

Lichtstreuung und Driftinstabilität

in einem Plasma

Otto Theimer

IPP 1/48

Juli 1966

**I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K**

**G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N**



# INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Lichtstreuung und Driftinstabilität

in einem Plasma

Otto Theimer

IPP 1/48

Juli 1966

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*



Abstract:

The first part of this report contains a review of results of the light scattering theory and a discussion of light scattering as a tool for plasma diagnostics. The effect of an electron drift relative to the ions is discussed in great detail, and criteria for the occurrence of drift instabilities are derived from the scattering theory. A quantitative analysis of these criteria is presented, and it is indicated how light scattering could be used for a study of collisionless heating processes by which the ordered energy of drift excited plasma waves is thermalized.

The second part of this report is a review of the theory of longitudinal plasma waves, including light scattering theory, dispersion theory, and the theory of drift instabilities. Mathematical developments are presented in simple form and great detail and no use is made of the theory of complex functions. Instability criteria are derived from the dispersion theory which are not fully consistent with those obtained from the scattering theory, and suggestions are made how the discrepancies could be removed.



## Inhaltsverzeichnis

	Seite
I. Einleitung	1
II. Definition und Diskussion der charakteristischen Streugrößen	2
1) Die Geometrie eines Streuexperimentes	2
2) Die Kohärenz des Streulichtes	3
3) Die Elektronendichte und ihre raum-zeitlichen Fourier Koeffizienten	4
III. Die Streuintensität und ihre spektrale Verteilung	8
1) Die allgemeinen Streuformeln für beliebige Geschwindigkeitsverteilung	8
2) Salpeter's Näherungsformel für Maxwell'sche Plasmen	9
3) Das inkohärente Streuspektrum als direkte Abbildung der Elektronengeschwindigkeitsverteilung	13
4) Die allgemeine Streuformel für ein Plasma mit verschobenen Maxwell Verteilungen der Ionen- und Elektronengeschwindigkeiten	14
5) Die Instabilitätskriterien der Streutheorie	16
6) Die Untersuchung von stossfreien Heizmechanismen	26
IV. Die Theorie der Lichtstreuung an einem Plasma	27
1) Die elektromagnetische Theorie der Lichtstreuung	27
2) Der Zusammenhang zwischen der Streuintensität und der binären Elektron - Elektron Korrelationsfunktion	31
3) Das inkohärente Streuspektrum	33
4) Die Theorie der longitudinalen Plasmawellen	34
5) Die Theorie der Dichteschwankungen und der Lichtstreuung in einem Plasma	41
6) Die Theorie der Dispersion und Driftinstabilität von longitudinalen Plasmawellen	46
7) Kritik der Streutheorie	52
Anhang I	53
Anhang II	54
Literatur	55



## I. Einleitung

Dieser Bericht soll auch für solche Physiker leicht lesbar und anregend sein, die mit den Problemen der Lichtstreuung und der Plasmawellen nicht sehr vertraut sind. Aus diesem Grund wird zu Beginn ein allgemeiner Überblick über die Ergebnisse der Streutheorie und ihre Anwendungsmöglichkeiten gegeben und erst dann eine Einführung in die Theorie präsentiert. Die Theorie behandelt neben dem Streuproblem auch die Dispersion und Driftinstabilität von longitudinalen Plasmawellen. Wegen dieser zentralen Stellung der Theorie werden ihre wesentlichen Teile ohne Rücksicht auf mathematische Eleganz in grosser Ausführlichkeit dargestellt werden, um sie einem möglichst weiten Kreis von Lesern zugänglich zu machen.

Experimentelle Arbeiten der letzten zwei Jahre <sup>1)-7)</sup> haben gezeigt, dass man die Feinstruktur des Streuspektrums ziemlich genau beobachten kann. Damit ergibt sich die Möglichkeit zahlreiche, sonst nur schwer zugängliche Eigenschaften eines Plasmas experimentell zu bestimmen. Die wichtigsten beobachtbaren Grössen sind die Dichte, Temperatur und Driftgeschwindigkeit<sup>+)</sup> von Elektronen und Ionen und das mittlere Amplitudenquadrat von longitudinalen Plasmaschwingungen. Auch die Zeitabhängigkeit dieser Grössen, z.B. die Thermalisierung von stark angeregten oder instabilen <sup>++)</sup> Plasmawellen, sollte der Beobachtung zugänglich sein.

Der Effekt von Driftgeschwindigkeiten auf das Streuspektrum und der Zusammenhang zwischen der Theorie der Lichtstreuung und den Plasmainstabilitäten ist erst kürzlich in das Blickfeld des Interesses gerückt und wird besonders berücksichtigt werden. Der praktisch nicht so wichtige Effekt von magnetischen Feldern und die an sich trivialen Modifikationen der Streuformeln bei Vorhandensein mehrwertiger Ionen werden dagegen vernachlässigt werden. Der vorliegende Bericht handelt also im wesentlichen von Lichtstreuung an Wasserstoff- und Deuteriumplasmen bei Dichten und Temperaturen wie sie bei Fusionsexperimenten üblich sind. Quanteneffekte sind dabei vollkommen vernachlässigbar.

---

<sup>+) Im Falle der Elektronen lassen sich auch beliebige nicht Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilungen beobachten. Aber bei Ionen ist eine vollkommen voraussetzungslose Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung praktisch unmöglich. Diese Verhältnisse werden in Kapitel III und IV besprochen.</sup>

<sup>++) Instabil sind solche Wellen, die auf Grund der linearen Theorie der Plasmaschwingungen eine exponentiell anwachsende Amplitude haben. Wenn man diesen exponentiellen Anstieg über den Gültigkeitsbereich der linearen Theorie hinaus extrapoliert, dann haben die instabilen Wellen nach einiger Zeit eine unendliche Amplitude. In einer nicht linearen Theorie wird die Amplitude endlich bleiben wegen der Thermalisierung der geordneten Wellenenergie.</sup>



II. Definition und Diskussion der charakteristischen Streuergößen

1) Die Geometrie eines Streuexperimentes

Die Geometrie eines Streuexperimentes ist vollkommen durch den Streuvektor

$$\underline{k} = \underline{k}'' - \underline{k}' , \quad k = (4\pi/\lambda) \sin \Theta/2 , \quad k' \approx k'' = 2\pi/\lambda , \quad (1)$$

festgelegt, wobei  $\underline{k}'$  und  $\underline{k}''$  die Wellenvektoren und  $\lambda' \approx \lambda'' = \lambda$  die Wellenlängen des einfallenden und gestreuten Lichtstrahles sind<sup>+)</sup>.

Der Winkel zwischen  $\underline{k}'$  und  $\underline{k}''$  ist der Streuwinkel  $\Theta$ . Wenn  $\Theta \lesssim 5^\circ$  dann spricht man von Kleinwinkel- oder Vorwärtsstreuung.

Die Richtung von  $\underline{k}'$  ist durch den einfallenden Laserstrahl festgelegt und die von  $\underline{k}''$  durch die Lage des Detektors. Im allgemeinen lässt man zur Erhöhung der Intensität einen endlichen Raumwinkel für den Vektor  $\underline{k}''$  zu. Bei Vorwärtsstreuung hat der zugelassene Raumwinkel i.allg. die Form eines Kegelmantels (siehe Fig. 1). Es werden daher alle Streuvektoren  $\underline{k}$  senkrecht zur Einfallsrichtung zugelassen, die den gleichen Betrag  $k \approx 2\pi \Theta/\lambda$  haben. Das Streuspektrum ist dann ein Mittelwert über alle Richtungen von  $\underline{k}$  und das muss bei anisotropen Geschwindigkeitsverteilungen berücksichtigt werden.

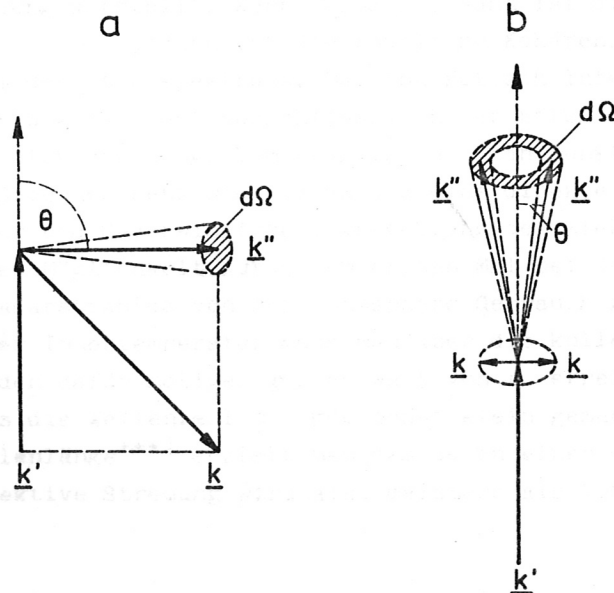


Fig. 1

Streudiagramm für a)  $90^\circ$ -Streuung, b) Vorwärtsstreuung.

$\underline{k}', \underline{k}''$  = Wellenvektor der einfallenden und gestreuten Strahlung

$\underline{k} = \underline{k}'' - \underline{k}'$  = Streuvektor

$\Theta$  = Streuwinkel

$d\Omega$  = Raumwinkelbereich von  $\underline{k}''$ .

<sup>+) Der Unterschied der Wellenlängen  $\lambda'$  und  $\lambda''$  wird i.allg. vernachlässigt. Berücksichtigung dieses Unterschiedes stört die Symmetrie des Streuspektrums, d.h.  $I(\omega_0 + \omega) \neq I(\omega_0 - \omega)$  auch in Abwesenheit von Driftgeschwindigkeiten, wobei  $\omega_0$  die Frequenz des einfallenden Lichtes und  $\omega$  die Frequenzverschiebung des gestreuten Lichtes ist.</sup>



## 2) Die Kohärenz des Streulichtes

Die Streuung im Plasma beruht darauf, dass die freien Elektronen durch das Licht zum Mitschwingen angeregt werden<sup>+</sup>). Jedes Elektron wird dadurch zu einem erzwungenen Hertz'schen Oszillator und das von ihm ausgesandte Licht ist die Streustrahlung. Da alle Elektronen mit dem Erregerlicht in Phase schwingen, ist das von den einzelnen Elektronen gestreute Licht zeitlich kohärent. Wenn aber die räumliche Anordnung der Elektronen vollkommen willkürlich ist, dann wird die Kohärenz zerstört, d.h. die Streuintensität von  $N$  Elektronen ist  $N$  mal die Streuintensität von einem Elektron. Man spricht dann von inkohärenter Streustrahlung. Wegen der elektrostatischen Wechselwirkungen ist aber die Elektronenanordnung nie völlig willkürlich, die räumliche Kohärenz wird nicht ganz zerstört und man spricht von teilweise kohärenter oder kollektiver Streustrahlung. Die Stärke der Kohärenz hängt von dem Verhältnis der Wellenlänge zur Debye-Länge ab, die in diesem Falle die Rolle einer charakteristischen Kohärenzlänge für das Streusystem spielt. Zur quantitativen Beschreibung der Verhältnisse führt man den Parameter <sup>++)</sup>

$$\alpha_s = (\frac{1}{k} D_s)^{-1}, \quad D_s = (K T_s / 4\pi n e^2)^{1/2}, \quad s = i, e, \quad (2)$$

ein, wobei  $T_s$  die Elektronen- ( $s=e$ ) oder Ionentemperatur ( $s=i$ ),  $n$  die mittlere Elektronendichte,  $K$  die Boltzmann-Konstante und  $-e$  die Elektronenladung darstellt. Wenn  $\alpha_e \ll 1$ , dann ist die Streuung inkohärent, wenn  $\alpha_e \gg 1$ , dann ist die räumliche Kohärenz entscheidend für die Form des Streuspektrums. Das theoretisch Interessante an der Streustrahlung ist fast ausschliesslich der Effekt der partiellen Kohärenz auf die Lichtstreuung. Vom praktischen Standpunkt ist aber auch die inkohärente Streuung sehr wichtig da sie eine direkte Messung der Dichte, Temperatur und Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen ermöglicht. Von dieser Möglichkeit wurde zum ersten Mal bei der Rückwärtsstreuung eines Radarstrahles von der Ionosphäre Gebrauch gemacht<sup>8)-12)</sup>. Zur Bestimmung der Ionentemperatur muss man aber die kollektive Streuung untersuchen und den dafür nötigen grossen Wert von  $\alpha$  erreicht man oft nur dadurch, dass die Wellenzahl  $k$  möglichst klein gemacht wird. Bei vorgegebener Wellenlänge<sup>+++)</sup> erzielt man das durch einen kleinen Streuwinkel  $\theta$ . Kollektive Streuung wird also meistens als Vorwärtsstreuung beobachtet.

<sup>+</sup>) Die Ionen sind zu schwer und die gebundenen Elektronen i.allg. zu unbeweglich um nennenswert mitzuschwingen. Sie können daher, bei Vorhandensein von freien Elektronen, i.allg. vernachlässigt werden.

<sup>++)</sup> Die einfache Form (2) für die Debye-Länge ist nur für ein Plasma aus einwertigen Ionen und Elektronen gültig.

<sup>+++)</sup> Für einen Rubinlaser ist  $\lambda = 6943 \text{ \AA}$ .

3) Die Elektronendichte und ihre raum-zeitlichen Fourier Koeffizienten

Die für die Lichtstreuung massgebliche Eigenschaft des streuenden Systems ist die Elektronendichte  $n(\underline{r}, t)$ . Wegen der Wärmebewegung und der atomistischen Struktur eines Plasmas ist die Elektronendichte eine Funktion von Ort und Zeit. Abweichungen von dem konstanten Mittelwert  $\bar{n}$  werden als Dichteschwankungen bezeichnet und sind für die Lichtstreuung verantwortlich.<sup>+) )</sup>

Die Funktion  $n(\underline{r}, t)$  kann je nach Bedarf als eine kontinuierlich variierende makroskopische Grösse oder als eine Überlagerung von  $\delta$ -Funktionen angesehen werden. Man spricht dann von einer grobkörnigen oder feinkörnigen Teilchendichte. Wir werden von beiden Darstellungen Gebrauch machen.

Für eine übersichtliche Beschreibung von Streuvorgängen ist es zweckmässig die Elektronendichte  $n(\underline{r}, t)$  als eine räumliche Fourier-Serie darstellen. Dazu denken wir uns das Plasma in ein sehr grosses, kubisches Gefäss mit Volumen  $V = L^3$  eingeschlossen<sup>++)</sup> und schreiben

$$n(\underline{r}, t) = \frac{1}{V} \sum_{\underline{q}} n_{\underline{q}}(t) \exp(i \underline{q} \cdot \underline{r}), \quad (3)$$

wobei die Wellenvektoren  $\underline{q}$  die zyklische Randbedingung

$$q_i = \frac{2\pi h_i}{L}, \quad h_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad i = x, y, z \quad (4)$$

erfüllen müssen.

Der Fourier-Koeffizient  $n_{\underline{q}}$  kann als die Amplitude einer longitudinalen Plasmawelle mit Wellenvektor  $\underline{q}$  aufgefasst und durch die Formeln

$$n_{\underline{q}} = \int_V n(\underline{r}, t) \exp(-i \underline{q} \cdot \underline{r}) d\underline{r}, \quad (5a)$$

$$= \sum_{j=1}^N \exp(-i \underline{q} \cdot \underline{r}_j), \quad (5b)$$

dargestellt werden. (5a) entspricht der makroskopischen und (5b) der mikroskopischen Interpretation von  $n(\underline{r}, t)$ ,  $N$  ist

<sup>+) )</sup> In einem vollkommen homogenen Medium pflanzt sich ein Lichtstrahl, entsprechend Huygens-Prinzip, geradlinig und ohne Streuung fort.

<sup>++)</sup> Die makroskopischen Eigenschaften eines Plasmas, einschliesslich des Streuspektrums sind natürlich von der Form und Grösse des Gefässes unabhängig. Die kubische Form ist aber rechnerisch leicht zu handhaben. Auch die Darstellung durch eine Fourier-Serie anstatt durch ein Fourier-Integral ist nicht grundsätzlich wichtig, sie ist aber bequem bei der Ausführung gewisser Volumenintegrale.



die Gesamtzahl der Elektronen in  $V$  und  $r_j$  der zeitabhängige Ort des  $j$ -ten Elektrons.

Wir wollen nun die Frequenz von longitudinalen Plasmawellen kurz besprechen. Es gibt zwei Typen solcher Wellen: Hochfrequente Elektronenschwingungen bei denen die Ionen praktisch nicht an der geordneten Wellenbewegung teilnehmen und niederfrequente Ionenschwingungen bei denen die Elektronen von der geordneten Wellenbewegung der Ionen mitgenommen werden. Die Theorie<sup>13)</sup> ergibt die folgenden Dispersionsbeziehungen:

Für die Elektronenschwingungen

$$\omega_e \approx \omega_{pe} [1 + 3/2 \alpha_e^2 + \dots], \alpha_e \gg 1, \omega_e \approx \omega_{pe}, \quad (6)$$

und für die Ionenschwingungen

$$\omega_i^2 \approx \omega_{pi}^2 / (1 + \alpha_e^2 + \dots), \omega_i < \omega_{pi}, \alpha_e \gg 1, T_e / T_i \gg 1. \quad (7)$$

Diese Frequenzen stehen in enger Beziehung zu den Plasmafrequenzen

$$\omega_{ps} = (4\pi n e^2 / m_s)^{1/2}, \quad s = i, e, \quad (8)$$

und zu den Doppler Verschiebungsfrequenzen

$$\omega_{s,s'}^2 = (2/3) q^2 v_{s,s'}^2 = 2 \omega_{ps}^2 / \alpha_{s'}^2, \quad s, s' = i, e. \quad (9)$$

In Gleichung (9) ist  $v_{s,s'}^2$  das mittlere thermische Geschwindigkeitsquadrat von Teilchen mit Masse  $m_s$  und Temperatur  $T_{s'}$ .

Die Elektronen-Doppler-Frequenz  $\omega_{ee}$  bestimmt die Breite des Streuspektrums bei inkohärenter Streuung ( $\alpha_e \ll 1$ ) und die gemischte Doppler Frequenz bestimmt die Breite des kohärenten Streuspektrums ( $\alpha_e \gg 1$ ).

Die Gleichungen (6) und (7) sind Dispersionsformeln, da sie eine Beziehung zwischen Frequenz und der im Parameter  $\alpha$  verborgenen Wellenzahl  $q$  darstellen. Diese Dispersionsbeziehungen vermitteln aber kein vollständiges Bild der in einem Plasma herrschenden Verhältnisse, da sie nur für schwach gedämpfte, im wesentlichen monochromatische Plasmawellen gelten, bei denen mit der Wellenzahl  $q$  nur eine einzige Frequenz  $\omega$  verknüpft ist. Für die meisten Wellen ist die Beziehung zwischen  $q$  und  $\omega$  viel komplizierter. Eine longitudinale Plasmaschwingung hat in den meisten Fällen eine

komplizierte Zeitabhängigkeit und kann alle möglichen Frequenzen enthalten. Die Häufigkeit mit der eine bestimmte Frequenz  $\omega$  auftritt ist durch das mittlere Quadrat der Amplitude  $n_q(\omega)$  von Wellen mit Frequenz  $\omega$  und Wellenvektor  $q$  gegeben. Nur dann wenn die Funktion  $n_q(\omega)$  für eine bestimmte Frequenz ein scharfes Maximum besitzt hat man es mit den wohldefinierten, fast ungedämpften, langlebigen<sup>\*)</sup> Plasmaschwingungen zu tun, für die die Dispersionstheorie zuständig ist (siehe Kapitel IV,6). Für stark gedämpfte Plasmawellen ist die Dispersionstheorie nicht anwendbar und die Analyse solcher Wellen wird dann am besten mit Hilfe der Amplituden  $n_q(\omega)$  durchgeführt. Die mittleren Amplitudenquadrate  $|n_q(\omega)|^2$  sind auch die Größen, die das Streuspektrum bestimmen und im Hinblick auf diesen Umstand kann man sagen, dass die Streutheorie eine Verfeinerung der Dispersionstheorie darstellt. Die Frequenzen (6) und (7) haben zwar auch in der Streutheorie eine privilegierte Stellung, aber sie sind nicht die einzigen, die berücksichtigt werden.

Die kontinuierliche Frequenzfunktion  $n_q(\omega)$  ist die zeitliche Fourier Transformierte der Amplitude  $n_q(t)$ . Sie kann daher als ein Integral der Form

$$n_q(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} n_q(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (10)$$

dargestellt werden. In der Streutheorie braucht man aber nicht die Amplitude von Elektronendichteschwankungen selbst, sondern die Amplitude  $p_q(t)$  der durch das einfallende Strahlungsfeld  $E'(t)$  in den Plasmawellen induzierten Polarisationswellen. Man findet für diese Amplituden den Ausdruck

$$p_q(t) = d^* n_q(t) E'(t), \quad (11)$$

wobei  $d^*$  die Polarisierbarkeit von freien Elektronen ist.  $E'(t)$  ist das elektrische Feld in dem einfallenden Laserstrahl und hat die Zeitabhängigkeit

$$E'(t) \approx E' \exp[(i\omega_c - \gamma)t], \quad t > 0, \\ = 0, \quad t < 0, \quad (12)$$

Gleichung (12) bringt zum Ausdruck, dass der Laser zur Zeit  $t = 0$  eingeschaltet wird und nach der Beobachtungszeit  $\tau \approx 1/\gamma$  praktisch erloschen ist. Wenn man nun die zu einer Plasmawelle mit Wellenvektor  $q$  und Frequenz  $\omega$  gehörende Polarisationswelle betrachtet, dann zeigen Gleichungen (11) und (12), dass sie eine harmonische Zeitabhängigkeit mit

<sup>\*)</sup> Eine Welle mit unscharfer Frequenz  $\omega \pm \frac{1}{2} \Delta\omega$  hat eine Lebensdauer der Größenordnung  $1/\Delta\omega$ . Wenn die Frequenzbreite  $\Delta\omega$  klein ist, dann ist die Frequenz wohldefiniert und die Lebensdauer lang. Eine gedämpfte Welle deren Amplitude wie  $\exp(-\gamma t)$  abklingt hat eine Frequenzbreite  $\Delta\omega \approx \gamma$ .



Frequenz  $(\omega_0 + \omega)$  hat, die mit der Laseramplitude wie  $\exp(-\gamma t)$  abklingt. Die selbe Zeitabhängigkeit hat natürlich auch das von Plasmawellen mit Frequenz  $\omega$  gestreute Licht. Die Frequenz der streuenden Plasmawellen macht sich also im Streuspektrum als eine Frequenzverschiebung bemerkbar.

Es ist üblich das Ein- und Ausschalten des Lasers explizit dadurch zu berücksichtigen, dass man formal schon die Amplituden  $n_q(\omega)$  der Plasmawellen mit dem Abklingfaktor  $\exp(-\gamma t)$  versieht. Das hat aber nichts mit der physikalischen Dämpfung von Plasmawellen zu tun, die noch vollkommen in der allgemeinen Zeitfunktion  $n_q(t)$  enthalten ist.

Wenn man also die endliche Zeitdauer des Laserimpulses formal schon den Plasmawellen zuschreibt, dann kann man  $n_q(\omega)$  als die Laplace Transformierte von  $n_q(t)$  ansehen:

$$\underline{n}_q(\omega) = \int_0^{\infty} n_q(t) \exp[-(i\omega + \gamma)t] dt. \quad (13)$$

Die Berücksichtigung der endlichen Beobachtungszeit  $\tau$  ist nötig, um das spektrale Auflösungsvermögen eines Streuexperimentes richtig darzustellen, denn innerhalb einer endlichen Zeit  $\tau$  kann die Feinstruktur im Streuspektrum nur bis auf Details der Frequenzbreite  $\Delta\omega \approx \gamma$  aufgelöst werden. Es zeigt sich aber, dass selbst die kurze Lebensdauer  $\tau \approx 10^{-8}$  sek eines Laserriesenimpulses ein Auflösungsvermögen zulässt, das für die meisten Zwecke der Plasmaphysik ausreicht.

Die Berücksichtigung der endlichen Beobachtungszeit verhindert auch in manchen Fällen das Unendlichwerden von Wellenamplituden genauso wie eine wirkliche Dämpfung. Dieser etwas überraschende Sachverhalt scheint damit zusammenzuhängen, dass in einer endlichen Zeit, selbst bei Resonanz, keine unendlichen Amplituden aufgebaut werden können.

Insgesamt ergibt sich, dass die Berücksichtigung der endlichen Beobachtungszeit in der Gleichung (13) formal bequem, aber insofern nicht wesentlich ist, als man in den Endformeln der Streutheorie i. allg. zur Grenze  $\gamma \rightarrow 0$  übergehen kann. Die in der Literatur übliche Betonung des Umstandes, dass  $\underline{n}_q(\omega)$  die Laplace Transformierte von  $n_q(t)$  ist, muss nur dann berücksichtigt werden, wenn  $\gamma$  nicht explizit angeschrieben, sondern wie der imaginäre Teil einer komplexen Frequenz  $\omega$  behandelt wird. Diese elegante Methode wird aber in diesem Bericht nicht angewendet werden.

III. Die Streuintensität und ihre spektrale Verteilung

1) Die allgemeinen Streuformeln für beliebige Geschwindigkeitsverteilung

Die Diskussion in Kapitel II.3) hat gezeigt, dass selbst dann, wenn das einfallende Licht vollkommen monochromatisch mit Frequenz  $\omega_0$  ist, die gestreute Lichtintensität über ein ganzes Streuspektrum verteilt wird. Dies ist eine Folge des Doppler Effektes und der elektrostatischen Wechselwirkungen, die die Frequenz der longitudinalen Plasmaschwingungen bestimmen. Die Intensität an der Stelle  $\omega_0 + \omega$  (siehe Fig. 2) ist eine Funktion des Streuvektors  $\underline{k}$  und der Frequenzverschiebung  $\omega$  von der Form

$$\bar{I}(\omega, \underline{k}) d\omega = \sigma(\theta) (\beta/\pi) |n_{\underline{k}}(\omega)|^2 d\omega \text{ watt/cm}^2 \quad (14)$$

Thomson's Streufaktor  $\sigma(\theta)$  ist durch die bekannte Formel

$$\sigma(\theta) = \bar{I}_0 (e^4/c^4 m^2) (1 + \cos^2 \theta) / 2 \mathcal{R}^2 \quad (15)$$

gegeben. In Gleichung (15) ist  $\bar{I}_0$  die Intensität des einfallenden Lichtes,  $\mathcal{R}$  der Abstand zwischen Streuvolumen und Detektor,  $-e$  und  $m$  die Elektronenladung und Elektronenmasse und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit.

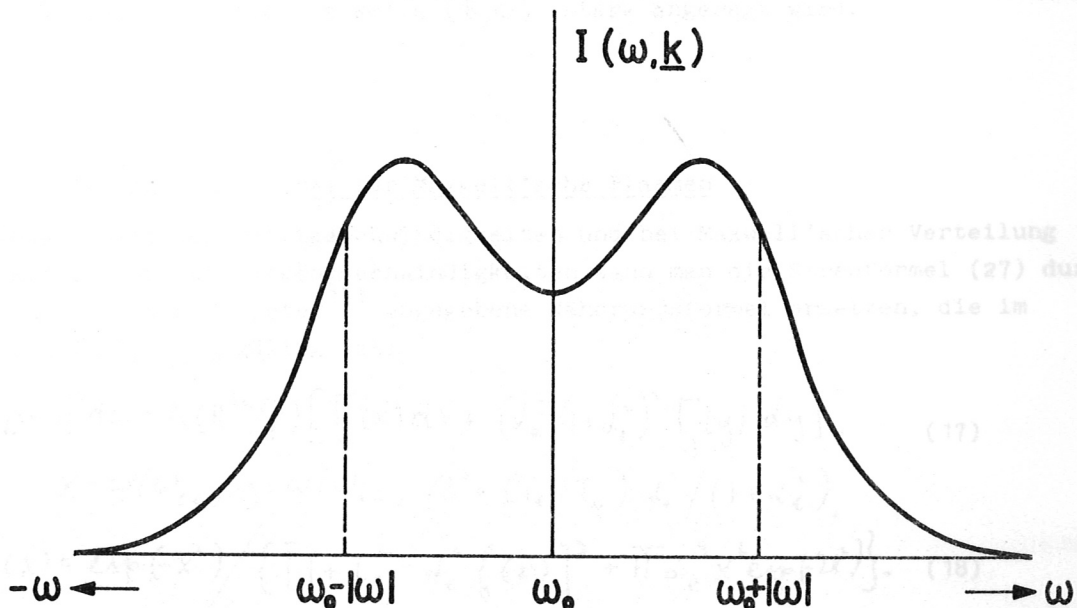


Fig. 2

Schema eines Streuspektrums

- $\omega_0$  = Frequenz des einfallenden Lichtes
- $\omega$  = Frequenz der streuaktiven Plasmawelle
- $\omega_0 \pm |\omega|$  = Frequenz des gestreuten Lichtes



Der Streufaktor gilt für natürliches, einfallendes Licht.<sup>+) Die Eins in der eckigen Klammer stellt den Beitrag der senkrecht zur Streuebene polarisierten Komponente des einfallenden Lichtes dar und  $\cos^2\theta$  den Beitrag der parallel zur Streuebene polarisierten Komponente. Die Streuebene ist durch den einfallenden und gestreuten Lichtstrahl festgelegt. Entsprechend der Gleichung (14) ist die spektrale Dichte der Streuintensität proportional dem Amplitudenquadrat der longitudinalen Plasmawelle mit Wellenvektor  $\underline{k}$  und Frequenz  $\omega$ . Die Frequenz der streuenden Welle bzw. Dichteschwankung, macht sich also als eine Frequenzverschiebung bemerkbar, genauso wie beim Raman Effekt.</sup>

Die Gesamtintensität ist

$$I(\underline{k}) = G(\theta) \langle |n_{\underline{k}}(t)|^2 \rangle \text{ watt/cm}^2 \quad (16)$$

wobei  $\langle g(t) \rangle$  den Zeit- oder Ensemblemittelwert einer beliebigen Zeitfunktion  $g(t)$  bedeutet.

Das Streuspektrum ist also ein direktes Mass für die Anregung von Plasmaschwingungen mit Wellenvektor  $\underline{k}$  und Frequenz  $\omega$ . Die Amplitudenquadrate  $|n_{\underline{k}}(\omega)|^2$  und  $\langle |n_{\underline{k}}(t)|^2 \rangle$  können direkt dem Experiment entnommen werden, ohne dass Modellvorstellungen über den Mechanismus der Wellenanregung entwickelt werden müssen. Experimentell beobachtete Amplitudenquadrate, die weit über dem thermischen Mittelwert liegen, zeigen daher unmittelbar an, dass irgendwelche Mechanismen, z.B. beginnende Driftinstabilität, wirksam sein müssen, durch die die Welle  $(\underline{k}, \omega)$  stark angeregt wird.

## 2) Salpeter's Näherungsformel für Maxwell'sche Plasmen

In Abwesenheit von Driftgeschwindigkeiten und bei Maxwell'scher Verteilung der Elektronen- und Ionengeschwindigkeiten kann man die Streuformel (27) durch die folgende, von Salpeter<sup>14)</sup> angegebene Näherungsformel ersetzen, die im Bereich  $0 < T_e/T_i \leq 3$  gültig ist:

$$|n_{\underline{k}}(\omega)|^2 d\omega = N(\pi^{1/2}/\beta) \left[ \Gamma_{\alpha}(x) dx + (d_e^2 / (1+d_e^2))^2 \Gamma_{\beta}(y) dy \right], \quad (17)$$

$$x = \omega/\omega_{ce}, \quad y = \omega/\omega_{ci}, \quad \beta^2 = (T_e/T_i) d_e^2 / (1+d_e^2),$$

$$\Gamma_{\alpha}(x) = \exp(-x^2) / \left\{ [1+d_e^2 - d_e^2 f(x)]^2 + \pi d_e^4 x^2 \exp(-2x^2) \right\}. \quad (18)$$

<sup>+) Für einen linear polarisierten Laserstrahl ist Thomson's Faktor in Gleichung (69) gegeben.</sup>

wobei  $f(x)$  in Gleichung (31) definiert ist.

Auf Grund der Näherung (17) ist das gesamte Streuspektrum eine Überlagerung von zwei praktisch unabhängigen Teilspektren, die aber beide durch die gleiche Funktion  $\Gamma$  beschrieben werden können. Das erste Glied in der eckigen Klammer stellt den grösstenteils stark verschobenen Teil des Streuspektrums dar, der durch Streuung an den überwiegend hochfrequenten Elektronenschwingungen des Plasmas erzeugt wird. Je nach seiner Form wird dieses Teilspektrum Elektronenspektrum, Elektronenlinie oder Satellitenlinie genannt. Das zweite Glied der eckigen Klammer stellt das schwach verschobene Ionenspektrum dar, das durch Streuung an den niederfrequenten Ionenschwingungen des Plasmas erzeugt wird. Auch für das Ionenspektrum sind die Streuzentren natürlich die Elektronen, nicht die Ionen, nur die Frequenzverschiebung wird durch die Ionen bestimmt, da die Elektronen die geordnete Wellenbewegung der Ionen mitmachen.

Die Funktion  $\Gamma(x)$  hat eine Breite der Grössenordnung eins, d.h. sie verschwindet rasch wenn  $x$  wesentlich über eins hinaus anwächst. Die Breite des Elektronenspektrums ist also von der Grössenordnung der Elektronen-Doppler-Frequenz  $\omega_{ee}$ . Die Form des Spektrums hängt aber empfindlich von dem Parameter  $\alpha_e$  ab.

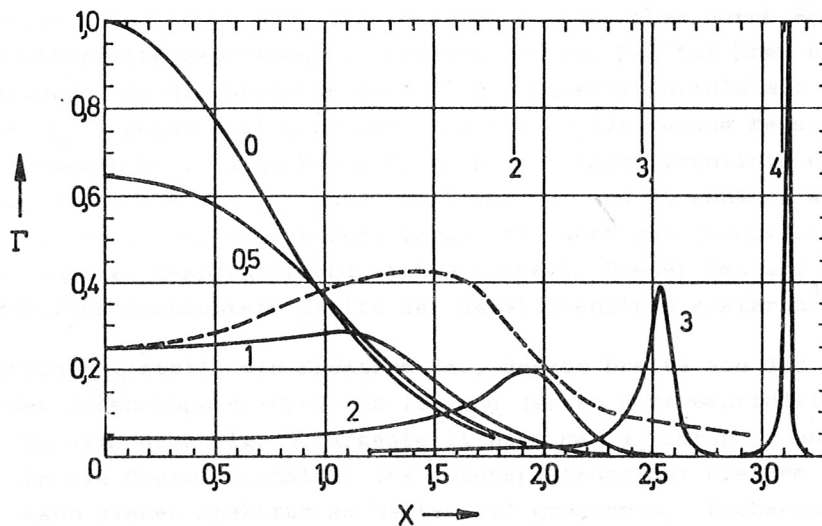


Fig. 3

Die angenäherte Streuintensität  $\Gamma(x)$  für  $\alpha_e = 0, 0.5, 1, 2, 3, 4$ . Die senkrechten Linien am oberen Rand kennzeichnen die Dispersionsfrequenzen  $x_e$ . Für  $\alpha_e \ll 1$  hat man eine Gauss'sche Verteilung mit Breite  $\omega_{ee}$ , aber für  $\alpha_e \gg 1$  zieht sich das Spektrum auf eine schmale Linie zusammen mit der durch Gleichung (5) gegebenen Frequenz

$$\omega_e = x_e \omega_{ee} = (\omega_{ee}/2^{1/2}) (\alpha_e^2 + 3)^{1/2} \quad (19)$$

und einem Lorentz Profil der Form

$$\Gamma_{\lambda}(x) = \frac{\alpha_e^2 \exp(-x_e^2)}{\lambda [4(x-x_e)^2 + \{(\pi^{1/2}/2)\alpha_e^4 \exp(-x_e^2)\}^2]} \quad (20)$$

Die maximale Intensität

$$\Gamma_{\lambda}(x_e) = \lambda \exp(x_e^2) / \pi \alpha_e^6 \quad (21)$$

und die Halbwertsbreite

$$\Delta x_{1/2} = (\pi^{1/2}/2) \alpha_e^4 \exp(-x_e^2) \quad (22)$$

sind ausschliesslich durch Landau Dämpfung<sup>13)</sup> bestimmt und das ist der Grund für die rasche Abnahme der Halbwertsbreite mit anwachsendem  $\alpha_e$  <sup>+</sup>.

Die theoretische Halbwertsbreite der Satellitenlinie ist vermutlich sehr empfindlich gegen Näherungen in der Theorie. Die Zulässigkeit der in der Streutheorie enthaltenen Näherungsannahmen könnte daher durch Messen der Halbwertsbreite experimentell geprüft werden. Das ist aber bisher noch nicht gelungen, da die Gesamtintensität der Satellitenlinie mit zunehmendem  $\alpha_e$  wie  $\alpha_e^{-2}$  gegen Null geht und sich bisher für genaue Messungen zu schwach erwiesen hat. Da auch die Frequenz der Satellitenlinie entsprechend Gleichung (19) stark von  $\alpha_e$  und damit von  $T_e$  und  $n$  abhängt wird die Schärfe der Satellitenlinie sofort verwischt, wenn das Streuvolumen Plasma von verschiedener Temperatur und Dichte enthält. Dieser Umstand dürfte die grosse kürzlich beobachtete Breite der Satellitenlinie erklären<sup>15)</sup>.

Die Funktion  $\Gamma_{\lambda}(y)$  stellt ein Spektrum dar, dessen Breite von der Grössenordnung der Ionen-Doppler-Frequenz ist und dessen Form empfindlich von  $\beta$  abhängt. Es wird durch Fig. 3 dargestellt, wenn man  $\alpha_e$  durch  $\beta$  und  $x$  durch  $y$  ersetzt. Da die Gesamtintensität des Ionenspektrums bei kleinem  $\alpha_e$  wie  $\alpha_e^4$  abnimmt, kann dieses Spektrum am besten bei grossem  $\alpha_e$  beobachtet werden. In diesem Fall ist  $\beta^2 \approx T_e/T_i$  und wenn  $T_e/T_i \gg 1$  dann hat das Ionenspektrum ein ausgeprägtes Seitenmaximum an der Stelle wo die Ionen Plasmaschwingungen die durch Gleichung (7) gegebene wohldefinierte Frequenz

+ ) Landau Dämpfung beruht auf der Energieübertragung zwischen Teilchen und Wellen. Teilchen deren Geschwindigkeitskomponente  $v$  parallel zur Phasengeschwindigkeit  $u$  einer longitudinalen Plasmawelle ungefähr gleich  $u$  ist werden, in den elektrostatischen Potentialmulden der Welle gefangen und dabei von ihrer ursprünglichen Geschwindigkeit  $v$  auf die Phasengeschwindigkeit  $u$  beschleunigt oder verzögert. Wenn die Zahl der Teilchen mit  $v > u$  kleiner ist als die Zahl der Teilchen mit  $v < u$ , dann wird insgesamt Wellenenergie zur Beschleunigung von Teilchen aufgebraucht und man erhält Landau Dämpfung. Im umgekehrten Fall hat man Landau Anregung von Wellen. Diese Art von Anregung erfordert eine Elektronendrift relativ zu den Ionen, da nur dann der Gradient der eindimensionalen Geschwindigkeitsverteilung das für Anregung erforderliche Vorzeichen hat.



$$\omega^2 = k^2 K T_e / m_i \quad (23)$$

haben. Wir werden später sehen, dass dieses Seitenmaximum durch eine Elektronendrift relativ zu den Ionen noch vergrössert und bis auf unendlich aufgeschaukelt werden kann (Driftinstabilität). Dies ist ein Beispiel für die Regel, dass Elektronendrift eine ähnliche Wirkung hat wie ein grosses Verhältnis  $T_e/T_i$ , und dass sich die beiden Wirkungen ungefähr additiv verhalten.

Für die Auswertung eines experimentell gefundenen Ionenspektrums ist es zweckmässig die Intensität gegen den Logarithmus der Frequenzverschiebung aufzutragen. In dieser Darstellung hängt die Form des Spektrums nur von dem Parameter  $\beta$  ab, der dann durch Vergleich des experimentellen Spektrums mit theoretischen Kurven, z.B. der Kurve der Fig. 3, bestimmt werden kann. Die Iontemperatur findet man dann so, dass man einen charakteristischen Punkt des Spektrums auswählt, z.B. die Spitze des Seitenmaximums oder den Punkt an dem das Spektrum auf 10 % seines Maximalwertes abgefallen ist, und dass man die beobachtete Frequenz  $\omega$  mit dem theoretischen  $\omega$ -Wert dieses charakteristischen Punktes vergleicht. Man erhält dann aus dem Verhältnis  $\omega/\omega_0 = \omega/\omega_i$  die Iontemperatur und aus  $\beta$  und  $T_e$  die Elektronentemperatur. Die Anforderungen an die Messgenauigkeit sind gross, aber es scheint, dass  $T_e$  und  $T_i$  mit einer Genauigkeit bestimmt werden können, die für die meisten Zwecke der Plasmaphysik ausreicht und anderen Methoden in vielen Fällen überlegen ist. Die Gesamtzahl der streuenden Elektronen wird aus der Absolutintensität bestimmt und die Elektronendichte  $n = N/V$  aus dem Streuvolumen. Die Absolutintensität wird am besten durch Vergleich mit dem Spektrum einer Eichsubstanz, z.B. Propan, ermittelt.

Im allgemeinen wird das Ionenspektrum aus der Vorwärtsstreuung erhalten, da man mit möglichst grossem  $\alpha_e$  arbeiten möchte. Wenn man aber nur die Elektronendichte und -Temperatur  $T_e$  benötigt, dann ist es viel einfacher, die wegen kleiner  $\alpha_e$ -Werte meist inkohärente  $90^\circ$ -Streuung auszuwerten. Dies dient auch zur Kontrolle der aus der Vorwärtsstreuung erhaltenen Ergebnisse.

Wenn man das Streuspektrum über alle Frequenzen integriert, dann erhält man aus der Salpeter'schen Näherungsformel<sup>16)</sup>

$$I(\theta) = I_e(\theta) + I_i(\theta) = 5(\theta) N \left[ \frac{1}{1+\alpha_e^2} + \frac{\alpha_e^4}{(1+\alpha_e^2)(1+\alpha_e^2+\alpha_i^2)} \right] \quad (24)$$

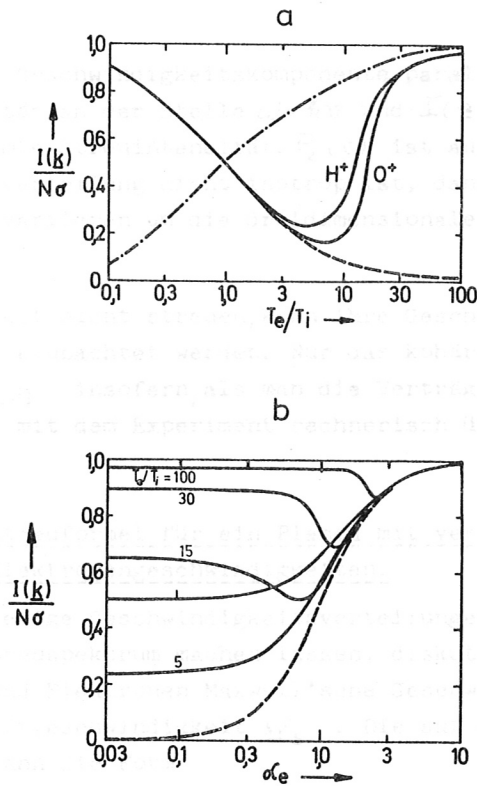


Fig. 4

- a) Die Gesamtintensität als Funktion von  $T_e/T_i$  für  $\alpha_e \rightarrow \infty$ .  
 b) Die Gesamtintensität als Funktion von  $\alpha_e$  für verschiedene Werte von  $T_e/T_i$  für ein Wasserstoffplasma.

----- Salpeter's Näherung  
 -.-.-.-.- Renau's Näherung  
 \_\_\_\_\_ numerische Integration des exakten Streuspektrums

$I(k)$  ist in Fig. 4 als Funktion von  $T_e/T_i$  und  $\alpha_e$  dargestellt<sup>15)</sup>. Diese Figur lässt die Güte der Salpeter'schen Näherung gut erkennen und zeigt, dass ein von Renau<sup>16)</sup> aus der statistischen Mechanik erhaltenes Resultat mit der allgemeinen Streutheorie unverträglich ist.

3) Das inkohärente Streuspektrum als direkte Abbildung der Elektronengeschwindigkeitsverteilung

Auch in Systemen, die sich nicht im thermischen Gleichgewicht befinden wird das elektrische Feld von Ladungsträgern durch die ein Teilchen umgebende Ladungswolke abgeschirmt. Die Grösse der charakteristischen Abschirmlänge kann dadurch geschätzt werden, dass man  $(3/2)kT_s$  in Gleichung (2) durch die mittlere kinetische Energie  $m_s v_s^2/2$  ersetzt. Man kann dann die Definition (2) für  $D_s$  und  $\alpha_s$  beibehalten und schliesst, dass  $\alpha_e \ll 1$  wiederum zu inkohärenter Streuung führt. In diesem Fall ergibt sich eine einfache Beziehung zwischen Streuspektrum und Elektronengeschwindigkeitsverteilung der Form (siehe Kapitel IV.3))

$$F_e(v) = k I(kv, k) / I(k). \quad (25)$$

Dabei ist  $v$  die Geschwindigkeitskomponente parallel zu  $\underline{k}$ ,  $I(kv, \underline{k})$  die Streuintensität an der Stelle  $\omega = kv$  und  $I(\underline{k})$  die über alle Frequenzen integrierte gesamte Streuintensität.  $F_e(v)$  ist auf eins normiert. Wenn die Geschwindigkeitsverteilung nicht isotrop ist, dann muss man die Richtung des Streuvektors  $\underline{k}$  variieren um die dreidimensionale Verteilung  $F(v)$  zu ermitteln.

Da die Ionen selbst nicht streuen, kann ihre Geschwindigkeitsverteilung nicht so einfach beobachtet werden. Nur das kohärente Ionenspektrum gibt Auskunft über  $F_i(v)$  insofern, als man die Verträglichkeit einer hypothetischen Verteilung  $F_i(v)$  mit dem Experiment rechnerisch überprüfen kann.

4) Die allgemeine Streuformel für ein Plasma mit verschobenen Maxwell Verteilungen der Ionen- und Elektronengeschwindigkeiten.

Da sich für beliebige Geschwindigkeitsverteilungen keine allgemeinen Aussagen über das kohärente Streuspektrum machen lassen, diskutieren wir nur den wichtigen Fall, dass die Ionen und Elektronen Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung haben mit überlagerter Driftgeschwindigkeit  $w_s$ . Die auf eins normierte Geschwindigkeitsverteilung hat dann die Form

$$F_s(v) = \left( \frac{m_s}{2\pi k T_s} \right)^{-1/2} \exp \left[ - \frac{m_s}{2k T_s} (v + w_s)^2 \right], \quad s = i, e \quad (26)$$

wobei  $v$  und  $w_s$  wiederum Geschwindigkeitskomponenten parallel zu  $\underline{k}$  sind. Man erhält dann für die Streuamplitude den Ausdruck (siehe Kapitel IV.5))

$$\left| n_{\underline{k}}(\omega) \right|^2 = \frac{N \pi^{1/2}}{8 \omega_{ee}} \left\{ \frac{|1 - G_i(y')|^2 \exp(-x'^2) + |G_e(x')|^2 \eta \exp(-y'^2)}{|1 - G_e(x') - G_i(y')|^2} \right\} \quad (27)$$

mit

$$\eta y' = \frac{\omega}{\omega_{ii}} - \left( \frac{3}{2} \right)^{1/2} \frac{w_i}{v_{ii}}, \quad x' = \frac{\omega}{\omega_{ii} \eta} - \left( \frac{3}{2} \right)^{1/2} \frac{w_e}{v_{ee}}, \quad (28)$$

$$\eta = (T_e / T_i)^{1/2} (m_i / m_e)^{1/2} \quad (29)$$

$$G_s(x'_s) = -d_s^2 \left[ 1 - \beta(x'_s) - i \pi^{1/2} x'_s \exp(-x_s'^2) \right], \quad s = i, e, \quad x'_i = y', \quad (30)$$

$$\beta(x) = 2x \exp(-x^2) \int_0^x \exp(t^2) dt \quad (31)$$



Wenn die Driftgeschwindigkeiten  $w_i$  und  $w_e$  der Ionen und Elektronen den gleichen Wert  $w$  haben, dann bleiben alle physikalischen Eigenschaften des Systems und natürlich auch das Streuspektrum unverändert. Das unveränderte Streuspektrum erscheint aber einem ruhenden Beobachter um den Betrag  $\Delta\omega = kw$  Doppler verschoben.

Sehr häufig ist das Streusystem so beschaffen, dass alle Winkel zwischen dem Streuvektor  $\underline{k}$  und der Driftgeschwindigkeit  $\underline{w}$  auftreten. Das ist z.B. bei der Vorwärtsstreuung der Fall, bei der man sämtliche Richtungen von  $\underline{k}$  senkrecht zum einfallenden Laserstrahl zulässt oder bei einem rotierendem Plasma in dem  $\underline{w}$  alle Richtungen hat. In so einem Fall kann die Komponente  $w$  parallel zu  $\underline{k}$  alle Werte zwischen  $\pm|w|$  annehmen und die Feinstruktur des Spektrums wird verschmiert dergestalt, dass Details mit einer Frequenzbreite  $\Delta\omega \leq 2k|w|$  nicht mehr aufgelöst werden können (siehe Fig. 5). Z.B. wenn  $w \gg v_{te}/100$ , dann ist das Ionenspektrum für diagnostische Zwecke fast nutzlos.

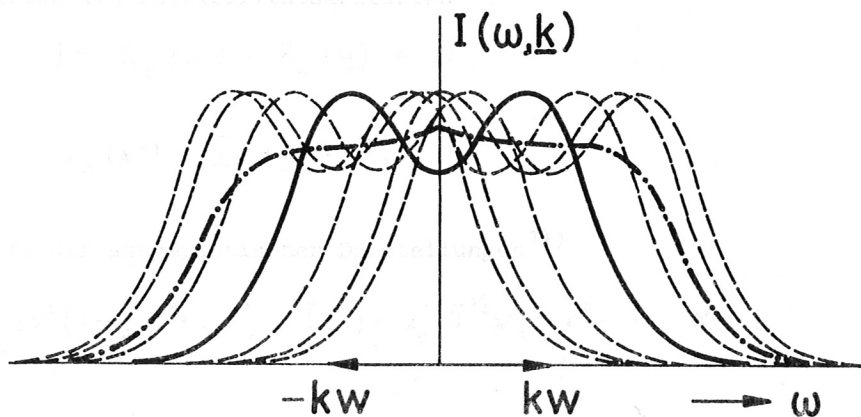


Fig. 5

Vorwärtsstreuung eines Plasmas mit einer den Ionen und Elektronen gemeinsamen Driftgeschwindigkeit  $w$ . Die einzelnen Kurven entsprechen verschiedenen Winkeln zwischen  $\underline{k}$  und  $\underline{w}$ . Die volle Kurve entspricht dem Winkel  $\pi/2$ . Die strichpunktierte Kurve ist das Doppler-verschmierte Durchschnittsspektrum.

Wenn die Elektronen eine Driftgeschwindigkeit  $w$  relativ zu den Ionen haben, dann hängen die physikalischen Eigenschaften des Plasmas von  $w$  ab. Das Streuspektrum ist dann nicht nur verschoben sondern auch gegenüber dem driftfreien Zustand verzerrt. Die Formeln (26) bis (31) sind noch immer zuständig, wenn man  $w_i$  gleich Null setzt.

Eine der interessantesten Eigenschaften des durch den Elektronenstrom gestörten Plasmas ist die Drift- oder Zweistrominstabilität. Sie bewirkt, dass die Amplitude gewisser Plasmawellen exponentiell anwächst und formal unendlich wird. In den Streuformeln zeigt sich dieses Verhalten durch das Verschwinden des stets positiven Nenners in Gleichung (27), wobei dann das Amplitudenquadrat  $|n_{\underline{k}}(\omega)|^2$  unendlich wird. Das Unendlichwerden von  $|n_{\underline{k}}(\omega)|^2$  ist eine Konsequenz gewisser Näherungen, z.B. der "random phase approximation", die einer Linearisierung der

Streutheorie äquivalent sind. In einer genaueren, nicht linearen Theorie wären die unendlichen Amplituden fast sicher endlich, aber sie hätten die gleiche Frequenz und Wellenzahl wie die instabilen Wellen der linearen Theorie.

Im Hinblick auf die eben erwähnte Eigenschaft der Plasmawellen unter bestimmten Bedingungen sehr grosse, in erster Näherung unendlich grosse Amplituden anzunehmen, hat man es bei der Analyse der Streuformel (27) vor allem mit zwei Problemen zu tun:

Erstens mit der Ermittlung von Unendlichkeitsstellen, die auch Resonanzen oder Instabilitäten genannt werden können und zweitens mit der Diskussion des Streuspektrums, das von stabilen Plasmawellen endlicher Amplitude erzeugt wird.

5) Die Instabilitätskriterien der Streutheorie

Es sei  $R_s(x_s')$  und  $I_s(x_s')$  der reelle und imaginäre Teil von  $G_s(x_s')$ , dann lauten die Instabilitätskriterien

$$1 - R_e(x') - R_i(y) = 0, \tag{32}$$

$$I_e(x') + I_i(y) = 0. \tag{33}$$

Mit Hilfe der asymptotischen Darstellungen<sup>14)</sup>

$$R(x) = 2x^2(1 - \frac{2}{3}x^2 + \dots), \quad I(x) = \frac{2}{3}x^2(1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots), \quad x \ll 1 \tag{34}$$

$$R(x) - 1 = (\frac{1}{2}x^2)(1 + 3/2x^2 + \dots), \quad I(x) \approx 0, \quad x \gg 1, \tag{35}$$

lassen sich die Instabilitätskriterien in den folgenden vier Fällen analytisch formulieren: 1)  $x' \ll 1, y \ll 1$ , 2)  $x' \gg 1, y \ll 1$ , 3)  $x' \ll 1, y \gg 1$ , 4)  $x' \gg 1, y \gg 1$ .

Es folgt aus Gleichung (30) und (34), dass  $G_s(x_s') < 0$  wenn  $x_s' \ll 1$ . Aus diesem Grund kann Gleichung (32) im Fall (1) niemals erfüllt werden und wir brauchen uns mit diesem Fall nicht weiter zu beschäftigen. In den drei verbleibenden Fällen ist durchwegs  $I_s(x_s') \ll 1$ , so dass Gleichung (33) näherungsweise immer erfüllt ist. Wir werden daher hauptsächlich das Instabilitätskriterium (32) analysieren, das auch deshalb von besonderem Interesse ist, da es die Grundgleichung der Dispersionstheorie darstellt. Diese Gleichung ergibt sich in der Dispersionstheorie als Lösungsbedingung für fast ungedämpfte Plasmawellen

$$I(x) = \frac{2}{3}x^2(1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots) \tag{36}$$

mit wohldefinierter Frequenz. Es ist merkwürdig, dass diese Lösungsbedingung nun als Kriterium für Instabilität auftritt. Wir werden diesen Umstand im theoretischen Teil noch näher erörtern und studieren hier nur den phenomenologischen Inhalt dieser Gleichung.

Wir nehmen zunächst einmal an, dass die Elektronendriftgeschwindigkeit Null oder sehr klein verglichen mit der thermischen Geschwindigkeit der Elektronen ist. Dann ergibt sich aus Gleichung (28) für Deuterium mit

$$x' = (y/60) (\bar{T}_i / T_e)^{1/2} \ll y, \quad \omega \approx 0. \quad (36)$$

Nur in dem praktisch kaum interessierenden Fall  $(\bar{T}_i / T_e) \geq 100$  ist die Ungleichung (36) nicht erfüllt. In Abwesenheit einer Elektronendrift ist also auch Fall (2) nicht realisiert und es genügt die Fälle (3) und (4) zu diskutieren.

Im Fall (3) hat das Kriterium (32) die Form der Dispersionsbeziehung (7)

$$1 + d_e^2 - 2d_e^2 x'^2 - \frac{d_i^2}{2y^2} \left(1 + \frac{3}{2y^2}\right) = 0, \quad y^2 = \frac{d_i^2 (1 + 3/d_i^2)}{2(1 + d_e^2 - 2d_e^2 x'^2)}, \quad x' \ll 1, \quad y \ll d_i \gg 1 \quad (37)$$

Es gibt also nur Lösungen wenn  $d_i^2 \gg 1$  und  $(d_i^2/d_e^2) = T_e/\bar{T}_i \gg 1$  und wegen des von Gleichung (37) geforderten extremen Temperaturverhältnisses  $T_e/\bar{T}_i$  ist auch Fall (3) nicht von grossem praktischen Interesse.

Im Fall (4) ist  $d_i^2/y^2$  in allen realistischen Fällen vernachlässigbar klein verglichen mit  $d_e^2/x'^2$  und das Kriterium (32) wird identisch mit der Dispersionsbeziehung (6):

$$1 - \frac{d_e^2}{2x'^2} \left(1 + \frac{3}{2x'^2}\right) = 0, \quad x'^2 = \frac{d_e^2}{2} \left(1 + \frac{3}{d_e^2}\right) \quad (38)$$

Diese Gleichung gilt also nur wenn  $d_e \gg 1$ .

Auf Grund der bisherigen Überlegungen könnte man zu dem paradoxen Schluss kommen, dass die stabilen Wellen der Dispersionsstheorie auf Grund der Kriterien der Streutheorie instabil sind. Berücksichtigung des Kriteriums (33) bringt diese Sache aber wieder in Ordnung. Denn bei Abwesenheit einer Elektronendrift können die Gleichungen (32) und (33) nicht gleichzeitig erfüllt sein. Sowohl im Fall (3) als auch im Fall (4) gilt  $y \gg x'$  und  $\bar{I}_e(x') > \bar{I}_e(y)$  vorausgesetzt, dass  $T_e/\bar{T}_i$  keine extrem grossen oder extrem kleinen Werte annimmt. Aus diesem Grund wird die maximale Intensität  $\bar{I}_m$  des Streuspektrums an der durch Gleichung (32) bestimmten Frequenz  $\omega_m$  durch den nicht vollkommen verschwindenden Wert von  $\bar{I}_e(x')$  festgelegt. Es ist immer möglich Gleichung (27) in der Umgebung einer Resonanzstelle so zu schreiben, dass sie ein Lorentz Profil der Form

$$\bar{I}(\underline{k}, \omega) \approx |n_{\underline{k}}(\omega)|^2 = A / [4(\omega - \omega_m)^2 + \Delta\omega_{1/2}^2] \quad (39)$$

annimmt.



Es gilt dann

$$I_m = A / \Delta \omega_{1/2} = \text{maximale Intensität,} \quad (40)$$

$$\Delta \omega_{1/2} = \text{Halbwertsbreite,} \quad \text{und} \quad (41)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(\omega) d\omega = \frac{\pi A}{2 \Delta \omega_{1/2}} = \text{Gesamtintensität.} \quad (42)$$

Wenn  $\Delta \omega_{1/2}$  sehr klein ist dann sollte Gleichung (42) die Gesamtintensität auch dann gut annähern wenn das Streuspektrum ausserhalb des Resonanzbereiches kein genaues Lorentz Profil hat. Die Intensität (42) kann aber um einen Faktor der Grössenordnung eins falsch sein. Im Fall (3) ergibt sich auf diese Weise

$$A = 6(\theta) \frac{N}{\pi^{1/2}} \frac{\alpha_e^4 \omega_{pe}^2}{\omega_{ce} (1 + \alpha_e^2)^3}, \quad \Delta \omega_{1/2} = \frac{\pi^{1/2} \omega_{pe}^2 \alpha_e^2}{(1 + \alpha_e^2)^2 \omega_{ce}}, \quad I = \frac{N 6(\theta) \alpha_e^2}{2 (1 + \alpha_e^2)} \quad (43)$$

und im Fall (4) in Übereinstimmung mit den Gleichungen (20) - (22)

$$A = 6(\theta) \frac{N}{\pi^{1/2}} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}} \exp\left(-\frac{\alpha_e^2}{2}\right), \quad \Delta \omega_{1/2} = \frac{\pi^{1/2}}{2} \alpha_e^4 \omega_{ce} \exp(-\alpha_e^2/2), \quad I = \frac{N 6(\theta)}{2 \alpha_e^2} \quad (44)$$

Man erkennt, dass sowohl im Fall (3) als auch im Fall (4) die Gesamtintensität endlich ist und im Fall (4) sogar wie  $\alpha_e^{-2}$  gegen Null geht wenn  $\alpha_e$  gross ist. Trotz der in den Fällen 2 bis 4 definitionsgemäss gegebenen Kleinheit von  $I_c(X'_j)$  hat man eine wahre Resonanz nur dann, wenn Gleichung (32) exakt erfüllt ist und das ist nur dann möglich, wenn die Driftgeschwindigkeit  $w$  von Null verschieden ist.

Aus diesem Grund werden wir jetzt kurz die Fälle 2 - 4 für  $w \neq 0$  diskutieren. Der Fall (2) erfordert eine so extrem grosse Driftgeschwindigkeit, dass er praktisch ohne grosses Interesse ist. Im Fall (3) bleiben Gleichung (37) und die Bedingungen  $\alpha_e^2 \gg 1, \tau_e / \tau_i \gg 1$  erhalten, aber  $\Delta \omega_{1/2}$  kann alle Werte zwischen Null und dem in Gleichung (43) gegebenen Ausdruck annehmen. Bei echter Resonanz ist  $\Delta \omega_{1/2}$  gleich Null und es ergibt sich aus den Gleichungen (33) - (28), dass

$$x' = -\varepsilon y \exp(-y^2) \ll 1, \quad y = \eta \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \frac{w_e}{v_{ee}} \gg 1. \quad (45)$$

Im Fall (4) erfordert Gleichung (33), dass

$$y \approx x' + (\sqrt{2} x') \ln \varepsilon, \quad y \gg 1, \quad x' \gg 1. \quad (46)$$

Die Bedingungen für echte Resonanz lauten nun

$$x'^2 \approx y^2 \approx \frac{\alpha_e^2 (1+\varepsilon)}{\lambda} \left[ 1 + \frac{3}{\alpha_e^2 (1+\varepsilon)} \right] \quad (47)$$

mit

$$\varepsilon = T_e / T_i \quad (48)$$

und

$$\gamma (1 - \frac{1}{\eta}) \approx \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{w}{v_{te}} \gg 1. \quad (49)$$

Resonanz im Fall (4) verlangt also auch Driftgeschwindigkeiten, die viel grösser sind als die thermische Elektronengeschwindigkeit  $v_{te}^+$ , aber nicht so extrem gross wie im Fall (2).

In den meisten Systemen, die für die experimentelle Plasmaphysik wichtig sind, haben die Parameter  $x'$ ,  $y$ ,  $\alpha_e$  und  $\varepsilon$  Werte von der Grössenordnung eins, d.h.  $0.2 \lesssim y \lesssim 5$  usw. In solchen Systemen sind die asymptotischen Darstellungen (34) und (35) nicht brauchbar und die Stabilitätskriterien können am besten graphisch ausgewertet werden.

Jedes Streusystem entspricht einem bestimmten Punkt  $(\alpha_e, \varepsilon, x', y)$  in einem vierdimensionalen Funktionenraum, wobei  $x'$  entsprechend Gleichung (28) die Driftgeschwindigkeit  $w$  und  $y = w/\omega_{ci}$  die Frequenz von Plasmawellen festlegt. Einige dieser Punkte sind Unendlichkeitsstellen und ihre Lage soll nun graphisch ermittelt werden.

Da es sich um einen vierdimensionalen Funktionenraum handelt scheint eine übersichtliche graphische Darstellung zunächst schwierig. Aber es zeigt sich, dass zu jedem Paar  $(\alpha_e, \varepsilon)$  von Systemparametern nur 2, 1 oder 0 Unendlichkeitsstellen gehören. Man kann daher die instabilen Punkte leicht mit Hilfe eines Diagrammes darstellen, das aus zwei Kurvenscharen in der  $(x', y)$ -Ebene besteht. (Siehe Fig. 6) Jede gestrichelte Kurve gehört zu einem bestimmten  $\varepsilon$ -Wert und stellt Lösungen der Gleichung (33) für dieses  $\varepsilon$  dar. Diese Lösungen sind unabhängig von  $\alpha_e$ . Die Lösungen der Dispersionsgleichung (32) hängen von  $\alpha_e$  und  $\varepsilon$  ab. Für ein festes  $\varepsilon$  kann man die Lösungen von Gleichung (32) als eine Kurvenschar in der  $(x', y)$ -Ebene darstellen von denen jede zu einem konstanten  $\alpha_e$ -Wert gehört. Diese Kurven sind aber einfachheitshalber nicht in Fig. (6) eingezeichnet, sondern nur ihre Schnittpunkte mit den gestrichelten Lösungskurven der Gleichung (33). Wir suchen nun aus diesen Schnittpunkten alle jene heraus, die zum gleichen  $\alpha_e$ -Wert gehören und verbinden sie durch Linien. Das sind die vollen Kurven der Fig. 6, die mit dem Wert  $\alpha_e^2$  indiziert sind.

Man hat also zwei Kurvenscharen, die sich schneidenden Kurven gebühren

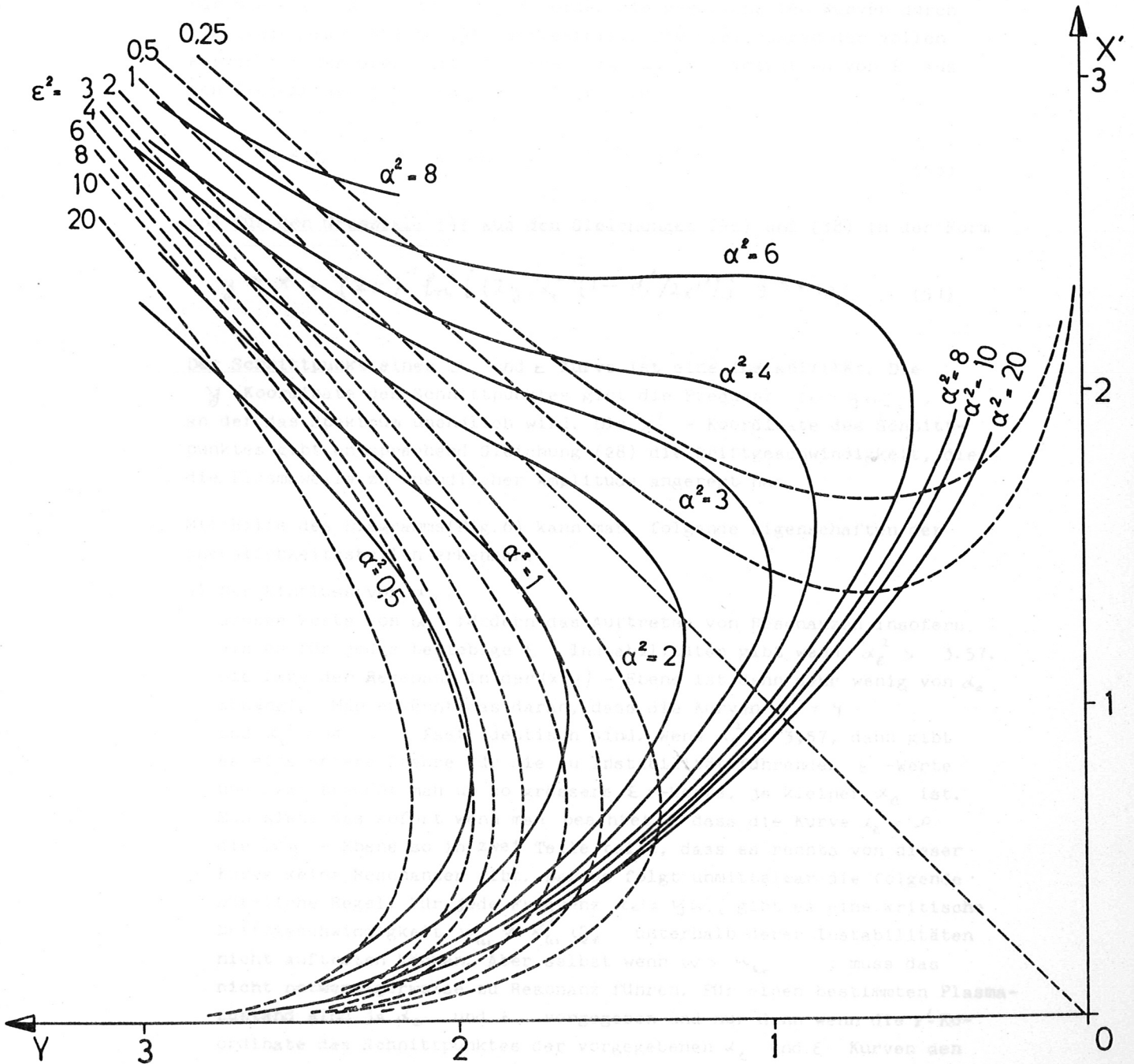


Fig. 6

Graphische Darstellung der Instabilitätskriterien für die Ionenwellen.

----- Linien mit konstantem  $\epsilon = T_e/T_i$  sind praktisch am wichtigsten.

———— Linien mit konstantem  $\alpha_e$  sind für kleine Driftgeschwindigkeiten

$Y$  misst die Frequenz und  $X'$  die Driftgeschwindigkeit entsprechend Gl.(28). Die Koordinaten  $(X', Y)$  des Schnittpunktes einer gestrichelten und vollen Linie geben die kritische Driftgeschwindigkeit  $X'$  die eine Plasmawelle mit Frequenz  $Y$  instabil macht und zwar für ein Plasma, das die zu den sich schneidenden Kurven gehörenden Werte von  $\alpha_e$  und  $\epsilon$  besitzt.

Für die Grenzfälle (3) und (4) werden die gestrichelten Kurven durch die Gleichungen (45) und (46) dargestellt. Die Gleichungen der vollen Kurven für den Grenzfall (3) erhält man durch Elimination von  $\varepsilon$  aus den Gleichungen (45) und (37) in der Form

$$x' \approx 2 \alpha_e^{-2} (1 + \alpha_e^2) y^3 \exp(-y^2), \quad x' \ll 1, y \gg 1 \quad (50)$$

und für den Grenzfall (4) aus den Gleichungen (46) und (38) in der Form

$$y \approx x' + (2x')^{-1} \ln \left[ (2y^2/\alpha_e^2) (1 - \alpha_e^2/2x'^2) \right], \quad y \gg x' \gg 1. \quad (51)$$

Der Schnittpunkt einer  $\alpha_e$  und  $\varepsilon$  Kurve ist eine Instabilität. Die  $y$ -Koordinate des Schnittpunktes gibt die Frequenz  $\omega = y \omega_{ci}$ , an der das Spektrum unendlich wird. Die  $x'$ -Koordinate des Schnittpunktes gibt entsprechend Gleichung (28) die Driftgeschwindigkeit, die die Plasmawelle zu unendlicher Amplitude angeregt hat.

Mit Hilfe des Diagramms (Fig. 6) kann man folgende Eigenschaften der Unendlichkeitsstellen erkennen:

a) Der Einfluss von  $\alpha_e$ .

Grosse Werte von  $\alpha_e$  fördern das Auftreten von Resonanzen insofern als es für jedes beliebige  $\varepsilon$  Instabilitäten gibt wenn  $\alpha_e^2 > 3.57$ . Die Lage der Resonanz in der  $(x'y)$ -Ebene ist dann sehr wenig von  $\alpha_e$  abhängig. Man erkennt das daran, dass die Kurven  $\alpha_e^2 = 4$  und  $\alpha_e^2 = \infty$  fast identisch sind. Wenn  $\alpha_e^2 < 3.57$ , dann gibt es eine untere Grenze für die zu Instabilität führenden  $\varepsilon$ -Werte und zwar braucht man um so grössere  $\varepsilon$ -Werte, je kleiner  $\alpha_e$  ist. Man sieht das sofort wenn man beachtet, dass die Kurve  $\alpha_e^2 = \infty$  die  $(x'y)$ -Ebene so in zwei Teile teilt, dass es rechts von dieser Kurve keine Resonanzen gibt. Daraus folgt unmittelbar die folgende nützliche Regel. Für jede Frequenz  $\omega = y \omega_{ci}$  gibt es eine kritische Driftgeschwindigkeit  $v_{kr} \approx x'_{kr} v_{ee}$  unterhalb derer Instabilitäten nicht auftreten können. Aber selbst wenn  $\omega > \omega_{kr}$ , muss das nicht notwendigerweise zu Resonanz führen. Für einen bestimmten Plasmazustand sind ja  $\alpha_e$  und  $\varepsilon$  vorgegeben und nur dann wenn die  $x'$ -Koordinate des Schnittpunktes der vorgegebenen  $\alpha_e$  und  $\varepsilon$  Kurven den durch Gleichung (28) bestimmten Wert  $\omega$  hat, ergibt sich eine Instabilität. Eine Kritik dieses Resultates befindet sich in Kap. IV.6)

b) Der Einfluss von  $\varepsilon$ .

Die unteren Äste der  $\alpha_e$  und  $\varepsilon$  Kurven sind praktisch am wichtigsten, da in diesem Zustandsbereich schon kleine Driftgeschwindigkeiten zu Instabilität führen können. Für eine vorgegebene Frequenz  $y$  ergibt sich dann als Resonanzbedingung, dass  $\omega$  um so grösser sein muss je



kleiner  $\varepsilon$  ist. Da  $\omega_{kr}$  die kleinste Driftgeschwindigkeit ist, die Instabilität erzeugt, braucht es den grössten Wert von  $\varepsilon$ .  
Wenn man auch die Frequenz  $\gamma$  variiert, ergibt sich als Resonanzbedingung für  $\alpha_e^2 > 3.57$ :  $\gamma \approx \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon}$  (siehe Gl. 37) und je grösser  $\gamma$  desto kleiner  $\omega$ . Daraus folgt, dass nur die niederfrequenten Ionenschwingungen bei realistischen Werten von  $\varepsilon$  Driftinstabilitäten zeigen. Die hochfrequenten Elektronenschwingungen brauchen dagegen extrem hohe Werte von  $\varepsilon$  oder von  $\omega$  bevor sie instabil werden können.

c) Der Effekt von  $\omega$ .

Für ein bestimmtes  $\omega$  gibt es untere Grenzen für  $\gamma$  und  $\varepsilon$  unterhalb deren Resonanz nicht auftritt. Z.B. für  $\omega \approx 0.2 \sqrt{\varepsilon_e}$  ist die untere Grenze für  $\varepsilon$  ungefähr 4 und je kleiner  $\omega$  desto grösser ist die untere Grenze für  $\varepsilon$ .

Die oben durchgeführte Analyse der Instabilitätskriterien zeigt, dass der Effekt einer Elektronendrift ähnlich ist wie der eines grossen Verhältnisses  $\varepsilon = \bar{v}_e / \bar{v}_i$ .

In der Nachbarschaft von Unendlichkeitsstellen ist die Streuamplitude sehr gross. Das macht die Abhängigkeit der Streuspektren von den Systemparametern recht kompliziert. Wenn man z.B. bei festgehaltenem  $\alpha_e$  und  $\omega$ ,  $\varepsilon$  anwachsen lässt, so wird die Streuintensität bei Annäherung an die für den Zustand  $(\alpha_e, \omega)$  charakteristische Resonanzstelle anwachsen, bei Durchgang durch die Resonanzstelle unendlich werden und dann wieder abnehmen. Das Wiederabklingen ist möglicherweise die Konsequenz von Näherungen (siehe Kapitel IV.6))

6) Das Streuspektrum eines Plasmas mit Elektronendrift

In der Nachbarschaft von Instabilitätsstellen versagt die diesem Bericht zu Grunde liegende lineare Streutheorie. Aus diesem Grunde kann man eigentlich nur solche Plasmen verlässlich diskutieren, die im Rahmen der linearen Theorie stabil sind. Wenn man trotzdem auch instabile Plasmen betrachtet, dann muss man den Teil des Spektrums, der sich in der Nachbarschaft einer Unendlichkeitstelle befindet, mit gebührender Vorsicht behandeln.

Im Hinblick auf die Unzuverlässigkeit der linearen Theorie bei Vorhandensein von Elektronendrift, ist eine vollkommene Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment nicht zu erwarten. Die lineare Theorie überschätzt den Effekt von Driftgeschwindigkeiten in der Nähe von Resonanzstellen und dieser Umstand sollte in der folgenden Diskussion stets beachtet werden.

Wenn die Driftgeschwindigkeit  $\omega$  nur eine einzige Richtung hat und wenn man nur einen einzigen Streuvektor  $\underline{k}$  zum Spektrum beitragen lässt, dann wird das Streuspektrum stark unsymmetrisch (siehe Fig. 7).

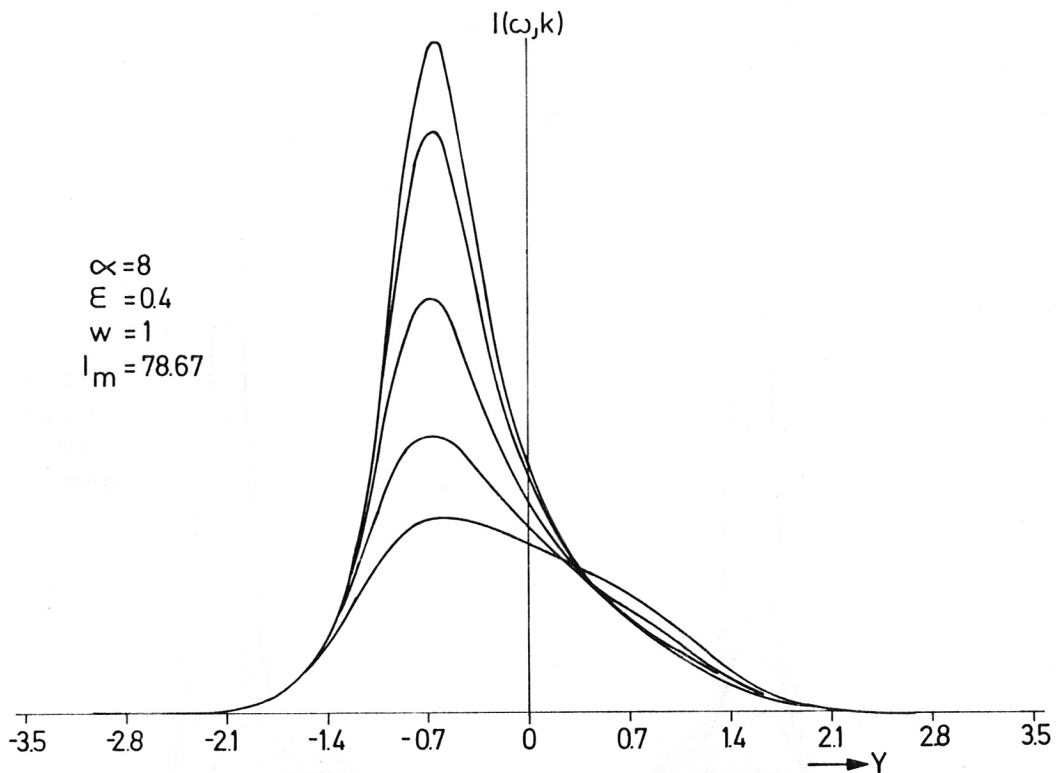


Fig. 7

Streuspektren eines Plasmas mit Driftgeschwindigkeit  $\underline{w}$  der Elektronen relativ zu den Ionen. Die Kurven entsprechen (von oben nach unten) den Winkeln  $0, \pi/10, 2\pi/10, \dots, \pi/2$  zwischen  $\underline{w}$  und  $\underline{k}$ .

Dieser Fall ist aber nicht sehr interessant, da man bei der praktisch wichtigen Vorwärtsstreuung meistens über alle Richtungen von  $\underline{k}$  mittelt. Auch die Driftgeschwindigkeit hat in dem wichtigen Fall einer azimuthalen Drift alle Richtungen. Wir werden uns also nur mit solchen Systemen beschäftigen, bei denen das Streuspektrum einen Mittelwert über alle möglichen Winkel zwischen  $\underline{w}$  und  $\underline{k}$  darstellt. In diesem Fall ist das Spektrum symmetrisch, da für jede Driftgeschwindigkeitskomponente  $w$  auch eine Komponente  $-w$  zum Spektrum beiträgt. Ein typisches Beispiel ist in Fig. 8 dargestellt. Die Kurven entsprechen einer Driftgeschwindigkeit der Grösse  $|\underline{w}| = 0.2(3/2)^{1/2} v_{te}$ . Da alle Winkel zwischen  $\underline{k}$  und  $\underline{w}$  zugelassen sind, kann die Komponente  $w$  alle Werte zwischen  $-|\underline{w}|$  und  $+|\underline{w}|$  annehmen. Die elf Kurven in Fig. 8 entsprechen den Winkeln  $\phi = 0, \pi/10, 2\pi/10, 3\pi/10, \dots, \pi$  zwischen  $\underline{k}$  und  $\underline{w}$ . Die Kurven mit  $\phi = 0$  und  $\phi = \pi$  haben die stärksten Seitenmaxima und die Kurve mit  $\phi = \pi/2$  ist symmetrisch. Die Frage, ob die stärksten Seitenmaxima noch in den Gültigkeitsbereich der linearen Streutheorie fallen, kann nur schwer beantwortet werden. Der Mittelwert aller Kurven ist

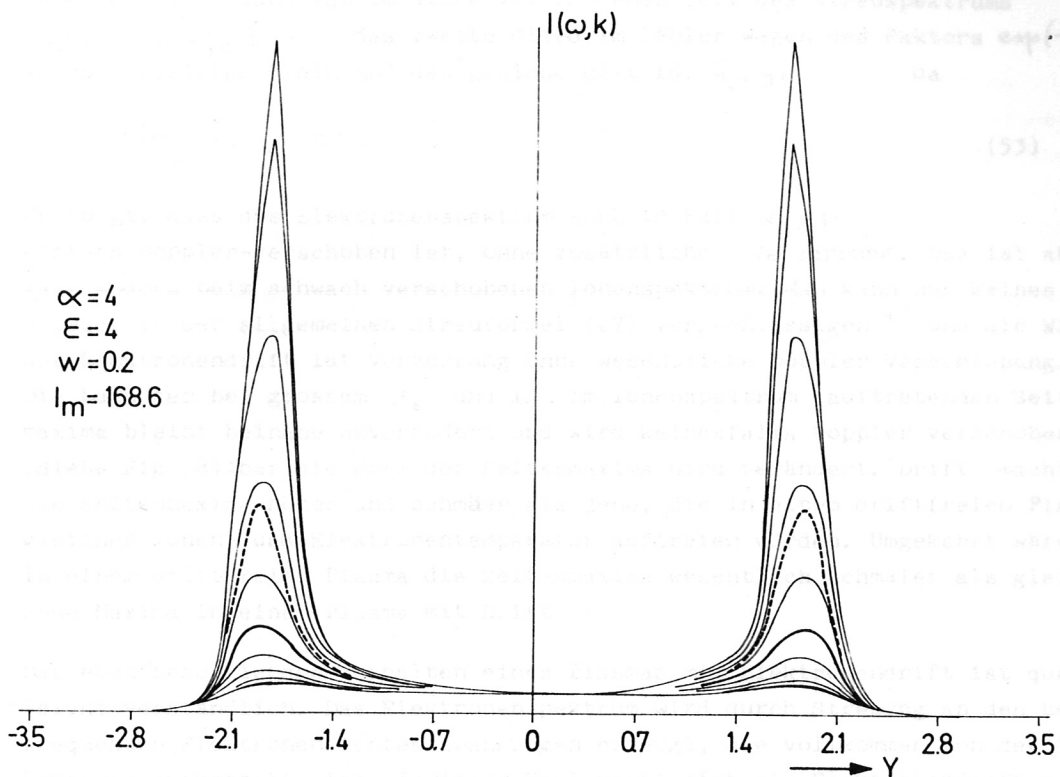


Fig. 8

Streuspektren eines Plasmas mit Driftgeschwindigkeit  $w$  der Elektronen relativ zu den Ionen. Die Kurven entsprechen (von oben nach unten auf der linken Seite) den Winkeln  $\phi = 0, \pi/10, 2\pi/10, \dots, \pi$  zwischen  $w$  und  $k$ . Die stark gezeichnete Kurve entspricht dem Winkel  $\phi = \pi/2$  und ist so als ob keine Elektronendrift vorhanden wäre. Sie unterscheidet sich merklich von der gestrichelten Durchschnittskurve.

gestrichelt eingezeichnet und sollte mit der stark gezeichneten symmetrischen Kurve, für die  $w = 0$  gilt, verglichen werden. Der Unterschied zwischen den beiden Kurven ist recht beachtlich und sollte genügen um die Driftgeschwindigkeit durch Vergleich zwischen theoretischen und gemessenen Streuspektren experimentell zu bestimmen.

Ganz allgemein kann man den Effekt einer Elektronendrift auf das Streuspektrum folgendermassen beschreiben:

Wenn  $\alpha_e \ll 1$ , dann ist auch  $G_e(x') \approx G_e(y) \ll 1$  und

$$|n_k(\omega)|^2 = (N \pi^{1/2} / 8 \omega_{ce}) \exp(-x'^2). \quad (52)$$

Man hat also eine verschobene Gauss-Verteilung wie das ja nach den Ausführungen des Paragraphen IV.1) zu erwarten ist.

Wenn  $\alpha_e \gg 1$  dann ist im stark verschobenen Teil des Streuspektrums  
 ( $\omega \approx \omega_{pe} \approx \omega_{pe}$ ) das zweite Glied im Zähler wegen des Faktors  $\exp(-y^2)$   
 vernachlässigbar klein und das gleiche gilt für  $g_i(y)$  da

$$\lim_{y \rightarrow \infty} g_i(y) = 0. \quad (53)$$

Es folgt, dass das Elektronenspektrum auch im Fall  $\alpha_e > 1$   
 einfach Doppler-verschoben ist, ohne zusätzliche Verzerrung. Das ist aber  
 ganz anders beim schwach verschobenen Ionenspektrum. Man kann nun keines der  
 Glieder in der allgemeinen Streuformel (27) vernachlässigen <sup>+) und die Wirkung  
 der Elektronendrift ist Verzerrung ohne wesentliche Doppler Verschiebung.  
 Die Lage der bei grossem  $\alpha_e$  und  $\epsilon$  im Ionenspektrum auftretenden Seiten-  
 maxima bleibt beinahe unverändert und wird keinesfalls Doppler verschoben.  
 (Siehe Fig. 8) Aber die Form der Seitenmaxima wird verändert. Drift macht  
 die Seitenmaxima höher und schmaler als jene, die in einem driftfreien Plasma  
 gleicher Ionen- und Elektronentemperatur auftreten würden. Umgekehrt wären  
 in einem driftfreien Plasma die Seitenmaxima wesentlich schmaler als gleich  
 hohe Maxima in einem Plasma mit Drift.</sup>

Das eben beschriebene Verhalten eines Plasmas mit Elektronendrift ist qualitativ  
 leicht verständlich. Das Elektronenspektrum wird durch Streuung an den hoch-  
 frequenten Elektronendichteschwankungen erzeugt, die vollkommen von der Ionen-  
 bewegung entkoppelt sind. In diesem Fall macht sich die Elektronendrift natürlich  
 als Doppler Verschiebung bemerkbar. Dagegen wird das Ionenspektrum durch Streuung  
 an solchen Elektronendichteschwankungen erzeugt, die stark mit der geordneten  
 Wellenbewegung der Ionen gekoppelt sind. Diese niederfrequenten Dichteschwankungen  
 spielen sich zwar in einem relativ zu den Ionen bewegtem Elektronengas ab, machen  
 aber diese Relativbewegung nicht mit. Aus diesem Grund sieht man keine Doppler  
 Verschiebung sondern nur eine verstärkte Anregung der Ionenwellen. Eine genauere  
 Beschreibung des Streuspektrums von Plasmen mit Elektronendrift ist im Anhang zu  
 finden, der graphische Darstellungen von Streuspektren für verschiedenen Werte  
 der Parameter  $\alpha_e$ ,  $\epsilon$  und  $\omega$  enthält.

Die Gesamtstreuintensität der Streuung eines Plasmas ohne Drift ist normiert,  
 insofern als das Amplitudenquadrat  $\langle |n_k(t)|^2 \rangle$  nie grösser als eins  
 werden kann. Diese Beschränkung gilt aber nicht für Plasmen mit Drift, wie  
 man sich leicht an Hand der im Anhang gezeigten Spektren überzeugen kann. Das ist  
 auch weiter nicht verwunderlich, da die Streuamplitude auf Grund der allgemeinen  
 mikroskopischen Beziehung

$$\langle |n_k(t)|^2 \rangle = \left\langle \left| \sum_{j=1}^N \exp(-i \frac{1}{2} \cdot r_j) \right|^2 \right\rangle \quad (54)$$

alle Werte zwischen Null und  $N^2$  annehmen kann. Der durch Resonanz bedingte Wert  
 Unendlich ist natürlich eine Folge von Näherungen. Der korrekte, aus einer nicht  
 linearen Theorie zu berechnende Wert des Amplitudenquadrates  $|n_k(\omega)|^2$  scheint derzeit  
 nicht verlässlich bekannt zu sein. Eine experimentelle Bestimmung dieser Grösse  
 mittels eines Streuexperimentes wäre daher höchst erwünscht.

<sup>+) Das erste Glied im Zähler von (27) ist meistens kleiner als das Zweite  
 wegen des Faktors  $(m_i/m_e)^{1/2}$ .</sup>



III. 7) Die Untersuchung von stossfreien Heizmechanismen

Das unmittelbare Ergebnis von Streuexperimenten sind die mittleren Amplitudenquadrate  $|\overline{n}_\pm(\omega)|^2$  von Plasmawellen. Im thermischen Gleichgewicht haben diese Amplitudenquadrate eine Gleichgewichtsverteilung, die durch Gleichung (17) mit  $\overline{T}_e = \overline{T}_i$  gegeben ist. Wenn das thermische Gleichgewicht gestört ist, dann können die  $|\overline{n}_\pm(\omega)|^2$  wesentlich über ihren Gleichgewichtswert hinaus anwachsen und man kann dann von angeregten Plasmawellen sprechen. Die wichtigsten Anregungsmechanismen sind die Resonanz mit periodischen äusseren Feldern, Elektronendrift relativ zu den Ionen und ein grosses Temperaturverhältnis  $\overline{T}_e/\overline{T}_i = \epsilon$ . In diesem Bericht behandeln wir nur die beiden letzteren Mechanismen. Man kann dann durch geeignete Streuexperimente auf dem Umweg über die beobachteten Amplitudenquadrate die Driftgeschwindigkeit  $w$  und das Temperaturverhältnis  $\epsilon$  und die Zeitabhängigkeit dieser Parameter bestimmen. Durch solche Experimente könnte man Auskunft über Existenz und Eigenschaften von stossfreien Heizmechanismen der folgenden Art erhalten: Ein äusseres elektrisches oder magnetisches Feld erzeugt eine Elektronendrift relativ zu den Ionen. Diese Drift regt die Plasmaionenschwingungen an und die geordnete Energie dieser Schwingungen wird durch nichtlineare Effekte in ungeordnete thermische Energie verwandelt. In einem stationären Zustand des Plasmas strömt Energie aus dem Feld in das Plasma und wird auf dem Umweg über Driftenergie und Wellenenergie thermalisiert. Dabei nimmt  $w$  ungefähr einen konstanten Wert an, der durch die Geschwindigkeit der Energieübertragung von einer Energieform in die nächste bestimmt wird. Die Parameter  $\overline{T}_e$ ,  $\epsilon$  und  $|\overline{n}_\pm(\omega)|^2$  sind dagegen zeitabhängig und nehmen höchstwahrscheinlich alle zu. Beim Ein- und Ausschalten des Feldes ändert sich das Verhalten aller Parameter und auch  $w$  wird zeitabhängig. Es sollte möglich sein durch eine Kombination von kohärenten und nicht kohärenten Streuexperimenten die Existenz und den zeitlichen Verlauf so eines Heizvorganges zu beobachten. Für eine solche Untersuchung wäre ein Plasma am besten geeignet, das bei einem Streuwinkel  $\theta = 90^\circ$  inkohärent und bei  $\theta \leq 5^\circ$  kohärent streut. Ausserdem sollte die Geometrie des Streuexperimentes so sein, dass nicht über alle Winkel zwischen  $\underline{k}$  und  $\underline{w}$  gemittelt wird, damit Drift durch die leicht beobachtbare Assymmetrie des Streuspektrums bestimmt werden kann.

Wir brauchen das von einer Plasmawelle an Ort  $\underline{r}_0$  gestreute elektrische Feld  $\underline{E}_s(\underline{r}, t)$  an Ort  $\underline{r}$  eines weit entfernten Detektors. Der Index  $g$  für das Streuzentrum ist notwendig, da wir später über alle Elektronen des Plasmas summieren wollen. Aus den Heitler'schen Formeln für die Dipolstrahlung ergibt sich

$$\underline{E}_s(\underline{r}, t) = \frac{1}{r} \left[ \underline{E}_0 + \frac{1}{c} \underline{w} \times \underline{e}_r + \frac{1}{c^2} \underline{w} \times (\underline{w} \times \underline{e}_r) \right] \quad (59)$$

IV. Die Theorie der Lichtstreuung an einem Plasma

Die Theorie der Plasmastreueung befasst sich im wesentlichen mit zwei recht verschiedenen Problemen. Das eine ist die elektromagnetische Theorie der Streuung an einem System, in dem freie Elektronen die dominierenden Streuzentren sind. Es ist die Aufgabe dieser Theorie die allgemeinen Streuformeln (14), (15) und (16) herzuleiten. Das zweite, für den Plasmaphysiker wesentlich interessantere Problem ist die Berechnung der mittleren Amplitudenquadrate  $|n_{\underline{k}}(\omega)|^2$  und  $\langle |n_{\underline{k}}(t)|^2 \rangle$  von longitudinalen Plasmawellen.

1) Die elektromagnetische Theorie der Lichtstreuung

Wir betrachten zunächst das Verhalten eines einzelnen Elektrons im Strahlungsfeld. Das elektrische Feld  $\underline{E}'$  der einfallenden Strahlung mit Frequenz  $\omega_0$  erzeugt eine Schwingung des Elektrons mit Amplitude

$$\underline{z}(t) = e \underline{E}'(t) / m \omega_0^2 = e \lambda^2 \underline{E}'(t) / 4\pi^2 m c^2. \quad (55)$$

Das ergibt sich ohne weiteres aus den Bewegungsgleichungen. Multipliziert man die Verrückung  $\underline{z}$  mit der Ladung  $-e$ , dann erhält man das induzierte Dipolmoment

$$\underline{p} = -e \underline{z} = - (e^2 \lambda^2 / 4\pi^2 m c^2) \underline{E}' = \alpha^* \underline{E}'. \quad (56)$$

Im Fall der Lichtstreuung ist  $\underline{E}'$  eine ebene, monochromatische Welle, die zur Zeit  $\tau = 1/\gamma$  exponentiell abgeschnitten wird ( $\tau$  ist die Dauer eines Laserimpulses):

$$\underline{E}'(\underline{r}, t) = \underline{E}' \exp\{i[\underline{k}' \cdot \underline{r} + (\omega_0 + i\gamma)t]\}. \quad (57)$$

und

$$\underline{p}(\underline{r}, t) = \alpha^* \underline{E}' \exp\{i[\underline{k}' \cdot \underline{r} + (\omega_0 + i\gamma)t]\}. \quad (58)$$

Das zeitabhängige Dipolmoment (58) erzeugt die gestreute Strahlung.

Wir brauchen das von einem Elektron am Ort  $\underline{r}_j$  gestreute elektrische Feld  $\underline{E}_j''(\underline{R}, t)$  am Ort  $\underline{R}$  eines weit entfernten Detektors. Der Index  $j$  für das Streuzentrum ist notwendig, da wir später über alle Elektronen des Plasmas summieren wollen. Aus den Hertz'schen Formeln für die Dipolstrahlung ergibt sich<sup>19)</sup>

$$\underline{E}_j''(\underline{R}, t) = \frac{1}{R_j} \underline{p}_j(\underline{R}_j, t) \exp[-i(\underline{k}' \cdot \underline{r}_j + \underline{k} \cdot \underline{R}_j)], \quad (59)$$

wobei

$$\underline{R}_j = \underline{R} - \underline{r}_j \quad (60)$$

der Abstand zwischen Streuzentrum und Detektor ist. Die Amplitude des gestreuten Feldes ist für

$$\underline{f}_j(\underline{R}_j, t) = -\frac{4\pi^2}{R_j^3 \lambda^2} \left[ \underline{R}_j \times \left[ \underline{R}_j \times \alpha^* \underline{E}' \right] \right] \exp[i(\omega_0 - \beta)t] \quad (61)$$

Sie enthält die Zeitabhängigkeit des gestreuten Feldes und seine Richtung<sup>+</sup>). Der in Gleichung (59) explizit ausgeschriebene ortsabhängige Teil der Phase ist die für Streuung an vielen Elektronen wichtigste Grösse und wird noch ausführlich behandelt werden.

Wir messen  $\underline{r}_j$  und  $\underline{R}$  vom Mittelpunkt  $O$  des Streuvolumens. Wenn nun die lineare Ausdehnung des Streuvolumens klein ist verglichen mit  $\underline{R}$ , dann kann man in der Formel für  $\underline{f}_j$ ,  $\underline{R}_j$  durch  $\underline{R}$  ersetzen.  $\underline{f}_j = \underline{f}$  ist dann für alle Elektronen des Plasmas identisch, unabhängig von ihrer Lage  $\underline{r}_j$ . Aber in der Phase kann man diese Vereinfachung nicht machen; nur die folgende, etwas weniger drastische Näherung ist zulässig, die auch an die Bedingung  $r_j \ll R$  geknüpft ist:

$$R_j = \sqrt{(\underline{R} - \underline{r}_j)^2} = \sqrt{R^2 - 2\underline{R} \cdot \underline{r}_j + r_j^2} \approx R - (\underline{R} \cdot \underline{r}_j)/R + \dots \quad (62)$$

Wir schreiben nun den Wellenvektor des gestreuten Lichtes in der Form

$$\underline{k}'' = k' \underline{R} / R \quad (63)$$

welche zum Ausdruck bringt, dass  $\underline{k}''$  die Richtung von  $\underline{R}$  und den Betrag von  $k'$  hat. Durch Einsetzen von (62) und (63) in (59) erhält man dann

$$\underline{E}_j''(\underline{R}, t) = \underline{f}(\underline{R}, t, \lambda, \theta) \exp(-ik'R) \exp(i\underline{k}'' \cdot \underline{r}_j), \quad (64)$$

wobei  $\underline{k}''$  der in Gleichung (1) definierte Streuvektor ist. Die Phase des gestreuten Lichtes hängt also durch den Faktor  $\exp(i\underline{k}'' \cdot \underline{r}_j)$

<sup>+</sup>) Auflösen des zweifachen Vektorproduktes ergibt die bekannte Tatsache, dass  $\underline{E}''$  die Richtung des durch  $\underline{R}$  gehenden Meridians einer Hilfskugel hat, deren Mittelpunkt  $\underline{r}_j$  und deren Polarachse parallel zu  $\underline{p}$  ist.

von dem Ort des Streuzentrums ab und das ist wichtig wenn man nun das von vielen Teilchen gestreute Feld am Ort  $\underline{R}$  überlagert. Man erhält dann

$$\underline{E}''(\underline{R}, t) = \sum_{j=1}^N \underline{E}''_j(\underline{R}, t) = \underline{f}(\underline{R}, t) \exp(-i \underline{k}' \cdot \underline{R}) \sum_{j=1}^N \exp(i \underline{k} \cdot \underline{r}_j), \quad (65)$$

wobei die Summe über alle im Streuvolumen enthaltenen Elektronen geht.

Die Streuintensität ist gleich dem Zeitmittel des Poynting Vektors  $|\underline{E}''|^2 c / 4\pi$ . Wenn man noch die Intensität des einfallenden Lichts

$$I_0 = |\underline{E}'|^2 c / 4\pi \quad (66)$$

einführt, dann ergibt sich

$$I(\theta, \lambda) = I(\underline{k}) = \sigma(\theta) \left\langle \left| \sum_{j=1}^N \exp(i \underline{k} \cdot \underline{r}_j) \right|^2 \right\rangle. \quad (67)$$

Der Thomson'sche Streufaktor ist im wesentlichen  $|\underline{f}|^2$ . Die übliche Form des Thomson Faktors erhält man wenn man die Polarisationsvektoren  $\hat{e}''$  und  $\hat{e}'$  des gestreuten und einfallenden Lichtes einführt. Man hat dann

$$\underline{E}' = \hat{e}' |\underline{E}'|, \quad \underline{E}'' = \hat{e}'' |\underline{E}''|, \quad \underline{R} \cdot \hat{e}'' = 0 \quad (68)$$

$$\sigma(\theta) = |\underline{f}|^2 c / 4\pi = I_0 \left| \hat{e}'' \cdot (\underline{\alpha} \times \hat{e}') \right|^2 / \lambda^2 R^2 \quad (69)$$

für linear polarisiertes einfallendes Licht und

$$\sigma(\theta) = I_0 \left( \frac{e^4}{m^2 c^4} \right) \frac{(1 + \cos^2 \theta)}{2 R^2} \quad (70)$$

für natürliches einfallendes Licht.

Die Streuformel (67) ist identisch mit der allgemeinen Beziehung (16) wenn die Phasensumme in (67) gleich der Wellenamplitude  $r_{\underline{k}}(t)$  ist. Um zu zeigen, dass dies tatsächlich der Fall ist, betrachten wir zunächst die mit einem Elektron am Ort  $\underline{r}_j$  verknüpfte Teilchendichte. Sie ist natürlich überall Null mit Ausnahme des Elektronenortes  $\underline{r}_j$ , wo sie unendlich ist, d.h. sie ist



eine  $\delta$ -Funktion:

$$n_j(\underline{r}) = \delta(\underline{r} - \underline{r}_j). \quad (71)$$

Die  $\delta$ -Funktion kann bekanntlich als ein Fourier Integral oder eine Fourier Serie dargestellt werden (siehe Anhang). Wir wählen die Fourier Seriedarstellung und schreiben

$$n_j(\underline{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\underline{q}} \exp[i\underline{q} \cdot (\underline{r} - \underline{r}_j)], \quad (72)$$

wobei  $\underline{q}$  die in Gleichung (4) angegebenen zyklischen Randbedingungen erfüllt. Die gesamte Teilchendichte ist eine Summe von  $\delta$ -Funktionen der Form

$$n(\underline{r}) = \sum_j \delta(\underline{r} - \underline{r}_j) = \frac{1}{V} \sum_{\underline{q}} \left[ \sum_j \exp(i\underline{q} \cdot \underline{r}_j) \right] \exp(i\underline{q} \cdot \underline{r}). \quad (73)$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist der Fourier Koeffizient der Elektronendichte

$$n_{\underline{q}}(t) = \sum_j \exp[-i\underline{q} \cdot \underline{r}_j(t)]. \quad (74)$$

$n_{\underline{q}}(t)$  ist zeitabhängig, da sich der Ort  $\underline{r}_j(t)$  von bewegten Elektronen mit der Zeit ändert. Berücksichtigt man noch, dass der Fourier Koeffizient die Amplitude von longitudinalen Plasmawellen darstellt<sup>+</sup>), dann ist die allgemeine Streuformel (15) und ihre übliche Interpretation bewiesen.

Wir kommen nun zur spektralen Intensitätsverteilung des Streulichts. Wir führen zunächst rein formal die in Kapitel II.3) diskutierte Fourier Transformierte bzw. Laplace Transformierte

$$n_{\underline{k}}(\omega) = \int_0^{\infty} dt n_{\underline{k}}(t) \exp(-\gamma t) \exp(-i\omega t) \quad (75)$$

<sup>+</sup>) Eine longitudinale Plasmawelle ist eine Elektronendichteschwankung mit einer Raum-Zeit-Variation, die im einfachsten Fall die Form  $n_{\underline{q}}(\omega) \exp[i(\underline{q} \cdot \underline{r} + \omega t)]$  hat. Die Benennung "Welle" für eine Raumfunktion  $n_{\underline{q}}(t) \exp(i\underline{q} \cdot \underline{r})$  nimmt die später zu besprechende Zeitabhängigkeit vorweg.

ein. Dann betrachten wir die gesamte Streuintensität bzw. den dafür massgebenden Ausdruck<sup>+)</sup>

$$\begin{aligned} \langle |n_{\underline{k}}(t)|^2 \rangle &= \int_0^{\infty} |n_{\underline{k}}(t)|^2 \exp(-2\gamma t) dt / \int_0^{\infty} \exp(-2\gamma t) dt \\ &= 2\gamma \int_0^{\infty} |n_{\underline{k}}(t)|^2 \exp(-2\gamma t) dt \end{aligned} \quad (76)$$

Mit Parsevals Theorem<sup>20)</sup> ergibt sich aber aus den Gleichungen (75) und (76)

$$\langle |n_{\underline{k}}(t)|^2 \rangle = (\gamma/\pi) \int_{-\infty}^{\infty} |n_{\underline{k}}(\omega)|^2 d\omega. \quad (77)$$

Man erkennt daraus, dass sich das Amplitudenquadrat  $\langle |n_{\underline{k}}(t)|^2 \rangle$  additiv aus den Amplitudenquadraten  $(\gamma/\pi) |n_{\underline{k}}(\omega)|^2$  zusammensetzt. Jede Plasmawelle  $(\underline{k}, \omega)$  liefert also zur gesamten Streuintensität den Beitrag (14). Die Frequenz der Plasmawelle macht sich dabei im Streuspektrum als Frequenzverschiebung bemerkbar (wie schon in Kapitel II gezeigt wurde).

## 2) Der Zusammenhang zwischen der Streuintensität und der binären Elektron-Elektron Korrelationsfunktion.

Die räumliche Kohärenz der Streustrahlung hängt von der Korrelation der Elektronenorte  $r_j$  ab. Um diesen Zusammenhang zu verstehen, schreiben wir das für die Lichtstreuung massgebende Amplitudenquadrat in der Form

$$\begin{aligned} \langle |n_{\underline{k}}(t)|^2 \rangle &= \left\langle \sum_j \sum_{j'} \exp\{-i\underline{k} \cdot [\underline{r}_j(t) - \underline{r}_{j'}(t)]\} \right\rangle \\ &= \sum_j \exp\{-i\underline{k} \cdot [\underline{r}_j(t) - \underline{r}_j(t)]\} + \left\langle \sum_j \sum_{j' \neq j} \exp\{-i\underline{k} \cdot [\underline{r}_j(t) - \underline{r}_{j'}(t)]\} \right\rangle. \end{aligned} \quad (78)$$

Die einfache Summe über die Diagonalglieder ist zu jeder Zeit gleich  $N$ , unabhängig von der räumlichen Anordnung der Elektronen. Die Doppelsumme kann als ein Mass für die räumliche Kohärenz angesehen werden. Wenn die Doppelsumme verschwindet, dann ist die Streuung vollkommen inkohärent und die gesamte Streuintensität ist eine Summe von Beiträgen der einzelnen Elektronen, die von-einander völlig unabhängig sind. Ist die Doppelsumme

<sup>+) Es ist zweckmässig den die Dauer eines Laserimpulses zu berücksichtigenden Abschneidfaktor explizit auszuschreiben, da er keine Eigenschaft der Plasmawellen darstellt und allen Wellen gemeinsam ist.</sup>

von der selben Grössenordnung  $N$  wie die einfache Summe, dann ist die Kohärenz stark und massgebend für die Eigenschaften des Streuspektrums.

Um die Doppelsumme zu ermitteln ersetzen wir in der üblichen Weise den Zeitmittelwert durch einen Ensemblemittelwert über verschiedene Elektronenkonfigurationen und beachten, dass in einem makroskopisch homogenen Plasma alle Elektronenorte  $\underline{r}_j$  gleichwertig sind. Aus diesem Grund ist der Mittelwert der einfachen Summe

$$\langle S_{\underline{k}} \rangle = \left\langle \sum_{j \neq j'} \exp\{-i \underline{k} \cdot [\underline{r}_j - \underline{r}_{j'}]\} \right\rangle = S \quad (79)$$

unabhängig vom Index  $j$  und die Summe über  $j$  in Gleichung (78) kann nun überall durch den Faktor  $N$  ersetzt werden. Das gibt

$$\langle |n_{\underline{k}}(t)|^2 \rangle = N \left\langle \left[ 1 + \sum_{j \neq j'} \exp(-i \underline{k} \cdot \underline{r}_{jj'}) \right] \right\rangle, \quad (80)$$

wobei  $\underline{r}_{jj'}$  den Abstand zwischen den Elektronen  $j$  und  $j'$  darstellt. Wir führen nun die radiale Verteilungsfunktion  $n^{ee}(\underline{r})$  für Elektronenpaare ein.<sup>+</sup> Diese kontinuierliche Ortsfunktion bestimmt die durchschnittliche Zahl der Elektronen  $n^{ee}(\underline{r})d\underline{r}$  in einem Volumelement  $d\underline{r}$  im Abstand  $\underline{r}$  von einem anderen, festgehaltenen Elektron und ermöglicht es den Ensemblemittelwert der Summe über  $j'$  in Gleichung (80) durch ein Integral zu ersetzen. Man erhält so

$$\langle |n_{\underline{k}}(t)|^2 \rangle = N \left[ 1 + \int n^{ee}(\underline{r}) \exp(-i \underline{k} \cdot \underline{r}) d\underline{r} \right]. \quad (81)$$

Es ist nun zweckmässig die Abweichung der Funktion  $n^{ee}(\underline{r})$  von ihrem konstanten Mittelwert  $n$  einzuführen. Man schreibt

$$n^{ee}(\underline{r}) = n [1 + w^{ee}(\underline{r})], \quad (82)$$

wobei  $w^{ee}(\underline{r})$  die binäre Elektron-Elektron-Korrelationsfunktion ist. Der konstante Teil von  $n^{ee}(\underline{r})$  trägt nichts zum Integral (81) bei, wenn  $\underline{k} \neq 0$  und man findet

$$\langle |n_{\underline{k}}(t)|^2 \rangle = N (1 + w_{\underline{k}}^{ee}), \quad (83)$$

<sup>+</sup>Die Bezeichnung radiale Verteilungsfunktion impliziert, dass  $n^{ee}(\underline{r})$  nicht von der Richtung von  $\underline{r}$  abhängt. In anisotropen Systemen spricht man von der binären Verteilungsfunktion.

wobei  $w_{\underline{k}}^{ee}$  den räumlichen Fourier Koeffizienten der Korrelationsfunktion darstellt und durch die Formel

$$w_{\underline{k}}^{ee} = \int_V w^{ee}(\underline{r}) \exp(-i \underline{k} \cdot \underline{r}) d\underline{r} \quad (84)$$

gegeben ist.

Die Korrelationsfunktion  $w^{ee}(\underline{r})$  kann mit den Methoden der statistischen Mechanik berechnet werden<sup>21)</sup> und führt dann zu der früher angegebenen Formel (24) für die gesamte Streuintensität. Es ergibt sich dabei, dass für jedes Plasma eine charakteristische Korrelationslänge  $r^*$  existiert, dergestalt, dass  $w^{ee}(\underline{r})$  praktisch gleich Null ist, wenn  $r$  über  $r^*$  hinaus anwächst.  $w^{ee}(\underline{r})$  hat also eine endliche Ausdehnung  $r^*$  im Raum und dem entspricht bekanntlich eine endliche Ausdehnung  $q^* \sim 1/r^*$  im reziproken Raum<sup>†)</sup>. Das heisst aber, dass  $w_{\underline{k}}^{ee}$  praktisch verschwindet wenn  $k r^* > 1$ . Damit haben wir ein Kohärenzkriterium festgelegt, das auch in Plasmen gültig ist, die sich nicht im thermischen Gleichgewicht befinden. In Analogie zu den Gleichgewichtssystemen führen wir den Parameter

$$\alpha = (k r^*)^{-1} \quad (85)$$

ein und finden: Wenn  $\alpha \ll 1$ , dann ist  $w_{\underline{k}}^{ee}$  gleich Null und die Streuintensität ist  $N^2 \delta(\theta)$ , d.h. die Streuung ist inkohärent. Wenn dagegen  $\alpha$  über eins hinaus anwächst, wird der Einfluss der Kohärenz ausschlaggebend für das Streuspektrum.

### 3) Das inkohärente Streuspektrum

Wir können nun leicht die in Kapitel III.3) angegebene Formel (25) beweisen, derzufolge das inkohärente Streuspektrum eine direkte Abbildung der Elektronengeschwindigkeitsverteilung ist. Wegen der vorausgesetzten Inkohärenz genügt es die Streuung eines einzelnen Elektrons zu betrachten. Das elektrische Feld des vom  $j$ -ten Elektron gestreuten Lichtes ist nach Gl. (61) und (64) proportional dem Phasenfaktor  $\exp[i \omega_0 t + i \underline{k} \cdot \underline{r}_j]$ . Ersetzt man nun  $\underline{r}_j$  näherungsweise durch den für geradlinige Elektronenbahnen geltenden Ausdruck

$$\underline{r}_j(t) = \underline{r}_j(0) + \underline{v}_j t \quad (86)$$

dann sieht man, dass das gestreute Feld die Frequenz

$$\omega'' = \omega_0 + \underline{k} \cdot \underline{v}_j \quad (87)$$

<sup>†)</sup> Ein bekanntes Beispiel für diese Reziprozität ist Heisenbergs Unschärfebeziehung.



hat. Das Streulicht ist also um den Betrag  $\hbar \cdot \underline{v}_j = \hbar v_j$  Doppler verschoben<sup>+)</sup> . Es sei nun  $F(v)$  die auf eins normierte Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen für die Geschwindigkeitskomponente  $v$  parallel zu  $\underline{k}$ . Der Geschwindigkeit  $v$  entspricht nun die Frequenz  $\omega = \hbar v$  und dem Geschwindigkeitsintervall  $dv$  entspricht das Frequenzintervall  $d\omega = \hbar dv$ . Die Zahl der Elektronen mit Geschwindigkeit  $v$  ist also proportional der Streuintensität mit Frequenzverschiebung  $\hbar v$  und die Richtigkeit des in Gleichung (25) benützten Proportionalitätsfaktors ergibt sich dadurch, dass man Gleichung (25) auf beiden Seiten mit  $dv$  multipliziert und dann über alle Geschwindigkeiten  $v$  bzw. alle Frequenzen  $\omega = \hbar v$  integriert. Gleichung (25) gibt nur dann verlässliche Auskunft über  $F(v)$  wenn  $\alpha$  sehr klein ist. In allen anderen Fällen muss man die Amplitudenquadrate  $|n_{\underline{k}}(\omega)|^2$  als Lösung der kinetischen Gleichungen ermitteln. Dies wird im nächsten Abschnitt durchgeführt werden.

4) Die Theorie der longitudinalen Plasmawellen

Wir wollen den thermischen Mittelwert des Quadrates der raum-zeitlichen Fourier Koeffizienten  $|n_{\underline{k}}(\omega)|^2$  der Elektronendichte berechnen. Wir werden diese Grösse kurz das Amplitudenquadrat von longitudinalen Plasmawellen nennen, doch verstehen wir unter Plasmawellen nicht nur die fast ungedämpften Wellen mit wohldefinierter Frequenz, die in der Dispersions- theorie behandelt werden, sondern alle raum-zeitlichen Fourier Koeffizienten. Die Berechnung der gesuchten Amplitudenquadrate wurde in zahlreichen Arbeiten dargestellt<sup>14, 22-28</sup> aus denen die von Salpeter<sup>14)</sup> als Grundlage dieses Berichtes ausgewählt werden soll.

Wir versuchen die Amplitudenquadrate  $|n_{\underline{k}}(\omega)|^2$  als Lösungen der Vlasov Gleichung zu erhalten. Die Vlasov Gleichung ist eine partielle Differentialgleichung für die Verteilungsfunktion  $f(\underline{r}, \underline{v}, t)$  eines Teilchens im sechs-dimensionalen Orts- und Geschwindigkeitsraum und hat die bekannte Form

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \underline{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{r}} + \frac{\underline{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = 0. \tag{88}$$

Es gibt für jede Teilchensorte im Plasma so eine Gleichung und später werden wir die Verteilungsfunktion durch die Indizes  $i$  und  $e$  für Ionen

<sup>+)</sup>  Es handelt sich hier um eine zweifache Doppler Verschiebung. Für das einfallende Licht ist das Elektron ein bewegter Beobachter, aber für das gestreute Licht ist es eine bewegte Quelle. Aus diesem Grund ist die Doppler Verschiebung  $\hbar \cdot \underline{v} = \hbar' \cdot \underline{v} - \hbar'' \cdot \underline{v}$  die Summe von zwei Frequenzverschiebungen:  $\hbar' \cdot \underline{v}$  ist die Verschiebung der vom bewegten Elektron registrierten einfallenden Frequenz  $\omega_0$  und  $\hbar'' \cdot \underline{v}$  ist die zusätzliche Verschiebung des vom bewegten Elektron emittierten Streulichtes.

und Elektronen spezifizieren.

Die Vlasov Gleichung wird oft die stossfreie Boltzmann Gleichung genannt. Diese Bezeichnung scheint anzudeuten, dass sie im Prinzip nicht vollkommen rigoros ist, und dass man auf der rechten Seite ein Stossglied vernachlässigt hat. Aber die Richtigkeit der Gleichung (88) hängt von der genauen Bedeutung der Grössen auf der linken Seite ab. Im allgemeinen steht  $f(r, v, t)$  für eine grobkörnige Verteilungsfunktion, die über endliche Volumelemente  $dr dv$  und Zeitelemente  $dt$  verschmiert ist oder  $f(r, v, t)$  repräsentiert eine definitionsgemäss kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsdichte.

$\mathcal{F}$  bedeutet dann eine selbstkonsistente Durchschnittskraft und ein Stossglied sollte auf der rechten Seite stehen. Aber in der Salpeter'schen Arbeit ist  $f(r, v, t)$  eine feinkörnige Verteilungsfunktion, d.h. eine Überlagerung von  $\delta$ -Funktionen und  $\mathcal{F}$  ist die Kraft mit der die feinkörnige Verteilung auf ein am Punkt  $(r, v)$  befindliches Teilchen wirkt. Für die so definierten mikroskopischen Feldgrössen sollte Gleichung (88) exakt gültig sein<sup>+</sup>). Das ist physikalisch leicht einzusehen. Gleichung (88) besagt ja, dass die sechsdimensionale Teilchendichte für einen mit einem strömenden Teilchen mitbewegten Beobachter konstant ist. In einer feinkörnigen Beschreibung ist das aber notwendigerweise der Fall da die Dichte nur zwei Werte hat: Null im Vakuum und Unendlich an der Stelle eines mathematischen Punktteilchens. Der mitbewegte Beobachter sieht also definitionsgemäss immer die gleiche Dichte, wenn man in der üblichen Weise annimmt, dass ein Beobachter im Vakuum sich wie ein dort befindliches Teilchen bewegen soll. Auf Grund dieser Überlegung ist die "feinkörnige Vlasov Gleichung" eine kinematische Identität wenn man die Kraft  $\mathcal{F}$  durch das Produkt Masse mal Beschleunigung ersetzt.

Nach dieser Exkursion in die philosophischen Grundlagen der kinetischen Theorie kehren wir zur Berechnung von  $|n_e(\omega)|^2$  zurück. Zu diesem Zweck führen wir den räumlichen Fourier Koeffizienten  $f_{q,v}(t)$  der Verteilungsfunktion  $f(r, v, t)$  ein, der zum allgemeinen Wellenvektor  $q$  gehört. Es ergibt sich, entsprechend Gleichung (5b)

$$f_{q,v}(t) = \sum_j^{(v, dv)} \exp[-i q \cdot r_j(t)], \quad (89)$$

wobei wir nur über jene Teilchen summieren deren Geschwindigkeit zwischen  $v$  und  $v + dv$  liegt.

Wenn man zur Grenze  $dv \rightarrow 0$  übergeht, dann hat die Summe auf der rechten Seite von Gleichung (89) ein Glied, wenn ein Teilchen der Geschwindigkeit  $v$  existiert und kein Glied wenn die Teilchengeschwindigkeit  $v$  im Plasma nicht vorkommt. Gleichung (89) stellt dann den räumlichen Fourier Koeffizienten einer feinkörnigen Verteilungsfunktion dar und ein Integral über die

<sup>+</sup>) Eine Ableitung der "feinkörnigen Vlasov Gleichung" ist scheinbar nicht in der Literatur vorhanden.

über die Geschwindigkeitsverteilung wird identisch mit einer Summe über alle Teilchen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{q\underline{v}}(t) d\underline{v} = \sum_{j=1}^N \exp[-i\underline{q} \cdot \underline{r}_j(t)] \quad (90)$$

Die Zahl der Glieder in der Summe (89) ist gleich der Zahl der Teilchen mit einer Geschwindigkeit zwischen  $\underline{v}$  und  $\underline{v} + d\underline{v}$ . Wenn nun die grobkörnige Geschwindigkeitsverteilung unabhängig vom Ort ist und wenn man physikalische Grössen berechnet, die von den mikroskopischen Details der Verteilungsfunktion nur wenig beeinflusst werden, dann ist die Zahl der Summenglieder die wichtigste Eigenschaft des Fourier Koeffizienten (89). Dieser Koeffizient lässt sich dann durch die Formel

$$f_{q\underline{v}}(t) = n(\underline{r}, t) F(\underline{v}) = \frac{F(\underline{v})}{V} \sum_{\underline{q}} n_{\underline{q}}(t) \exp(i\underline{q} \cdot \underline{r}) \quad (91)$$

annähern, wobei  $F(\underline{v})$  die auf eins normierte grobkörnige Geschwindigkeitsverteilung und  $n_{\underline{q}}(t)$  der durch Gleichung (5) bestimmte Fourier Koeffizient der Teilchendichte ist. Die Schreibweise deutet an, dass wir nur solche Systeme behandeln werden, bei denen  $F(\underline{v})$  nicht von der Zeit abhängt. Mit dieser Bedingung sind nur solche Systeme verträglich bei denen die relative Veränderung  $\Delta F/F$  der Geschwindigkeitsverteilung in der Zeit  $(1/\Delta\omega)$  klein gegen eins ist, wenn  $\Delta\omega$  das spektrale Auflösungsvermögen ist, das man erzielen möchte. Für ein Studium der Ionenlinie ergibt sich daraus, dass sich  $F$  in einer Zeit von  $10^{-10}$  sec relativ wenig ändern soll, wenn man im Streuspektrum ein Wellenlängenintervall  $\Delta\lambda \approx 10^{-9}$  cm auflösen möchte.

Unabhängig von der feinkörnigen oder grobkörnigen Natur der Fourier Koeffizienten  $f_{q\underline{v}}(t)$  kann man die Verteilungsfunktion für Ionen und Elektronen als eine Fourier Serie der Form

$$f_s(\underline{r}, \underline{v}, t) = \frac{1}{V} \sum_{\underline{q}} f_{sq\underline{v}}(t) \exp(i\underline{q} \cdot \underline{r}) \quad (92)$$

darstellen. In analoger Weise ergibt sich für die drei Glieder der Vlasov Gleichung

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} = \frac{1}{V} \sum_{\underline{q}} \frac{\partial f_{sq\underline{v}}(t)}{\partial t} \exp(i\underline{q} \cdot \underline{r}) \quad (93)$$

und

$$\underline{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \underline{r}} = \frac{i\underline{v}}{V} \cdot \sum_{\underline{q}} \underline{q} f_{sq\underline{v}}(t) \exp(i\underline{q} \cdot \underline{r}) \quad (94)$$

Für das dritte Glied setzen wir erst fest, dass wir nur die elektrostatische Kraft  $e_s \underline{E}(\underline{r}, t)$  berücksichtigen. Dabei ist  $\underline{E}(\underline{r}, t)$  das exakte Mikrofeld an der Stelle  $\underline{r}$ , das durch alle Ladungen des Plasmas erzeugt wird und  $e_s$  ist die Ladung des Teilchens an der Stelle  $\underline{r}$ . Ausserdem stellen wir  $\underline{E}(\underline{r}, t)$  als Fourier Serie dar:

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = \frac{1}{V} \sum_{\underline{q}} \underline{E}_{\underline{q}}(t) \exp(i \underline{q} \cdot \underline{r}) \quad (95)$$

Für den Ausdruck  $\partial \underline{b}_s / \partial \underline{v}$  benützen wir die Näherung (91) in der  $F(\underline{v})$  die einzige von der Geschwindigkeit abhängige Grösse ist. Das dritte Glied der Vlasov Gleichung ergibt sich nun als

$$\frac{\underline{F}_s}{m_s} \cdot \frac{\partial \underline{b}_s}{\partial \underline{v}} = \frac{e_s}{m_s V^2} \sum_{\underline{q}'} \left[ \underline{E}_{\underline{q}'} \exp(i \underline{q}' \cdot \underline{r}) \sum_{\underline{q}''} n_{s \underline{q}''} \exp(i \underline{q}'' \cdot \underline{r}) \right] \cdot \frac{\partial F_s(\underline{v})}{\partial \underline{v}} \quad (96)$$

Wir fassen nun die Glieder der Doppelsumme in Gruppen zusammen für die

$$\underline{q}' + \underline{q}'' = \underline{q}, \quad \underline{q}'' = \underline{q} - \underline{q}' \quad (97)$$

gilt und schreiben

$$\frac{\underline{F}_s}{m_s} \cdot \frac{\partial \underline{b}_s}{\partial \underline{v}} = \frac{e_s}{m_s V^2} \sum_{\underline{q}} \sum_{\underline{q}'} \underline{E}_{\underline{q}'} n_{s(\underline{q}-\underline{q}')} \exp(i \underline{q} \cdot \underline{r}) \cdot \frac{\partial F_s(\underline{v})}{\partial \underline{v}} = \frac{1}{m_s V^2} \sum_{\underline{q}} \underline{F}_{s \underline{q}} \exp(i \underline{q} \cdot \underline{r}) \cdot \frac{\partial F_s(\underline{v})}{\partial \underline{v}} \quad (98)$$

mit

$$\underline{F}_{s \underline{q}} = e_s \sum_{\underline{q}'} \underline{E}_{\underline{q}'} n_{s(\underline{q}-\underline{q}')} \quad (99)$$

Der Gebrauch der Näherung (91) in einem Ausdruck der den Effekt von lokalen Beschleunigungen auf die Verteilungsfunktion beschreibt dürfte einer Vernachlässigung von Zweierstössen mit kleinem Stossparameter entsprechen, da die Beschreibung von Zweierstössen eine genaue Zuordnung von Teilchenorten und Geschwindigkeiten erfordert. Eine ähnliche Wirkung hat wohl auch die "random phase" Approximation, die nun auch noch eingeführt wird,

Zum besseren Verständnis dieser Näherung halten wir zunächst fest, dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} n_0 = N \gg n_{\underline{q}} \approx \sqrt{N} \quad (100)$$



Die Grössenordnung von  $n_{\underline{1}}$  folgt aus Gleichung (5b) derzufolge  $n_{\underline{1}}$  eine Summe von  $N$  positiven und negativen Gliedern ist, deren Betrag willkürlich über das Intervall zwischen 0 und 1  $\infty$  verteilt ist. Diese Feststellung bezieht sich natürlich nicht auf die komplexe Grösse  $n_{\underline{1}}$  sondern auf ihren reellen und imaginären Teil. Die Wahrscheinlichkeit, dass der reelle Teil von  $n_{\underline{1}}$  den Wert  $\xi_{\underline{1}}$  und der imaginäre Teil den Wert  $\eta_{\underline{1}}$  hat ist <sup>29)</sup>

$$W(\xi_{\underline{1}}, \eta_{\underline{1}}) = (2\pi N)^{-1} \exp \left[ -(\xi_{\underline{1}}^2 + \eta_{\underline{1}}^2) / 2N \right], \quad (101)$$

und der Mittelwert des Amplitudenquadrates ist

$$\langle |n_{\underline{1}}|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_{\underline{1}} d\eta_{\underline{1}} (\xi_{\underline{1}}^2 + \eta_{\underline{1}}^2) W(\xi_{\underline{1}}, \eta_{\underline{1}}) = 2N. \quad (102)$$

Die Gleichungen (101) und (102) erläutern die Bedeutung der Beziehung (100). Beim elektrischen Feld hat  $\underline{E}_0$  keine dominierende Stellung, denn es ist als Feldmittelwert in einem neutralen Plasma gleich Null. Die Summe (99) hat also nur ein dominierendes Glied und wenn man dieses Glied explizit anschreibt erhält man

$$\underline{F}_{s\underline{q}} = e_s \left[ \underline{E}_{\underline{q}} N + \sum_{\underline{q}' \neq \underline{q}} \underline{E}_{\underline{q}'} n_{s(\underline{q}-\underline{q}')} \right]. \quad (103)$$

Die "random phase" Approximation nimmt nun an, dass die Summe gegenüber dem Glied  $\underline{E}_{\underline{q}} N$  vernachlässigt werden kann. Diese Annahme wird im allgemeinen durch die Kleinheit und vor allem das wechselnde Vorzeichen der Summenglieder gerechtfertigt. Man darf jedoch nicht vergessen, dass die Zahl der Summenglieder unendlich ist und es ist daher keinesfalls klar ob die Vernachlässigung der Summe wirklich zulässig ist. Diese Vernachlässigung bedeutet ja eine Linearisierung der Vlasov Gleichung und eine Entkoppelung von Wellen mit verschiedenem Wellenvektor  $\underline{q}$ . Nicht lineare Effekte, z.B. die Thermalisierung der Energie von hochangeregten Plasmawellen, können daher mit Hilfe der linearisierten Vlasov Gleichung nicht beschrieben werden.

Wenn man aber trotzdem die "random phase" Approximation adoptiert, dann erhält man Gleichung (88) in der Form

$$\frac{1}{V} \sum_{\underline{q}} \exp(i\underline{q} \cdot \underline{r}) \left[ \frac{\partial f_{s\underline{q}}}{\partial t} + i\underline{v} \cdot \underline{q} f_{s\underline{q}} + \frac{e_s n_s}{m_s} \underline{E}_{\underline{q}} \cdot \frac{\partial F_s(\underline{v})}{\partial \underline{v}} \right] = 0, \quad s=i, e \quad (104)$$

Wegen der Eindeutigkeit der Fourier Serierdarstellung gilt Gleichung (104) nicht nur für die Summe über alle  $\underline{q}$  sondern für jedes  $\underline{q}$  einzeln.

Wir schreiben nun die Gleichung (81) explizit für Elektronen und multiplizieren mit der Elektronenladung  $-e$ . Dann erhält man eine Gleichung für die durch Elektronen der Geschwindigkeit  $\underline{v}$  erzeugte Ladungsdichte  $\sigma_{e\underline{v}}$  bzw. ihre Fourier Koeffizienten  $\sigma_{e\underline{q}\underline{v}}$ :

$$\frac{\partial \sigma_{e\underline{q}\underline{v}}}{\partial t} + i \underline{v} \cdot \underline{q} \sigma_{e\underline{q}\underline{v}} + \frac{e^2 n}{m_e} \underline{E}_{\underline{q}} \cdot \frac{\partial F(\underline{v})}{\partial \underline{v}} = 0. \quad (105)$$

Wir brauchen noch einen analytischen Ausdruck für  $\underline{E}$  und erhalten ihn aus Poisson's Gleichung

$$\nabla \cdot \underline{E} = 4\pi \sigma = 4\pi (\sigma_e + \sigma_i), \quad (106)$$

wobei  $\sigma$  die von allen Elektronen und Ionen erzeugte Ladungsdichte ist. Es sei wiederum

$$\sigma(\underline{r}, t) = \frac{1}{V} \sum_{\underline{q}} \sigma_{\underline{q}}(t) \exp(i \underline{q} \cdot \underline{r}), \quad (107)$$

dann ergibt sich aus (107), (106), (105) und (95)

$$\sum_{\underline{q}} i \underline{q} \cdot \underline{E}_{\underline{q}} = 4\pi \sum_{\underline{q}} \sigma_{\underline{q}}, \quad \underline{E}_{\underline{q}} = -4\pi i \sigma_{\underline{q}} \underline{q} / q^2, \quad (108)$$

und für  $\underline{q} = \underline{k}$  (siehe Gleichung (1))

$$\frac{\partial \sigma_{e\underline{k}\underline{v}}}{\partial t} + i \underline{k} \underline{v} \sigma_{e\underline{k}\underline{v}} = i \left( \frac{4\pi n e^2}{m_e k} \right) \sigma_{e\underline{k}} \frac{\partial F_{\underline{v}}(\underline{v})}{\partial \underline{v}} \quad (109)$$

wenn  $\underline{v}$  und  $\underline{E}$  die Komponenten von  $\underline{v}$  und  $\underline{E}$  parallel zu  $\underline{k}$  sind. Ausserdem benützen wir ein Koordinatensystem mit Z-Achse parallel zu  $\underline{k}$ .

Für die Berechnung des Streuspektrums brauchen wir die zeitliche Fourier Transformierte bzw. Laplace Transformierte von  $\sigma_{e\underline{k}\underline{v}}$ . Wir schreiben sie in der schon früher ausführlich diskutierten Form,

$$\sigma_{e\underline{k}\underline{v}}(\omega) = \int_0^{\infty} dt \sigma_{e\underline{k}\underline{v}}(t) \exp[-(i\omega + \gamma)t]. \quad (110)$$

Für die gesamte Ladungsdichte

Das ist aber erst der Beitrag der Elektronen mit  $v_{\pm}$  zwischen  $v$  und  $v + dv$  zur raum-zeitlichen Fourier Transformaten der Elektronendichte. Wir müssen über alle Geschwindigkeiten integrieren und erhalten dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} q_{ekv}(\omega) dv \equiv Q_{ek}(\omega) = \int_0^{\infty} dt \sigma_{ek}(t) \exp[-(i\omega + \gamma)t]. \quad (111)$$

Die Amplitude  $q_{ekv}(\omega)$  genügt einer partiellen Differentialgleichung, die man dadurch erhält, dass man die Laplace Transformaten der rechten und linken Seite von (109) einander gleich setzt. Zu diesem Zweck brauchen wir das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial \sigma_{ekv}}{\partial t} \exp[-(i\omega + \gamma)t] dt = -\sigma_{ekv}(0) + (i\omega + \gamma) q_{ekv}(\omega), \quad (112)$$

das sich durch partielle Integration auf die durch (110) und (112) gegebene Form bringen lässt. Man beachte, dass der Beitrag der oberen Grenze  $\sigma_{ekv}(\infty)$  wegen des Faktors  $\exp(-\gamma t)$  wegfällt. Dadurch reduziert sich unser Problem auf ein Anfangswertproblem. Einsetzen von (112) in (109) gibt

$$(113)$$

oder, nach Multiplikation mit  $i$ ,

$$q_{ekv}(\omega) = \frac{i\sigma_{ekv}(0) - (4\pi n e^2 / m_e k) Q_k(\omega) \partial F_e(v) / \partial v}{-\omega - kv + i\gamma} \quad (114)$$

mit

$$Q_k(\omega) = Q_{ek}(\omega) + Q_{ik}(\omega) \quad (115)$$

gleich der raum-zeitlichen Fourier Transformaten der gesamten Ladungsdichte. Auf die gleiche Weise erhält man für die Ladungsdichte der Ionen

$$q_{ikv}(\omega) = \frac{i\sigma_{ikv}(0) - (4\pi n e^2 / m_i k) Q_k(\omega) \partial F_i(v) / \partial v}{-\omega - kv + i\gamma} \quad (116)$$

und für die gesamte Ladungsdichte

$$q_{kv}(\omega) = q_{ekv}(\omega) + q_{ikv}(\omega) = \frac{i\sigma_{kv}(0) - (4\pi n e^2 / k) Q_k(\omega) [m_e^{-1} \partial F_e(v) / \partial v + m_i^{-1} \partial F_i(v) / \partial v]}{-\omega - kv + i\gamma} \quad (117)$$

Wenn man  $q_{k\nu}(\omega)$  endlich über alle Geschwindigkeiten integriert, dann erhält man eine Gleichung für  $Q_k(\omega)$  aus der man diese Grösse explizit ausrechnen kann.  $Q_k(\omega)$  kann man dann in Gleichung (114) einsetzen und das Resultat wieder über alle  $\nu$  integrieren. Dann bekommt man als Endresultat die für die Streuung benötigte Amplitude  $Q_{\epsilon k}(\omega) = -e n_{\epsilon}(\omega)$ .

Zur Integration von Gleichung (117) ist folgendes zu sagen. Die eckige Klammer enthält nur kontinuierliche Geschwindigkeitsfunktionen und bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Bevor wir uns aber auf eine spezielle Geschwindigkeitsverteilung festlegen, können wir das Integral nicht wirklich ausrechnen und führen daher die Funktionen

$$G_s(\omega) = - \left( \frac{4\pi n e^2}{m_s k} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_s(v)}{\partial v} \frac{dv}{-\omega - kv + iy}, \quad s = i, e \quad (118)$$

ein.

Bei der Grösse  $i G_{k\nu}(0)$  ist es möglich und vorteilhaft mit der feinkörnigen Verteilungsfunktion zu arbeiten und das Geschwindigkeitsintegral wird dann im Sinn der Gleichung (90) als Summe ausgerechnet. Man erhält dann durch Integration von (117)

$$Q_k(\omega) = i e \frac{\sum_j \left[ \frac{\exp(-i k z_j)}{-\omega - k v_{ij} + iy} - \frac{\exp(-i k z_j)}{-\omega - k v_{ej} + iy} \right]}{1 - G_e(\omega) - G_i(\omega)} \quad (119)$$

wobei  $z_j, z_j, v_{ij}, v_{ej}$  die Komponenten parallel zu  $\underline{k}$  von den Lagen und Geschwindigkeiten der Ionen und Elektronen zur Zeit  $t=0$  sind.

Gleichung (119) kann als die Grundgleichung der Theorie der longitudinalen Plasmawellen angesehen werden, da sich aus ihr unmittelbar die Formeln der Streutheorie, der Disperionstheorie und der Theorie der Driftinstabilitäten ableiten lassen.

##### 5) Die Theorie der Dichteschwankungen und der Lichtstreuung in einem Plasma.

Die Theorie der Dichteschwankungen berechnet die Amplitudenquadrate  $|Q_k(\omega)|^2$  und  $|Q_{s k}(\omega)|^2$ , die sich mit einer vorgegebenen, stationären Geschwindigkeitsverteilung im Gleichgewicht befinden. Die Amplitudenquadrate stellen einen Zeitmittelwert bzw. ein Zeitintegral über alle Mikrozustände dar, die das Plasma in dem Zeitintervall zwischen  $t=0$  und  $t=1/\delta$  durchläuft. Es ergibt sich nicht unerwartet, dass diese Zeitintegrale von den mikroskopischen Details des Anfangszustandes unabhängig sind, sofern der Anfangszustand realistisch, d.h. dem Durchschnittszustand ähnelnd, angenommen wird. Dieser Umstand sei besonders erwähnt, da die Problemstellung und die Annahmen über den Anfangszustand bei der Disperionstheorie ganz anders sind.



Zur Berechnung der Amplitudenquadrate  $|Q_{s\ell}(\omega)|^2$  setzt man (119) in (114) und (116) ein und integriert über alle Geschwindigkeiten. Man erhält dann mit dem bei  $Q_{\ell}(\omega)$  angewendeten Verfahren

$$Q_{e\ell}(\omega) = \frac{-ie}{1 - G_e(\omega) - G_i(\omega)} \left[ (1 - G_i(\omega)) \sum_j \frac{\exp(-ikz_j)}{-\omega - kv + iy} - G_e(\omega) \sum_j \frac{\exp(-ikz_j)}{-\omega - kv + iy} \right] \quad (120)$$

und

$$Q_{i\ell}(\omega) = \frac{ie}{1 - G_e(\omega) - G_i(\omega)} \left[ (1 - G_e(\omega)) \sum_j \frac{\exp(-ikz_j)}{-\omega - kv + iy} - G_i(\omega) \sum_j \frac{\exp(-ikz_j)}{-\omega - kv + iy} \right] \quad (121)$$

Die Amplitudenquadrate  $|Q_{s\ell}(\omega)|^2$  enthalten Doppelsummen der Form

$$\left| \sum_j \frac{\exp(-ikz_j)}{-\omega - kv_j + iy} \right|^2 = \sum_j \sum_{\ell} \frac{\exp[ik(z_\ell - z_j)]}{(-\omega - kv_j + iy)(-\omega - kv_\ell + iy)}, \quad (122)$$

und auch Doppelprodukte bei denen der Index  $\ell$  mit den Ionenorten und Geschwindigkeiten  $z_\ell$  und  $v_\ell$  assoziiert ist, während  $j$  die Elektronenorte und Geschwindigkeiten indiziert. In diesem Fall haben die Diagonalglieder mit  $\ell = j$  keine Sonderstellung und können genauso wie die nicht diagonalen Glieder der Summe (122) behandelt werden. Aber die Diagonalglieder der Doppelsumme (122) verhalten sich anders wie die nicht diagonalen Glieder und sollen zuerst summiert werden. Da sich der ortsabhängige Phasenfaktor bei diesen Gliedern weghebt kann man die Summe über  $j$  ohne weiteres durch ein Integral über die Geschwindigkeitsverteilung ersetzen und erhält

$$\sum_{j=1}^N \frac{\exp[ik(z_j - z_j)]}{(-\omega - kv)^2 + y^2} = N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_e(v) dv}{(\omega + kv)^2 + y^2}. \quad (123)$$

Da der Nenner des Integranden von (123) nur von der z-Komponente  $v$  abhängt, hat man es mit einem Integral über die eindimensionale Geschwindigkeitsverteilung  $F_e(v)$  zu tun, die man aus der dreidimensionalen Verteilung  $F_e(\underline{v})$  durch Integration über  $v_x$  und  $v_y$  erhält.

Die rigorose Ermittlung des Integrals (123) bei gegebener Geschwindigkeitsverteilung ist ziemlich langwierig. Aber es gibt einen einfachen Trick auf Grund dessen man das Resultat für beliebige, nicht divergierende Geschwindigkeitsverteilungen richtig erraten kann. Der Hauptbeitrag zum Integral kommt von der Resonanzstelle  $v = -\omega/k$ . In der Nähe der Resonanzstelle variiert die Grösse des Nenners sehr rasch, die des Zählers verhältnismässig langsam. Wir ziehen daher den Ausdruck  $F_e(-\omega/k)$  vor das Integral und erhalten

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_e(v) dv}{(\omega + kv)^2 + y^2} = F_e(-\omega/k) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{(\omega + kv)^2 + y^2} = \frac{\pi F_e(-\omega/k)}{y k}. \quad (124)$$

Die Diagonalsumme ist also, wie es sein muss, proportional der Beobachtungszeit  $1/\gamma$ , da ja  $|G_e(\omega)|^2$  die während der Zeit  $1/\gamma$  gestreute Strahlungsenergie bestimmt.

Die Doppelsumme über die nicht diagonalen Glieder von (122) verhält sich dagegen ganz anders. Sie ergibt sich als eine endliche Zahl, die nicht von  $\gamma$  abhängt und kann daher in der Grenze von unendlich kleinem  $\gamma$  gegenüber der Doppelsumme vernachlässigt werden. Um dies zu zeigen betrachten wir zunächst die Doppelsumme über den Faktor  $\exp[ik(z_i - z_j)]$  und denken uns den Nenner durch einen geeigneten Mittelwert ersetzt. Man hat dann eine Summe aus  $N(N-1) \approx N^2$  positiven und negativen Gliedern und es folgt aus den gleichen Argumenten wie bei der "random phase" Approximation, dass diese Summe einen Betrag von der Grössenordnung  $N$  hat, genauso wie die Diagonalsumme. Es ergibt sich also näherungsweise

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \frac{\exp[ik(z_i - z_j)]}{(-\omega - kv_j + i\gamma)(-\omega - kv_i - i\gamma)} \approx N \int_{-\sigma}^{\sigma} \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{F_e(v_j) F_e(v_i) dv_j dv_i}{(-\omega - kv_j + i\gamma)(-\omega - kv_i - i\gamma)} \quad (125)$$

Die einfachen Integrale über  $dv_j$  und  $dv_i$  haben eine lineare Resonanzstelle, die aus Gründen der Symmetrie integrabel ist. D.h. der Nenner des Integranden wechselt beim Durchgang durch die Resonanzstelle sein Vorzeichen während der Zähler unverändert bleibt und der Beitrag der Resonanzstelle zum Integral kürzt sich zu Null. Die einfachen Integrale sind daher unabhängig von  $\gamma$  und können gegen die zu  $1/\gamma$  proportionale Diagonalsumme (124) vernachlässigt werden. Man erhält dann

$$e^{-2} |Q_{ek}(\omega)|^2 = |n_k(\omega)|^2 = \frac{\pi N}{\gamma k} \frac{|1 - G_e(\omega)|^2 F_e(-\omega/k) + |G_e(\omega)|^2 F_e(-\omega/k)}{|1 - G_e(\omega) - G_{ik}(\omega)|^2} \quad (126)$$

$$e^{-2} |Q_{ik}(\omega)|^2 = \frac{\pi N}{\gamma k} \frac{|1 - G_e(\omega)|^2 F_e(-\omega/k) + |G_{ik}(\omega)|^2 F_e(-\omega/k)}{|1 - G_e(\omega) - G_{ik}(\omega)|^2} \quad (127)$$

$$e^{-2} |Q_e(\omega)|^2 = \frac{\pi N}{\gamma k} \frac{F_e(-\omega/k) + F_e(-\omega/k)}{|1 - G_e(\omega) - G_{ik}(\omega)|^2} \quad (128)$$

Um diese Formeln auszuwerten müssen wir  $F_{1e}$  und  $G_{1i}$  für spezielle Geschwindigkeitsverteilungen der Ionen und Elektronen ausrechnen. Der wichtigste Fall von allgemeinem Interesse ist die verschobene Maxwell-Verteilung, d.h. die Maxwell Verteilung mit Drift,

$$F_s(\underline{v}) = \left(\frac{m_s}{2\pi kT_s}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m_s}{2kT_s} (\underline{v} + \underline{w}_s)^2\right], \quad (129)$$

wobei  $\underline{w}_s$  die Driftgeschwindigkeit der Teilchensorte  $s$  ist. Damit ergibt sich

$$\frac{\partial F_s(\underline{v})}{\partial v} = -\frac{m_s(v+w_s)}{kT_s} F_s(\underline{v}), \quad (130)$$

und

$$G_s(\omega) = k d_s^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(v+w_s) F_s(v) dv}{-\omega - kv + iy}, \quad (131)$$

wobei  $F_s(v)$  wiederum die eindimensionale Geschwindigkeitsverteilung für die Z-Komponente  $v$  ist und  $w_s$  für die Z-Komponente von  $\underline{w}_s$  steht.

Wir führen nun die Doppler verschobene Frequenz

$$\omega_{sw} = \omega - kw_s \quad (132)$$

ein und bezeichnen Größen, die zu einer unverschobenen Maxwell Verteilung gehören mit einem oberen Index Null. Dann ergeben sich unmittelbar die Beziehungen

$$G_s(\omega) = k d_s^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(v+w_s) F_s^0(v+w_s) d(v+w_s)}{[-\omega_{sw} - k(v+w_s) + iy]} = G_{1s}^0(\omega_{sw}) \quad (133a)$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_s(v) dv}{(\omega + kv)^2 + y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_s^0(v+w_s) d(v+w_s)}{[\omega_{sw} + k(v+w_s)]^2 + y^2} = \frac{\pi}{y k} F_s^0(-\omega_{sw}/k). \quad (133b)$$

Zum Schluss führen wir noch die dimensionslosen Frequenzen (siehe Gl.(9))

$$x' = \omega_{ew} / \omega_{ce}, \quad y' = \omega_{iw} / \omega_{ii} \quad (134)$$

ein und erhalten so die Gleichungen (27) und (28).

Die analytischen Darstellungen (29), (30), (31), (34), (35) für  $G(x)$  kann man folgendermassen gewinnen:

Wir machen die Substitution

$$v + w = u \quad (135)$$

und erweitern den Integrand von Gleichung (133a) mit dem Faktor  $(-w - ku - iy)$ . Dann ergibt sich

$$G(x) = k d^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u F^{\circ}(u) (-w - ku - iy) du}{(-w - ku)^2 + y^2} \quad (136)$$

Der imaginäre Teil ist ein Integral der Form (124) und ist daher

$$\lim_{y \rightarrow 0} \text{Im}(G) = \pi^{1/2} d^2 x \exp(-x^2) \quad (137)$$

Der reelle Teil von  $G(x)$  kann am besten durch Reihenwicklung ausgewertet werden, wobei das als verschwindend klein angenommene  $y$  gleich Null gesetzt werden darf.<sup>†</sup> Es sei  $\langle |u| \rangle$  der mit  $F^{\circ}(u)$  gebildete Mittelwert von  $|u|$ , dann entwickelt man im Fall  $\omega > k \langle |u| \rangle$  den Integranden von (136) in der Form

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{-w - ku}{(-w - ku)^2 + y^2} = \frac{1}{-w - ku} = -\frac{1}{\omega} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \left(\frac{ku}{\omega}\right)^{\nu} \quad (138)$$

und erhält

$$\lim_{y \rightarrow 0} \text{Re}(G) = \frac{d^2}{2x^2} \left( 1 + \frac{3}{2x^2} + \frac{15}{4x^4} + \dots \right) \quad (139)$$

Für den Fall  $\omega < k \langle |u| \rangle$  macht man die Substitution

$$\xi = -ku - \omega, \quad u = -(\xi + \omega)/k, \quad du = -d\xi/k \quad (140)$$

und entwickelt

$$F^{\circ}(u) = F^{\circ}\left(-\frac{\xi + \omega}{k}\right) = F^{\circ}\left(-\frac{\xi}{k}\right) \exp(-x^2) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!} \left(\frac{m\omega}{k^2 k T}\right)^{\nu} \xi^{\nu} \quad (141)$$

Man erhält dann

$$\lim_{y \rightarrow 0} \text{Re}(G) = -d^2 [1 - 2x^2(1 - 2x^2/3 + 4x^4/15 - \dots)] = -d^2 [1 - f(x)] \quad (142)$$

<sup>†</sup> Das ist aus dem selben Grund wie bei den Integralen (125) erlaubt, weil der Integrand des reellen Teiles beim Durchgang durch die Resonanzstelle durch Null geht und dabei sein Vorzeichen ändert.



und kann  $f(x)$  mit dem in Gleichung (31) gegebenen Ausdruck identifizieren, da die Funktion (31) offensichtlich die gleiche Reihenentwicklung hat. Die Möglichkeit die Reihe (142) für  $f(x)$  mit der leicht überschaubaren Funktion (31) zu identifizieren zeigt unmittelbar, dass die in der Grenze  $\beta \rightarrow 0$  auftretende Divergenz des Integranden von  $R_\epsilon(x)$  integrierbar ist. Aber wenn der Ausdruck  $\nu F(\nu)$  im Zähler von (136) durch eine andere Funktion von  $\nu$  ersetzt wird, dann lässt sich die der Gleichung (142) entsprechende Reihenentwicklung nicht notwendigerweise mit einem übersichtlichen analytischen Ausdruck identifizieren und die Frage nach der Existenz des Integrals (136) muss dann durch andere Methoden geklärt werden.

6) Die Theorie der Dispersion und Driftinstabilität von longitudinalen Plasmawellen

Die Dispersionstheorie untersucht Lösungen der Grundgleichung (119), die die Form von exponentiell anwachsenden oder abklingenden, ebenen Wellen haben. Man macht also den Ansatz

$$G_{skv}(t) = G_{skv}(0) \exp[(i\omega_k + \gamma_k)t] \quad (143)$$

und nimmt an, dass die Frequenz  $\omega_k$  und Dämpfungskonstante  $\gamma_k$  für Ionen und Elektronen gleich und unabhängig von der Geschwindigkeit sind. Nur dann können ja  $G_{sk}(t)$  und  $G_{ek}(t)$  die gleiche, einfache Zeitabhängigkeit (143) haben. Es ist klar, dass die Unabhängigkeit der Parameter  $\omega_k$  und  $\gamma_k$  von der Geschwindigkeit nur unter recht speziellen Bedingungen verwirklicht sein kann und um diese Bedingungen zu verstehen wollen wir zunächst den Begriff von kinetischen und dynamischen Wellen einführen.

Das einfachste Beispiel für rein kinematische Wellen ist ein Teilchen das sich geradlinig mit der Geschwindigkeit  $v_j$  bewegt. Entsprechend den Ausführungen in Kapitel IV.3) verhält sich so ein Teilchen wie ein Wellenpaket mit Gruppengeschwindigkeit  $v_j$  und die Frequenz  $\omega_{kv_j}$  der Partialwelle mit Wellenvektor  $k$  ist  $k \cdot v_j$ . Man kann so einer Welle die Amplitude  $v_{kv_j}(t)$  zuordnen die mit der Frequenz  $\omega_{kv_j}$  oszilliert, aber das Teilchen selbst führt keine Schwingung um eine Gleichgewichtslage aus, die mit rücktreibenden Kräften verknüpft ist. Die Frequenz einer kinematischen Welle ist also nicht dynamisch fixiert und wird ausschliesslich durch die geradlinige Teilchengeschwindigkeit bestimmt. Sie genügt also nicht den Anforderungen der Dispersionstheorie.

Bei dynamischen Wellen ist der geradlinigen Bewegung eine Oszillation der Teilchen überlagert, die mit rücktreibenden Kräften verknüpft ist und die alle Teilchen mit der gleichen Frequenz ausführen. Die Frequenz ist dann durch die rücktreibenden Kräfte und die reduzierten Massen der schwingenden Teilchen bestimmt und diese dynamische Frequenz ist unabhängig von den Teilchengeschwindigkeiten.

Die in einem Plasma auftretenden longitudinalen Wellen sind im allgemeinen weder rein kinematisch noch dynamisch. Aber man kann qualitativ leicht verstehen, dass starke rücktreibende Kräfte elektrostatischer Natur am ehesten dann auftreten wenn die Wellenlänge grösser als die Debye-Länge ist, denn bei solchen Wellen werden die Debye-Wolken gegen ihr Zentrum verschoben, an das sie quasielastisch gebunden sind, während bei kurzen Wellen die Debye-Wolken nur leicht verformt werden, ohne ihren Ladungsschwerpunkt zu verschieben. Man erwartet daher, dass grosse Werte des Parameters  $\alpha_s$  eine Voraussetzung für das Auftreten von Wellen sind, deren dominierender Charakter dynamisch ist und die daher den Anforderungen der Dispersionstheorie genügen. Diese Erwartung wird durch die Theorie bestätigt.

Die Bedingungen für die Zulässigkeit des Ansatzes (143) kann man auch dadurch erkennen, dass man die Fourier Transformierte (111) für die von der Dispersionstheorie geforderte Zeitabhängigkeit der Funktion  $\bar{G}_{sk}(t)$  bestimmt. Man erhält dann

$$Q_{sk}(\omega) = \int_0^{\infty} dt \bar{G}_{sk}(0) \exp[-i(\omega_k - \omega)t - (\gamma - \gamma_k)t] = -\bar{G}_{sk}(0) / [i(\omega_k - \omega) - (\gamma - \gamma_k)], \quad (144)$$

und

$$|Q_{sk}(\omega)|^2 = |\bar{G}_{sk}(0)|^2 / [(\omega - \omega_k)^2 + (\gamma - \gamma_k)^2], \quad (145)$$

und sieht, dass der Lösungsansatz der Dispersionstheorie zu einem Lorentz Profil für  $|Q_{sk}(\omega)|^2$  führt. Das stimmt mit dem voraussetzungslosen Resultat (126) der Streutheorie nur dann überein, wenn der Imaginärteil von  $\bar{G}_s(\omega)$  sehr klein ist und in Abwesenheit einer Elektronendrift ist das gleichbedeutend mit der Bedingung  $\alpha_s \gg 1$ .

Nachdem nun die Voraussetzungen der Dispersionstheorie geklärt sind, können wir die Dispersionsgleichung für longitudinale Plasmawellen leicht ableiten. Da alle Teilchen in gleicher Phase schwingen müssen, können wir den Anfang der Zeitskala so wählen, dass  $\bar{G}_k(0)$  reell ist und schreiben die Grundgleichung (119) für die noch unbekannte Frequenz ( $\omega' = \omega_k$ ).

Es ist aber notwendig diese Gleichung etwas zu modifizieren um sie auch für exponentiell anwachsende Wellen gültig zu machen. Für solche Wellen divergieren die Integrale (110) etc. wenn man als obere Integrationsgrenze den Wert unendlich wählt und aus diesem Grund führen wir eine Grösse  $q_{skv}(\omega_k, \tau')$  ein, die die Laplace Transformierte einer zur Zeit  $\tau'$  abgeschnittenen Zeitfunktion darstellt:

$$q_{skv}(\omega_k, \tau') = \int_0^{\tau'} dt \bar{G}_{skv}(t) \exp[-(i\omega_k + \gamma)t], \quad (146)$$

Für den Lösungsansatz (143) gibt das

$$q_{svk}(\omega_k, \tau') = [\sigma_{skv}(0) / \gamma_k - \beta] \exp[(\gamma_k - \beta)\tau'] \quad (147)$$

Auf der rechten Seite von Gleichung (112) darf dann der Beitrag der oberen Grenze nicht weggelassen werden und man erhält

$$\int_0^{\tau'} \frac{\partial \sigma_{skv}(t)}{\partial t} \exp[-(i\omega_k + \beta)t] dt = \sigma_{skv}(\tau') \exp[-(i\omega_k + \beta)\tau'] - \sigma_{skv}(0) + (i\omega_k + \beta) q_{skv}(\omega_k, \tau') \quad (148)$$

Wir setzen nun die Gleichungen (147) und (148) in (109) ein und wählen  $\tau'$  so klein, dass

$$\gamma_k \tau' \ll 1 \quad (149)$$

gilt. Dann erhält man (113) in der Form

$$\sigma_{skv}(0) (\gamma_k - \beta) + (i\omega_k + \beta) \sigma_{skv}(0) + i k v \sigma_{skv}(0) = i \left( \frac{4\pi n e^2}{m_s k} \right) Q_k(\omega_k) \frac{\partial F_s(v)}{\partial v} \quad (150)$$

Die zwei Glieder mit  $\beta$  kürzen sich fort und man erhält die übliche Dispersionsgleichung

$$1 - C_e(\omega_k, \gamma_k) - G_s(\omega_k, \gamma_k) = 0, \quad (151)$$

wobei der Abschneidparameter  $\beta$  in den Funktionen  $G_s(\omega_k, \gamma_k)$  durch die Dämpfungskonstante  $\gamma_k$  der Plasmawelle ersetzt ist.

Die Bestimmung von  $\gamma_k$  aus Gleichung (151) ist im Prinzip schwierig und wird im allgemeinen mit Hilfe der Theorie komplexer Funktionen durchgeführt. Will man funktionentheoretische Argumente vermeiden, dann muss man  $\gamma_k$  aus der für den imaginären Teil von  $G_s(\omega_k, \gamma_k)$  gültigen Gleichung (33) bestimmen. Wenn man sich aber mit der Näherung (124) begnügt, dann ist  $G_s(\omega_k, \gamma_k)$  unabhängig von  $\gamma_k$  und man muss daher  $G_s(\omega_k, \gamma_k)$  mit einer Genauigkeit bestimmen, die über die Näherung (124) hinausgeht. Das ist bei einer Maxwell Verteilung sehr schwierig und soll nicht durchgeführt werden, doch sei es erwähnt, dass man die Rechnung leicht für eine abgeschnittene Maxwell Verteilung der Form

$$F(v) = C (1 - a^2 v^2), \quad |v| < 1/a, \quad (152) \\ = 0, \quad |v| > 1/a,$$

durchführen kann.

Für die Streutheorie war die Näherung (124) zulässig und praktisch exakt, da der Abschneidparameter gegen den vorgegebenen Wert Null geht. Gleichung (33) ist daher keine Bestimmungsgleichung für den vorgegebenen Parameter  $\gamma = 0$ , sondern ein Instabilitätskriterium. Im Gegensatz dazu dient der imaginäre Teil von (151) der Ermittlung der unbekanntenen Dämpfungskonstanten  $\gamma_k$ .

Um die bei der Berechnung von  $\gamma_k$  aus Gleichung (151) auftretenden Schwierigkeiten zu vermeiden kann man folgenden Trick benützen: Obwohl die Glieder mit  $\gamma$  aus Gleichung (150) fortfallen, kann man sie aus Gründen der Zweckmässigkeit darin stehen lassen. Genauer gesagt, setzt man die Gleichung (148) in Gleichung (109) ein, macht aber noch keinen Gebrauch von dem Ansatz (143). Damit ist die Theorie noch ganz allgemein und nicht nur für schwach gedämpfte Plasmawellen brauchbar. Der Parameter  $\gamma$  ist dann eine rein formale Hilfsgrösse und hat nichts mehr mit der Dauer eines Streuexperimentes zu tun, da ja die Zeit die Funktion eines Abschneidparameters übernimmt.

Wenn man den Beitrag der oberen Grenze zu den Formeln (113)-(119) hinzufügt und die Integration über Geschwindigkeiten mittels der Näherung (91) durchführt, dann erhält man die modifizierte Gleichung (119) in der Form

$$Q_k(\omega_k, \tau') [1 - G_e(\omega_k) - G_i(\omega_k)] = i [H_i(\omega_k) + H_e(\omega_k)], \quad (153)$$

mit

$$H_s(\omega_k) = \left\{ \sigma_{sk}(0) - \sigma_{sk}(\tau') \exp[-(i\omega_k + \gamma)\tau'] \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_s(v) dv}{-\omega_k - kv + i\gamma} \quad (154)$$

Wir führen nun den Lösungssatz (143) ein und verlangen, dass Gleichung (153) für alle der Bedingung (149) genügenden  $\tau'$  erfüllt ist. Das ergibt nach Linearisierung der Exponentiale zusätzlich zu (32)

$$[\sigma_{ik}(0) + \sigma_{ek}(0)] [1 - G_i(\omega_k) - G_e(\omega_k)] = i(\gamma - \gamma_k) [\sigma_{ik}(0) h_i(\omega_k) + \sigma_{ek}(0) h_e(\omega_k)] \quad (155)$$

mit

$$h_s(\omega_k) = h_s^r(\omega_k) + \tilde{h}_s(\omega_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_s(v) dv}{-\omega_k - kv + i\gamma} \quad (156)$$

Die Funktion  $h_s(\omega_k)$  kann genauso behandelt werden wie die Funktion  $G_s(\omega)$  im vorigen Abschnitt und man findet auf diese Weise die Reihenentwicklung

$$h_s^r(\omega_k) = \left( \frac{1}{X_{sk}} \omega_{ss} \right) \left( 1 + \frac{3}{2} X_{sk}^2 + \dots \right), \quad X_{sk} \gg 1 \quad (157)$$

$$= -2 X_{sk} / \omega_{ss}, \quad X_{sk} \ll 1$$



und

$$h_s^i(\omega_k) = -(\pi^{1/2} / \omega_{ss}) \exp(-X_{sk}^2), \quad (158)$$

mit

$$X_{ek} = \omega_k / \omega_{ee}, \quad X_{ik} \equiv Y_k = \omega_k / \omega_{ii}.$$

Wir schreiben nun Gleichung (155) getrennt für den reellen und imaginären Teil und erhalten

$$\left[ \sigma_{ek}^{(0)} + \sigma_{ik}^{(0)} \right] \left[ 1 - R_e(\omega_k) - R_i(\omega_k) \right] = -(\gamma_e - \gamma_i) \left[ \sigma_{ek}^{(0)} h_e^i(\omega_k) + \sigma_{ik}^{(0)} h_i^i(\omega_k) \right], \quad (159)$$

$$\left[ \sigma_{ek}^{(0)} + \sigma_{ik}^{(0)} \right] \left[ I_e(\omega_k) + I_i(\omega_k) \right] = (\gamma_e - \gamma_i) \left[ \sigma_{ek}^{(0)} h_e^r(\omega_k) + \sigma_{ik}^{(0)} h_i^r(\omega_k) \right] \quad (160)$$

Gleichung (159) ist identisch mit der Dispersionsbeziehung

$$1 - R_e(\omega_k) - R_i(\omega_k) = 0, \quad (161)$$

wenn die Bedingung

$$(\gamma_e - \gamma_i) h_s^i(\omega_k) \ll 1 \quad (162)$$

erfüllt ist. Diese Bedingung stellt ein quantitatives Kriterium für die Gültigkeit der Gleichung (159) dar. In der Grenze  $\gamma \rightarrow 0$  besagt Gleichung (162) im wesentlichen, dass die Dispersionsbeziehung (161) nur für sehr langsam abklingende oder anwachsende Wellen gilt.

Die Dämpfungskonstante  $\gamma_k'$  kann aus der Gleichung (160) bestimmt werden, doch muss man zuerst das Verhältnis  $\sigma_{ik}^{(0)} / \sigma_{ek}^{(0)}$  aus den Gleichungen (114) und (116) ermitteln damit die unbekanntenen Amplituden aus der Bestimmungsgleichung (160) herausfallen. Wegen der Voraussetzung (162) kann das erste Glied auf der rechten Seite von (114) und (116) weggelassen werden, und ebenso der dort nicht angeschriebene Beitrag der oberen Grenze  $\sigma_{sk0}(\tau')$ . Dann ergibt sich

$$\frac{\sigma_{ik}(0)}{\sigma_{ek}(0)} = \frac{R_i(\omega_k)}{R_e(\omega_k)} \quad (163)$$

und

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta - \delta' = \delta'' = \frac{[R_e(\omega_k) + R_i(\omega_k)] [I_i(\omega_k) + I_e(\omega_k)]}{[R_e(\omega_k) k_e^r(\omega_k) + R_i(\omega_k) k_i^r(\omega_k)]} \quad (164)$$

In den der Bedingung (162) genügenden Fällen wird daraus

$$\delta'' = -(\pi/2)^{1/2} \alpha_e^3 \omega_{pe} \exp(-\alpha_e^2/2) = \pi^{1/2} \alpha_e^2 X_k^2 \omega_{ee} \exp(-X_k^2), \quad X_k \gg 1, y_k \gg 1, y_k \gg X_k \quad (165)$$

und

$$\delta'' = -2\pi^{1/2} (\alpha_e^2/\alpha_i^2) y_k^4 \omega_{ii}/\eta = -\frac{\pi^{1/2}}{2} \frac{\alpha_e^4}{(1+\alpha_e^4)} \frac{m_e}{m_i} \omega_{ee}, \quad X_k \ll 1, y_k \gg 1 \quad (166)$$

Das ist bis auf einen Faktor 2 identisch mit dem Ergebnis der konventionellen Dispersionstheorie. Der Faktor 2 dürfte daher kommen, dass die Integration über die Geschwindigkeiten in der vorliegenden Ableitung etwas anders durchgeführt wird als in der konventionellen Theorie.

Die Formeln (165) und (166) gelten nur für den Fall  $y_k \gg X_k, I_i(\omega_k) \ll I_e(\omega_k)$  und das schliesst eine nennenswerte Drift der Elektronen relativ zu den Ionen aus.  $y_k$  und  $X_k$  haben in diesem Fall immer das gleiche Vorzeichen und  $\delta''$  enthält nur gerade Potenzen der Frequenz  $\omega_k$ .  $\delta''$  ist daher immer negativ unabhängig von der Fortpflanzungsrichtung der Plasmawellen.

Bei Vorhandensein einer Elektronendrift muss man  $X_k$  und  $y_k$  durch die in Gleichung (28) definierten Grössen  $X_k'$  und  $y_k'$  ersetzen.  $X_k'$  und  $y_k'$  können aber ohne weiteres verschiedene Vorzeichen haben und die Bedingung  $y_k' \gg X_k'$  muss keinesfalls erfüllt sein. Für jedes durch  $\alpha_e$  und  $\alpha_i$  charakterisierte Plasma gibt es dann eine kritische Driftgeschwindigkeit  $v_{kr}$  bei der die Summe  $[I_e(X_k') + I_i(y_k')]$  und damit auch  $\delta''$  Null wird. Weiteres Ansteigen der Driftgeschwindigkeit führt dann zu positiven Werten des Parameters  $\delta''$ , der nun als Anwachsrate gedeutet werden muss.  $\delta''$  ist dann aber nicht mehr symmetrisch in  $\omega_k$ , d.h.  $\delta''(\omega_k) \neq \delta''(-\omega_k)$  und wenn  $\delta''(\omega_k) > 0$  dann wird  $\delta''(-\omega_k) < 0$ . Eine numerische Auswertung der Gleichung (164) soll hier nicht durchgeführt werden, doch ein Vergleich der Resultate der Dispersionstheorie und Streutheorie ist notwendig und aufschlussreich. Er wird im folgenden Kapitel unternommen werden.

## 7) Kritik der Streutheorie

Die Streutheorie berechnet die mit einer vorgegebenen, konstanten Geschwindigkeitsverteilung verträgliche, stationäre Anregung von Plasmawellen, wie sie sich lange Zeit nach der Herstellung der Geschwindigkeitsverteilung einstellt. Die Rechnung führt zu dem merkwürdigen Ergebnis, dass die Anregung bei jenen Wellen unendlich ist bei denen die Summe  $\int_{\mathcal{L}}(v_k') + \int_{\mathcal{L}}(y_k)$  Null ist. Infolge Gleichung (164) heisst das aber, dass gerade jene Wellen instabil sind, deren anfängliche Wachstumsrate Null ist. Ausserdem ergibt sich, dass die Wellen mit Anstiegsrate Null die einzigen sind, die eine unendliche Amplitude erreichen, während Wellen, die auf Grund der Dispersionstheorie eine grosse Anstiegsrate haben, endlich bleiben. Das letztere Ergebnis hängt offensichtlich mit der Vernachlässigung des Beitrages der oberen Grenze in Gleichung (112) zusammen, die bei exponentiell anwachsenden Wellen nicht zulässig ist. Die Streutheorie in der bisherigen Form ist also nur dann brauchbar wenn die kritische Geschwindigkeit nicht überschritten wird. Es bleibt aber trotzdem erstaunlich, dass Wellen mit der Anstiegsrate Null unendliche Amplituden erreichen. Sicherlich ist das nur nach einer sehr langen Zeit möglich und man hat den Eindruck, dass die Streutheorie in ihrer bisherigen Form ein ziemlich unrealistisches Bild von der Wellenanregung ermittelt.

Eine bessere Beschreibung der Verhältnisse könnte man dadurch erzielen, dass man von einer Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung ausgehend untersucht, wie sich die mittleren Amplitudenquadrate der Wellen nach Einschalten einer Elektronendrift zeitlich verändern. Dabei könnte man entweder eine durch äussere Energiezufuhr konstant gehaltene Elektronendrift in Betracht ziehen oder eine Drift, die wegen Energieabgabe an die Wellen langsam abklingt. In dem letzteren Modell führt auch eine "quasi-lineare" Theorie nur zu endlichen Amplituden der instabilen Wellen. Aber auch die Rückwirkung der Wellenbewegung auf die Geschwindigkeitsverteilung der Teilchen ist für eine vollständige Beschreibung unzureichend. Es muss auch die nicht lineare Koppelung zwischen verschiedenen Plasmawellen und zwischen Plasmawellen und elektromagnetischer Strahlung berücksichtigt werden. Die Theorie dieser Wechselwirkungen ist noch keinesfalls abgeschlossen und könnte durch Streuexperimente an Plasmen mit Elektronendrift gefördert werden. Auch das Verständnis von stossfreien Heizmechanismen könnte durch geeignete Streuexperimente in Verbindung mit der nicht linearen Theorie der Plasmaschwingungen, gefördert werden. Im Rahmen der konventionellen Streutheorie lassen sich Experimente nicht vollständig deuten, doch kann diese Schwierigkeit gemildert werden wenn man das Streuexperiment so durchführt, dass nicht über alle Winkel zwischen  $\underline{k}$  und  $\underline{w}$  gemittelt wird. Das Streuspektrum wird dann asymmetrisch ( $I(\omega) \neq I(-\omega)$ ) und für die schwächere Seite des Spektrums sollte die konventionelle Streutheorie recht gut zuständig sein.

Anhang I

Die Fourier Seriendarstellung der  $\delta$ -Funktion

Es soll bewiesen werden, dass die Funktion

$$\delta(x-x_j) = \frac{1}{L} \sum_q \exp[iq(x-x_j)] \quad (A1)$$

$$q = \frac{2\pi h}{L}, \quad h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm \infty \quad (A2)$$

die für die  $\delta$ -Funktion charakteristische Eigenschaft

$$\int_{x_j+\epsilon_1}^{x_j+\epsilon_2} \delta(x-x_j) dx = \begin{cases} 1, & \epsilon_1, \epsilon_2 < 0, \\ 0, & \epsilon_1, \epsilon_2 > 0, \end{cases} \quad (A3)$$

besitzt. Einsetzen von (A1) in (A3) ergibt

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{x_j+\epsilon_1}^{x_j+\epsilon_2} \delta(x-x_j) dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_q \frac{[\exp(iq\epsilon_2) - \exp(iq\epsilon_1)]}{iq} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\exp(iq\epsilon_2) - \exp(iq\epsilon_1)]}{q} dq \quad (A4)$$

wobei die Summe mittels der Randbedingung (A2) in ein Integral verwandelt wurde. Ersetzt man  $\exp(iq\epsilon)$  durch  $\cos q\epsilon + i \sin q\epsilon$  dann trägt  $\cos q\epsilon$  aus Symmetriegründen nicht zum Integral (A4) bei und (A4) wird identisch mit (A3) wegen der Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \begin{cases} \pi, & a > 0, \\ -\pi, & a < 0, \end{cases} \quad (A5)$$

Für die dreidimensionale  $\delta$ -Funktion ergibt sich

$$\delta(\underline{r}-\underline{r}_j) = \delta(x-x_j) \delta(y-y_j) \delta(z-z_j) = \frac{1}{L^3} \sum_{\underline{q}} \exp[i\underline{q} \cdot (\underline{r}-\underline{r}_j)] \quad (A6)$$

Anhang II

Beispiele für Streuspektren von Plasmen mit einer Elektronendrift relativ zu den Ionen.

Es werden Streuspektren von Plasmen dargestellt, bei denen die Driftgeschwindigkeit  $\underline{w}$  kleiner ist als die für die Anregung von Driftinstabilitäten notwendige kritische Geschwindigkeit  $\underline{w}_{kr}$ . Für solche Plasmen ist die im Kapitel IV dargestellte lineare Streutheorie eine gute Näherung, doch muss man erwarten, dass die bei Annäherung an  $\underline{w}_{kr}$  rasch anwachsenden Seitenmaxima in einer nicht linearen Theorie weniger stark ausgeprägt wären.

Jedes Spektrum ist durch die Parameter  $\alpha = \alpha_e$ ,  $\epsilon = T_e/T_i$  und  $\underline{w}$  charakterisiert, wobei  $|\underline{w}|$  als ein Vielfaches der thermischen Elektronengeschwindigkeit  $(3/2)^{1/2} v_{ee}$  gemessen ist. Jedes Spektrum besteht aus 11 Kurven, die den Winkeln  $\phi = 0, \pi/10, 2\pi/10, \dots, \pi$  zwischen  $\underline{w}$  und  $\underline{k}$ , bzw. den Geschwindigkeitskomponenten  $w_z = w = |\underline{w}| \cos \phi$  entsprechen. Die Kurven mit  $\phi = 0$  und  $\phi = \pi$  haben die stärksten Seitenmaxima und nur die Kurve mit  $\phi = \pi/2$  ist symmetrisch und hat eine horizontale Tangente an der Stelle  $y = 0$ . Die übrigen Kurven können dadurch identifiziert werden, dass die Seitenmaxima mit steigendem Winkel  $\phi$  monoton abfallen oder ansteigen. Wenn man also an der Stelle eines Seitenmaximums von der obersten zur untersten Kurve geht, dann durchläuft man die Winkel in der Reihenfolge  $0, \pi/10, \dots, \pi$  oder umgekehrt, je nach dem auf welcher Seite des Spektrums man sich befindet. An Stellen, an denen die 11 Kurven unauflösbar nahe beisammenliegen sind nur einige dieser Kurven eingezeichnet.

Die Frequenzverschiebung  $\omega$  wird durch die dimensionslose Grösse  $y = \omega/\omega_{ii}$  gemessen. Die Spektren erstrecken sich über den Bereich  $|y| \leq 3.5$  und stellen daher die Ionenlinie dar. Da die maximale Intensität der Spektren sehr stark variiert, sind die einzelnen Spektren mit verschiedenem Masstab für die Intensität gezeichnet. Aus diesem Grund ist der numerische Wert  $I_m$  der maximalen Intensität in jedem Spektrum angegeben. Dabei ist die Intensität so normalisiert, dass

$$I(\omega, k) = \frac{|1 - G_i(y)|^2 \exp(-x'^2) + |G_e(x')|^2 \eta \exp(-y^2)}{|1 - G_e(x') - G_i(y)|^2}, \quad (A7)$$

wobei  $x'$  durch Gleichung (28) gegeben ist.

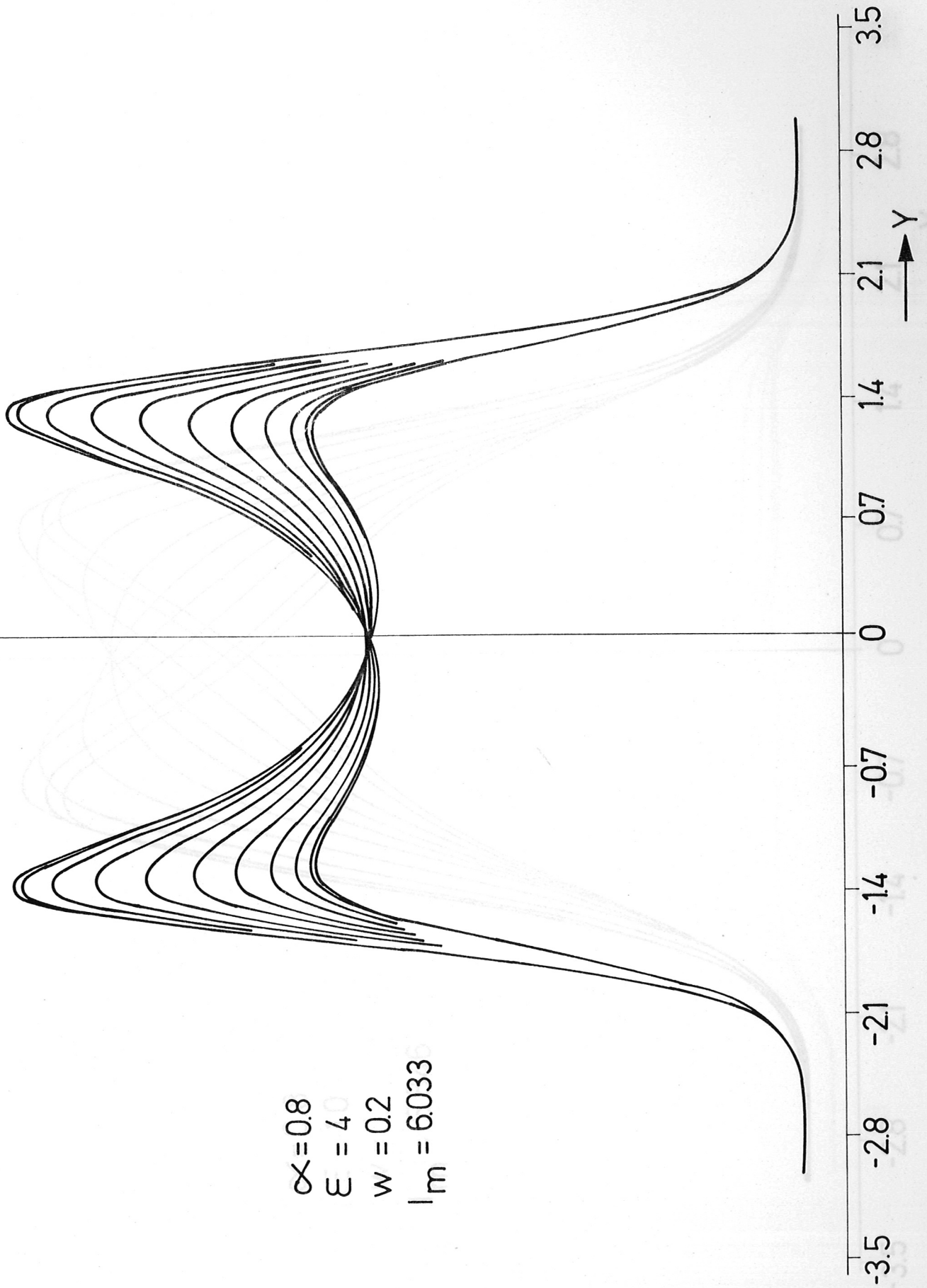


Literatur

- 1) E. Kronast, H. Röhr, E. Glock, H. Zwicker, E. Fünfer  
Phys. Rev. Let. 16, 1082 (1966)
- 2) S.A. Ramsden und W.E.R. Davies, Phys. Rev. Let. 16, 303 (1966)
- 3) H.J. Kunze, Z.f.Naturf. 20a, 801 (1965)
- 4) H.J. Kunze, E. Fünfer, B. Kronast und W.H. Kegel, Phys. Letters 11, 42 (1964)
- 5) A.W. de Silva, D.E. Evans und M.J. Forrest, Nature 203, 1321 (1964)
- 6) U. Ascoli-Bartoli, J. Katzenstein, Lovisetto, Nature 204, 672 (1964)
- 7) U. Ascoli-Bartoli, J. Katzenstein, L. Lovisetto, Nature 207, 63 (1965)
- 8) K.L. Bowles, Phys. Rev. Let. 1, 454 (1958)
- 9) T.E. Vanzandt und K.L. Bowles, J. Geophys. Res. 65, 2627 (1960)
- 10) K.L. Bowles, G.R. Ochs, J.L. Green, J. Res. Nat'l Bur. Stand. D66, 395 (1962)
- 11) K.L. Bowles, Science 134, 389 (1963)
- 12) V.C. Pineo, L.G. Kraft, H.W. Briscoe, J. Geophys. Res. 65, 1620 (1960),  
65, 2629 (1960)
- 13) J.E. Drummond, Plasma Physics, McGraw-Hill Book Company, New York 1961,  
p. 15 ff.
- 14) E.E. Salpeter, Phys. Rev. 120, 1528 (1960)
- 15) P.W. Chan and R.A. Nodwell, Phys. Rev. Letters 16, 122 (1966)
- 16) E.E. Salpeter, J. Geophys. Res. 68, 1321 (1963)
- 17) D.R. Moorcroft, J. Geophys. Res. 68, 4870 (1963)
- 18) J. Renau, Z. f. Physik 177, 458 (1964)
- 19) W. Weizel, Lehrb. d. Theoretischen Physik, Springer-Berlin, 1955, 2. Aufl.  
ab Seite 480
- 20) I.N. Bronstein und K.A. Semendjajew, Taschenbuch d. Mathematik, Verlag Harri  
Deutsch, Frankfurt/M. 1965, 5. Aufl. S. 404, S. 474
- 21) A. Münster, Statistische Thermodynamik, Springer Berlin, 1956, ab Seite 243
- 22) J.A. Fejer, Can. J. Phys. 38, 1114 (1960), 39, 716 (1961)
- 23) E.E. Salpeter, Phys. Rev. 122, 1663 (1966), 120, 1528 (1960)
- 24) J.P. Dougherty und D.F. Farley, Proc. Roy. Soc. London A 259, 238 (1960)
- 25) M.N. Rosenbluth und N. Rostoker, Phys. Fluids 5, 776 (1962)
- 26) T. Hagfors, J. Geophys. Res. 66, 1699 (1961)
- 27) M.S. Grewal, Phys. Rev. 134, A 86 (1964)
- 28) W.H. Kegel, Report Institut für Plasmaphysik IPP 6/9 (1963)
- 29) O. Theimer und R. Gentry, Ann. Phys. (N.Y.) 17, 93 (1962)

$I(\omega, k)$

$\alpha = 0.8$   
 $\varepsilon = 4$   
 $w = 0.2$   
 $I_m = 6.033$



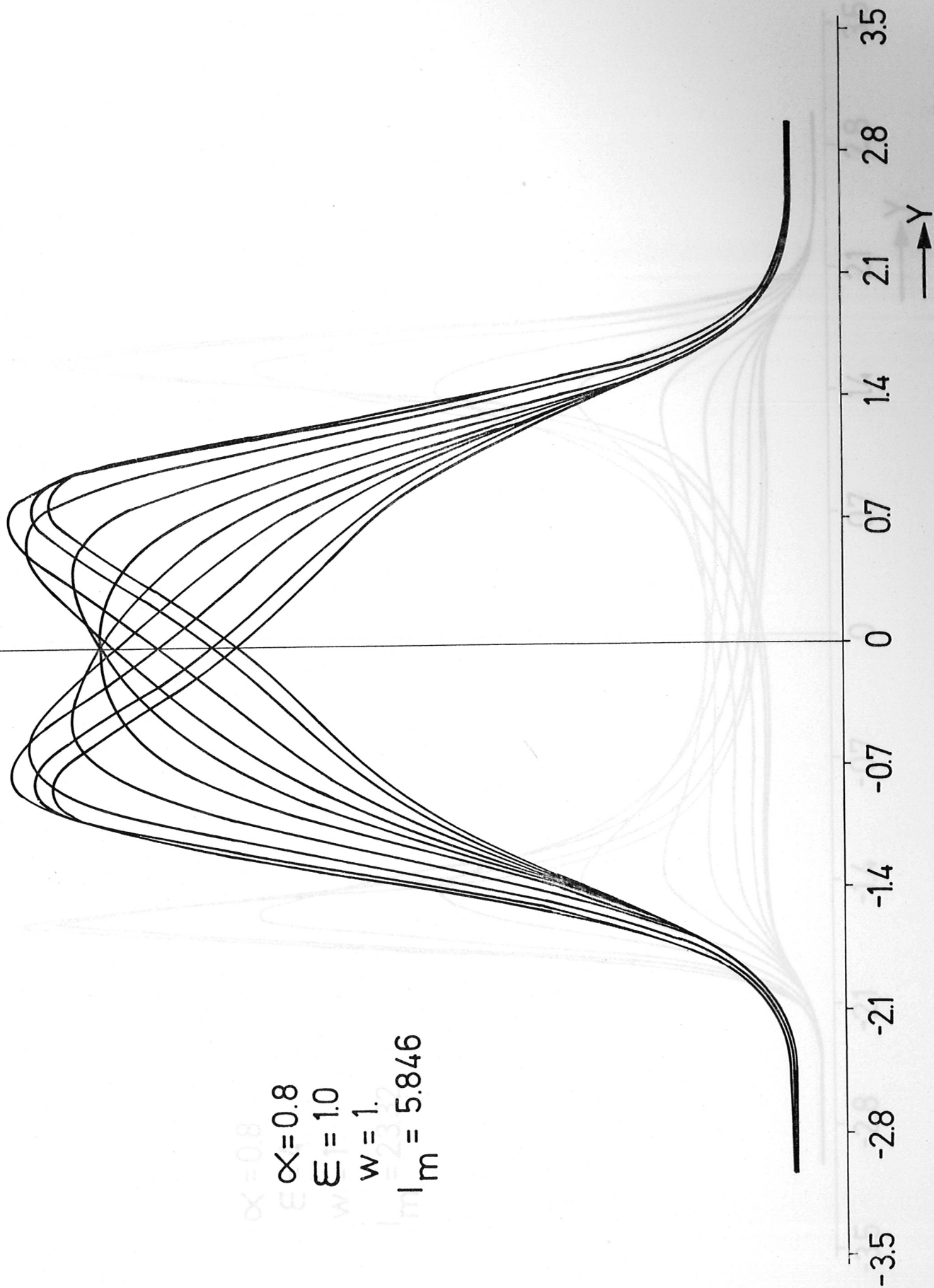
$I(\omega, k)$

$\alpha = 0.8$

$\epsilon = 1.0$

$w = 1.$

$I_m = 5.846$



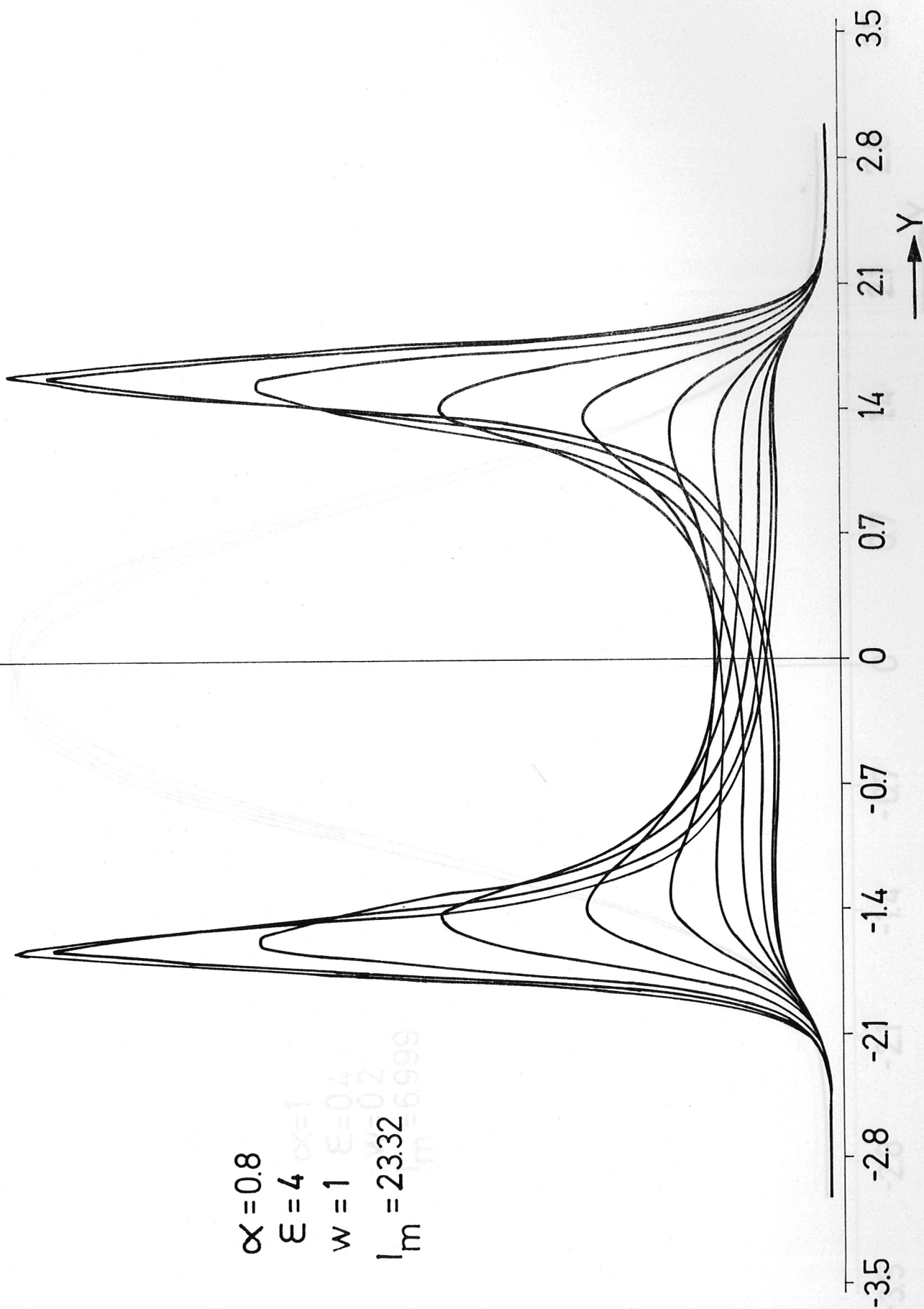
$I(\omega, k)$

$\alpha = 0.8$

$\varepsilon = 4$

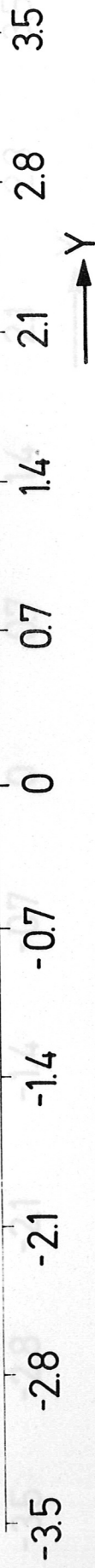
$w = 1$

$l_m = 23.32$



$I(\omega, k)$

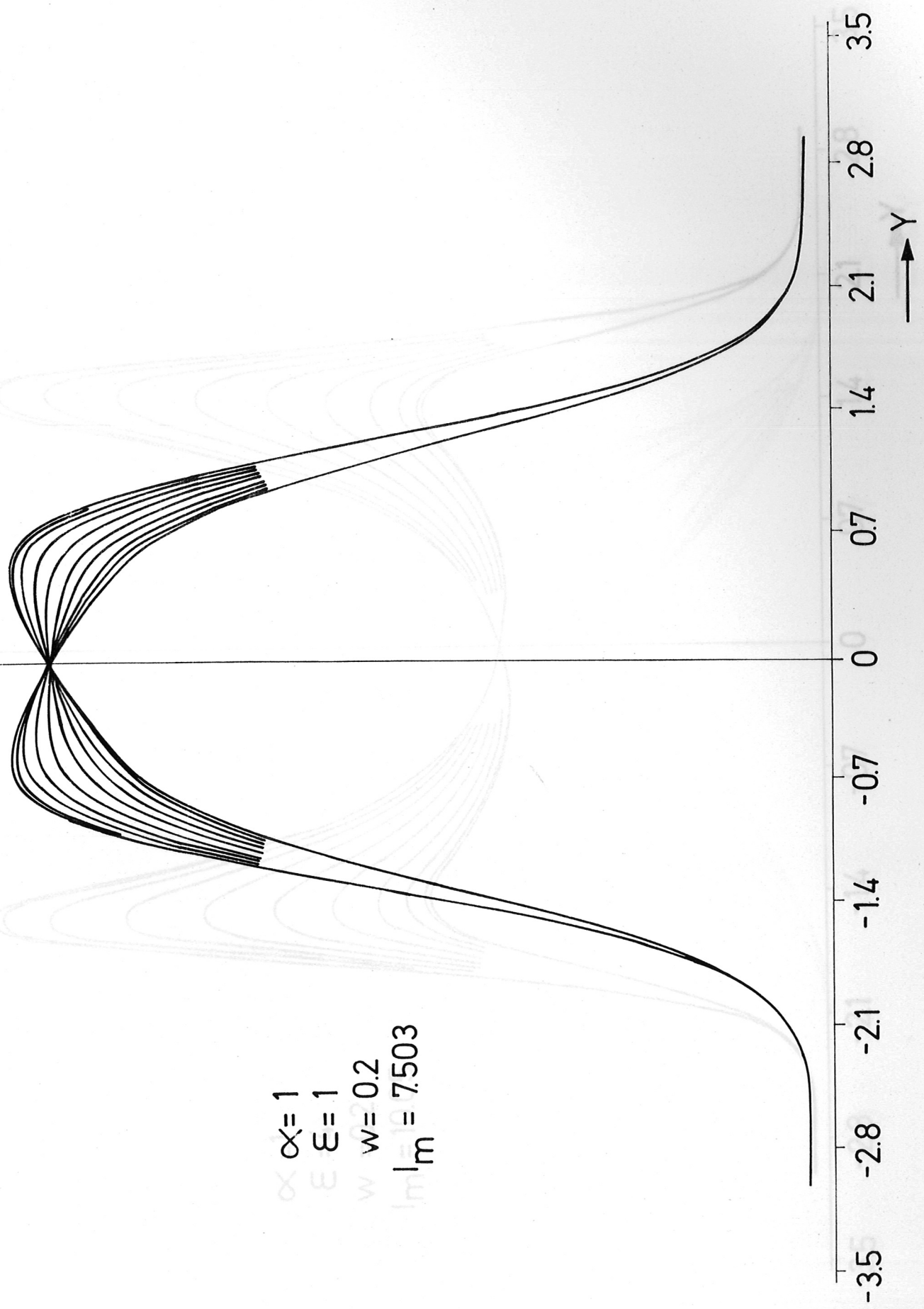
$\alpha=1$   
 $\xi=0.4$   
 $w=0.2$   
 $I_m=6.999$





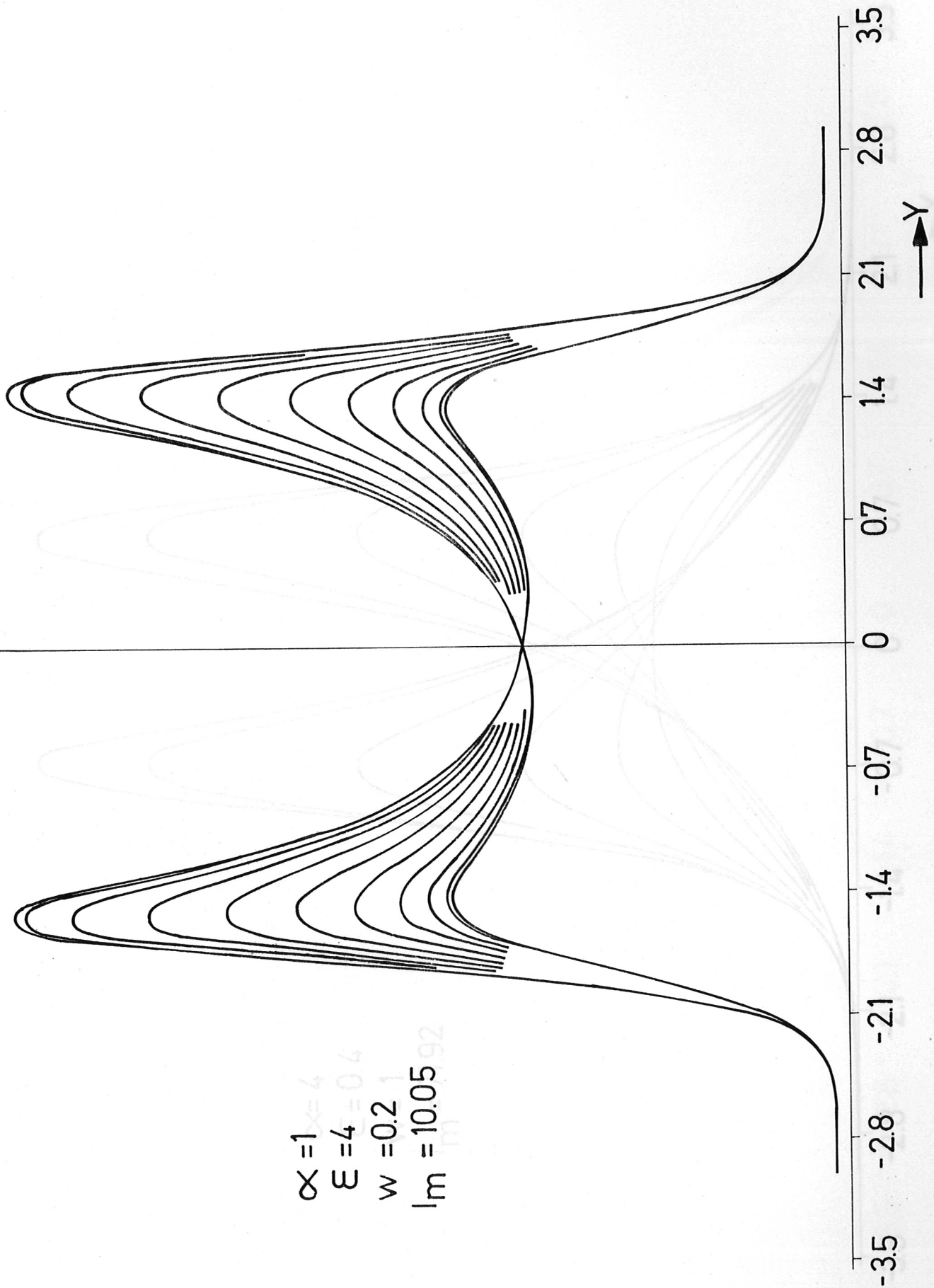
$I(\omega, k)$

$\alpha = 1$   
 $\epsilon = 1$   
 $w = 0.2$   
 $l_m = 7.503$



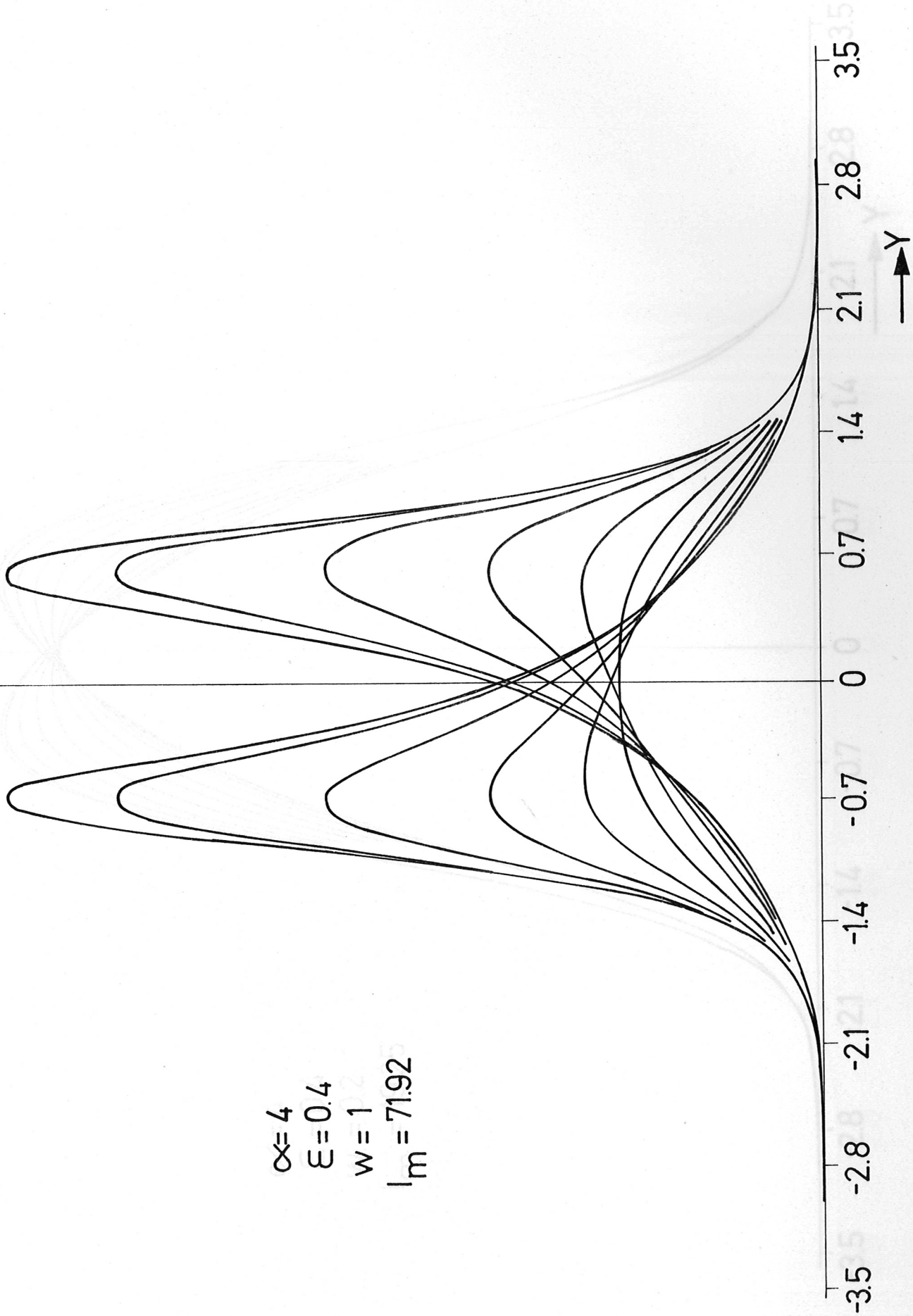
$I(\omega, k)$

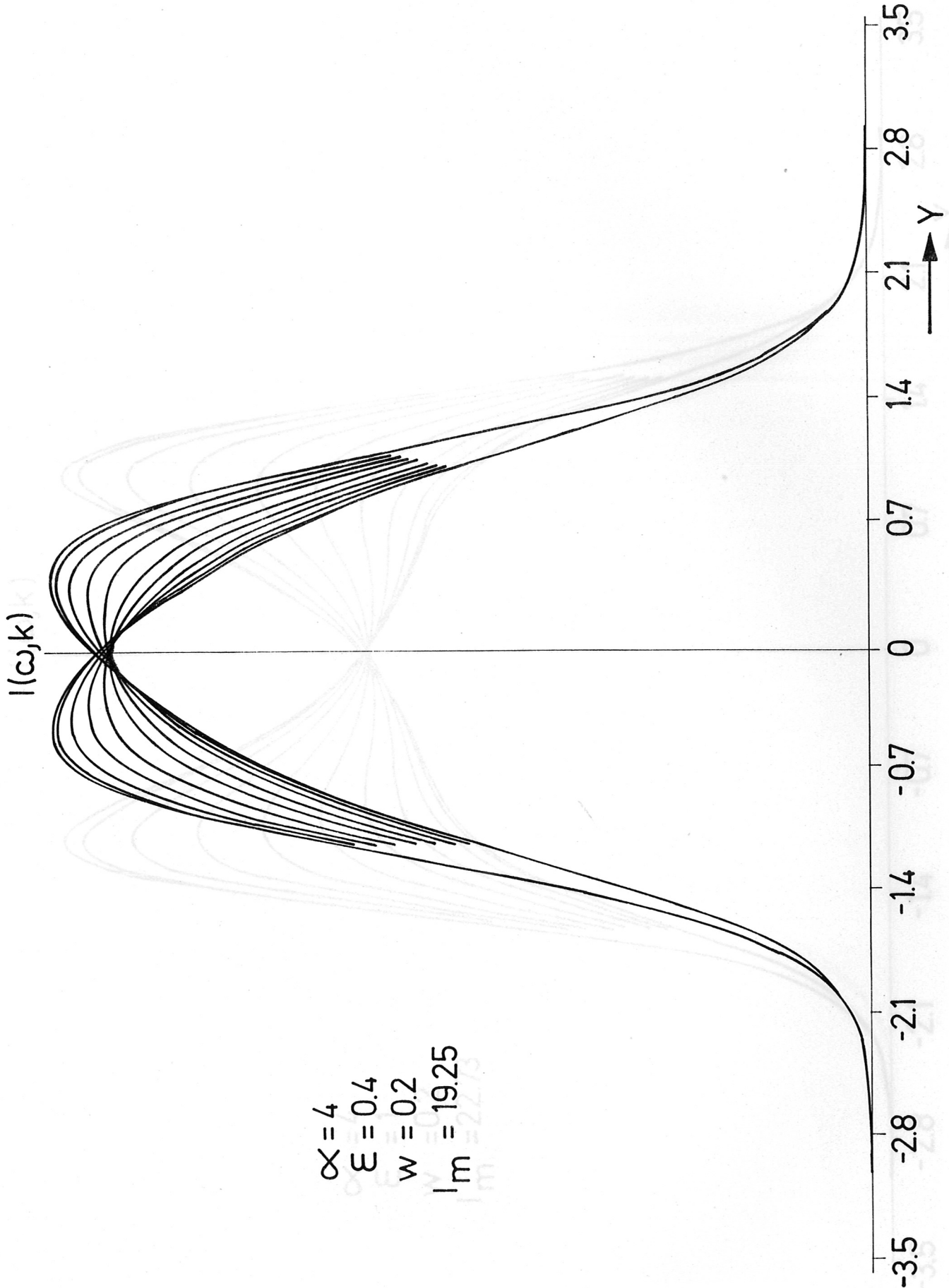
$\alpha = 1$   
 $\varepsilon = 4$   
 $w = 0.2$   
 $l_m = 10.05$



$I(\omega, k)$

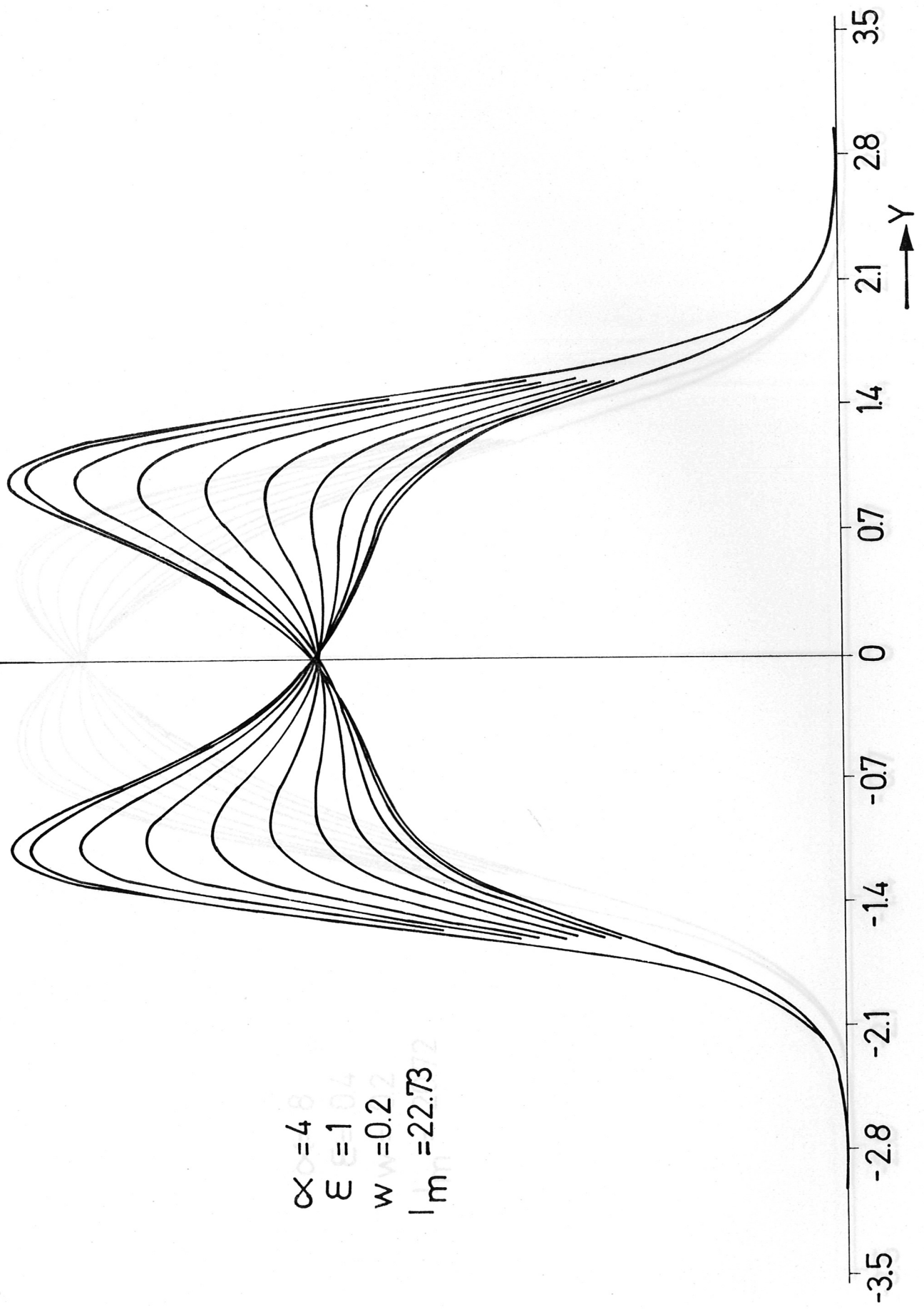
$\alpha = 4$   
 $\varepsilon = 0.4$   
 $w = 1$   
 $I_m = 71.92$





$\alpha = 4$   
 $\epsilon = 0.4$   
 $w = 0.2$   
 $l_m = 19.25$

$I(\omega, k)$

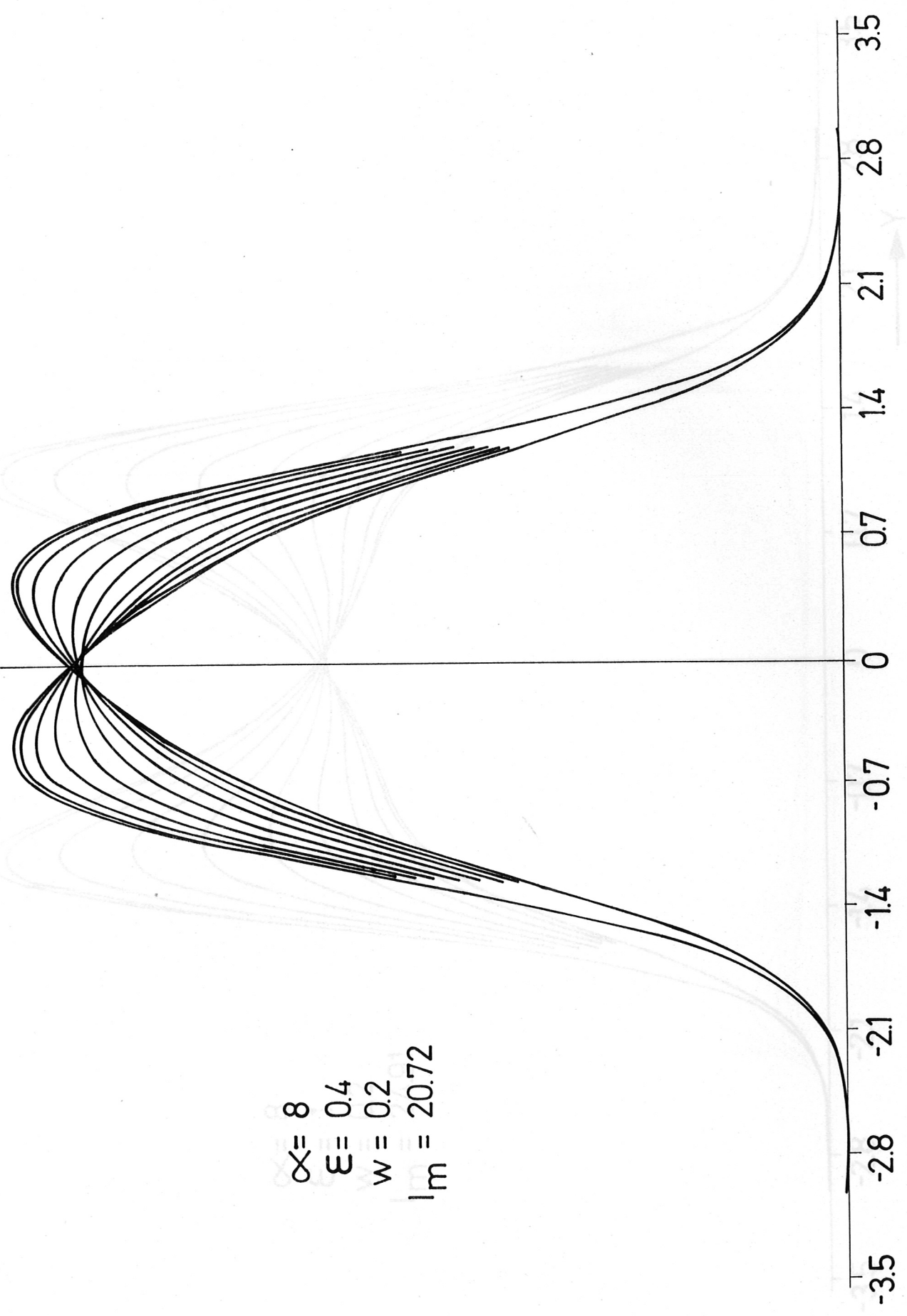


$\alpha = 4$   
 $\epsilon = 1.04$   
 $w = 0.2$   
 $l_m = 22.73$



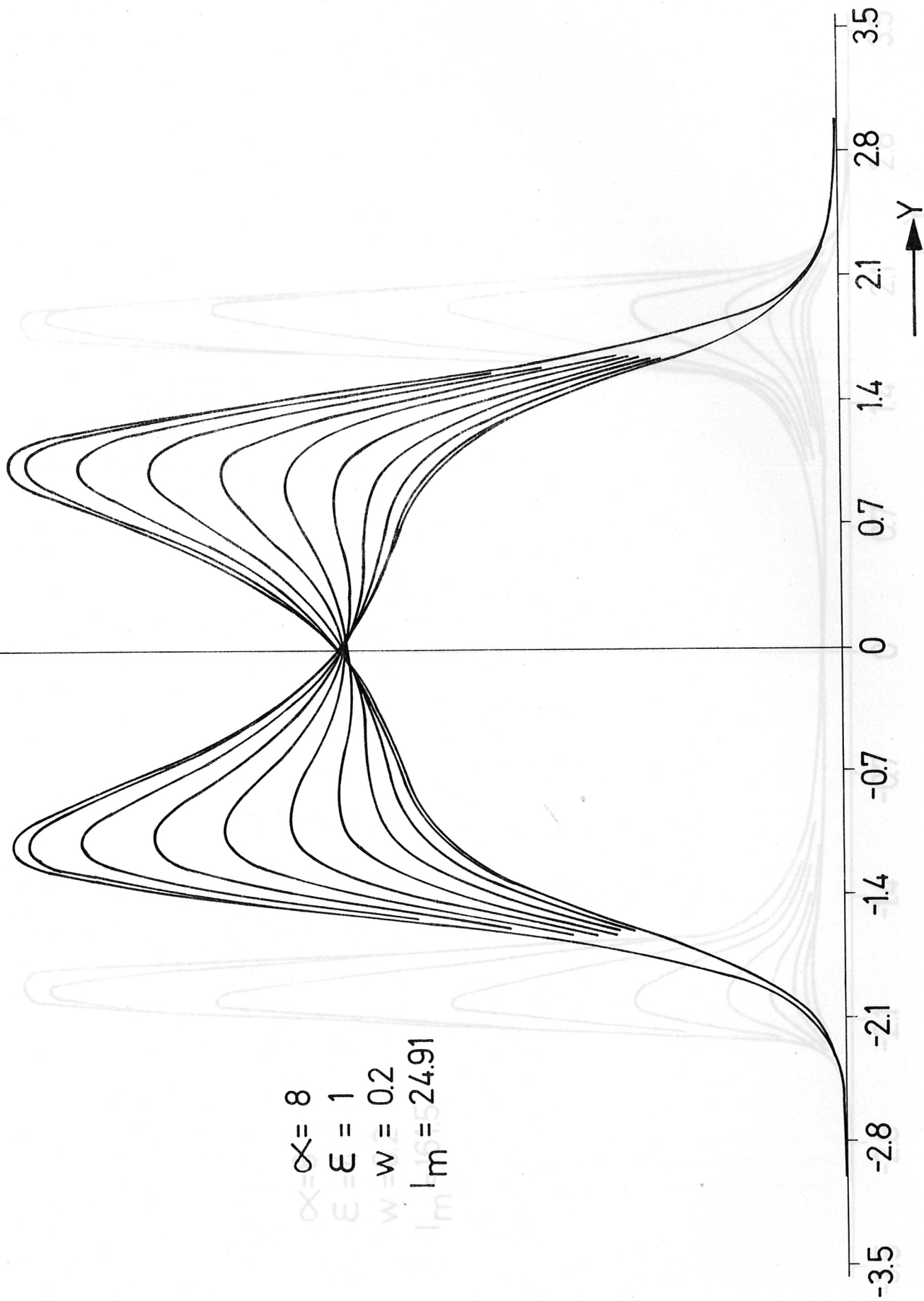
$I(\omega, k)$

$\alpha = 8$   
 $\xi = 0.4$   
 $w = 0.2$   
 $l_m = 20.72$

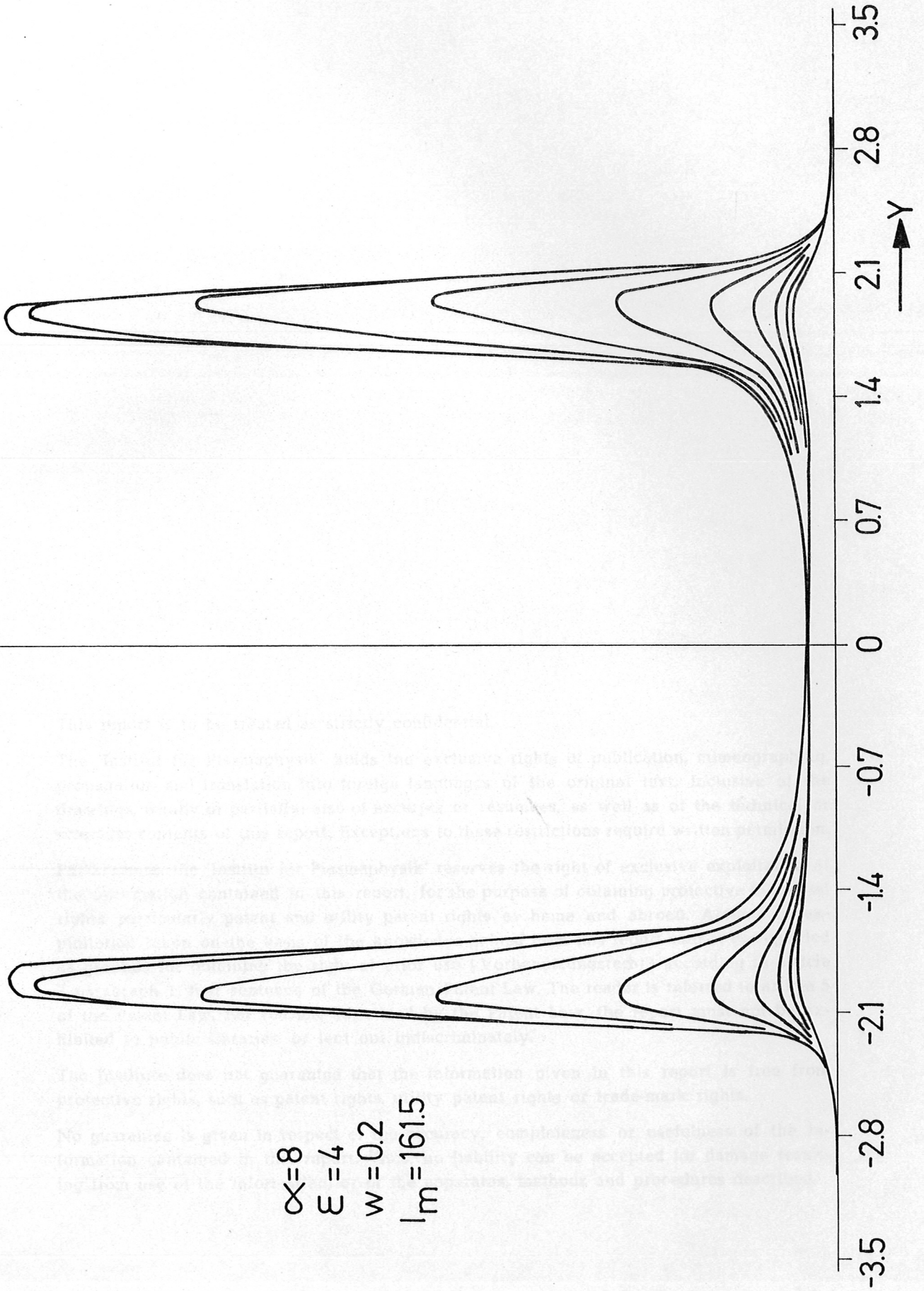


$I(\omega, k)$

$\alpha = 8$   
 $\epsilon = 1$   
 $w = 0.2$   
 $l_m = 24.91$



$I(\omega, k)$



$$\alpha = 8$$

$$\varepsilon = 4$$

$$w = 0.2$$

$$l_m = 161.5$$