

Der innere Potentialabfall
in MHD-Generatoren

The Internal Potential Fall
in MHD Generators

M. Salvat

IPP 3/38 the electrodes in MHD generators
potential distribution corresponding to an ideal d

April 1966

I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K

G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

IPP 3/38 M. S GARCHING BEI MÜNCHEN Internal Potential
Fall in MHD Generators
April, 1966 (in German)

Der innere Potentialabfall
in MHD-Generatoren

The Internal Potential Fall
in MHD Generators

ABSTRACT

M. Salvat

The finite IPP 3/38 the electrodes in April 1966 the electrodes in MHD generators perturbs the potential distribution corresponding to an ideal case (i.e., to infinitely segmented electrodes). Hence the potential drop between the electrodes and thus the internal resistance of the generator increase.

It is shown by means of simple physical arguments that the change of the potential drop and the corresponding increase of the internal resistance are expressible in the form

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta\psi^*} = \frac{R}{R} = \frac{1}{1+\beta D}$$

where $\Delta\psi^*$ and R are the potential drop and the internal resistance, respectively; the subscript "i" denotes the "ideal" case, $\beta = eT$ is the Hall coefficient, A and D are the parameters which, as will be shown here, are defined by the geometry and the relative position of the electrodes.

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

ABSTRACT

The finite length of the electrodes in MHD generators perturbs the potential distribution corresponding to an ideal case (i.e., to infinitely segmented electrodes). Hence the potential drop between the electrodes and thus the internal resistance of the generator increase.

It is shown by means of simple physical arguments that the change of the potential drop and the corresponding increase of the internal resistance are expressible in the form

$$\frac{\Delta \varphi_i^*}{\Delta \varphi^*} = \frac{R_i}{R} = \frac{1}{A + \beta D}$$

where $\Delta \varphi^*$ and R are the potential drop and the internal resistance, respectively; the subscript "i" denotes the "ideal" case, $\beta = \omega \tau$ is the Hall coefficient, A and D are two parameters which, as will be shown here, are defined by the geometry and the relative position of the electrodes.

In einem MHD-Generator mit segmentierten Elektroden fließt der Strom senkrecht zum magnetischen Feld. Es tritt infolgedessen eine Hall-EMK auf. Diese EMK kann im Innern des Generatorkanals durch ein elektrisches Feld kompensiert werden, jedoch nicht mehr im Elektrodenbereich. Durch den Wechsel von Leitern und Isolatoren entstehen entlang der Elektrodenwände Bereiche, in denen sich nur ein elektrisches Feld längs der Wand aufbauen kann (Isolatoren) und Bereiche, in denen nur längs der Wand elektromotorische Kräfte wirksam sind (Elektroden). Die elektrischen Kräfte und die elektromotorischen Kräfte auf die Ladungsträger längs der Wände sind entgegengesetzt gerichtet. Diese Kräfte sind mitbestimmend für die Stromverteilung im Kanal. Die sich einstellende Stromverteilung wird bei konstanter elektrischer Leitfähigkeit durch den Hall-Koeffizient $\beta = \omega\tau$ und die Kanal- und Elektrodengeometrie bestimmt.

Um die Stromverteilung und damit den inneren Widerstand im Generatorkanal zu bestimmen, sind bisher zwei Methoden angegeben worden. Die eine beruht auf einem analytischen Verfahren (konformale Abbildung), die andere bedient sich eines numerischen Verfahrens, um die Stromverteilung bei vorgegebenen Randbedingungen zu ermitteln. Nach der letzten Methode haben Z.N. Celinski und F.W. Fischer [1] mit symmetrischen Randbedingungen die Stromverteilung berechnet und folgenden empirischen Ausdruck für die Änderung des inneren Widerstandes im Vergleich zum idealen Fall ($\beta = 0$ und homogene Stromverteilung) gefunden:

$$\lambda = \frac{R_1}{R} = \frac{1}{A + \beta D} \quad .$$

Dabei ist $\beta = \omega\tau$ und A, D Koeffizienten, die implizit durch die Geometrie der Anordnung bestimmt sind. Im folgenden soll durch physikalische Betrachtungen dieser Ausdruck hergeleitet werden, wobei jetzt die Koeffizienten A und D als explizite Funktionen der geometrischen Parameter erscheinen.

1. Innerer Widerstand eines MHD-Generators

Den inneren Widerstand zwischen zwei Elektrodenpaaren erhält man durch Kombination der entsprechenden Widerstandselemente.

Der totale Widerstand zwischen den zwei Elektroden ist dann:

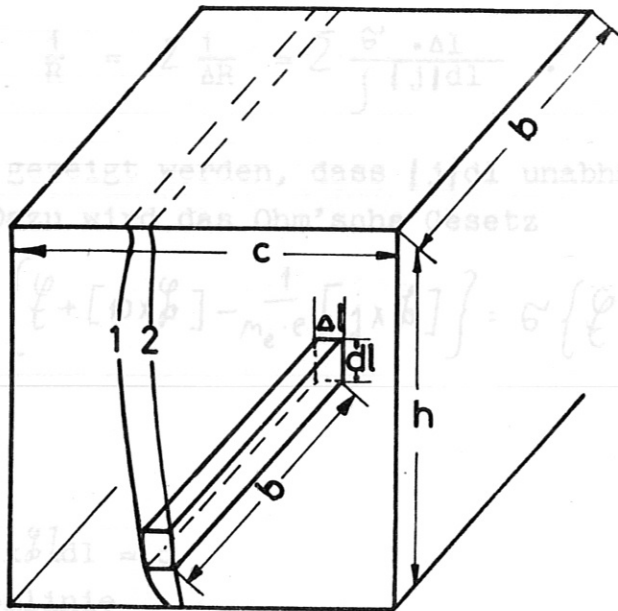


Abb. 1

In Abb. 1 sind zwei Stromlinien gezeigt, die mit 1 und 2 bezeichnet sind. Der Widerstand des Volumenelements $\Delta l \cdot dl$ lautet:

Da das \vec{E} -Feld die Eigenschaft hat (bei der Voraussetzung \vec{v} und \vec{B} konstant), $\frac{1}{\sigma}$ ist $\frac{dl}{\Delta l \cdot b}$ frei und senkrecht auf der Elektrodenfläche zu stehen, folgt, dass $\int j \cdot dl$ unabhängig von der Strom-

Der Widerstand zwischen den zwei Elektroden für die entsprechenden Stromlinien ist:

$$\Delta R = \frac{1}{\sigma} \int_{\text{Elektrode 1}}^{\text{Elektrode 2}} \frac{dl}{\Delta l \cdot b} = \frac{1}{\sigma} \int \frac{|j| dl}{|j| \Delta l \cdot b}$$

wobei ψ das Potential \vec{E} -Feld $\Delta \psi$ die Potentialdifferenz zwischen den zwei Elektroden.

wobei $|j|$ die Stromdichte angibt.

Mit Hilfe von Gl. (2) lautet Gl. (1):
Da $|j| \cdot \Delta l = \Delta I$ längs einer Stromlinie konstant ist, folgt:

$$\Delta R = \frac{1}{\Delta I \cdot \sigma} \int |j| dl \quad (3)$$

Der totale Widerstand zwischen den zwei Elektroden ist dann:

wobei R der Widerstand zwischen den Elektroden ist.

$$\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{\Delta R} = \sum \frac{\sigma \cdot \Delta I}{\int |j| dl} \quad (1)$$

Es soll nun gezeigt werden, dass $|j| dl$ unabhängig von der Stromlinie ist. Dazu wird das Ohm'sche Gesetz

Als Beispiel soll der Potentialverlauf φ^* in einem idealen Fall betrachtet werden. Die Stromlinien sind zwei-dimensionale Geraden, die einen Winkel α mit der Wandnormalen haben (Abb. 2).

$$j = \sigma \left\{ \mathcal{E} + [v \times \mathcal{B}] - \frac{1}{m_e \cdot e} [j \times \mathcal{B}] \right\} = \sigma \left\{ \mathcal{E}^* - \frac{1}{m_e \cdot e} [j \times \mathcal{B}] \right\}$$

integriert.

Wegen

$$\int_{\text{Stromlinie}} [j \times \mathcal{B}] dl = 0$$

liefert die Integration längs einer Stromlinie folgenden Ausdruck:

$$\int_{\text{Stromlinie}} j \cdot dl = \sigma \int \mathcal{E}^* dl$$

Da das \mathcal{E}^* -Feld die Eigenschaft hat (bei der Voraussetzung v und \mathcal{B} konstant), rotationsfrei und senkrecht auf der Elektrodenfläche zu stehen, folgt, dass $\int j \cdot dl$ unabhängig von der Stromlinie ist

$$\int_{\text{Stromlinie}} j \cdot dl = \sigma \cdot \Delta \varphi^* \quad (2)$$

wobei φ^* das Potential des \mathcal{E}^* -Feldes ist und $\Delta \varphi^*$ die Potentialdifferenz des φ^* -Potentials zwischen den zwei Elektroden.

$$\varphi^* = \frac{j}{\sigma} + \frac{1}{m_e \cdot e} [j \times \mathcal{B}]$$

Mit Hilfe von Gl. (2) lautet Gl. (1):

Es gilt:

$$\frac{1}{R} = \int \frac{\Delta I}{\Delta \varphi^*} = \frac{I}{\Delta \varphi^*} \quad (3)$$

Der Winkel $\Delta \varphi^*$ zwischen j und den Äquipotentiallinien φ^* (von φ^*) ist dann

$$\Delta \varphi^* = RI$$

wobei R der innere Widerstand zwischen den Elektroden ist.

Es soll jetzt die Potentialdifferenz $\Delta \varphi^*$ zwischen den Endpunkten

2. Der Potentialabfall in einem idealen zweidimensionalen Fall

Als Beispiel soll der Potentialabfall $\Delta \varphi^*$ in einem idealen Fall berechnet werden, in dem die Stromlinien parallele Geraden sind, die einen Winkel α mit der Wandnormalen haben (Abb. 2).

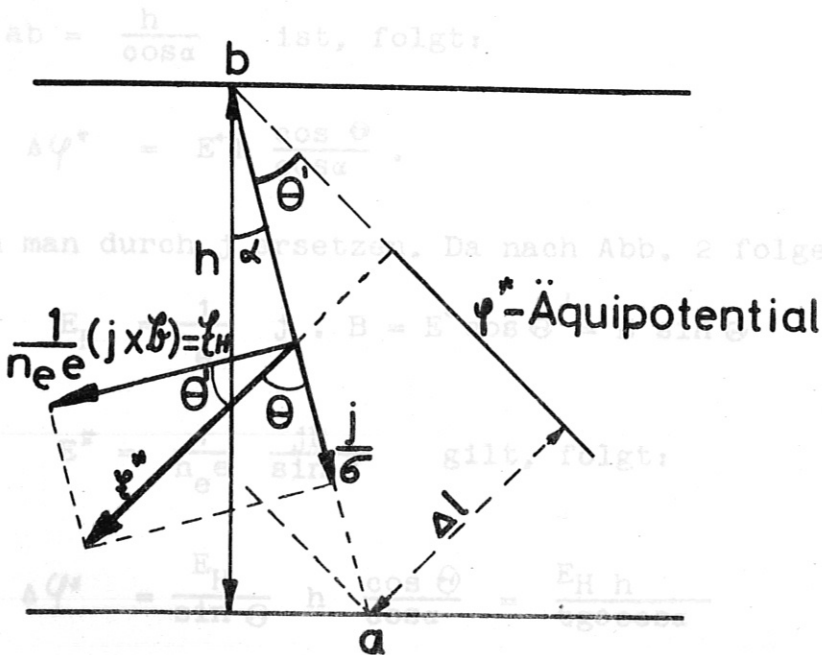


Abb. 2

Der Winkel θ , der zwischen φ^* und j besteht, ergibt sich aus der Beziehung

$$\varphi^* = \frac{j}{\sigma} + \frac{1}{m_e e} [j \times \varphi^*]$$

Da in diesem Fall der innere Widerstand R und der Strom I explizit berechnet werden können, kann man die Gl. (4) direkt prüfen.

Es ist (Abb. 3)

Es gilt:

$$\text{tg } \Theta = \beta (= \omega \tau)$$

Der Winkel Θ' zwischen j und den Äquipotentiallinien φ^* (von \mathcal{E}^*) ist dann

$$\Theta' = \frac{\tau}{2} - \Theta$$

Es soll jetzt die Potentialdifferenz $\Delta \varphi^*$ zwischen den Endpunkten einer Stromlinie, die von a nach b verläuft, berechnet werden.

Es ist: mit $E^* = |\mathcal{E}^*|$

$$\Delta \varphi^* = E^* \cdot \Delta l = E^* \cdot ab \cdot \sin \Theta' = E^* \cdot ab \cdot \cos \Theta$$

Da $ab = \frac{h}{\cos \alpha}$ ist, folgt:

$$\Delta \varphi^* = E^* h \frac{\cos \Theta}{\cos \alpha}$$

E^* kann man durch j ersetzen. Da nach Abb. 2 folgende Beziehung

$$E_H = \frac{1}{n_e} j \cdot B = E^* \cos \Theta' = E^* \sin \Theta$$

oder $E^* = \frac{1}{n_e} \frac{jB}{\sin \Theta}$ gilt, folgt:

$$\Delta \varphi^* = \frac{E_H}{\sin \Theta} h \frac{\cos \Theta}{\cos \alpha} = \frac{E_H h}{\text{tg } \Theta \cos \alpha} \quad (4)$$

$$\text{oder } \Delta \varphi^* = \frac{B}{n_e e \text{ tg } \Theta} \cdot \frac{jh}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sigma} \frac{jh}{\cos \alpha} \quad (5)$$

Da in diesem Fall der innere Widerstand R und der Strom I explizit berechnet werden können, kann man die Gl. (4) direkt prüfen.

Es ist (Abb. 3)

$$I = jF' \quad (6)$$

wobei F' eine Fläche beliebiger Grösse bezeichnet, die senkrecht zu j steht, so dass

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{F'} = \frac{1}{\sigma} \frac{h}{F' \cos \alpha} \quad \text{ist.} \quad (7)$$

Wenn man (6) und (7) multipliziert, erhält man

$$RI = \frac{1}{\sigma} \frac{jh}{\cos \alpha}, \quad \text{d. h. Gl. (5).}$$

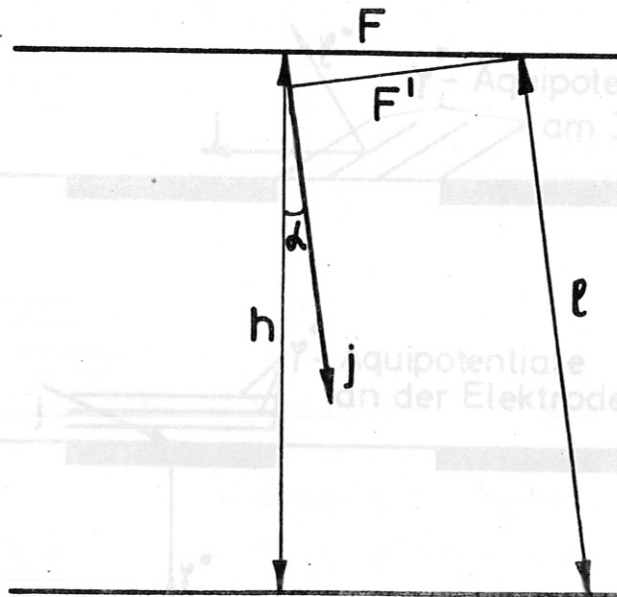


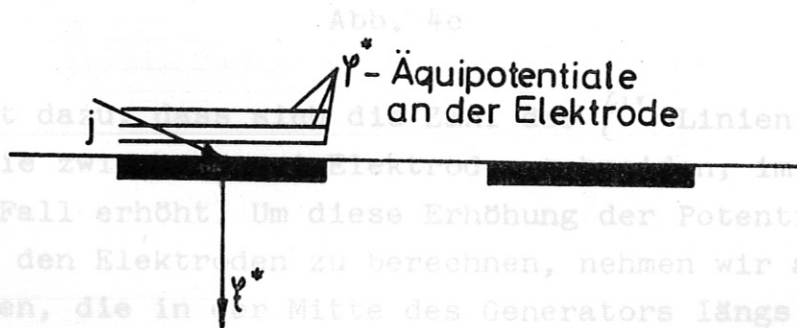
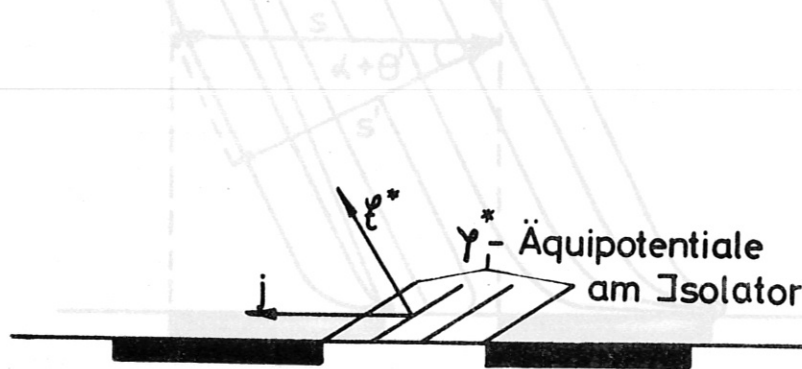
Abb. 3

Abb. 4a und b

3. Einfluss der Geometrie der Elektroden auf den Potentialabfall

Am Isolator zwischen den Elektroden kann der Strom in unmittelbarer Wandnähe nur eine j_x -Komponente haben. Dies hat zur Folge, dass die ψ^* -Linien ihren Verlauf in Wandnähe ändern. Sie treffen unter dem Winkel $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$ auf die Wand auf (Abb. 4a).

Da sich in unmittelbarer Nähe der Elektrodenfläche kein elektrisches Feld in x-Richtung aufbauen kann, verändert sich auch hier der Verlauf der ψ^* -Linien. ψ^* hat nur eine Komponente in y-Richtung. Die ψ^* -Linien müssen deshalb parallel zur Elektrodenoberfläche verlaufen (Abb. 4b).



Das führt dazu, dass die Äquipotentiale, die eine Stromlinie zwischen den Elektroden bilden, im Vergleich zum idealen Fall erhöht sind. Um diese Erhöhung der Potentialdifferenz zwischen den Elektroden zu berechnen, nehmen wir an, dass alle ψ^* -Linien, die in der Mitte des Generators längs der Strecke gezählt werden können, im Elektrodenbereich parallel zu den Elektroden verlaufen müssen und somit die Potentialdifferenz $\Delta\psi^*_{ideal}$ um den Betrag $d(\Delta\psi^*)$ erhöhen.

Abb. 4a und b

Der Verlauf einer ψ^* -Linie ist unter anderem durch die Tatsache bestimmt, dass sie eine Stromlinie nur einmal schneiden kann. Im idealen Fall verlaufen die ψ^* -Linien parallel und geradlinig von einer Wandseite zur anderen. Durch den Wechsel von Leitern und Isolatoren an den Wänden wird dieser Verlauf aber in der oben beschriebenen Weise gestört (Abb. 4c).

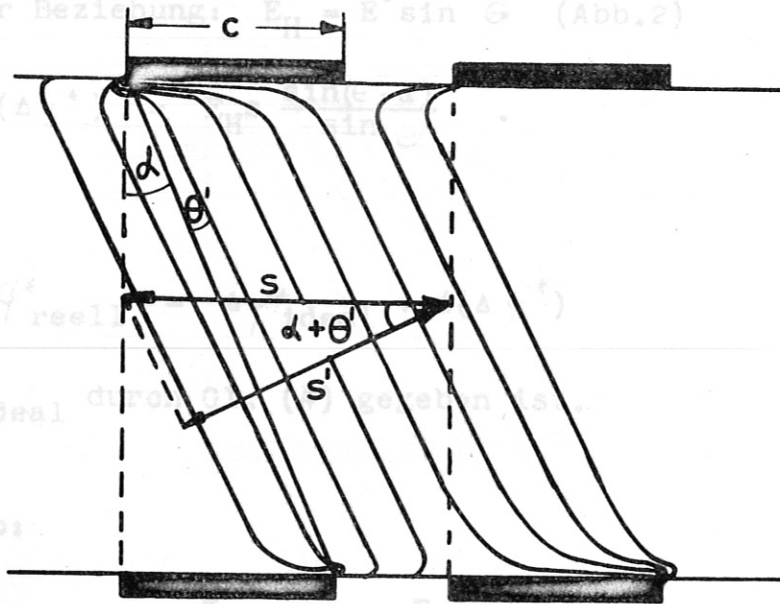


Abb. 4c

Das führt dazu, dass sich die Zahl der ψ^* -Linien, die eine Stromlinie zwischen zwei Elektroden schneiden, im Vergleich zum idealen Fall erhöht. Um diese Erhöhung der Potentialdifferenz zwischen den Elektroden zu berechnen, nehmen wir an, dass alle ψ^* -Linien, die in der Mitte des Generators längs der Strecke gezählt werden können, im Elektrodenbereich parallel zu den Elektroden verlaufen müssen und somit die Potentialdifferenz $\Delta\psi^*_{ideal}$ um den Betrag $d(\Delta\psi^*)$ erhöhen.

λ hat die in der Einleitung erwähnte Form, nämlich

$$\lambda = \frac{1}{D + \beta A}$$

Es ist möglich, den Koeffizienten λ eine explizite Form zu geben. Wie die Abb. 5 zeigt, konzentriert sich der Strom an einer Ecke Es ist: Elektrode.

$$\begin{aligned}
 d(\Delta \varphi^*) &= E^* s' = E^* s \cos(\alpha + \theta') \\
 &= E^* s \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - \theta\right) = E^* s \sin(\theta - \alpha)
 \end{aligned}$$

und mit der Beziehung: $E_H = E^* \sin \theta$ (Abb.2)

$$d(\Delta \varphi^*) = E_H s \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} \quad (8)$$

Somit ist

$$\Delta \varphi^*_{\text{reell}} = \Delta \varphi^*_{\text{ideal}} + d(\Delta \varphi^*)$$

wobei $\Delta \varphi^*_{\text{ideal}}$ durch Gl. (4) gegeben ist.

Es ist also:

Abb. 5

$$\Delta \varphi^*_{\text{reell}} = \frac{E_H h}{\beta \cos \alpha} + \frac{E_H s \sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} \quad (9)$$

Es soll jetzt ein Faktor λ wie folgt definiert werden:

Es gilt dann:

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \frac{\Delta \varphi^*_{\text{ideal}}}{\Delta \varphi^*_{\text{reell}}} = \frac{1}{1 + \beta \frac{s}{h} \frac{\cos \alpha \sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta}} \\
 \lambda &= \frac{1}{1 + \frac{s}{h} \sin \alpha \cos \alpha + \beta \frac{s}{h} \cos^2 \alpha} \quad (10)
 \end{aligned}$$

λ hat die in der Einleitung erwähnte Form, nämlich

$$\lambda = \frac{1}{D + \beta A}$$

Es ist möglich, den Koeffizienten eine explizite Form zu geben. Wie die Abb. 5 zeigt, konzentriert sich der Strom an einer Ecke jeder Elektrode.

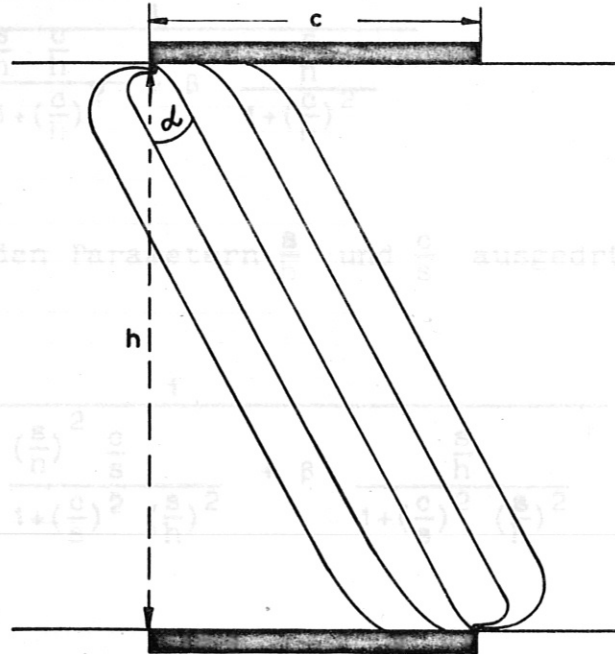


Abb. 5

Die Stromlinien für genügend grosses β ($\beta \geq 3$) verlaufen so, dass die Richtung durch einen Winkel α gegeben ist, dessen Tangens $\frac{c}{h}$ ist.

Es gilt dann: Die Abschätzung, wenn $\frac{c}{h}$ und $\frac{s}{h} \ll 1$ ist, genügt die erste Näherung:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \left(\frac{c}{h}\right)^2}$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\frac{c}{h}}{1 + \left(\frac{c}{h}\right)^2}$$

(12)

Der explizite Ausdruck für λ lautet:

$$\lambda = \frac{1}{1 - \frac{\frac{s}{h} \cdot \frac{c}{h}}{1 + (\frac{c}{h})^2} + \beta \frac{\frac{s}{h}}{1 + (\frac{c}{h})^2}} \quad (11)$$

oder nur mit den Parametern $\frac{s}{h}$ und $\frac{c}{s}$ ausgedrückt

$$\lambda = \frac{1}{1 - \frac{(\frac{s}{h})^2 \frac{c}{s}}{1 + (\frac{c}{s})^2 (\frac{s}{h})^2} + \beta \frac{\frac{s}{h}}{1 + (\frac{c}{s})^2 (\frac{s}{h})^2}} \quad (11')$$

Die Bilder 6a - d sind ein Vergleich zu den D- und λ -Werten, die Z.N. Celinski und F.W. Fischer aus den Rechenmaschinenergebnissen empirisch gewonnen haben und den λ -Werten, die mittels der Formel (11') berechnet wurden. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung für β -Werte grösser als 3.

Für eine schnelle Abschätzung, wenn $\frac{c}{h}$ und $\frac{s}{h} \ll 1$ ist, genügt die erste Näherung:

$$\lambda = \frac{1}{1 + \beta \frac{s}{h}} \quad (12)$$

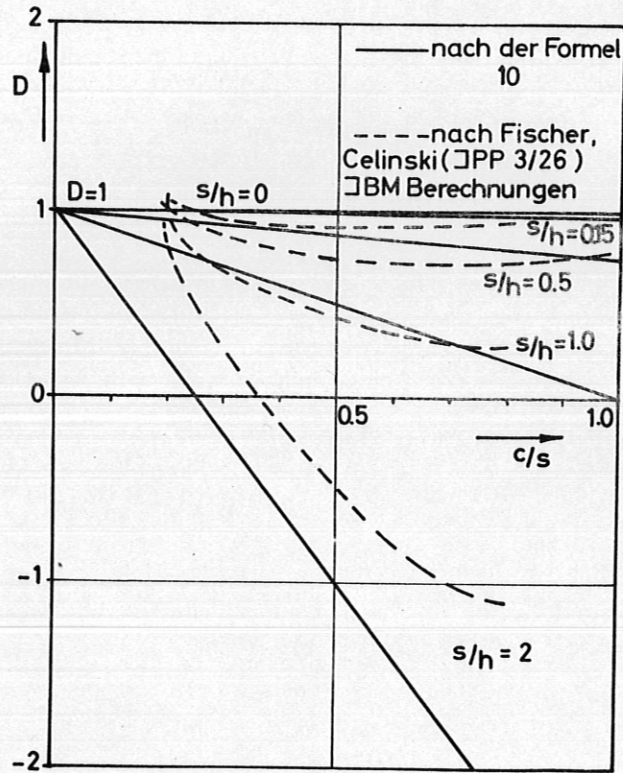


Abb. 6a

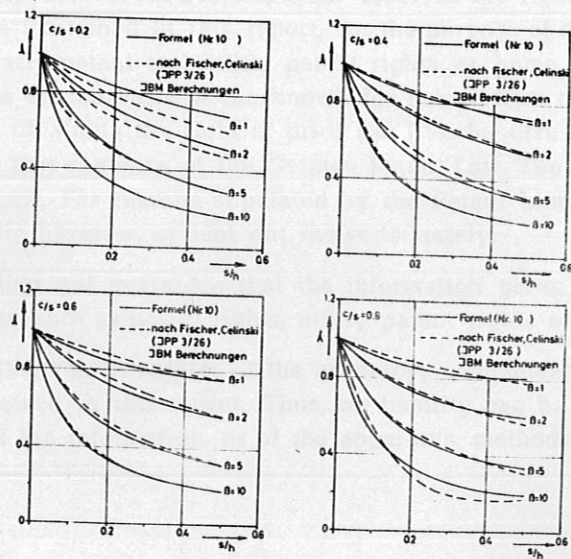


Abb. 6b - d