

Analytische Untersuchung des Innen-  
widerstandes von MHD-Generatoren

On the Internal Resistance of MHD  
Generators

L. L. Lengyel

IPP 3/39

Juni 1966

**I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K**

**G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N**

# INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Analytische Untersuchung des Innen-  
widerstandes von MHD-Generatoren

On the Internal Resistance of MHD  
Generators

L. L. Lengyel

IPP 3/39

Juni 1966

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

IPP 3/39 L.L. Lengyel

On the Internal Resistance  
of MHD generators  
June, 1966 (in German)

ABSTRACT

The internal resistance of MHD generators as a function of the electrode geometry and the Hall parameter is considered herein. The perturbation of the current and potential distributions by the Hall parameter and the effect of a staggered electrode geometry upon the internal resistance are studied in detail. It has been found that changes in the internal resistance for equal positive and negative staggering angles are identical.

Der interne Widerstand von MHD-Generatoren als Funktion der Elektroden-Geometrie und des Hall-Parameters wird hierin betrachtet. Die Störung der Strom- und Potentialverteilungen durch den Hall-Parameter und die Wirkung einer gestaffelten Elektroden-Geometrie auf den internen Widerstand werden eingehend untersucht. Es wurde festgestellt, dass die Änderungen des internen Widerstandes für gleiche positive und negative Staggering-Winkel identisch sind.

Die konforme Abbildung ist ein praktisch bedeutungsvolles Randwertproblem, das sich durch konforme Abbildung lösen lässt, wenn die Randwerte der beiden Halbkreise durch die Geraden  $x = \pm 1$  gegeben sind. In [1] und [2] z. B. war die Existenz einer harmonischen Stromverteilung mit verschwindender Randwertfunktion vorausgesetzt. Die Abbildung, die in [3] hergeleitet wurde, beruht auf der Voraussetzung, dass durch die linke und rechte Grenze des physikalischen Gebietes (d. h. durch die geraden Linien, die die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Isolatorstrecken verbinden) kein Strom fließt. Die übliche Annahme, die bei allen auf konforme Abbildung beruhenden Analysen stattfindet, d. h. die Existenz einer harmonischen Stromverteilung in der mittleren Ebene zwischen den Elektroden, sowie die verschiedenen Symmetrievoraussetzungen, sind nur für bestimmte Elektroden- und Generatorgeometrien im vollen Masse gerechtfertigt; ihre Anwendung in anderen Fällen erfordert sorgfältige Überlegungen.

## EINLEITUNG

Die übliche Voraussetzung in den auf die inneren Charakteristiken der MHD-Generatoren bezogenen früheren Analysen war die Existenz von homogenen Feldverteilungen innerhalb der Generatoren. Obwohl die auf dieser Idealisierung beruhenden mathematischen Modelle für die Abschätzung der Gesamtcharakteristiken eines Generators (die Leistung und der Wirkungsgrad als Funktionen der Generatorgeometrie und der Plasmaparameter usw.) sich als ausserordentlich nützlich erwiesen haben, ist ihre praktische Anwendbarkeit bei der Natur dieser Voraussetzungen stark begrenzt.

Eine bessere Einsicht in die physikalischen Prozesse, die in diesen Generatoren stattfinden, bekommt man von den Ermittlungen der in dem Generatorrohr existierenden Feld- und Stromverteilungen. Zahlreiche Analysen wurden neuerdings veröffentlicht (siehe z. B. [1] bis [5]), wobei die Verteilungen der Stromdichte und des elektrischen Feldes zwischen den Elektroden eines MHD-Generators durch die Anwendung des konformen Abbildungsverfahrens betrachtet worden sind. Leider ist die konforme Abbildung in der Anwendung bei fast allen praktisch bedeutungsvollen Randbedingungen umständlich, wenn nicht gar unmöglich. Nur eine geringe Anzahl der einfachsten Fälle lässt sich durch konforme Abbildung ermitteln, was der Nutzbarkeit auch dieser Methode gewisse Beschränkungen auferlegt. In [1] und [4] z. B. war die Existenz einer homogenen Stromverteilung mit verschwindender Stromkomponente in der Strömungsrichtung vorausgesetzt. Die Abbildung, die in [3] durchgeführt worden ist, beruht auf der Voraussetzung, dass durch die linke und rechte Grenze des physikalischen Gebietes (d. h. durch die geraden Linien, die die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Isolatorstrecken verbinden) kein Strom fließt. Die übliche Annahme, die bei allen auf konforme Abbildung beruhenden Analysen stattfindet, d. h. die Existenz einer homogenen Stromverteilung in der mittleren Ebene zwischen den Elektroden, sowie die verschiedenen Symmetrievoraussetzungen, ist nur für bestimmte Elektroden- und Generatorgeometrien in vollem Masse gerechtfertigt; ihre Anwendung in einem allgemeinen Falle erfordert sorgfältige Überlegungen.

Eine praktische numerische Methode wurde von Celinski und Fischer [6] für die Berechnung der Strom- und Potentialverteilungen in MHD-Generatoren entwickelt. Obwohl auch diese Methode die für ähnliche Analysen eigentümlichen Begrenzungen (die Annahme von einer inkompressiblen und reibungslosen Strömung, von konstanten Plasmaeigenschaften und rotationsfreien Feldverteilungen) aufweist, macht die Möglichkeit, die richtigen und fast alle beliebigen Randbedingungen zu benutzen, ihre Ergebnisse wertvoll.

Die vorliegende Arbeit beruht auf einer numerischen Methode, die für die Betrachtung beliebiger Elektrodengeometrien aus der in [6] beschriebenen Methode entwickelt worden ist. Die berechneten Strom- und Potentialverteilungen sind dann zur Analyse der Generator- und Elektrodengeometrie-Effekte auf den Innenwiderstand von MHD-Generatoren angewendet worden. Der vorliegende Bericht beschränkt sich auf die Betrachtung eines Faraday-Generators mit einer versetzten Elektrodengeometrie.

#### DER INNENWIDERSTAND ALS EINE FUNKTION DER GENERATORGEOMETRIE

Wir werden hier offensichtliche und gleichzeitig grundsätzliche Beziehungen, wie die Abhängigkeit des Innenwiderstandes von der Plasmaleitfähigkeit, der Elektronentemperatur und daher von der Verteilung der Stromdichte selbst, nicht betrachten. Die Faktoren, die den Innenwiderstand bestimmen, sind voneinander abhängig; eine einheitliche und gleichzeitige Behandlung aller Faktoren ist beinahe unmöglich. Daher würde z. B. eine mit der Störung der ursprünglich homogenen Stromverteilung verbundene Versetzung der Elektroden zu einer Vergrößerung des Innenwiderstandes neigen. Die absolute Grösse der Innenwiderstandsänderungen hängt aber von mehr Faktoren ab als nur von der Störungsgrösse allein. Die Elektronentemperatur (und daher die Leitfähigkeit) nimmt in den Gebieten der höheren Stromdichten zu und fällt dort, wo die Stromdichte kleiner ist, als es ihr ungestörter Wert war, ab. Weiterhin verursacht die inhomogene Elektronentemperaturverteilung eine Wiederverteilung der Stromdichte selbst. Eine analytische Annäherung, die alle diese Effekte gleichzeitig berücksichtigt, gibt es noch nicht.

Die vorliegende Arbeit ist auf die Betrachtung der Innenwiderstandsänderungen in MHD-Generatoren beschränkt, die von der Störung der Strom- und Potentialverteilungen verursacht sind. Es wird später versucht, die Wirkung der inhomogenen Elektronentemperaturverteilung auf die Ergebnisse abzuschätzen.

Wenn das angewandte (durch den Belastungswiderstand gegebene) elektrostatische und das induzierte (EMK) elektrische Feld in einem MHD-Generator rotationsfrei sind, kann man zeigen [7], dass der Innenwiderstand des Generators durch

$$R_i = \frac{\Delta_L \varphi^*}{I} \quad (1.1)$$

gegeben sein kann, wobei  $\varphi^*$  eine durch die folgenden Gleichungen definierte Potentialfunktion ist:

$$\bar{E}^* = \bar{E} + \bar{v} \times \bar{B} = -\nabla \varphi^* \quad (1.2)$$

$$\bar{E} = -\nabla \varphi \quad (1.3)$$

Und mit  $\bar{v} = \lambda v$ ,  $\bar{B} = 2B$  (siehe Abb. 1)

$$\varphi^* = \varphi + vBy \quad (1.4)$$

$\Delta_L \varphi^*$  ist die entsprechende Potentialdifferenz zwischen zwei, durch einen äusseren Widerstand verbundenen Elektroden ( $L$  ist der Abstand zwischen den Elektroden,  $I$  ist der in der dadurch definierten Anlage fliessende Gesamtstrom). Wenn man daher zwei Generatoren mit voneinander verschiedenen Elektrodengeometrien unter identischen Betriebsbedingungen vergleicht, ist der Innenwiderstand proportional zu den entsprechenden Potentialdifferenzen, wenn die Gesamtströme in beiden Anlagen gleich sind, oder sie sind zu den entsprechenden Gesamtströmen umgekehrt proportional, wenn in beiden Fällen gleiche  $\Delta_L \varphi^*$  angewendet wird.

Mit  $\Delta_L \varphi^*$  gegeben, ist der Gesamtstrom eine Funktion der Stromverteilung, selbstverständlich in der Annahme, dass die physikalischen Eigenschaften des Plasmas überall im Generatorrohr

homogen sind. Wie durch frühere theoretische und experimentelle Untersuchungen gezeigt worden ist (siehe z. B. [6] und [8]), gibt es eine starke Abweichung zwischen der Stromverteilung in der Hauptmasse des Plasmas und der Stromverteilung in der Nähe der Elektroden. Besonders stark ist die Abweichung von einer homogenen Verteilung an den Elektrodenecken, d. h. an der Berührungsfläche zweier Materialien mit voneinander verschiedenen elektrischen Eigenschaften. Eine solche beinahe diskontinuierliche Verteilung ist von den bei der Berührungsfläche herrschenden diskontinuierlichen Randbedingungen verursacht; die Kraft, die auf die Elektronen in der longitudinalen Richtung wirkt, ändert ihr Vorzeichen an den Kanten der Elektroden.

$$E_y - E_x^* = 0$$

(2.4)

wobei  $\sigma = \frac{\sigma}{1+\beta^2} (\bar{v}_x - E_y)$

FELDRICHTUNGEN AN DEN ELEKTRODENWÄNDEN

Wir betrachten hier die Richtungen der angewandten und der induzierten elektrischen Felder sowie die Richtungen der resultierenden Ströme an den Elektroden- und Isolatoroberflächen. Es wird vorausgesetzt, dass das modifizierte Ohmsche Gesetz

$$\bar{J} = \sigma \bar{E}^* - \frac{\beta}{|B|} (\bar{J} \times \bar{B})$$

$$\bar{J} = \frac{\sigma}{1+\beta^2} [\bar{E}^* - \frac{\beta}{|B|} (\bar{E}^* \times \bar{B})]$$

eine für die Beschreibung der Stromverteilung akzeptable Annäherung ist ( $\beta$  ist der sog. Hall-Koeffizient,  $\beta = \omega_c \tau_e$ ). Mit  $\bar{v} = \bar{x}v$  und  $\bar{B} = \bar{z}B$  (Abb. 1) liefert (2.1) die folgenden Ausdrücke für die Komponenten der elektrischen Feld- und Stromdichten:

$$\begin{pmatrix} E_x^* \\ E_y^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \frac{\sigma}{1+\beta^2} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x^* \\ E_y^* \end{pmatrix}$$

(3.1)

Man bemerkt hier, dass in einem MHD-Generator das durch den Belastungswiderstand gegebene elektrostatische Feld sich der induzierten EMK entgegensetzt. Daher gibt es bei einer Isolatoroberfläche

$$\left. \begin{aligned} J_y &\equiv 0, \\ \text{und } J_x &= \sigma E_x \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

fließt in der (-x)-Richtung. Auf der anderen Seite sind folgende Beziehungen bei einer Elektrodenoberfläche vorhanden:

$$\begin{aligned} E_x &= E_x^* \equiv 0, \\ \text{wobei } J_x &= \frac{\sigma}{1+\beta^2} (vB - E_y) \end{aligned} \quad (2.4)$$

positiv ist, wenn  $|vB| > |E_y|$  (Generatorwirkung). Die diesen Fällen entsprechenden Vektordiagramme sind in Abb. 2 gezeigt. Abb. 3 zeigt die Richtung des Stromes an den Ecken von zwei durch einen äusseren Belastungswiderstand verbundenen Elektroden. Daraus folgt, dass die der Isolator- und Elektrodenoberfläche entsprechenden x-Komponenten des Stromdichtevektors bei den Punkten A und B divergieren und bei den Punkten C und D konvergieren. Daher muss die Stromverteilung in der Umgebung dieser Punkte stark inhomogen sein.

### DAS MATHEMATISCHE MODELL

In Übereinstimmung mit der üblichen magnetohydrodynamischen Annäherung setzen wir die Existenz von im gesamten Generatorrohr konstanten gasdynamischen und elektromagnetischen Eigenschaften voraus, und vernachlässigen die von der Strömung verursachte Perturbation des magnetischen Feldes. Es ist weiterhin angenommen, dass die Netto-Ladungsproduktion gleich Null ist. Dann gilt, in Übereinstimmung mit Kirchhoffs erstem Gesetz:

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (3.1)$$



Da das angewandte magnetische Feld konstant ist, folgt aus dem Faradayschen Gesetz, dass

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (3.2)$$

und deshalb durch  $\nabla \times \vec{E}^* = 0$  (3.3)

Im Einklang mit (3.1) kann man eine Stromfunktion durch die folgenden Beziehungen definieren:

$$J_x = \frac{\partial \gamma}{\partial y} \quad (3.4)$$

$$J_y = -\frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

wobei  $\gamma$  durch die Laplace-Gleichung (siehe (1.1)) gegeben ist:

$$\nabla^2 \gamma = 0 \quad (3.5)$$

Man wird bemerken, dass die  $\gamma = \text{const.}$  Linien mit den Stromlinien identisch sind. Weiterhin ist das Integral

$$T \int_x^{x+S} J_y dx = T \int_x^{x+S} \frac{\partial \gamma}{\partial x} dx = T (\gamma_{x+S} - \gamma_x) \equiv T \Delta_S \gamma \quad (3.6)$$

der zwischen den Elektroden eines geschlossenen Kreises fließende Strom. Mit

RANDBEDINGUNGEN

$$I = T \Delta_S \gamma \quad (3.7)$$

A) Isolatoroberflächen

kann man daher die Gl. (1.1), die den Innenwiderstand durch  $\mathcal{P}^*$  und  $I$  definiert, in folgender Form schreiben:

$$R_i = \frac{1}{T} \frac{\Delta_L \mathcal{P}^*}{\Delta_S \gamma} \quad (3.8)$$

Da die v- und B-Felder als konstant vorausgesetzt sind, folgt aus (2.1) und (3.1), dass

$$\nabla \cdot \vec{E}^* = 0 \quad (3.9)$$

Daher erfüllt auch die durch Gl. (1.2) definierte Potentialfunktion  $\varphi^*$  die Laplace-Gleichung:

$$\nabla^2 \varphi^* = 0 \quad (3.10)$$

Die Stromfunktion  $\gamma$  und die Potentialfunktion  $\varphi^*$  sind durch Gl. (2.2) gekoppelt:

$$\vec{E}^* = \frac{\partial \varphi^*}{\partial (x, y)}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sigma} \begin{vmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\sigma}{1+\beta^2} \begin{vmatrix} \beta & 1 \\ -1 & \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (3.11)$$

### RANDBEDINGUNGEN

#### A) Isolatoroberflächen

Es wird hier nur ein zweidimensionaler Fall (d. h. die Feld- und Parameterverteilungen in der z-Richtung sind als konstant angenommen) betrachtet. Wir nehmen an, dass die Isolatoroberfläche durch die folgende Gleichung gegeben ist:

$$y = f_{is}(x) \quad (4.1)$$

Da die zu einer Isolatoroberfläche senkrecht orientierte Stromkomponente verschwinden muss (siehe Abb. 4), gilt:

$$J_n = -J_x \sin \alpha + J_y \cos \alpha \equiv 0, \quad (4.2)$$

wobei  $\tan \alpha = \frac{dy}{dx} = f'_{is}(x)$  (4.3)

$$E_n = E_x \cos \alpha + E_y \sin \alpha \equiv 0, \quad (4.7)$$

Dadurch folgt die Randbedingung für  $\gamma$  von Gl. (3.4):

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} = -f'_{is}(x) \frac{\partial \gamma}{\partial y} \quad (4.4)$$

Die entsprechenden Randbedingungen für  $\varphi^*$  können von Gl. (3.11) abgeleitet werden, wobei

$$-f'_{is}(x) \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial y} = \frac{\sigma}{1+\beta^2} \left[ \beta \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} + \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \right]$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y} = \frac{\sigma}{1+\beta^2} \left[ -\frac{\partial \varphi^*}{\partial x} + \beta \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \right]$$

Also ist

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial y} = \frac{f'_{is}(x) - \beta}{1 + \beta f'_{is}(x)} \cdot \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \quad (4.5)$$

Im Falle einer flachen Isolatorwand gelten die folgenden Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} y = \text{konst.}, \quad f'_i(x) &= 0 \\ \frac{\partial \gamma}{\partial x} &= 0, \quad \gamma = \text{konst.}, \\ \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} &= -\beta \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

B) Elektrodenoberfläche

Bei einer Elektrodenoberfläche verschwindet die mit der Oberfläche parallel gerichtete Komponente des elektrostatischen Feldes (die Elektrodenleitfähigkeit ist als unendlich vorausgesetzt); daher ist, wie man es auf Abb. 5 sehen kann:

$$E_t = E_x \cos \alpha + E_y \sin \alpha \equiv 0, \quad (4.7)$$

wobei

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx} = f'_{el}(x) \quad (4.8)$$

Es folgt von Gl. (1.4) und (4.8), dass

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial x} = \tan \alpha \left( -\frac{\partial \varphi^*}{\partial y} + vB \right),$$

und so ist

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial x} = f'_{el}(x) \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} - vB \right) \quad (4.9)$$

die auf die  $\varphi^*$  Verteilung entlang den Elektroden auferlegte Randbedingung.

Die für  $\gamma$  anzuwendenden Randbedingungen folgen aus Gl. (3.11) und (4.9):

$$\begin{aligned} f'_{el}(x) \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} - vB \right) &= \frac{1}{\epsilon} \left( \beta \frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{\partial \gamma}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} &= \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \beta \frac{\partial \gamma}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (5.1)$$

So ist

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y} = \frac{(\beta - f'_{el}(x)) \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} + vB \cdot f'_{el}(x)}{1 + \beta f'_{el}(x)} \quad (4.10)$$

Für eine flache Elektrodenoberfläche gelten also die folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} y &= \text{const.}, \quad f'_{el}(x) = 0 \\ \frac{\partial \gamma}{\partial y} &= \beta \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi^x}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ausser den Randbedingungen, die für Elektroden- und Isolatoroberflächen anwendbar sind, kann man noch die Periodizität der verschiedenen Parameterverteilungen in MHD-Generatoren (mit periodischer Elektrodenanordnung) voraussetzen. Zusätzliche Bedingungen (Symmetrie usw.) werden in der vorliegenden Arbeit nicht angewendet.

#### KOORDINATENTRANSFORMATION FÜR EINE VERSETZTE ELEKTRODENGOMETRIE

Das  $x'y'$ -Koordinatensystem ist für einen MHD-Generator mit versetzten Elektroden in Abb. 6 definiert worden. Die  $x'$ -Achse fällt mit der  $x$ -Achse zusammen, der Winkel  $\delta$  zwischen den  $y'$ - und  $y$ -Achsen ist gegeben. Die Transformation zwischen den beiden Systemen folgt der folgenden Regel:

$$\begin{vmatrix} V_x \\ V_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\sin \delta \\ 0 & \cos \delta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_{x'} \\ V_{y'} \end{vmatrix} \quad (5.1)$$

wobei  $\vec{V}$  ein beliebiger Vektor ist (mit  $x = v_x$ ,  $y = v_y$ , z.B. ein Ortsvektor), und

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \tan \delta & \frac{1}{\cos \delta} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} \end{vmatrix} \quad (5.2)$$

Da die Divergenz und die Rotation eines beliebigen Vektors in dem versetzten Koordinatensystem durch die folgenden Ausdrücke (zweidimensionaler Fall) gegeben sind:

$$\left. \begin{aligned} \nabla' \cdot \vec{V} &= \frac{\partial V_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial V_{y'}}{\partial y'}, \\ \nabla' \times \vec{V} &= \frac{\partial V_{x'}}{\partial y'} - \frac{\partial V_{y'}}{\partial x'} - \sin \delta \left( \frac{\partial V_{y'}}{\partial y'} - \frac{\partial V_{x'}}{\partial x'} \right) \end{aligned} \right\} (5.3)$$

kann man die Grundgleichungen in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y'^2} + 2 \sin \delta \cdot \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x' \partial y'} = 0 \quad (5.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{mit } \frac{\partial \gamma}{\partial x'} &= 0 \text{ auf den Isolatoroberflächen} \\ \text{und } \frac{\partial \gamma}{\partial y'} &= (\beta \cos \delta - \sin \delta) \frac{\partial \gamma}{\partial x'} \text{ auf den Elektrodenoberflächen.} \end{aligned} \right\} (5.5)$$

Es soll eine Funktion  $\gamma'$  so definiert sein, dass

$$\left. \begin{aligned} J_{x'} &= \frac{\partial \gamma'}{\partial y'} \\ J_{y'} &= -\frac{\partial \gamma'}{\partial x'} \end{aligned} \right\} (5.6)$$

denn es ist durch die Gl. (3.4), (5.1) und (5.7) gezeigt worden, dass

$$\gamma' \equiv \frac{1}{\cos \delta} \gamma \quad (5.7)$$

Da die Gl. (5.4) und (5.5) in  $\gamma$  homogen sind und  $\delta$  eine gegebene Konstante ist, sind die die  $\gamma'$ -Verteilung definierenden Grundgleichungen identisch mit (5.4) und (5.5).

auf einer Elektrodenoberfläche.

Das Integral

$$T \int_{x'}^{x'+s} \cos \delta dx' = T \cos \delta \int_{x'}^{x'+s} \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} dx' = T \cos \delta (\varphi'_{x'+s} - \varphi'_{x'}) = T \cos \delta \Delta \varphi' \quad (5.8)$$

liefert den Gesamtstrom zwischen zwei durch eine äussere Belastungsresistenz verbundenen Elektroden.

Wenn man jetzt eine Funktion  $\psi'$  definiert, so dass

$$\left. \begin{aligned} E_{x'} &= \frac{\partial \psi'}{\partial y'} \\ E_{y'} &= -\frac{\partial \psi'}{\partial x'} \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

folgt dann von Gl. (5.3), dass

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y'^2} + 2 \sin \delta \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x' \partial y'} = 0 \quad (5.10)$$

Die Beziehung zwischen  $\psi'$  und der Potentialfunktion  $\varphi'$  folgt von den Gl. (1.2), (5.1) und (5.9):

$$\left| \begin{array}{c} \frac{\partial \psi'}{\partial x'} \\ \frac{\partial \psi'}{\partial y'} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 0 & \frac{1}{\cos \delta} \\ -1 & -\tan \delta \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial y} \end{array} \right| \quad (5.11)$$

Die entsprechenden Randbedingungen folgen von den Gl. (4.6) und (4.11):

$$\frac{\partial \psi'}{\partial x'} = \frac{\beta}{\cos \delta - \beta \sin \delta} \frac{\partial \varphi'}{\partial y'} \quad (5.12)$$

auf einer Isolatoroberfläche, und

$$\frac{\partial \psi'}{\partial y'} = -\sin \delta \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} \quad (5.13)$$

auf einer Elektrodenoberfläche.

Die Verteilung von  $\psi'$  ist durch die Gl. (5.10), (5.11) und (5.13) eindeutig definiert. Die entsprechende Verteilung des  $\vec{E}^*$ -Feldes kann dann durch (5.9) berechnet werden.

(5.18)

Die Beziehung zwischen den Funktionen  $\psi'$  und  $\gamma'$  folgt von den Gl. (3.11), (5.2), (5.8) und (5.11):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi'}{\partial x'} \\ \frac{\partial \psi'}{\partial y'} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma} \begin{pmatrix} 1 + \beta \cdot \tan \delta & \frac{\beta}{\cos \delta} \\ -\frac{\beta}{\cos \delta} & 1 - \beta \cdot \tan \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \gamma'}{\partial x'} \\ \frac{\partial \gamma'}{\partial y'} \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

Um einen mit Gl. (1.1) äquivalenten Ausdruck für den Innenwiderstand in dem versetzten Koordinatensystem zu finden, muss man die Potentialdifferenz zwischen den durch eine äussere Belastungsresistenz verbundenen Elektroden bestimmen. Die Potentialdifferenz ist durch das folgende Integral gegeben

$$\Delta_L \varphi^{*'} = - \int_{E_0^*}^{E_1^*} E_y^* dy' = \int_{E_0^*}^{E_1^*} \frac{\partial \psi'}{\partial x'} dy' \quad (5.15)$$

Mit den Gl. (5.15) und (5.8) in Verbindung mit Gl. (1.1) erhält man:

$$R_i = \frac{1}{T \cos \delta} \frac{\Delta_L \varphi^{*'}}{\Delta_S \gamma'} \quad (5.16)$$

Wie man sieht, ist es möglich - obwohl die richtige Definition von  $\varphi^{*}$  durch (5.15) gegeben ist -  $\varphi^{*}$  auch durch ein mit (1.2) analoges Gleichungspaar zu definieren:

$$\left. \begin{aligned} E_{x'} &= - \frac{\partial \varphi^{*'}}{\partial x'} \\ E_{y'} &= - \frac{\partial \varphi^{*'}}{\partial y'} \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$



Da in diesem Falle

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi^{*'}}{\partial x'} &= - \frac{\partial \psi'}{\partial y'} \\ \text{und} \quad \frac{\partial \varphi^{*'}}{\partial y'} &= \frac{\partial \psi'}{\partial x'} \end{aligned} \right\} \text{ ist,} \quad (5.18)$$

sind die Funktionen  $\varphi^{*}$  und  $\gamma'$  durch eine mit (5.14) analoge Gleichung gekoppelt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi^{*'}}{\partial x'} \\ \frac{\partial \varphi^{*'}}{\partial y'} \end{vmatrix} = \frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} \frac{\beta}{\cos \delta} & -1 + \beta \cdot \tan \delta \\ 1 + \beta \cdot \tan \delta & \frac{\beta}{\cos \delta} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial \gamma'}{\partial x'} \\ \frac{\partial \gamma'}{\partial y'} \end{vmatrix} \quad (5.19)$$

Die Potentialdifferenz zwischen den Elektroden ist durch

$$\Delta \varphi^{*'} = - \int_{E_0^{*'}}^{E_1^{*'}} E_{\gamma'}^{*'} dy' = \int_{\varphi_0^{*'}}^{\varphi_1^{*'}} \frac{\partial \varphi^{*'}}{\partial y'} dy' = \varphi_1^{*'} - \varphi_0^{*'} = \Delta_L \varphi^{*'} \quad (5.20)$$

gegeben. Es ist wesentlich, zu bemerken, dass  $\varphi^{*}$  unabhängig von  $\gamma'$  nicht berechnet werden kann, da - wie es aus den Gl. (5.3) und (5.17) ersichtlich ist - es keinen der Gl. (5.4) ähnlichen Ausdruck gibt, der im Zusammenhang mit den entsprechenden Randbedingungen  $\varphi^{*}$  eindeutig definiert.

Weiterhin ist zu bemerken, dass die von einander unabhängigen Lösungen von den Gl. (5.4), (5.5), (5.7) und den Gl. (5.10), (5.12), (5.13) für die Berechnung des Innenwiderstandes nicht angewendet werden dürfen, da die für die  $\gamma'$  und  $\psi'$  Funktionen gegebenen Randbedingungen nicht unabhängig sind. Für die Berechnung des Innenwiderstandes kann man entweder die Randwerte der  $\gamma'$ -Funktionen (d. h. den durch Gl. (5.8) definierten Gesamtstrom) vorschreiben und den entsprechenden  $\Delta_L \varphi^{*}$ -Wert berechnen, oder man kann die Grenzwerte der  $\psi'$ -Funktion (in

Gl. (5.10)) vorschreiben und das entsprechende  $\Delta_S \gamma'$  berechnen. Physikalisch bedeutet das, dass der Innenwiderstand entweder durch die Berechnung <sup>des</sup> einem bestimmten Gesamtstrom entsprechenden Potentialabfalls, oder durch die Berechnung des einem gegebenen Potentialabfall entsprechenden Gesamtstromes gefunden werden kann.

In den vorliegenden Berechnungen wenden wir folgendes Berechnungssystem an: Für einen gegebenen (und konstanten) Gesamtstrom, d. h. mit

$$T \cdot \cos \delta \cdot \Delta_S \gamma' = \text{const.} \quad (5.21)$$

kann erst die  $\gamma'$ -Verteilung gefunden werden. Dann wird mit Hilfe eines auf Gl. (5.19) beruhenden Integrationsverfahrens die dazu entsprechende  $\varphi^{*'}-Verteilung$  berechnet. (Da die  $\varphi^{*'} = \text{const.}$  Linien mit den Äquipotentiallinien in einem mitbewegten Koordinatensystem identisch sind, wird der Berechnung von  $\varphi^{*}'$  gegenüber der von  $\psi'$  der Vorzug gegeben.) Bei diesen Berechnungen wird angenommen, dass eine von den Elektroden geerdet ist. Statt der Berechnung des Innenwiderstandes selbst berechnen wir das Verhältnis zwischen einem "Idealinnenwiderstand"  $R_{i0}$  und dem tatsächlichen Innenwiderstand  $R_i$ . Der Maximumwert dieses Verhältnisses ist also gleich eins. Der ideale Innenwiderstand ist als

$$R_{i0} \equiv \frac{H}{\sigma_{ST}} \quad (5.21)$$

definiert, d. h. er ist gleich dem Widerstand, der einem Null-Versetzungswinkel und ungestörten Stromlinien (unendlich segmentierte Elektroden) entspricht. Daher ist das Verhältnis

$$\lambda \equiv \frac{R_{i0}}{R_i} = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{H}{S}\right) \cos \delta \frac{\Delta_S \gamma'}{\Delta_L \varphi^{*'}}, \quad (5.22)$$

oder, unter Berücksichtigung von (5.19), ist

$$\lambda = \frac{H}{S} \cos \delta \frac{\Delta_S \gamma'}{(1 + \beta \tan \delta) \int_L \frac{\partial \varphi'}{\partial y'} \cdot dy' + \frac{\beta}{\cos \delta} \cdot \Delta_L \gamma'} \quad (5.23)$$

ein guter Massstab der von den Geometrie- und  $\beta$ -Änderungen verursachten Widerstandsänderungen.

Zum Schluss ist zu bemerken, dass - wie es von den Gl. (5.7), (5.11), (5.18) und (5.19) folgt - auch die folgenden Beziehungen gültig sind:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x'} \\ \frac{\partial \varphi^*}{\partial y'} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sigma} \begin{vmatrix} \beta - \tan \delta & -\frac{1}{\cos \delta} \\ \frac{1}{\cos \delta} & \beta + \tan \delta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial \gamma}{\partial x'} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial y'} \end{vmatrix} \quad (5.24)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \gamma}{\partial x'} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial y'} \end{vmatrix} = \frac{\sigma}{1 + \beta^2} \begin{vmatrix} \beta + \tan \delta & \frac{1}{\cos \delta} \\ -\frac{1}{\cos \delta} & \beta - \tan \delta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x'} \\ \frac{\partial \varphi^*}{\partial y'} \end{vmatrix} \quad (5.25)$$

Also ist es möglich (siehe Gl. (3.8) und (5.21)),  $\lambda$  durch die in den versetzten Koordinatensystemen berechnete  $\gamma$ -Verteilung direkt auszudrücken:

$$\lambda = \frac{R_{oi}}{R_i} = \left(\frac{H}{S}\right) \frac{\Delta_S \gamma}{(\beta + \tan \delta) \Delta_L \gamma + \frac{1}{\cos \delta} \int \frac{\partial \varphi^*}{\partial x'} dx'} \quad (5.26)$$

## ERGEBNISSE

### STROM- UND POTENTIALVERTEILUNGEN BEI KLEINEN $\beta$ -WERTEN

Als Ergänzung der vorliegenden Arbeit sind die Änderungen der Strom- und Potentialverteilungen, die kleinen  $\beta$ -Werten entsprechen, untersucht worden.

Wenn  $\beta = 0$  ist, sind die Stromlinien in der Mitte des Feldes zwischen den Elektroden gerade Linien, die senkrecht zur Elektrodenoberfläche verlaufen (Abb. 7). Die entsprechenden Äquipotentiallinien sind symmetrisch bezüglich zweier zueinander senkrecht laufender Achsen, deren Zentrum in der Mitte des hier betrachteten Gebietes liegt. Die mittlere Potentiallinie verläuft parallel zu den Elektrodenoberflächen. Kleinen Abweichungen von dem Zustand  $\beta = 0$  entsprechen kleine Störungen in den Strom- und Potentialverteilungen, deren Charakter aus Abb. 8 und 9 klar ersichtlich ist. Die Stromlinien in dem Elektrodengebiet sind scheinbar gegen die Strömungsrichtung an der Anode (obere Elektrode) verschoben, desgleichen in die Richtung der Plasmaströmung an der Kathode. Die Äquipotentiallinien sind nicht mehr symmetrisch bezüglich zweier senkrechter Achsen sondern zentral-symmetrisch bezüglich des Zentrums des Gebietes (Spiegelreflektion durch das Zentrum). Es ändert sich auch die allgemeine Orientierung der Linien: die mittlere Potentiallinie bildet mit der Generatorachse einen kleinen Winkel, die anderen Potentiallinien ändern ihre Richtungen entsprechend (Abb. 8 und 9).

Abb. 10 und 11 zeigen die von  $\beta$  verursachten Änderungen in den Strom- bzw. Potentialverteilungen. Bei  $\beta \geq 3$  konzentrieren sich 90 % des Gesamtstromes auf 50 % der Elektrodenoberfläche (oder 50 % des Stromes auf weniger als 10 % der Elektrodenoberfläche). In diesem  $\beta$ -Gebiet ändert sich die allgemeine Stromverteilung nur sehr wenig, die Richtung der Stromlinien in dem Kanal (mit Ausnahme der Elektrodenumgebungen) wird bestimmt durch die relative Stellung der Diagonallinie, die die Ecken der

gegenüberliegenden Elektroden verbindet. Die Position der Äquipotentiallinien ändert sich entsprechend. Mit  $\beta \rightarrow \infty$  läuft die mittlere Äquipotentiallinie entlang der Diagonale, da in diesem Grenzfall der Winkel zwischen den Stromlinien und den entsprechenden Potentiallinien auf Null reduziert wird. Die Potentialdifferenz zwischen den Elektroden (und damit der Innenwiderstand) nimmt zu, wenn  $\beta$  zunimmt. Also ist der Innenwiderstand eine Funktion der Störungen, die durch das zunehmende  $\beta$  in den Potential- und Stromverteilungen verursacht wurden.

### VERSETZTE ELEKTRODENGOMETRIE

In der vorliegenden Diskussion ist festgestellt worden, dass für genügend grosse  $\beta$ -Werte ( $\beta \geq 3$ ) die Stromrichtung im Hauptteil der Plasmaströmung durch die relative Position der diagonalen Elektrodenecken bestimmt wird. Andererseits ist die Richtung des Stromes an den Elektrodenoberflächen eine Funktion von  $\beta$  (siehe Gl. (4.10) und (4.11)). Je grösser der Unterschied zwischen diesen beiden Richtungen ist, desto grösser ist die Störung der Strom- und Potentiallinien und damit die Zunahme des Innenwiderstandes.

Eine Möglichkeit, die Richtung des Stromes im Hauptteil des Plasmas mit der an den Elektroden in Ubereinstimmung zu bringen, ist durch die Versetzung der gegenüberliegenden Elektroden gegeben, und zwar durch die Versetzung der unteren Elektrode in die Richtung des Stromflusses. Ein Vergleich der Abbildungen 12 und 14 mit Abbildung 10 zeigt, dass sich mit  $\beta = 1$ ,  $\delta = 30^\circ$  der Anteil der Elektrodenoberfläche, in die 50 % des Gesamtstromes eintritt, von 12 % auf 22 % erhöht; und mit  $\beta = 3$ ,  $\delta = 45^\circ$  von ungefähr 3 % auf 10 % der gesamten Elektrodenoberfläche vergrössert. Gleichzeitig wird jedoch dann auch der Abstand zwischen den Elektroden und damit der ungestörte Wert des Innenwiderstandes grösser. Die Ergebnisse zahlreicher numerischer Berechnungen beweisen, dass die durch die Versetzung der Elektroden erreichbare Verminderung der Störungen nicht ausreichend ist, um die Zunahme des absoluten (ungestörten) Wertes des Innenwiderstandes auszugleichen.

Diese Tatsache ist noch offensichtlicher, wenn man die Innenwiderstandsänderungen, die negativen Versetzungswinkeln entsprechen, betrachtet.

Wenn die untere Elektrode gegen die Richtung der induzierten EMK versetzt wird (negativer Versetzungswinkel), werden folgende Effekte bewirkt:

- 1.) Der Unterschied zwischen der Stromrichtung im Hauptteil des Plasmas und an den Elektroden wird vergrößert, die Störungen der Feldverteilungen sind ebenfalls grösser.
- 2.) Der absolute Abstand zwischen den sich diagonal gegenüberliegenden Elektrodenecken mit den hohen Stromkonzentrationen ist reduziert, d. h. die Länge der Stromlinien ist verkürzt. Diese Phänomene bewirken eine Zunahme des absoluten Innenwiderstandswertes entsprechend der bei einem identischen positiven Versetzungswinkel auftretenden.

Die Abb. 12 bis 15 sind typische Strom- und Potentialverteilungen, die identischen positiven und negativen Versetzungswinkeln entsprechen. Die Änderung des Innenwiderstandes ist in den Abb. 16 und 17 als Funktion des Hallkoeffizienten und des Versetzungswinkels gezeigt. Die Innenwiderstandswerte, die gleichen positiven und negativen Versetzungswinkeln entsprechen, wurden - innerhalb des üblichen Maschinenfehlers (bis ungefähr 5 %) - als gleich gefunden.

Diese Ergebnisse (d. h. die Unabhängigkeit des Innenwiderstandes von dem Vorzeichen des Versetzungswinkels) stimmen mit den von Haeusler [9] veröffentlichten Ergebnissen überein. Haeusler hat gezeigt, dass der Innenwiderstand von rhombenförmigen Halbleiterplättchen in der Anwesenheit eines magnetischen Feldes von der Polarität dieses Feldes unabhängig ist.

Man wird hier bemerken, dass die Änderung der Polarität des Magnetfeldes äquivalent mit einer Spiegelung von allen Vektorwerten relativ zur x-z-Ebene ist. Daher sind die Feldverteilungen, die gleichen positiven und negativen Versetzungswinkeln entsprechen, identisch mit den Verteilungen, die bei einem gegebenen Winkel bei positiver und negativer Feldpolarität auftreten.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Hurwitz, H.  
et al Influence of tensor conductivity on current distribution in an MHD generator,  
J. Appl. Phys., 32 205-216 (1961)
- [2] Dzung, L.S. The MHD generator in cross-section,  
II. Intern. Symp. on MHD Electr. Pow. Gen., Paper No. 40, Paris (1964)
- [3] Schultz-Grunow, F.  
Denzel, D.L. Calculation of the electric characteristics of an MHD generator with finite electrodes by conformal mapping,  
II. Intern. Symp. on MHD Electr. Pow. Gen., Paper No. 44, Paris (1964)
- [4] Witalis, E.A. Performance of a segmented electrode MHD generator for various electrode-insulator length ratios,  
Plasma Phys. (J. Nucl. Energy, Pt.C), 7, 235-244 (1965)
- [5] Witalis, E.A. Analysis of linear MHD generators,  
Plasma Phys (J. Nucl. Energy, Pt.C), 7, 455-473 (1965)
- [6] Celinski, Z.N.  
Fischer, F.W. Two dimensional analysis of MHD generators with segmented electrodes,  
IPP Report No. 3/26 (1965)
- [7] Salvat, M. Der innere Potentialabfall in MHD-Generatoren,  
IPP Bericht Nr. 3/38 (1966)
- [8] Fischer, F.W. Experimental determination of the current distribution in a simulated MHD generator,  
III. Internat. Symp. on MHD Electr. Pow. Gen., Paper No. 74/20, Salzburg, (1966)
- [9] Haeusler, J. Der Widerstand und das Feld eines rechteckigen Hall-Plättchens,  
Z. Naturforschung, 17a, 506-513 (1962)

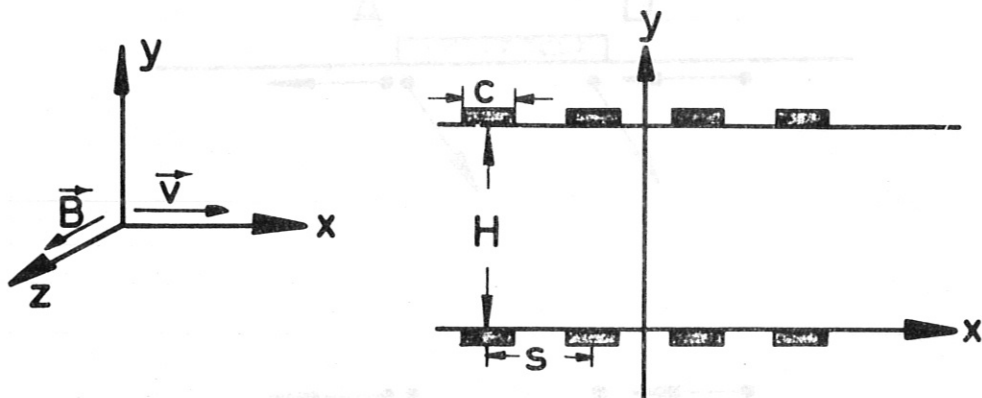


Abb.1: Koordinatensystem und Elektrodengeometrie

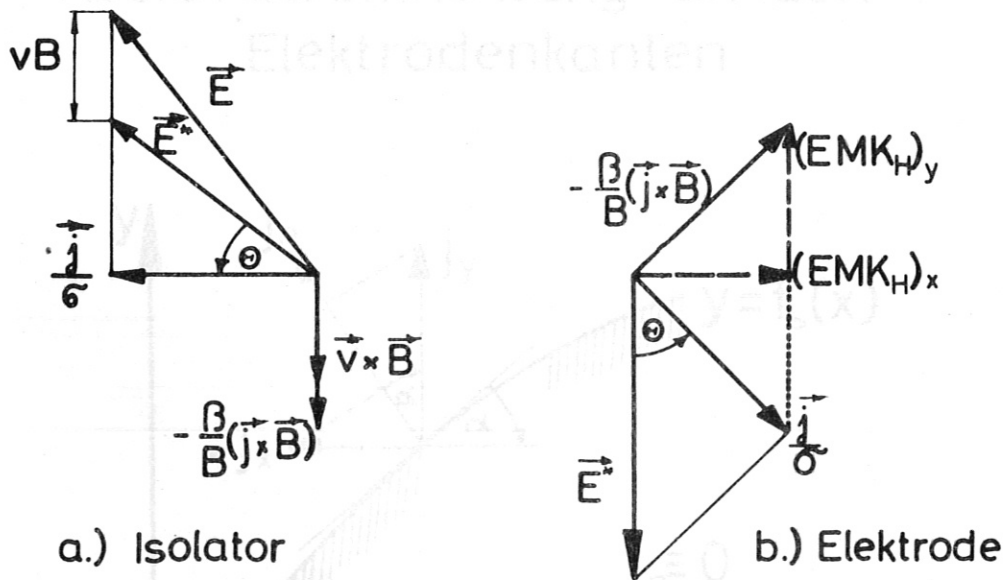


Abb.2: Feldrichtungen an den Elektrodenwänden

Abb.4: Randbedingung am Isolator



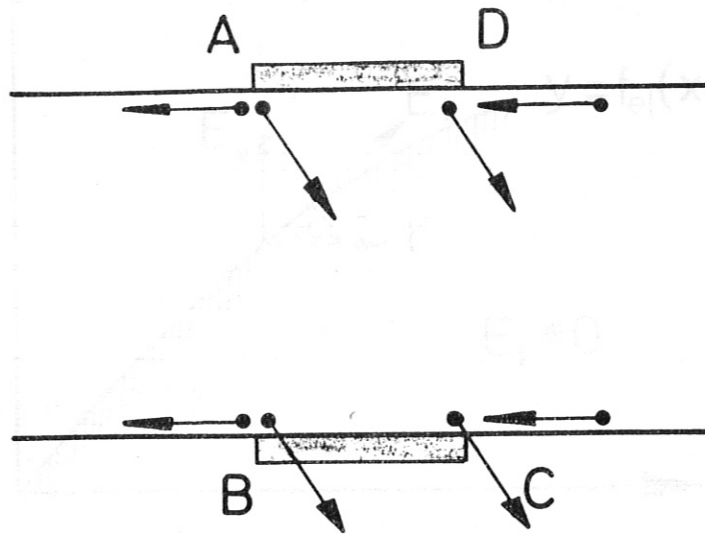


Abb.3: Stromrichtung an den Elektrodenkanten

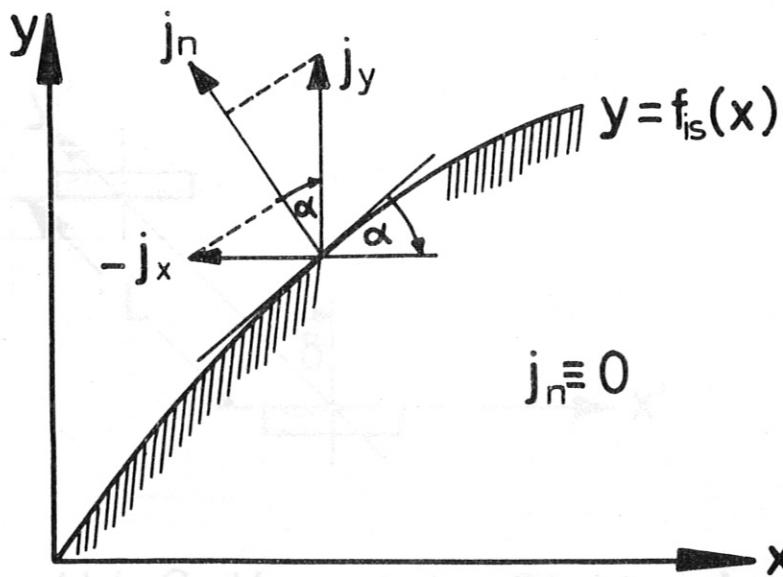


Abb.4: Randbedingung am Isolator

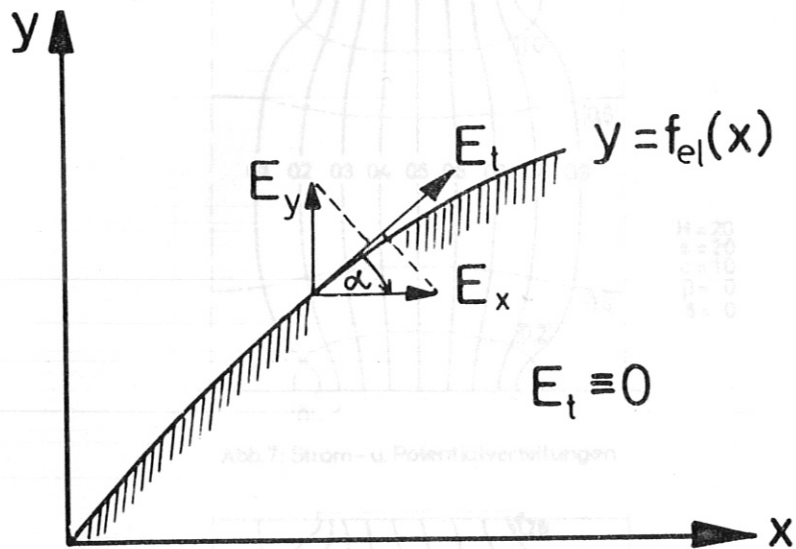


Abb.5: Randbedingung an den Elektrodenoberflächen

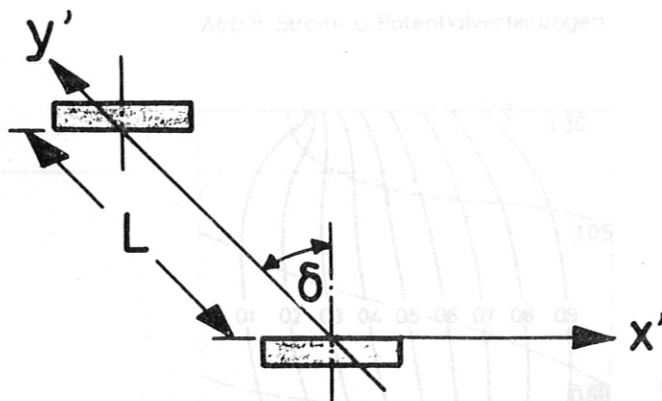
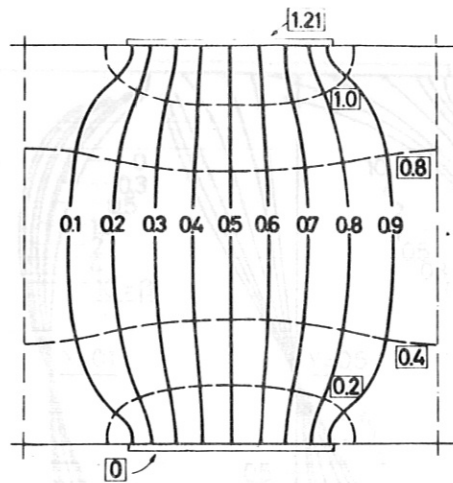
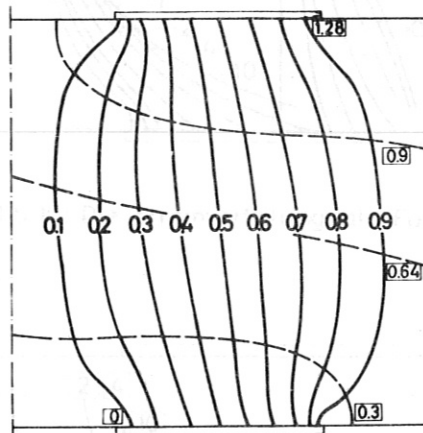


Abb.6: Versetzte Elektroden-  
geometrie



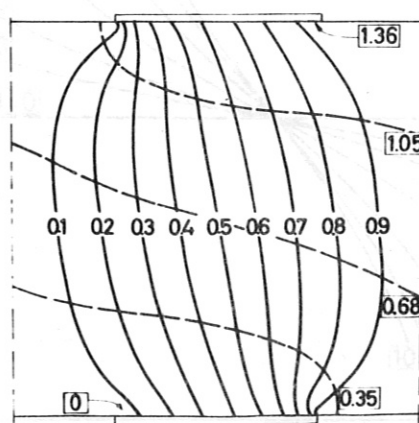
$H = 20$   
 $s = 20$   
 $c = 10$   
 $\beta = 0$   
 $\delta = 0$

Abb. 7: Strom- u. Potentialverteilungen



$H = 20$   
 $s = 20$   
 $c = 10$   
 $\beta = 0.3$   
 $\delta = 0$

Abb. 8: Strom- u. Potentialverteilungen



$H = 20$   
 $s = 20$   
 $c = 10$   
 $\beta = 0.5$   
 $\delta = 0$

Abb. 9: Strom - Potentialverteilungen

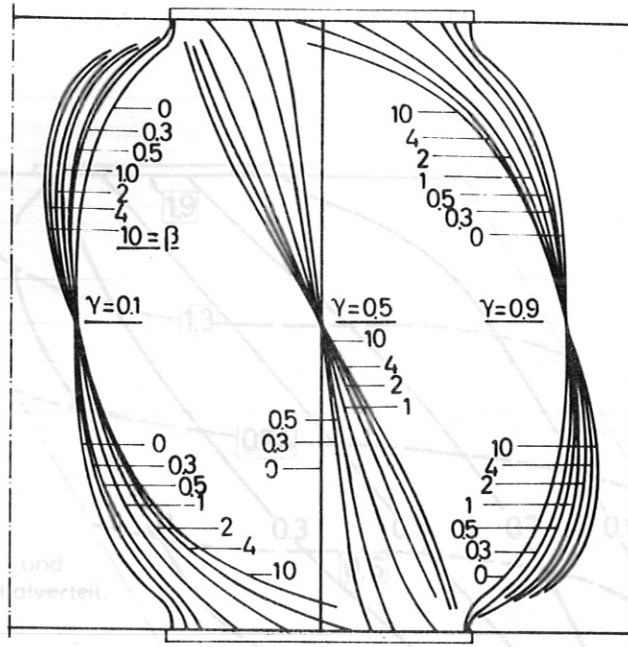


Abb.10: Die Stromverteilung als Funktion von  $\beta$

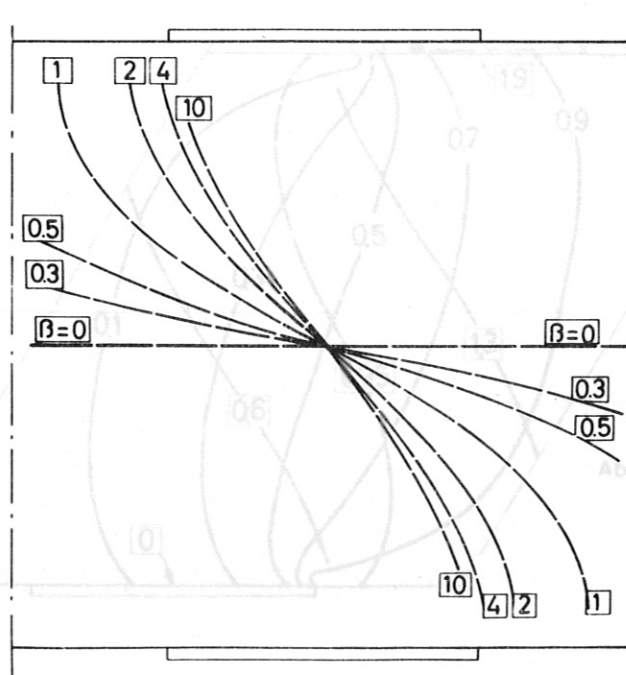


Abb.11: Die mittlere equipotentielle Linie als Funktion von  $\beta$

Abb.13: Strom- und Potentialverteilungen  
 $H/s = 1$   
 $c/s = 0.5$   
 $\beta = 1$   
 $\delta = -30^\circ$

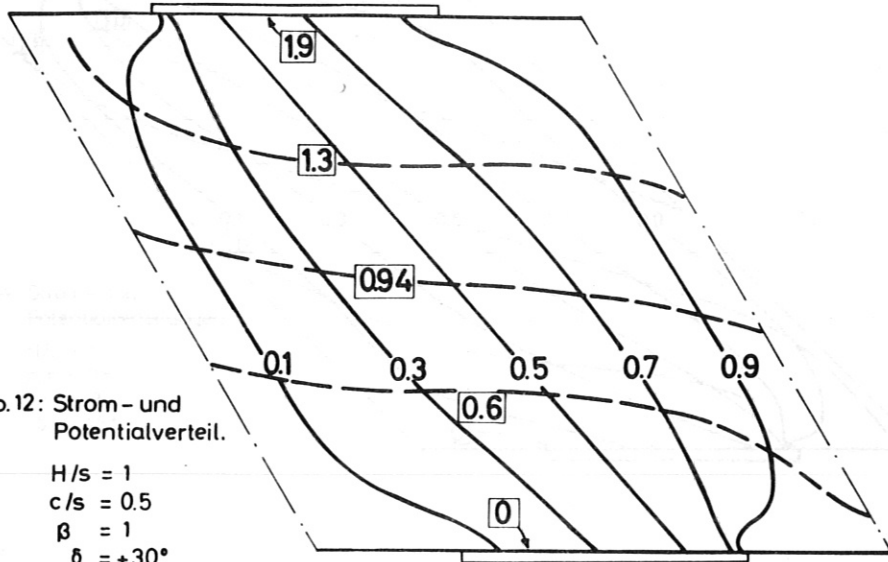


Abb. 12: Strom- und Potentialverteil.

$H/s = 1$   
 $c/s = 0.5$   
 $\beta = 1$   
 $\delta = +30^\circ$

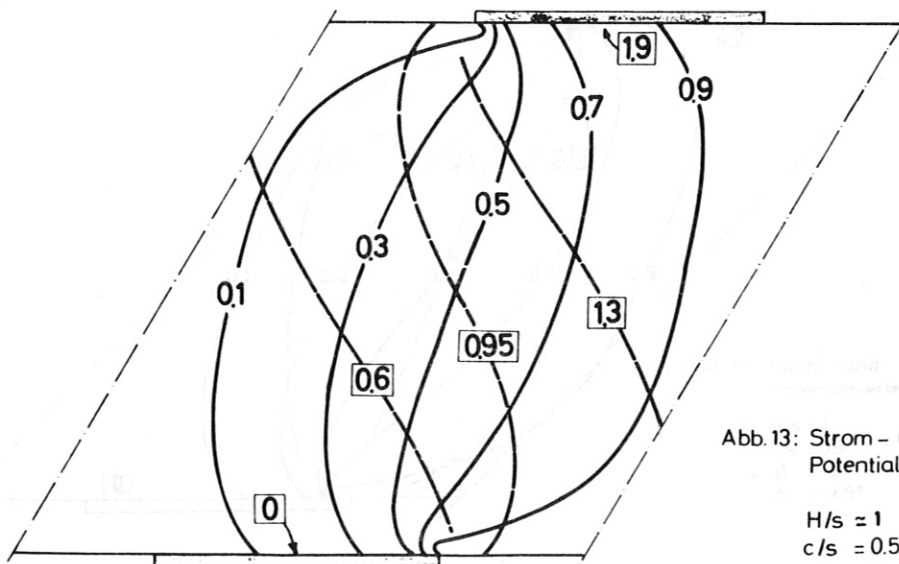


Abb. 13: Strom- und Potentialverteilungen

$H/s = 1$   
 $c/s = 0.5$   
 $\beta = 1$   
 $\delta = -30^\circ$

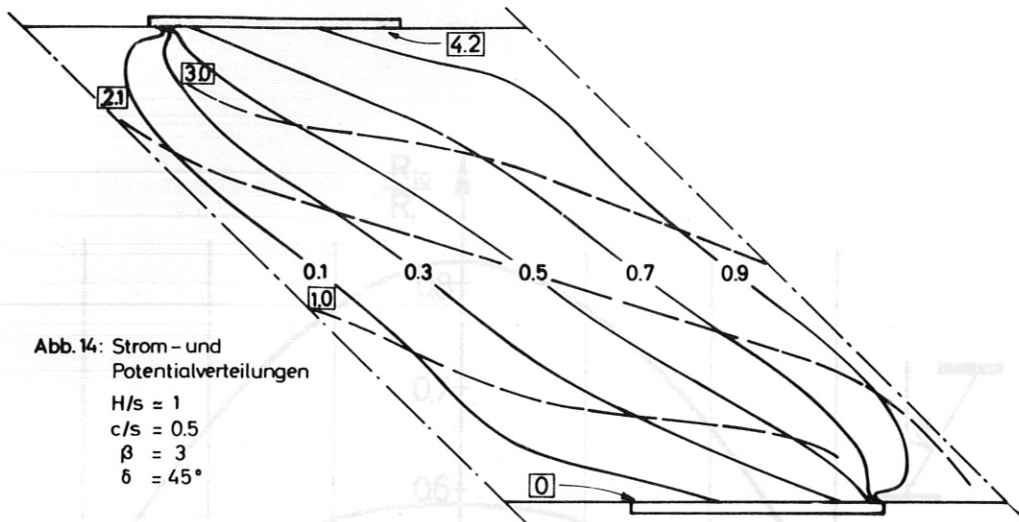


Abb. 14: Strom- und Potentialverteilungen

$H/s = 1$   
 $c/s = 0.5$   
 $\beta = 3$   
 $\delta = 45^\circ$

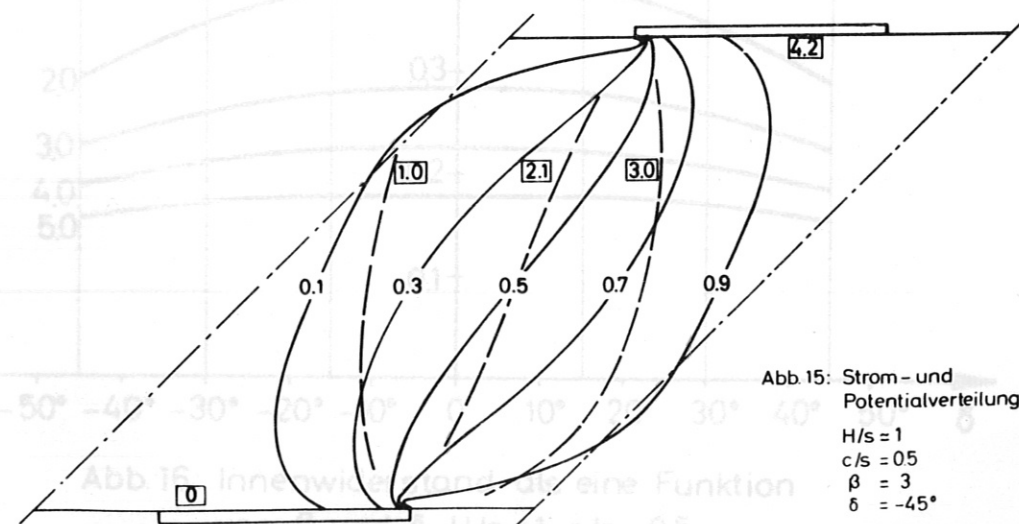


Abb. 15: Strom- und Potentialverteilungen

$H/s = 1$   
 $c/s = 0.5$   
 $\beta = 3$   
 $\delta = -45^\circ$

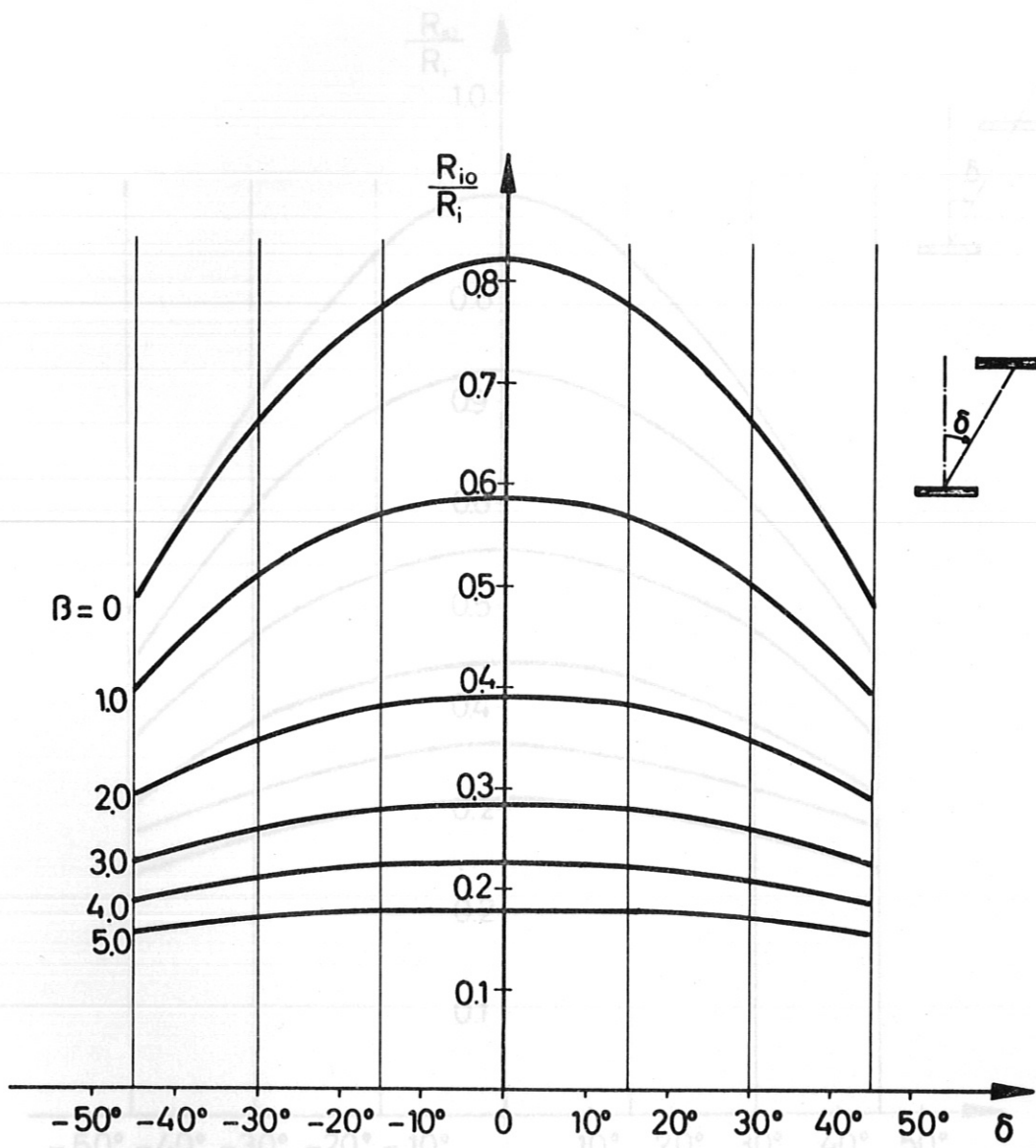


Abb.16: Innenwiderstand als eine Funktion

von  $\beta$  und  $\delta$ ,  $H/s \approx 1$ ,  $c/s = 0.5$

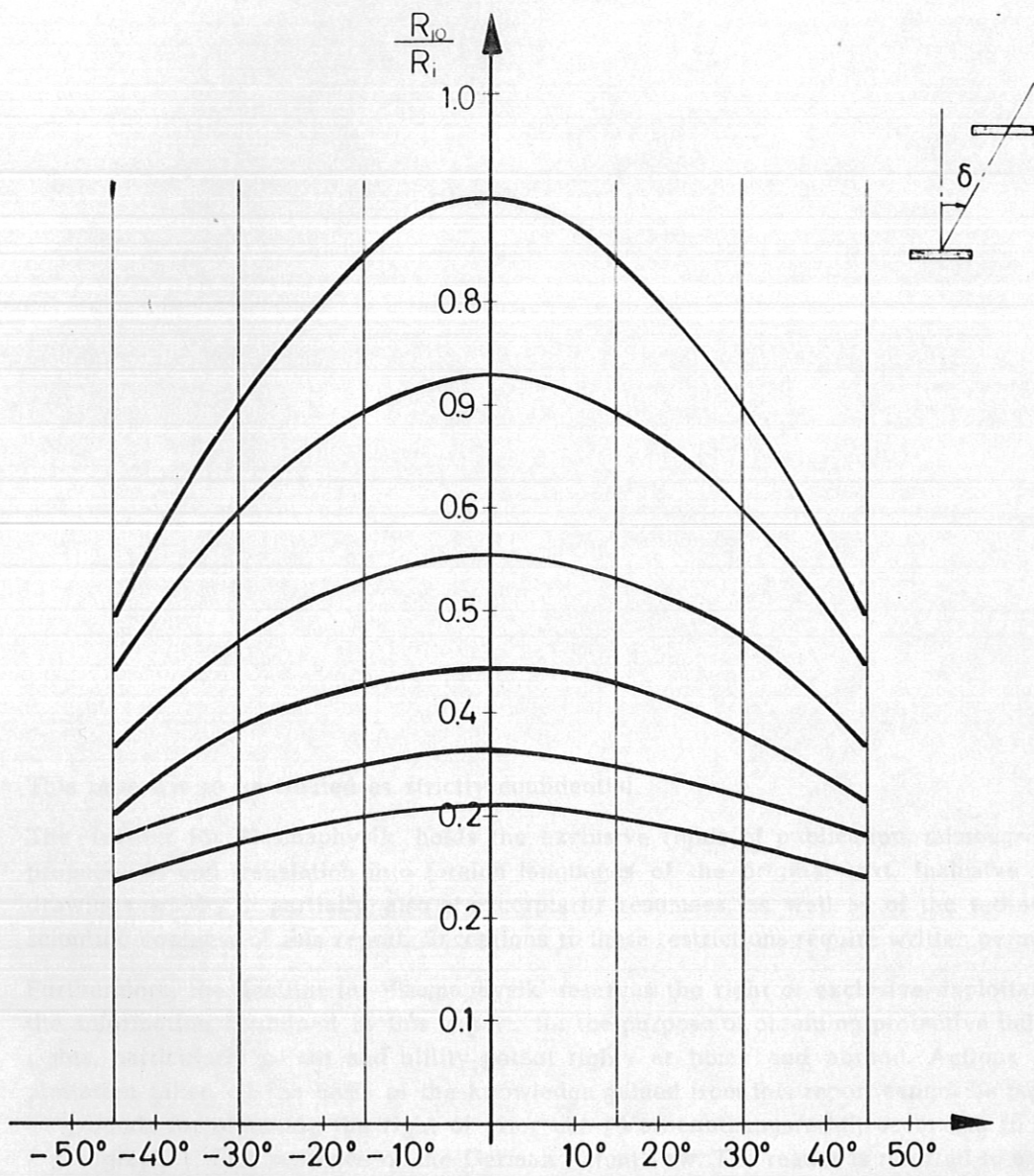


Abb.17: Der Innenwiderstand als Funktion von  $\beta$  u.  $\delta$   
 $H/s=2, c/s=1/2$