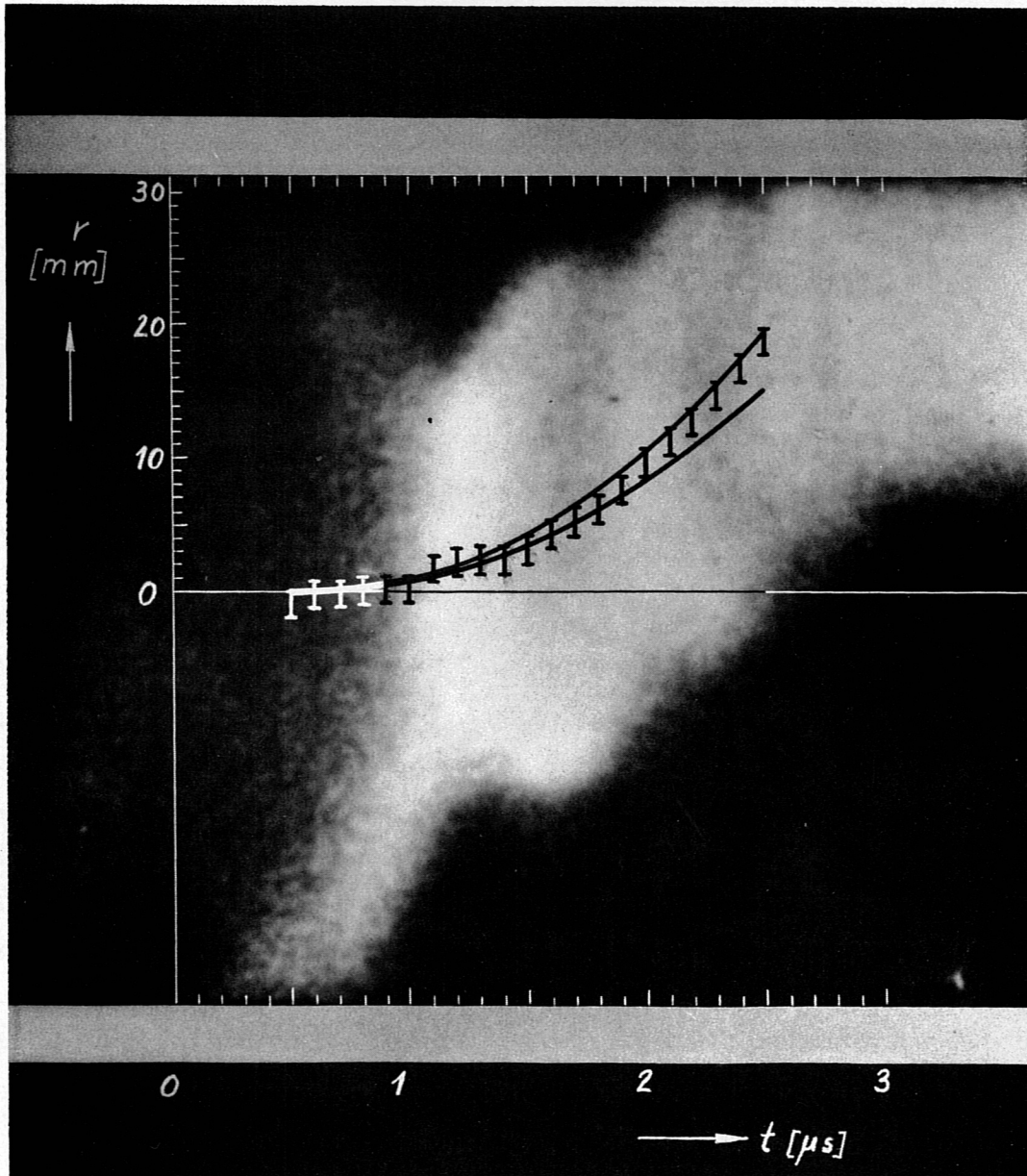


Abb. 18 Drehspeigelbild  $\perp$  zur Torusebene.  
Vergleich der gemessenen mit der aus  $\overline{kT}$  berechneten Bahnkurve des Plasmaschwerpunktes.

Dieses Ergebnis rechtfertigt die in der Plasmaphysik vielfach übliche Methode einer Temperaturbestimmung aus der Driftbewegung. Die Driftbewegung läßt sich ermitteln aus einem Drehspeigelbild, mit Bildwandleraufnahmen, durch Sondenmessungen oder durch Messung von Intensitätsprofilen und deren zeitlicher Ver-

änderung. Bei hinreichend kleinem Meßfehler läßt sich aus der Bahnkurve durch deren zweimalige Differentiation nach der Zeit zu jedem Zeitpunkt die durch Gl. (14) definierte mittlere Temperatur  $\overline{kT}$  bestimmen. Aber auch bei Meßfehlern, die so groß sind, daß sie die Differentiation nicht mehr erlauben, läßt sich ein zeitlicher Mittelwert dieser Temperatur angeben. Mißt man die Zeit  $\tau$ , die das Plasma benötigt, um sich aus seiner Ruhelage ein endliches Stück  $\Delta R$  (z.B. bis zum Berühren der Wand) in radialer Richtung zu bewegen, so besteht zwischen  $\tau$ ,  $\Delta R$  und  $kT$  folgende Beziehung:

$$kT = \frac{m_i R_0}{1 + Z} \frac{\Delta R}{\tau^2} \quad (41)$$

Hier bedeutet  $kT$  die über die Zeit gemittelte Temperatur  $\overline{kT}$ .

Außer der monotonen Driftbewegung zeigt Abb. 18 eine trotz der Fehler erkennbare Oszillation des Plasmamittelpunktes um die Bahnkurve des Schwerpunktes. Ein Maximum dieser Oszillation ist zu erkennen zum Zeitpunkt der ersten maximalen Kompression, und ein Minimum liegt vor bei der darauffolgenden maximalen Expansion. Dies stimmt überein mit der in Gl. (21) geforderten Phasenlage für diese oszillatorische Bahnkorrektur. Eine Abschätzung für die maximale Amplitude der Oszillationen nach Gl. (21) liefert einen Wert  $\lesssim 0,1$  mm. Die gemessenen Oszillationsamplituden liegen in der Größenordnung von 1 mm. Diese Diskrepanz läßt sich mit den vorliegenden Messungen nicht erklären. Zum einen sind die Meßfehler größer als die berechneten Amplituden, und zum anderen ist es fraglich, ob man den Unterschied zwischen Plasmaschwerpunkt und -mittelpunkt, gemessen an den Oszillationsamplituden, noch vernachlässigen kann. Denkbar und nicht auszuschließen wäre, daß der Plasmaschwerpunkt mit kleinerer Amplitude um die monotone Bahnkurve oszilliert als der Plasmamittelpunkt.

Durchgang durch die oberste Glaswand des Entladunggefäßes zu suchen. Die hierdurch bewirkte Parallelversetzung und Anknüpfung des Strahlenganges kann mindestens bis zum Durchmesser des komprimierten Plasmas als klein gegenüber  $\pm 1$  mm vernachlässigt werden, wie neben einer numerischen Rechnung auch durch eine optische Messung geprüft wurde.

#### 4. Fehler bei Druckmessung

Die Messung des Filldruckes von 40 mTorr mit einem Wärmeleitungsmanometer kann auf  $\pm 3\%$  genau angesehen werden. Dies ist ein auf Erfahrung beruhender Schätzwert.

## 9. Fehlerbetrachtung und Diskussion

Zur Diskussion der Ergebnisse müssen ihre Fehler genauer betrachtet werden. Die wesentlichen Fehlerquellen sind:

### 1. Meßfehler

Für die am Plasma gemessenen Intensitäten ergibt sich ein über den Ort und die Zeit gemittelter Fehler von  $\pm 6,5\%$ . Die mittlere Streuung der Fehler einer Messung an festem Ort, gemittelt über die Zeit (d.i. die mittlere Streuung der prozentualen Meßfehler einer oszillographisch gemessenen Intensitätskurve) beträgt  $\pm 0,2\%$ . Die mittlere Streuung der Fehler einer Messung zu fester Zeit, gemittelt über den Ort (d.i. die mittlere Streuung der prozentualen Meßfehler eines gemessenen Intensitätsprofils) beträgt  $\pm 0,1\%$ . Für einen beliebigen Ort und einen beliebigen Zeitpunkt ergibt sich damit für den mittleren relativen Meßfehler und dessen mittlere Streuung ein Wert von  $(6,5 \begin{smallmatrix} +0,2 \\ -0,1 \end{smallmatrix})\%$ .

### 2. Eichfehler

Die Absolutintensität des als Eichnormal verwendeten Kohlebogens wird von J. EULER [18] mit einem Fehler von  $\pm 5\%$  angegeben. Hierzu kommt ein mittlerer Fehler von  $\pm 2,2\%$ , der sich aus den insgesamt 17 durchgeführten Eichmessungen ergibt.

### 3. Abbildungsfehler

Der verwendete Abbildungsstrahlengang läßt eine Ortsauflösung von  $\pm 1$  mm zu. Die Einstellgenauigkeit des beweglichen Tisches ist eine Größenordnung besser. Ein weiterer Fehler ist in der Strahlbrechung beim Durchgang durch die gekrümmte Glaswand des Entladungsgefäßes zu suchen. Die hierdurch bewirkte Parallelversetzung und Knickung des Strahlenganges kann mindestens bis zum Durchmesser des komprimierten Plasmas als klein gegenüber  $\pm 1$  mm vernachlässigt werden, wie neben einer numerischen Rechnung auch durch eine optische Messung geprüft wurde.

### 4. Fehler der Druckmessung

Die Messung des Fülldruckes von 40 mtorr mit einem Wärmeleitungsmanometer kann auf  $\pm 5\%$  genau angesehen werden. Dies ist ein auf Erfahrung beruhender Schätzwert.

### 5. Auswertefehler der Drehspiegelbilder

Der Plasmadurchmesser läßt sich aus den Drehspiegelbildern mit einer Genauigkeit von  $\pm 2\%$  ermitteln.

Weitere mögliche Fehlerquellen sind die Amplituden- und Zeiteichung des Oszillographen, das Auswerteverfahren und die Reproduzierbarkeit der Entladung. Letztere ist in dem angegebenen Meßfehler enthalten, während die beiden anderen so klein gehalten werden konnten, daß sie als klein gegenüber den Meßfehlern vernachlässigbar waren. Dies trifft nicht mehr zu für die Auswertung mittels der ABEL'schen Integralgleichung. Dieser Punkt wird gesondert abgehandelt.

#### Fehler der Mittelwerte

Gemeint ist der Fehler der aus einer Messung der mittleren Intensität gewonnenen Werte für die Dichte beziehungsweise für die durch Gl. (40) definierte mittlere Temperatur  $\{kT\}$ .

Wegen der Proportionalität  $n \sim \sqrt{I_{\text{Kont}}/l}$  ( $I_{\text{Kont}}$  = gemessene Kontinuumsintensität,  $l$  = Durchmesser des Plasmas) ergibt sich für diesen Mittelwert der Dichte ein mittlerer Fehler von  $\pm 4,5\%$ . Für die mittlere Temperatur wird wegen  $kT \sim 1/V$  ( $V$  = Verhältnis der  $H_{\beta}$ - zur Kontinuumsintensität) der mittlere Fehler  $\pm 12\%$ .

#### Fehlerrechnung zur ABEL'schen Gleichung

Da die durch die ABEL'sche Integralgleichung gegebene Vorschrift zur Ermittlung der lokalen Intensitäten aus den gemessenen einer Operation entspricht, die man formal als eine halbe Differentiation bezeichnen kann, muß man erwarten, daß hierbei - wie immer bei einer Differentiation - die Fehler leicht sehr groß werden können. In Anlehnung an die von R. GORENFLO [15] durchgeführte Fehlerbetrachtung ergibt sich für die mittlere Streuung  $\sigma$  der lokalen Intensitäten  $i$  der Ausdruck

$$\sigma(i_k) = \frac{N}{\pi} \left\{ \frac{\sigma_k^2}{k + \frac{1}{4}} + \sum_{j=k+1}^N \sigma_j^2 T_{kj}^2 \right\}^{1/2}, \quad \text{mit } T_{kj} = \frac{1}{\sqrt{(j+\frac{1}{2})^2 - k^2}} - \frac{1}{\sqrt{(j-\frac{1}{2})^2 - k^2}}. \quad (42)$$

Hierin bedeuten:  $(N + 1)$  die Anzahl der Kreisringe, in die man den Plasmazyylinder unterteilt,  $i_k$  die lokale Intensität in dem Kreisring Nr.  $k$  und  $\sigma_j$  die mittlere Streuung der gemessenen Intensitäten an der Stelle Nr.  $j$  mit  $j \gg k$ .

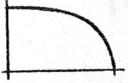
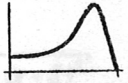
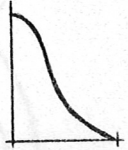


Diese Formel ergibt sich aus dem GAUSS'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz, wenn man als Meßwerte an den Stellen Nr. j Zufallsgrößen mit dem Erwartungswert Null betrachtet.

Die mittlere Streuung eines Meßwertes an der Stelle Nr. j ist unabhängig von der mittleren Streuung eines Meßwertes an der Stelle Nr. l (l ≠ j). Für die mittlere Streuung der lokalen Intensitäten läßt sich aus (42) erkennen, daß zwischen  $\sigma(i_k), \sigma(i_{k+1}), \dots, \sigma(i_N)$  eine Korrelation besteht, die sich darstellen läßt durch:

$$\sigma(i_k) = f(\sigma_k, \sigma(i_{k+1}), \sigma(i_{k+2}), \dots, \sigma(i_N)). \quad (43)$$

Bei der Auswertung mit dem BOLDT'schen Analogrechner wurde N = 16 gewählt. Mit dem mittleren Meßfehler von 6,5 % wurde die Fehlerformel (42) für die  $H_\beta$ - und die Kontinuumsintensitätsprofile zu den Zeitpunkten t = 0; 0,6; 1,3 und 2,0  $\mu$ s ausgewertet. Für die daraus ermittelten Fehler der lokalen Intensitäten wurden weiter die mittleren prozentualen Fehler der lokalen Temperatur- und Dichtewerte berechnet. Tab. 4 gibt das Ergebnis wieder, und zwar für die Kreisringe Nr. 0, 2, 5 und 10.

Kreisring	Nr.0		Nr.2		Nr.5		Nr.10		Form der Profile
	kT	n	kT	n	kT	n	kT	n	
0 $\mu$ s	—	+45 -100	+350 -60	+17	+150 -50	±11	+90 -43	±9,5	
0,6 $\mu$ s	—	+120 -100	—	+50 -100	—	+40 -100	+370 -58	±14	
1,3 $\mu$ s	+900 -85	+30 -48	+90 -40	±11	+60 -35	±8,5	+25 -28	±4,5	
2,0 $\mu$ s	+400 -80	+25 -33	+65 -35	±8,5	+43 -28	±7	+25 -28	±5	

Tab. 4 Prozentuale Fehler der lokalen Temperatur- und Dichtewerte

Zur Veranschaulichung zeigt die letzte Spalte der Tabelle 4 noch einmal den qualitativen Verlauf der radialen Profile. In der Kompressionsphase (t = 0,6  $\mu$ s) läßt sich über die Temperatur im Innern des Plasmas praktisch nichts aussagen.

Hier lassen die Fehler negative Intensitäten zu. Für die Dichte läßt sich nur eine obere Grenze angeben. Auch in dem flachen Profil zum Zündzeitpunkt ( $t = 0$ ) läßt sich die Temperatur bestenfalls auf einen Faktor 2 genau bestimmen, während die Fehlergrenze für die Dichte, abgesehen von der Mitte ( $k = 0$ ), in weiten Bereichen bei  $\pm 10\%$  liegt. Vom Zeitpunkt der ersten Kompression ( $t = 1,3 \mu\text{s}$ ) bis kurz vor dem Berühren der Wand ( $t = 2,0 \mu\text{s}$ ) bleiben die Profile und dementsprechend auch die Fehler ähnlich. Sieht man wieder ab von der Mitte, so bleiben die Fehler der Temperatur in den Grenzen von  $+60\%$  bis  $-35\%$ . Die Dichte läßt sich bei diesen glockenförmigen Profilen schon auf weniger als  $\pm 10\%$  genau angeben.

Man erkennt aus dieser Zusammenstellung, wie wenig sich insbesondere bei Profilen, deren Maximum nicht in der Mitte liegt, bei einem Meßfehler von nur  $6,5\%$  über die lokalen Werte im Inneren aussagen läßt.

Da die Anwendung der ABEL'schen Integralgleichung Rotationssymmetrie voraussetzt, muß noch geprüft werden, wie sich die durch die Driftbewegung des Plasmas sicher vorhandene Störung dieser Symmetrie auswirkt. Unter Beibehaltung einer Spiegelsymmetrie läßt sich die Abweichung von der Rotationssymmetrie beispielsweise beschreiben durch folgenden Ansatz. Die lokale Intensität  $i$  sei konstant auf einem Kreis mit dem Radius  $r$ , dessen Mittelpunkt auf der  $x$ -Achse bei  $x_0 = \delta = \delta(r)$  liegt:

$$i(r) = \text{const} \quad \text{für} \quad (x - \delta)^2 + y^2 = r^2 \quad (44)$$

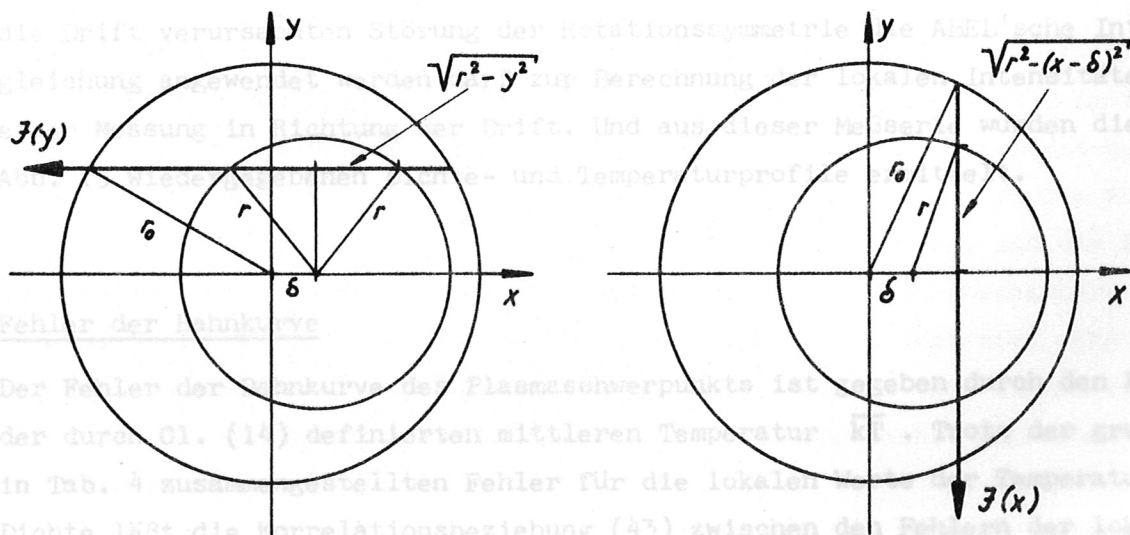


Abb. 19 Skizze zu dem durch Gl. (44) gegebenen Symmetrie-ansatz für das driftende Plasma

Die Berechnung der einer Messung zugänglichen Größen  $I(y)$  und  $I(x)$  liefert gemäß Abb. 19 die Ausdrücke:

$$I(y) = 2 \int_{r=y}^{r_0} \frac{i(r)}{\sqrt{r^2 - y^2}} r dr, \quad (45)$$

$$I(x) = 2 \int_{r=x-\delta}^{r_0} \frac{i(r)}{\sqrt{r^2 - (x-\delta)^2}} (r + (x-\delta) \frac{\partial \delta}{\partial r}) dr. \quad (46)$$

Der Vorteil dieses Symmetrieansatzes liegt darin, daß für eine Messung in der x-Richtung die ABEL'sche Integralgleichung anwendbar bleibt, siehe Gl.(45). Es möge lediglich erwähnt sein, daß bei hinreichender Meßgenauigkeit nach Berechnung der Funktion  $i(r)$  aus Gl. (45) die Funktion  $\delta = \delta(r)$  aus Gl.(46) bestimmt werden kann.

Versucht wurde durch einen linearen Ansatz für  $\delta$ :

$$\delta = \delta_0 \left(1 - \frac{r}{r_0}\right), \quad (47)$$

mit  $r_0$  = Radius des Glasrohrs,  $\delta = \delta_0$  für  $r = r_0$ , aus einem unsymmetrischen Profil  $I(x)$  durch geeignete Wahl von  $\delta_0$  eine symmetrische Form für  $i(r)$  zu erhalten. Eine Durchrechnung der Gl. (46) für das Profil der  $H_{\beta}$ -Intensität, gemessen in der z-Richtung ( $z \equiv y$ ) zur Zeit  $t = 1,3 \mu s$  (siehe Abb. 14b) ergab für  $\delta_0 = 0,45 r_0$  ein Profil für die lokale Intensität  $i(r)$ , dessen Symmetrie wesentlich gegenüber dem in Abb. 14b wiedergegebenen Profil verbessert wurde.

Damit ist mindestens für dieses Beispiel gerechtfertigt, daß trotz der durch die Drift verursachten Störung der Rotationssymmetrie die ABEL'sche Integralgleichung angewendet werden darf zur Berechnung der lokalen Intensitäten aus einer Messung in Richtung der Drift. Und aus dieser Meßserie wurden die in Abb. 15 wiedergegebenen Dichte- und Temperaturprofile ermittelt.

#### Fehler der Bahnkurve

Der Fehler der Bahnkurve des Plasmaschwerpunkts ist gegeben durch den Fehler der durch Gl. (14) definierten mittleren Temperatur  $\overline{kT}$ . Trotz der großen, in Tab. 4 zusammengestellten Fehler für die lokalen Werte der Temperatur und Dichte läßt die Korrelationsbeziehung (43) zwischen den Fehlern der lokalen Intensitäten erwarten, daß der Fehler der zur Bestimmung von  $\overline{kT}$  zu berech-

nenden Integrale über die Temperatur- und Dichteprofile einen erträglichen Wert annimmt. Wegen der komplizierten Berechnung wurde der Fehler für  $\overline{kT}$  direkt aus der Definition bestimmt. Dazu wurde zu einem Zeitpunkt ( $t = 2,0 \mu\text{s}$ ) ein maximaler und ein minimaler Wert für  $\overline{kT}$  berechnet. Durch Umformung von Gl. (14) erhält man:

$$\overline{kT} = \frac{\int_0^{r_0} kT n r dr}{\int_0^{r_0} n r dr} . \quad (48)$$

Der Integrand des Integrals im Zähler hat ein Maximum. Bei dem zu diesem Maximum gehörigen Wert für  $r$  wurden beim Lösen der ABEL'schen Integralgleichung die Meßwerte innerhalb ihrer Fehlerschranken so gewählt, daß das Maximum dieses Integranden einmal erhöht und ein anderes Mal erniedrigt wurde. Die Auswertung der Integrale nach Gl. (48) ergab für  $\overline{kT}$  einen Fehler von  $\pm 12 \%$ . Nimmt man an, daß dieser Wert über die Zeit konstant bleibt, so ergeben sich für die minimalen und die maximalen Werte für  $\overline{kT}(t)$  die beiden in Abb. 18 eingezeichneten Bahnkurven des Plasmaschwerpunkts.

#### Startzeitpunkt der Drift

Eine Anpassung der gerechneten Bahnkurve an die Meßpunkte für die Lage des Plasmamittelpunkts ergibt für den Startzeitpunkt der Drift  $t = 0,5 \mu\text{s}$ . Diese Zeit fällt zusammen mit dem Startzeitpunkt für die Kompression des Plasmas. Die Rechnungen zur Drift sind zwar erst anwendbar, wenn sich das Plasma von der Wand abgelöst hat, jedoch wirken auch schon vorher Kräfte auf das Plasma, die zu einer von der Rotationssymmetrie abweichenden Dichte- und Temperaturverteilung führen können. Eine Rechnung unter Berücksichtigung der Wechselwirkung des Plasmas mit einer materiellen Wand (Impulsaustausch, Rekombination, inelastische Stöße) wurde nicht durchgeführt und dürfte auch recht schwierig sein. Eine weitere Schwierigkeit liegt darin, daß die Dichte- und Temperaturverteilung zum Zündzeitpunkt ( $B = 0$ ) in undurchschaubarer Weise von der Vorgeschichte des Plasmas abhängt. Aus Abb. 12b läßt sich erkennen, daß zur Zeit  $t = 0$  eine Abweichung von der Rotationssymmetrie vorhanden ist, und zwar derart, daß sich die Teilchen an der der Torusachse zugewandten Glaswand häufen.

Für den gefundenen Startzeitpunkt der Drift spricht die Tatsache, daß unmittelbar nach Beginn der Kompression (siehe Abb. 13,  $t = 0,6 \mu\text{s}$ ) das Plasma die Forderung nach Rotationssymmetrie gut erfüllt.

## 10. Zusammenfassung

In einem toroidalen Magnetfeld erfährt ein Plasmaring vom Radius  $R$  eine radial nach außen gerichtete Beschleunigung

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{2 \bar{kT} (1 + Z)}{m_i R} \quad (Z, m_i = \text{Ionenladung, -masse}),$$

welche proportional ist einer mittleren Temperatur

$$\bar{kT} = \frac{\iint n kT d^2 f}{\iint n d^2 f} \quad (n = \text{Teilchendichte}),$$

wobei die Integration über die Meridionalebene zu erstrecken ist. Die Beobachtung der hierdurch bewirkten Driftbewegung ist eine geeignete Methode, diese mittlere Temperatur zu bestimmen. Diese Aussage wird geprüft durch spektroskopische Untersuchungen an einem ringförmigen Wasserstoffplasma in einem toroidalen Glasrohr von 50 cm Torusdurchmesser, das durch ein toroidales Magnetfeld komprimiert und aufgeheizt wird. Das Magnetfeld wird erzeugt durch Entladen einer Kondensatorbatterie von 5 kJoule Energieinhalt und erreicht nach 10  $\mu\text{s}$  seinen Maximalwert von 8,4 kG. Bei einem Fülldruck von 40 mtorr zeigen Drehspiegelbilder die Kompression und die Driftbewegung des Plasmas, welches nach 2,5  $\mu\text{s}$  die äußere Glaswand berührt.

Aus dem Intensitätsverhältnis der  $H_{\beta}$ -Linie zu der eines Kontinuumsbandes bei 5000 Å wird die Temperatur und aus der absoluten Intensität des Kontinuumsbandes die Elektronendichte bestimmt. Die aus den Dichte- und Temperaturprofilen berechneten instantanen mittleren Temperaturen erreichen Werte von 3 bis 7 eV. Zweimalige Integration der daraus folgenden Beschleunigung ergibt für den Plasmaschwerpunkt eine Bahnkurve, die innerhalb der Fehlergrenzen mit der optisch beobachteten Plasmabewegung übereinstimmt. Als Folge der Kompressionsschwingungen des Plasmarings ergibt die Rechnung eine der monotonen Driftbewegung überlagerte Oszillation des Plasmaschwerpunkts. Es wurde eine Oszillation gemessen, welche in der Phase mit der Rechnung übereinstimmt. Die gemessenen Amplituden sind - verglichen mit der Rechnung - um eine Größenordnung zu groß. Dieses Ergebnis ist jedoch infolge der mit den Oszillationsamplituden vergleichbaren Meßfehler unsicher.

Herrn Prof. Dr. A. Schlüter danke ich für viele fördernden und klärenden Diskussionen. Herrn Dr. G.v.Gierke gilt mein Dank für die Möglichkeit, diese Arbeit durchführen zu können. Unter meinen Kollegen danke ich besonders Herrn Dr. W. Lotz, Herrn Dr. G.H. Wolf, Herrn Dr. E. Remy und Herrn Dr. F. Rau für ihre Unterstützung beim Aufbau der Versuchsanordnung sowie zahlreiche Diskussionen und Anregungen.

Herrn E. Oberlander danke ich für die gewissenhafte Mitarbeit bei den Messungen und deren Auswertung, und Frau D. Pohl danke ich für die Geduld und Sorgfalt, mit der sie viele Zeichnungen anfertigte und das Manuskript schrieb.

[57] U. GIESMANN, W. LOTZ, F. RAU, E. REMY, G. WOLF: Bewegung eines Plasmas in toroidalen Magnetfeld. *Z. Physik* **161**, 14-15 (1953)

[58] H. G. HARTMAN: Plasma Spectroscopy. *Ann. N.Y. Acad. Sci.* **102**, 1-12 (1963)

[59] E. R. GIBSON, W. LOTZ: Continuum absorption in hydrogenlike plasmas measured on Wasserstoff- $\alpha$ -Linie. *Z. Physik* **181**, 1-12 (1964)

[60] J. H. VAN VLIET: Spectra of Fully Ionized Gases. *Phys. Rev.* **102**, 1-12 (1956)

[61] H. G. HARTMAN, W. LOTZ: A Calculation of the Instantaneous Population Densities of the Higher Levels of Hydrogen-like Top Ion Plasma. *Phys. Rev.* **182**, 1-12 (1963)

[62] A. WEISSBERG: *Atomphysik*, 2. Auflage, S. 347, Springer-Verlag (1957)

[63] W. FRIEDMANN, T. SCHMIDT: Kontinuierliche Spektren. *Z. Physik* **25**, 1-12 (1957)

[64] J. M. HERRICK: Absorption coefficients for free-free transitions in a hydrogen plasma. *Astrophys. J.* **125**, 280 (1956)

[65] W. J. KARZAS, R. LATHIER: Electron Radiative Transitions in a Coulomb Field. *Astrophys. J. Suppl.* **6**, 167 (1961)

[66] S. CHANDRASEKHAR: On the Continuous Absorption Coefficients of the Negative Hydrogen Ion. *Astrophys. J.* **102**, 1-12 (1945)

11. Literaturverzeichnis

- [1] G.v.GIERKE, W. LOTZ, F. RAU, E. REMY, G.H. WOLF:  
Preliminary Results on the Behaviour of a High-Beta Plasma in a  
Toroidal Magnetic Field with Superimposed Multipole Field.  
Laborbericht MPI-PAE/Pl. 4/65 (1965)
- [2] A. SCHLÜTER: On the Dynamics of a Toroidal Theta-Pinch.  
Laborbericht IPP 6/38 (1965)
- [3] W. LOTZ, F. RAU, G.H. WOLF: Reflections on the motion of toroidal  
plasmas in a magnetic field.  
Laborbericht MPI-PAE/Pl. 11/65 (1965)
- [4] P.C.T. VAN DER LAAN: Drift of a Plasma in a Curved Magnetic Field.  
J. Nucl. Energy, Part C, 6, 559 (1964)
- [5] U. GROSSMANN-DOERTH, W. LOTZ, F. RAU, E. REMY, G. WOLF:  
Bewegung eines Plasmas im toroidalen Magnetfeld.  
Laborbericht MPI-PA-9/63 (1964)
- [6] H.R. GRIEM: Plasma Spectroscopy.  
McGraw-Hill Book Company, N.Y. (1964)
- [7] E. EBERHAGEN, W. LÜNOW:  
Tabellen zur Auswertung von Intensitätsmessungen an Wasserstoff-  
plasmen.  
Laborbericht IPP 1/23, IPP 6/20 (1964)
- [8] L. SPITZER, jun.: Physics of Fully Ionized Gases.  
Interscience Publ. (1956)
- [9] R.W.P. McWHIRTER, A.G. HEARN:  
A Calculation of the Instantaneous Population Densities of the  
Exited Levels of Hydrogen-like Ions in a Plasma.  
Proc. Phys. Soc. 82, 641 (1963)
- [10] A. UNSÖLD: Physik der Sternatmosphären. 2. Auflage, S. 347,  
Springer-Verlag (1955)
- [11] W. FINKELNBURG, T. PETERS: Kontinuierliche Spektren.  
Handb. d. Phys. 28, 79 (1957)
- [12] J.M. BERGER: Absorption coefficients for free-free transitions  
in a hydrogen plasma.  
Astrophys. J. 124, 550 (1956)
- [13] W.J. KARZAS, R. LATTEER:  
Electron Radiative Transitions in a Coulomb Field.  
Astrophys. J. Suppl. 6, 167 (1961)
- [14] S.CHANDRASEKHAR: On the Continuous Absorption Coefficients of the  
Negative Hydrogen Ion.  
Astrophysic. J. 102, 395 (1945)

- [15] R. GORENFLO: Numerische Methoden zur Lösung einer Abel'schen Integralgleichung.  
Laborbericht IPP 6/19 (1964)  
R. GORENFLO, Y. KOVETZ: Solution of an Abel type integral equation in the presence of noise.  
Laborbericht IPP 6/29 (1964)
- [16] G. BOLDT: Ein Gerät zur Lösung der Abel'schen Integralgleichung.  
Interner Institutsbericht, MPI für Physik und Astrophysik (1961)
- [17] R.W. POHL: Einführung in die Physik, 3. Band: Optik und Atomphysik,  
9. Aufl. S. 57, Springer Verlag
- [18] J. EULER: Der Graphitbogen als spektralphotometrisches Strahldichte-  
normal im Gebiet von 0,25 bis 1,8  $\mu$ .  
Ann. d. Phys. 6, 203 (1953)
- [19] H. MAGDEBURG: Spektraler Emissionsgrad und Strahldichte des Nieder-  
strom-Kohlebogens.  
Z. Naturforschg. 20a, 980 (1965)
- [20] R. PEARSE, A. GAYDON: The identification of Molecular Spectra.  
Chapman and Hall, London (1950)