

Die Verminderung der Spannungen und Ströme
durch die endliche Segmentierung in Faraday-
und Hall-Generatoren

On the Current and Voltage Losses Caused by
Finite Electrode Segmentation in Faraday and
Hall Type MHD Generators

L. L. Lengyel

IPP 3/49

Dezember 1966

I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K

G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Die Verminderung der Spannungen und Ströme
durch die endliche Segmentierung in Faraday-
und Hall-Generatoren

On the Current and Voltage Losses Caused by
Finite Electrode Segmentation in Faraday and
Hall Type MHD Generators

L. L. Lengyel

IPP 3/49

Dezember 1966

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

On the Current and Voltage Losses
 Caused by Finite Electrode Segmen-
 tation in Faraday and Hall Type
 MHD Generators.

December, 1966 (in German)

Abstract

The experimental results presented at the Third International Symposium on MHD Electrical Power Generation in Salzburg indicate that there is a significant discrepancy between the experimentally measured Hall and Faraday voltages and the theoretical values computed by means of idealized mathematical models. An attempt is made here to estimate the voltage losses caused by the finite electrode segmentation alone at various values of the Hall parameter.

$$E_{\text{tang}} = E_x = 0 \quad \text{entlang der Elektroden} \quad (1.2)$$

$$J_{\text{norm}} = J_y = 0 \quad \text{entlang der Elektroden} \quad (1.3)$$

Wenn die y-Komponenten der Geschwindigkeit v_y , H_y , E_y und H als Vergleichsgrößen normiert werden, er-
 zeichnen sich die Grundgleichungen durch folgende Formungen:

	Ohm'sches Gesetz	Anlaufgleichung
$v_y' = 0$	$\frac{\partial v_y'}{\partial x'} = -\frac{E_x'}{2\eta}$	$\frac{\partial v_y'}{\partial x'} = 0$ (1.5a)
$H_y' = 0$	$\frac{\partial H_y'}{\partial x'} = -\frac{E_x'}{2\eta}$	$\frac{\partial H_y'}{\partial x'} = -\frac{2\eta v_y'}{2\eta}$ (1.5b)
$E_y' = 0$	$\frac{\partial E_y'}{\partial x'} = 0$	$\frac{\partial E_y'}{\partial x'} = -\frac{2\eta v_y'}{2\eta}$ (1.5c)

Zusammenfassung

Die experimentellen Ergebnisse, die auf der Salzburger Tagung^{x)} vorgetragen wurden, zeigten, dass zwischen den in MHD-Generatoren gemessenen Hall- und Faraday-Spannungen und den Spannungen, die mit Hilfe idealisierter mathematischer Modelle berechnet wurden, eine erhebliche Diskrepanz besteht. Es wird hier versucht, die von der endlichen Elektrodensegmentierung verursachten Spannungsverluste bei verschiedenen Werten des Hall-Parameters abzuschätzen.

Einleitung, Grundgleichungen

Die übliche Voraussetzung, die man in den Analysen der Strom- und Potentialverteilungen von MHD-Generatoren vorfindet, ist eine homogene Verteilung des magnetischen Feldes und der Plasma-parameter (Leitfähigkeit, Hall-Parameter, Dichte, Temperatur und oft auch die Geschwindigkeit), d. h. die Existenz von rotationsfreien Feldern. Unter diesen Bedingungen sind die Strom- und Potentialverteilungen in dem auf Abb. 1 gezeigten MHD-Generator durch die folgenden Gleichungen definierbar (die Endeffekte sind vernachlässigt):

$$\begin{aligned} J_{x,y} &= \frac{\partial \gamma}{\partial (y, -x)} \\ E_{x,y} &= - \frac{\partial \varphi}{\partial (x,y)} \\ E_{x,y}^* &= - \frac{\partial \varphi^*}{\partial (x,y)} \end{aligned} \quad (1.1)$$

wobei

$$\begin{aligned} \bar{E}^* &= \bar{E} + \bar{v} \times \bar{B} \\ \varphi^* &= \varphi + vBy \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\sigma \bar{E}^* = \bar{J} + \beta \left(\bar{J} \times \frac{\bar{B}}{|\bar{B}|} \right) \quad \text{ist,} \quad (1.3)$$

und

$$\nabla^2 \gamma = \nabla^2 \varphi^* = \nabla^2 \varphi = 0 \quad (1.4)$$

mit

$$\begin{aligned} E_{\text{tang}} &= E_x = 0 \quad \text{entlang einer Elektrodenoberfläche,} \\ J_{\text{norm}} &= J_y = 0 \quad \text{entlang einer Isolatoroberfläche.} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Wenn alle physikalischen Größen mit v , B , σ und H als Vergleichsgrößen normiert werden, erreicht man das folgende System von dimensionslosen Gleichungen:

	<u>An einer Elektrode:</u>	<u>An einem Isolator:</u>	
$\nabla^2 \gamma' = 0$	$\frac{\partial \gamma'}{\partial y'} = \beta \frac{\partial \gamma'}{\partial x'}$	$\frac{\partial \gamma'}{\partial x'} = 0$	(1.6a)
$\nabla^2 \varphi^{*'} = 0$	$\frac{\partial \varphi^{*'}}{\partial x'} = 0$	$\frac{\partial \varphi^{*'}}{\partial y'} = -\beta \frac{\partial \varphi^{*'}}{\partial x'}$	(1.6b)
$\nabla^2 \varphi' = 0$	$\frac{\partial \varphi'}{\partial x'} = 0$	$\frac{\partial \varphi'}{\partial y'} = -1-\beta \frac{\partial \varphi'}{\partial x'}$	(1.6c)

x) Third International Symposium on Magnetohydrodynamic Electrical Power Generation, Salzburg, July 4-8, 1966

In diesem System bezeichnen die Striche dimensionslose Grössen. Die drei Grössen sind durch das Ohm'sche Gesetz miteinander verknüpft:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial y'} + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial \gamma'}{\partial x'} \\ \frac{\partial \gamma'}{\partial y'} \end{vmatrix} \quad \text{wobei } \varphi^{*'} = \varphi' + \frac{\gamma'}{H} \text{ ist.} \quad (1.7)$$

Für die eindeutige Definition der obigen Grössen ist noch die Annahme der Periodizität notwendig:

$$\begin{aligned} \gamma' (x'+S', y') &= \gamma' (x', y') + \Delta_S \gamma' \\ \varphi^{*'} (x'+S', y') &= \varphi^{*'} (x', y') + \Delta_S \varphi^{*'} \\ \varphi' (x'+S', y') &= \varphi' (x', y') + \Delta_S \varphi' \end{aligned} \quad (1.8)$$

Aus der Beziehung zwischen φ^* und φ folgt, dass

$$\Delta_S \varphi^{*'} = \Delta_S \varphi'; \quad \Delta_H \varphi^{*'} = \Delta_H \varphi' + 1 \text{ ist.} \quad (1.9)$$

Die Quantitäten $T' \Delta_H \gamma'$ und $-T' \Delta_S \gamma'$ sind die normierten Gesamtströme in x- und y-Richtung. (T ist die Tiefe des Generators in der Richtung des angewandten magnetischen Feldes.)

Unser Ziel ist es, die Spannungen und Ströme, die in einem Generator mit endlichen S/H- und C/S-Verhältnissen auftreten, mit denen eines idealen Generators zu vergleichen (ein idealer Generator entspricht homogenen Feldverteilungen, d. h. einer unendlichen Elektrodensegmentierung). Dazu werden wir erst die fundamentalen Beziehungen, die zwischen den Spannungen und Strömen eines idealen Generators existieren, als Funktionen der Generatorgeometrie und des Hall-Parameters darstellen.

Ideale Generatoren

In einem idealen Generator sind die Potential- und Stromverteilungen homogen. Man darf in diesem Falle die Komponenten der Stromdichte und des elektrischen Feldes durch die Durchschnittswerte der entsprechenden Gesamtcharakteristiken ausdrücken:

$$J_x = \frac{I_x}{TH} = \frac{T \Delta_H \gamma}{TH} = \frac{\Delta_H \gamma}{H} \quad (2.1)$$

$$J_y = \frac{I_y}{TS} = -\frac{T \Delta_S \gamma}{TS} = -\frac{\Delta_S \gamma}{S} \quad (2.1)$$

$$E_x = -\frac{\Delta_S \varphi}{S}; \quad E_x^* = -\frac{\Delta_S \varphi^*}{S}$$

$$E_y = -\frac{\Delta_H \varphi}{H}; \quad E_y^* = -\frac{\Delta_H \varphi^*}{H}$$

Nun kann man Gl.(1.7) in folgender Form umschreiben:

$$\begin{pmatrix} \Delta_S \varphi' \\ \Delta_H \varphi' + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -\frac{S}{H} \\ \frac{H}{S} & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_S \gamma' \\ \Delta_H \gamma' \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} \Delta_S \gamma' \\ \Delta_H \gamma' \end{pmatrix} = \frac{1}{1+\beta^2} \begin{pmatrix} \beta & \frac{H}{S} \\ -\frac{H}{S} & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_S \varphi' \\ \Delta_H \varphi' + 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

A) Idealer Faraday-Generator

In diesem Falle ist die Richtung des Stromes festgelegt: $J = J_y$, $J_x \equiv 0$. Daher ist

$$\Delta_H \gamma' \equiv 0 \quad (3.1)$$

Für ideale Faraday-Generatoren ergeben sich also aus Gl.(2.2) die folgenden Beziehungen:

$$\Delta_S \varphi' = \beta \Delta_S \gamma' \quad (3.2)$$

$$\Delta_H \varphi' + 1 = \frac{H}{S} \Delta_S \gamma' \quad (3.3)$$

Demnach ist
$$\Delta_S \varphi' = \beta \frac{S}{H} (\Delta_H \varphi' + 1) \quad (3.4)$$

Auf der Basis der absoluten Grössen der Spannungen und Ströme, die im MHD-Energieumwandler auftreten, kann man die folgenden Betriebsweisen definieren:

1. Generatorbetrieb. Das elektrostatische Feld innerhalb des Generators wirkt in diesem Falle der induzierten EMK entgegen und ist kleiner oder gleich der EMK (s. Abb. 2a). Der Strom fließt in Richtung der EMK, die $\vec{j} \times \vec{B}$ -Kraft bremst das Gas. Da das elektrostatische Potential in der-y-Richtung zunimmt (das E-Feld ist in +y-Richtung gerichtet), kann diese Betriebsweise durch die folgenden Verhältnisse beschrieben werden:

$$\begin{matrix} \text{Leerlauf} & & \text{Kurzschluss} \\ -1 & \leq \Delta_H \varphi' \leq & 0 \end{matrix} \quad (3.5)$$

$$0 \leq \Delta_H \varphi' \leq 1 \quad (3.6)$$

$$0 \leq \Delta_S \varphi' \leq \beta \frac{S}{H} \quad (3.7)$$

$$0 \leq \Delta_S \gamma' \leq \frac{S}{H} \quad (3.8)$$

Gl.(3.5) folgt aus den obigen physikalischen Betrachtungen, die Übrigen folgen aus den Gl.(3.2) - (3.4).

2. Beschleunigerbetrieb. Die EMK des Generators ist in diesem Falle durch eine zusätzliche (Äussere) Potentialquelle, deren Spannung die EMK übertrifft, gesperrt, der Strom ist also gezwungen, entgegen der Richtung der induzierten EMK des Generators zu fließen (s. Abb. 3a). Die $\vec{j} \times \vec{B}$ -Kraft ist jetzt parallel zu der Geschwindigkeit, d. h. das Plasma wird beschleunigt. Das innere Produkt $\vec{j} \cdot \vec{E}$ ist positiv, dem Plasma wird Energie zugeführt. Wie in dem

vorherigen Falle, ist auch hier der Gradient des elektrostatischen Potentials in die $-y$ -Richtung gerichtet, ist aber grösser als die EMK:

$$-\infty \leq \Delta_H \varphi' \leq -1 \quad (3.9)$$

$$-\infty \leq \Delta_H \varphi^{*'} \leq 0 \quad (3.10)$$

$$-\infty \leq \Delta_S \varphi' \leq 0 \quad (3.11)$$

$$-\infty \leq \Delta_S \gamma' \leq 0 \quad (3.12)$$

3. Bremsbetrieb. Eine äussere Energiequelle ist in diesem Falle mit dem Generator in Reihe geschlossen. Die entsprechende Stromdichte ist grösser als die im Generatorbetrieb unter Kurzschlussbedingungen (s. Fig. 4a). Das Plasma wird gebremst, die $\bar{j} \times \bar{B}$ -Kraft ist grösser als die, die in einem normalen Generatorbetrieb zustande kommen kann. Dieser Vorgang kann also durch die folgenden Beziehungen beschrieben werden:

$$0 \leq \Delta_H \varphi' \leq \infty \quad (3.13)$$

$$1 \leq \Delta_H \varphi^{*'} \leq \infty \quad (3.14)$$

$$\beta \frac{S}{H} \leq \Delta_S \varphi' \leq \infty \quad (3.15)$$

$$\frac{S}{H} \leq \Delta_S \gamma' \leq \infty \quad (3.16)$$

B) Idealer Hall-Generator

In einem idealen Hall-Generator sind die gegenüberliegenden Elektroden in der y -Richtung kurzgeschlossen, für die Energieerzeugung wird die axiale EMK benutzt. Also gilt:

$$\Delta_H \varphi' \equiv 0 \quad (4.1)$$

und aus Gl.(2.2) folgt, dass

$$(1+\beta^2) \Delta_S \gamma' = \beta \Delta_S \varphi' + \frac{S}{H} \quad (4.2)$$

$$(1+\beta^2) \Delta_H \gamma' = -\frac{H}{S} \Delta_S \varphi' + \beta \quad (4.3)$$

Die Kombination der Gln.(4.2) und (4.3) liefert eine dritte Beziehung:

$$\frac{H}{S} \Delta_S \gamma' + \beta \Delta_H \gamma' = 1 \quad (4.4)$$

Zuerst werden auch hier die möglichen Betriebsweisen und die damit verbundenen Bereiche der Variablen $\Delta_S \gamma'$, $\Delta_H \gamma'$ und $\Delta_S \varphi'$ betrachtet.

1. Generatorbetrieb. In diesem Falle ändert sich die Spannung zwischen 0 (Kurzschluss) und βv_{BS} (Leerlauf). Damit ist der Bereich der entsprechenden Variablen durch die folgenden Gleichungen gegeben:

Kurzschluss

$$0 \leq \Delta_S \varphi' \leq \beta \frac{S}{H} \quad (4.5)$$

$$\frac{1}{1+\beta^2} \frac{S}{H} \leq \Delta_S \gamma' \leq \frac{S}{H} \quad (4.6)$$

$$\frac{\beta}{1+\beta^2} \geq \Delta_H \gamma' \geq 0 \quad (4.7)$$

Die entsprechenden Strom- und Feldrichtungen sind in Abb. 2b gezeigt.

2. Beschleunigerbetrieb. Im Gegensatz zu Faraday-Generatoren, wo der Strom im Beschleunigerbetrieb entgegengesetzt zu der induzierten EMK gerichtet ist, fliesst der Strom in diesem Falle parallel zu der induzierten (Hall-)EMK und wird grösser als der entsprechende Kurzschlussstrom. Daher ist das axiale elektrostatische Feld parallel (und der Gradient des entsprechenden elektrostatischen Potentials antiparallel) zur Richtung der Hall-EMK gerichtet. Wie man aus Gl.(4.2) ersehen kann, verursacht eine Verminderung von $\Delta_S \varphi'$ (es ändert sich zwischen dem Kurzschlusswert 0 und $-\infty$) auch einen Abfall von $\Delta_S \gamma'$, wodurch die $\vec{J}_y \times \vec{B}$ Bremskraft reduziert wird. Wenn $\Delta_S \varphi' = -S/\beta H$ erreicht wird, verschwindet der transversale Strom, und mit $\Delta_S \varphi' < -S/\beta H$ fliesst er in die entgegengesetzte Richtung. Es sind also in dieser Betriebsweise die folgenden Beziehungen gültig:

$$-\infty \leq \Delta_S \varphi' \leq 0 \quad (4.8)$$

$$-\infty \leq \Delta_S \gamma' \leq \frac{1}{1+\beta^2} \frac{S}{H} \quad (4.9)$$

$$+\infty \geq \Delta_H \gamma' \geq \frac{\beta}{1+\beta^2} \quad (4.10)$$

Die Feldrichtungen, die dieser Betriebsweise entsprechen, sind in Abb. 3b gezeigt. Die zusätzliche Potentialquelle ist in diesem Falle mit dem Generator in Reihe geschaltet.

3. Bremsbetrieb. Die äussere Energiequelle, deren EMK grösser als die des Generators ist, wird in diesem Falle parallel zum Generator angeschlossen (siehe Abb. 4b). Der Strom fliesst entgegen der Hall-EMK; die transversale EMK, die von diesem Strom induziert wird, ist parallel zu $\vec{v} \times \vec{B}$. Daher ist die transversale Stromdichte grösser als die in einem normalen Hall-Generator und auf das Plasma wirkt eine grössere Bremskraft. Dieser Zustand kann durch folgende Beziehungen beschrieben werden:

$$\beta \frac{S}{H} \leq \Delta_S \varphi' \leq \infty \quad (4.11)$$

$$\frac{S}{H} \leq \Delta_S \gamma' \leq \infty \quad (4.12)$$

$$0 \geq \Delta_H \gamma' \geq -\infty \quad (4.13)$$

*) Nur gültig, wenn Leerlaufspannung gleich vBH ist. Das ist z. B. der Fall in den Berechnungen, wenn nur die Effekte der Segmentierung betrachtet werden.

Vergleich von realen mit idealen Generatoren

Zu bemerken ist, dass die Gln.(3.1) bis (3.4) bzw. (4.1) bis (4.4), die die Beziehungen zwischen den transversalen und axialen Spannungen und Strömen der idealen Energieumwandler bestimmen, von der Betriebsweise des Energieumwandlers unabhängig sind. Diese Gleichungen sind besonders günstig für den Vergleich der Charakteristiken idealer Energieumwandler mit denen von realen Anordnungen. Es wird hier versucht, aufgrund dieser Beziehungen einige sogenannte "Qualitätsfaktoren" für Faraday- und Hall-Generatoren zu definieren.

A) Faraday-Generatoren

In Zusammenhang mit Faraday-Generatoren interessieren uns die relativen Größen der transversalen und axialen Spannungen und des transversalen Stromes im Vergleich mit den entsprechenden Werten eines idealen Generators.

1. Transversale Spannungen

1.a) Vergleich bei gleichen transversalen Gesamtströmen

In einem experimentellen Generator entspricht einem gegebenen Gesamtstrom (pro Elektrodenpaar) eine bestimmte Potentialdifferenz. Gesucht ist die Potentialdifferenz, die in einem idealen Generator bei gleichem Gesamtstrom (unter gleichen Bedingungen) auftritt. Das Verhältnis zwischen den zwei Spannungen, d. h. $\Delta_H \varphi' / \Delta_H \varphi'_{id}$ mit $\Delta_S \gamma' = \Delta_S \gamma'_{id}$ liefert den ersten "Qualitätsfaktor" eines Faraday-Generators:

$$Q_{F1} = \frac{\Delta_H \varphi'}{\Delta_H \varphi'_{id}} \bigg|_{\Delta_S \gamma'} = \frac{\Delta_H \varphi'}{\frac{H}{S} \Delta_S \gamma'_{id} - 1} = \frac{\Delta_H \varphi'}{\frac{H}{S} \Delta_S \gamma' - 1} \quad (5.1)$$

wobei $\Delta_H \varphi'$ und $\Delta_S \gamma'$ aus den entsprechenden Messwerten zu ermitteln sind.

1.b) Vergleich bei gleichen Belastungswiderständen

Den zweiten Qualitätsfaktor erhält man durch einen Vergleich der Spannungen in realen und idealen Generatoren unter der Voraussetzung von gleichen Belastungswiderständen. Diese Bedingung kann analytisch folgendermassen dargestellt werden:

$$\frac{R_a}{R_a + R_1} = - \frac{\Delta_H \varphi}{\sqrt{BH}} \quad (*)$$

$$R_a = - R_1 \frac{\Delta_H \varphi'}{1 + \Delta_H \varphi'} = - R_1 id \frac{\Delta_H \varphi'_{id}}{1 + \Delta_H \varphi'_{id}}$$

Aber

$$R_1 id = \frac{H}{\sigma \cdot sT} \quad \text{und} \quad R_1 = \frac{\Delta_H \varphi'^*}{T \Delta_S \gamma'}$$

*) Nur gültig, wenn Leerlaufspannung gleich \sqrt{BH} ist. Das ist z. B. der Fall in den Berechnungen, wenn nur die Effekte der Segmentierung betrachtet werden.

Daher ist das Verhältnis

$$\frac{R_{i \text{ id}}}{R_1} = \frac{1}{\sigma} \frac{H}{S} \frac{\Delta_S \gamma}{\Delta_H \varphi^*} = \frac{H}{S} \frac{\Delta_S \gamma'}{\Delta_H \varphi' + 1} = \frac{1 + \Delta_H \varphi'_{\text{id}}}{1 + \Delta_H \varphi'} \cdot \frac{\Delta_H \varphi'}{\Delta_H \varphi'_{\text{id}}} \quad (5.2a)$$

die Bedingung von gleichen Belastungswiderständen für Faraday-Generatoren. Aus dieser Gleichung folgt der zweite Qualitätsfaktor

$$Q_{F2} = \left. \frac{\Delta_H \varphi'}{\Delta_H \varphi'_{\text{id}}} \right|_{R_a} = \frac{H}{S} \Delta_S \gamma' - \Delta_H \varphi' \quad (5.2)$$

2. Transversale Ströme

2.a) Vergleich bei gleichen transversalen Spannungen

Man vergleicht in diesem Falle den Strom des experimentellen Generators mit dem eines idealen Generators bei gleichen Klemmspannungen

$$Q_{F3} = \left. \frac{\Delta_S \gamma'}{\Delta_S \gamma'_{\text{id}}} \right|_{\Delta_H \varphi'} = \frac{\Delta_S \gamma'}{\frac{S}{H} (\Delta_H \varphi'_{\text{id}} + 1)} = \frac{\frac{H}{S} \Delta_S \gamma'}{\Delta_H \varphi' + 1} \quad (5.3)$$

2.b) Vergleich bei gleichen Belastungswiderständen

Wie in 1.b), so ist auch hier der Qualitätsfaktor durch die Ströme, die in realen und idealen Generatoren gleichen Belastungswiderständen entsprechen, bestimmt. Es folgt aus den Gln.(3.3) und (5.2a), dass

$$Q_{F4} = \left. \frac{\Delta_S \gamma'}{\Delta_S \gamma'_{\text{id}}} \right|_{R_a} = \frac{H}{S} \Delta_S \gamma' - \Delta_H \varphi' \quad (5.4)$$

gleich Q_{F2} ist.

3. Axiale Spannungen

Der Wert der von dem Hall-Effekt induzierten axialen Spannung ist ein gutes Kennzeichen der Effektivität des Generators. Es gibt drei Möglichkeiten für den Vergleich dieser Spannung mit der eines idealen Generators: Bei gegebenem Strom in der transversalen Richtung, bei gegebener Spannung in der transversalen Richtung und bei gleichen Belastungswiderständen.

3.a) Vergleich bei gleichen transversalen Strömen

Der Qualitätsfaktor, der diesem Fall entspricht, ist durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$Q_{F5} = \left. \frac{\Delta_S \varphi'}{\Delta_S \varphi'_{\text{id}}} \right|_{\Delta_S \gamma'} = \frac{\Delta_S \varphi'}{\beta \Delta_S \gamma'_{\text{id}}} = \frac{\Delta_S \varphi'}{\beta \Delta_S \gamma'} \quad (5.5)$$

3.b) Vergleich bei gleichen transversalen Spannungen

In diesem Falle sind die folgenden Beziehungen zutreffend:

$$Q_{F6} = \frac{\Delta_S \varphi'}{\Delta_S \varphi'_{id}} \bigg|_{\Delta_H \varphi'} = \frac{\Delta_S \varphi'}{\beta \frac{S}{H} (\Delta_H \varphi'_{id} + 1)} = \frac{\Delta_S \varphi'}{\beta \frac{S}{H} (\Delta_H \varphi' + 1)} \quad (5.6)$$

3.c) Vergleich bei gleichen Belastungswiderständen

Wenn die zwei Generatoren (real und ideal) den gleichen Belastungswiderstand haben, wird das Verhältnis der entsprechenden axialen Spannungen durch die Kombination von Gln.(5.2a) und (3.4) definiert:

$$Q_{F7} = \frac{\Delta_S \varphi'}{\Delta_S \varphi'_{id}} \bigg|_{R_a} = \frac{\Delta_S \varphi'}{\beta \frac{S}{H} (\Delta_H \varphi'_{id} + 1)} = \frac{1}{\beta} \frac{\Delta_S \varphi'}{\Delta_S \gamma'} \left(\frac{H}{S} \Delta_S \gamma' - \Delta_H \varphi' \right) \quad (5.7)$$

Der Faktor Q_{F7} ist gleich dem Produkt der Faktoren Q_{F4} und Q_{F5} .

B) Hall Generatoren

Im Falle eines Hall-Generators sind die relativen Grössen der axialen Ströme und axialen Spannungen im Vergleich mit den Werten, die unter gleichen Bedingungen in einem idealen Hall-Generator erzeugt werden können, von besonderer Bedeutung.

1. Axiale Spannungen

1.a) Vergleich bei gleichen axialen Strömen

Es folgt aus Gl.(4.3), dass

$$\Delta_S \varphi'_{id} = \frac{S}{H} \left[\beta - (1+\beta^2) \Delta_H \gamma'_{id} \right] \quad \text{ist,}$$

und daher ist der entsprechende Qualitätsfaktor durch den Ausdruck

$$Q_{H1} = \frac{\Delta_S \varphi'}{\Delta_S \varphi'_{id}} \bigg|_{\Delta_H \gamma'} = \frac{\frac{H}{S} \Delta_S \varphi'}{\beta - (1+\beta^2) \Delta_H \gamma'} \quad (5.8)$$

gegeben.

1.b) Vergleich bei gleichen Belastungswiderständen

Zunächst wird hier ein Ausdruck, der der Bedingung gleicher Belastungswiderstände entspricht, abgeleitet. Diese Betrachtung ist nur für die Fälle gültig, in denen die Leerlaufspannung gleich βv_{BS} ist, wie z. B. in unserem mathematischen Modell. Dabei findet man die folgenden

Identitäten, die im Falle eines Hall-Generators gültig sind:

$$\frac{R_a}{R_a + R_i} = \frac{\Delta_S \varphi'}{\beta vBS} = \frac{1}{\beta} \frac{H}{S} \Delta_S \varphi' ;$$

daher ist

$$R_a = R_i \frac{\Delta_S \varphi'}{\beta \frac{S}{H} - \Delta_S \varphi'} = R_i \text{id} \frac{\Delta_S \varphi'_{\text{id}}}{\beta \frac{S}{H} - \Delta_S \varphi'_{\text{id}}} \quad (5.17)$$

In idealen und realen Hall-Generatoren sind die inneren Widerstände durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$R_{i \text{ id}} = (1+\beta^2) \frac{S}{\sigma_{HT}} , \quad R_i = \frac{\beta vBS - \Delta_S \varphi'}{T \Delta_{HY}}$$

Eine Kombination der obigen Gleichungen liefert den folgenden Ausdruck:

$$\frac{R_{i \text{ id}}}{R_i} = \frac{\Delta_S \varphi'}{\Delta_S \varphi'_{\text{id}}} \cdot \frac{\beta \frac{S}{H} - \Delta_S \varphi'_{\text{id}}}{\beta \frac{S}{H} - \Delta_S \varphi'} = \frac{(1+\beta^2) S}{\sigma_{HT}} \cdot \frac{T \Delta_{HY}}{\beta vBS - \Delta_S \varphi'} = (1+\beta^2) \frac{S}{H} \cdot \frac{\Delta_{HY}'}{\beta \frac{S}{H} - \Delta_S \varphi'}$$

Also ist die Beziehung

$$\Delta_S \varphi'_{\text{id}} \left[(1+\beta^2) \Delta_{HY}' + \frac{H}{S} \Delta_S \varphi' \right] = \beta \Delta_S \varphi' \quad (5.9a)$$

die Bedingung für gleiche Belastungswiderstände von Hall-Generatoren. Damit kann der nächste Qualitätsfaktor folgendermassen dargestellt werden:

$$Q_{H2} = \frac{\Delta_S \varphi'}{\Delta_S \varphi'_{\text{id}}} \Bigg|_{R_a} = \frac{1}{\beta} \left[(1+\beta^2) \Delta_{HY}' + \frac{H}{S} \Delta_S \varphi' \right] \quad (5.9)$$

2. Axiale Ströme

2.a) Vergleich bei gleichen axialen Spannungen

Da

$$\Delta_{HY}'_{\text{id}} = \frac{1}{1+\beta^2} \left(\beta - \frac{H}{S} \Delta_S \varphi'_{\text{id}} \right)$$

ist, gilt

$$Q_{H3} = \frac{\Delta_{HY}'}{\Delta_{HY}'_{\text{id}}} \Bigg|_{\Delta_S \varphi'} = \frac{(1+\beta^2) \Delta_{HY}'}{\beta - \frac{H}{S} \Delta_S \varphi'} \quad (5.10)$$

2.b) Vergleich bei gleichen Belastungswiderständen

Unter der Voraussetzung, dass die Leerlaufspannung (EMK) gleich βvBS ist, liefern die Gleichungen (4.3) und (5.9a) die folgende Beziehung:

$$Q_{H4} = \frac{\Delta_{HY}'}{\Delta_{HY}'_{\text{id}}} \Bigg|_{R_a} = \frac{1}{\beta} \left[(1+\beta^2) \Delta_{HY}' + \frac{H}{S} \Delta_S \varphi' \right] \quad (5.11)$$

Verbindung zwischen dem Wirkungsgrad eines Generators und den Qualitätsfaktoren

Bemerkenswert ist, dass Q_{H2} und Q_{H4} (bzw. Q_{F2} und Q_{F4}) identisch sind. Es lohnt sich, den Grund dieser Identität zu erörtern.

Für jeden Generator kann man einen Wirkungsgrad η_P definieren, wobei

$$\eta_P = \frac{P}{P_{id}} = \frac{I \Delta_a \varphi}{(I \Delta_a \varphi)_{id}} = \left(\frac{I}{I_{id}} \right)^2 \left(\frac{R_a}{R_a id} \right) = \left(\frac{\Delta_a \varphi}{\Delta_a \varphi_{id}} \right)^2 \left(\frac{R_a id}{R_a} \right) \quad (5.12)$$

ist; P ist die Leistung des Generators, I und $\Delta_a \varphi$ sind der Gesamtstrom bzw. der Potentialabfall durch den (äußeren) Belastungswiderstand. Unter der Bedingung $R_a = R_a id$ erhält man

$$\begin{aligned} Q_{F2} &= Q_{F4} = \sqrt{\eta_{PF}} \\ Q_{H2} &= Q_{H4} = \sqrt{\eta_{PH}} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Numerische Ergebnisse

Um die Spannungs- und Stromverluste, die von der endlichen Segmentierung verursacht werden, abzuschätzen, werden die Gln.(1.6a), (1.6c) und (1.8) für verschiedene Generatorgeometrien und Hall-Parameterwerte mit Hilfe einer IBM 7090 Rechenmaschine numerisch gelöst. Für jeden berechneten Fall wurde die Verteilung des Stromes und des elektrostatischen Potentials bestimmt, die durch die Verteilungen festgestellten Gesamtcharakteristiken (Potentialdifferenz zwischen zwei Elektroden, Gesamtstrom des Generators) wurden dann für die Berechnung der Qualitätsfaktoren verwendet. Die Ergebnisse sind in Form von Kurven in den Abb. 4 bis 12b dargestellt.

a) Faraday-Generatoren. Die Abb. 4 bis 8 entsprechen Faraday-Generatoren mit verschiedenen S/H-Verhältnissen. Der normierte Gesamtstrom wurde in diesen Berechnungen konstant erhalten ($\Delta_S \gamma' = 0,1$), die transversalen und axialen Spannungen ebenso wie die Qualitätsfaktoren sind als Funktionen des Hall-Parameters β dargestellt.

Wenn der Strom konstant gehalten wird und β zunimmt, fällt die Klemmenspannung ($-\Delta_S \varphi'$) und damit die Leistung des Generators von einem Maximalwert bei $\beta = 0$ auf Null (Kurzschluss) bei einem bestimmten β -Wert. Die Charakteristiken des Faraday-Generators sind bei diesem kritischen β -Wert identisch mit denen eines Hall-Generators im Leerlaufbetrieb ($\Delta_H \gamma' = 0$, $\Delta_H \varphi' = 0$).

Die Qualitätsfaktoren, die der transversalen Spannung und dem transversalen Strom entsprechen, fallen mit zunehmendem β ab. Es lohnt sich festzustellen, dass Q_{F3} (Vergleich der Ströme bei gleichen Spannungen) identisch mit dem Verhältnis der inneren Widerstände ($R_1 id / R_1$) ist. Von den Qualitätsfaktoren, die der axialen Spannung entsprechen, nimmt Q_{F5}

bei wachsendem β zu. Der Zuwachs von Q_{F5} wird dadurch verursacht, dass man sich den Kurzschlussbedingungen nähert (die induzierte Hall-Spannung ist maximal, wenn der Generator in der y-Richtung kurzgeschlossen ist) und bedeutet in keinem Falle, dass sich die Charakteristiken des Generators mit zunehmendem β verbessern. Das kann man auch folgendermassen beweisen: Wenn die Kurzschlussbedingung erreicht ist, arbeitet der Generator wie ein Hall-Generator im Leerlauf. Die axiale Spannung eines Hall-Generators ist aber unter diesen Bedingungen durch Q_{H1} charakterisiert. Ein Vergleich von Q_{F5} mit Q_{H1} ($\Delta_H \varphi' = 0$, $\Delta_H \gamma' = 0$) zeigt, dass Q_{F5} unrealistisch hoch ist und daher für die Charakterisierung der Faraday-Generatoren nicht benutzt werden kann.

Ein Vergleich der Abbildungen 5, 6, 7 und 8 miteinander zeigt, dass der kritische β -Wert, bei dem $\Delta_H \varphi' = 0$, d. h. keine Belastung möglich ist, sich vergrössert, wenn S/H zunimmt (bei konstantem $\Delta_S \gamma'$). Dieses, im ersten Augenblick widerspruchsvolle Ergebnis, kann folgendermassen erklärt werden:

Die Bedingung $\Delta_S \gamma' = 0,1 = \text{konst}$ bedeutet nicht, dass zwei Generatoren mit verschiedenen S/H-Verhältnissen den gleichen Gesamtstrom haben. Die Gesamtströme ändern sich proportional zu H. Die entsprechende Änderung von ($\Delta_H \varphi'$) kann man aus der folgenden Betrachtung erkennen:

$$- \Delta_H \varphi' = 1 - \Delta_H \varphi^{*'} ; \quad \Delta_H \varphi^{*'} = (1/Q_{F3}) I R_i \text{ id}$$

Wenn man zwei Generatoren mit verschiedenen S/H vergleicht, gilt:

$$\frac{(H \Delta_H \varphi^{*'})_2}{(H \Delta_H \varphi^{*'})_1} = \frac{(Q_{F3})_1}{(Q_{F3})_2} \cdot \frac{H_2}{H_1} \cdot \frac{\Delta_S \gamma'_2}{\Delta_S \gamma'_1} \cdot \frac{(H/S)_2}{(H/S)_1} ,$$

oder

$$- \Delta_H \varphi' = 1 - \frac{\text{konst}}{Q_{F3}} \left(\frac{H}{S} \right) , \text{ wobei}$$

$$\text{konst} \equiv \left[Q_{F3} \cdot \frac{\Delta_H \varphi^{*'}}{\Delta_S \gamma'} \cdot \left(\frac{S}{H} \right) \right]_1$$

und der Index "2" ausgelassen ist. Da Q_{F3} sich langsamer ändert als S/H, fällt demnach $-\Delta_H \varphi'$ ab, wenn H/S zunimmt. Das Verhalten der entsprechenden Qualitätsfaktoren kann man aufgrund ähnlicher Betrachtungen erklären.

b) Hall-Generatoren. Die Charakteristiken der Hall-Generatoren sind in den Abb. 9a bis 12b als Funktionen des S/H-Verhältnisses und des Hall-Parameters β dargestellt. Die Abbildungen 9a, 10a, 11a und 12a ergeben die normierten Gesamtströme in den x- und y-Richtungen als Funktionen der axialen Potentialdifferenz im ganzen Betriebsbereich des Generators (Kurzschluss: $\Delta_S \varphi' = 0$, Leerlauf: $\Delta_H \gamma' = 0$) für drei verschiedene β -Werte.

Die Abbildungen 9b, 10b, 11b und 12b stellen die entsprechenden Änderungen der verschiedenen Qualitätsfaktoren mit $\Delta_S \varphi'$ wiederum als die unabhängige Variable dar, wobei β der Parameter ist. Beim Vergleich der Charakteristiken von zwei Generatoren mit verschiedenen S/H-Verhältnissen sollte man bedenken, dass die Gesamtcharakteristiken durch H als Vergleichslänge normiert sind. Eine Leerlaufspannung $\Delta_S \varphi' = 0,165$ mit S/H = 1/5, ($\beta = 1$) entspricht $\Delta_S \varphi' = 0,825$ mit S/H = 1/1, wenn S = 1 = konst ist.

Ich bin Frau I. Heiss für die Hilfe bei den numerischen Rechnungen, Frau H. Stade und Herrn R. Franzel für die Ausführung der Zeichnungen zu Dank verpflichtet.

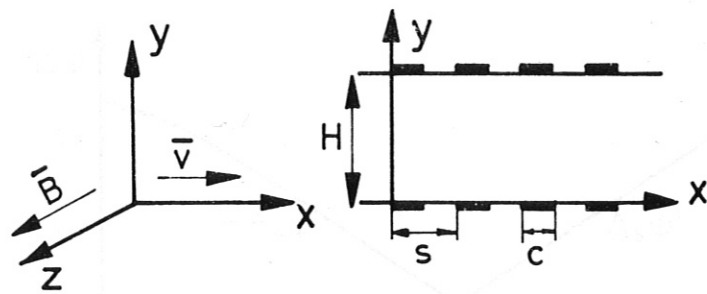


Abb.1 Feldrichtungen und Generatorgeometrie

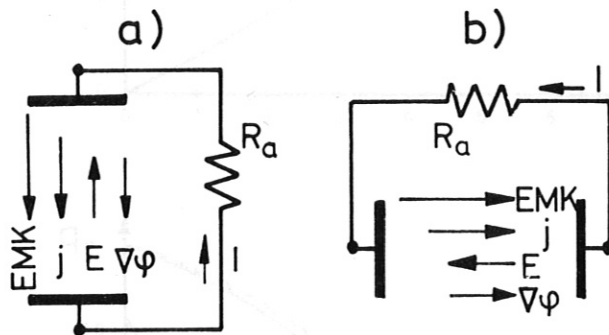


Abb. 2 Generatorbetrieb

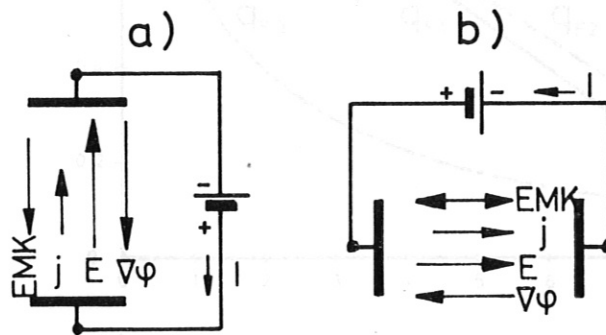


Abb. 3 Beschleunigerbetrieb

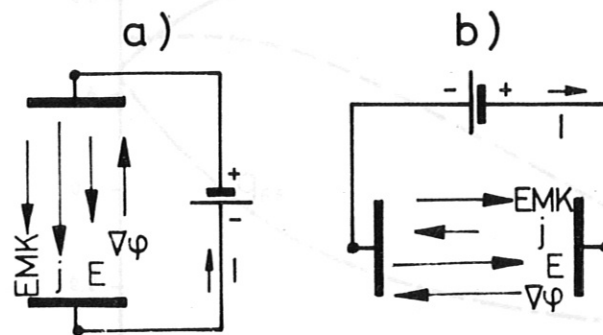
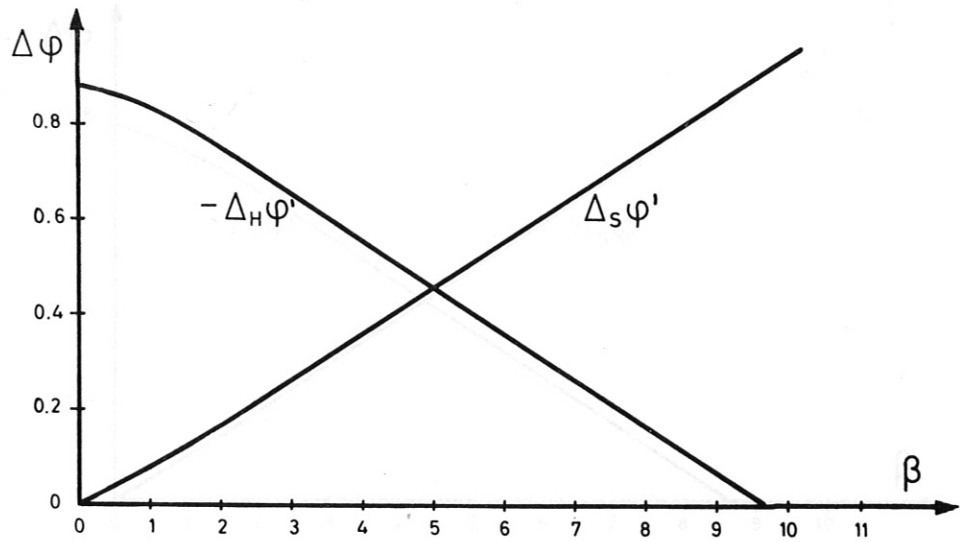


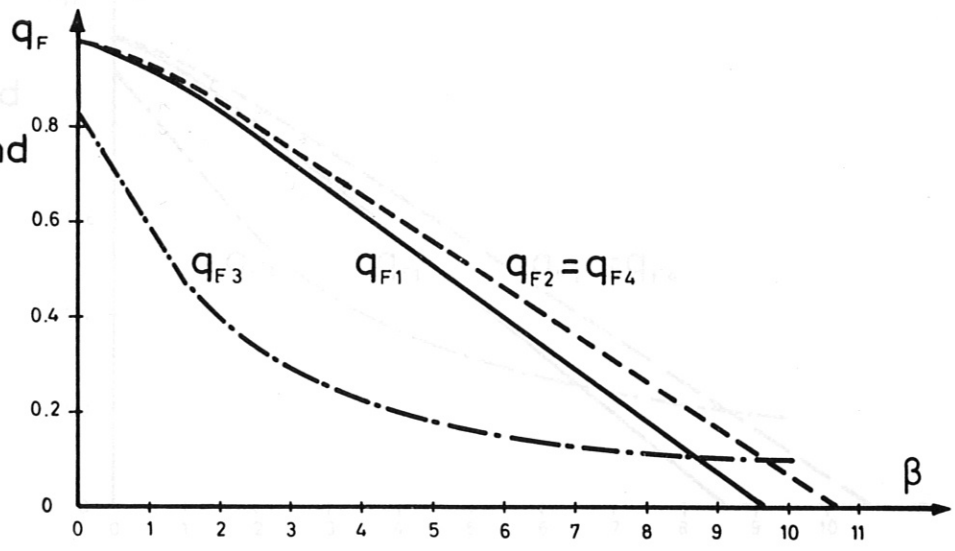
Abb. 4 Bremsbetrieb

Abb. 5

Abb. 6
 FARADAY-Generator
 20x20
 $\Delta_s \gamma' = 0.1$
 $S/H = 1$
 $C/S = 1/2$
 $C/S = 1/2$



Transvers.
 Transvers. und
 Spannung und
 Strom



Achsiale
 Spannung

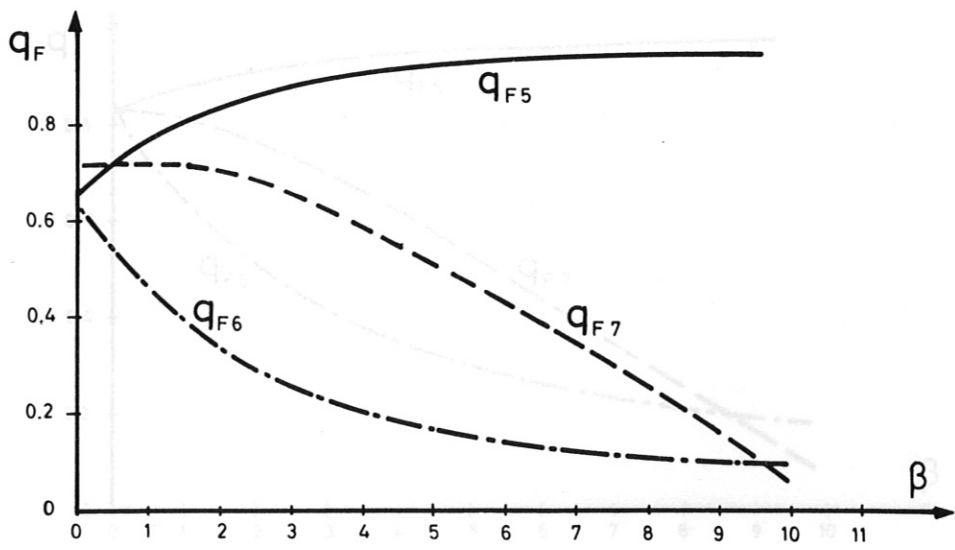


Abb. 6

FARADAY-

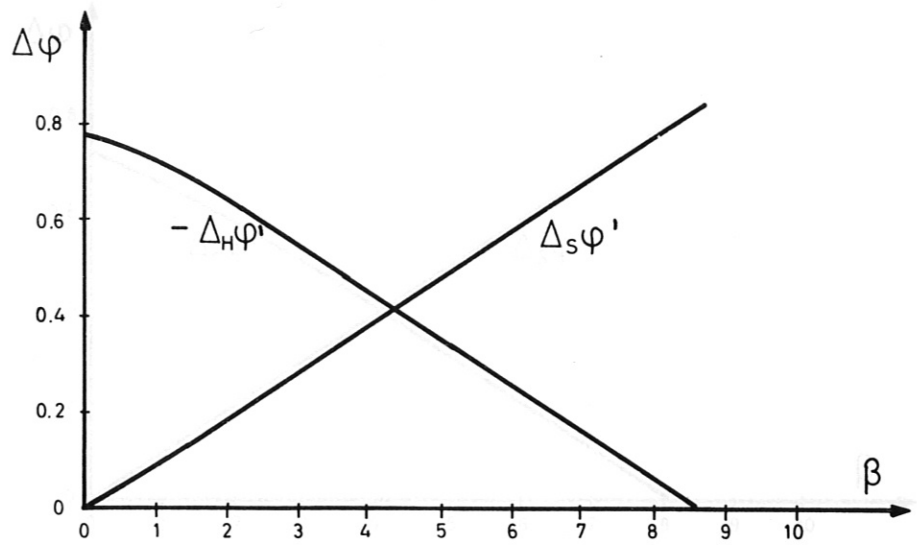
Generator

16x 32

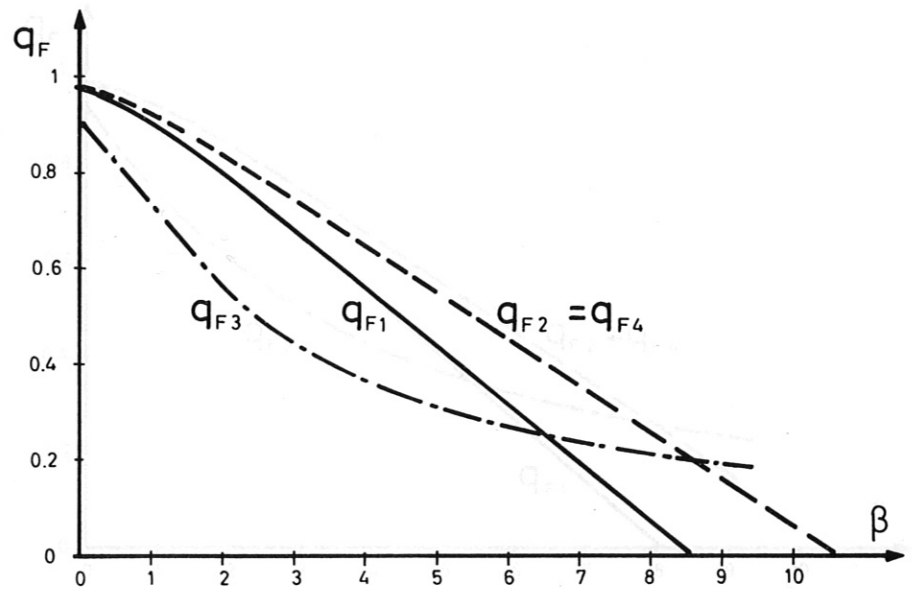
$\Delta_s \gamma' = 0.1$

$S/H = 1/2$

$C/S = 1/2$



Transvers.
Spannung und
Strom



Achsiale
Spannung

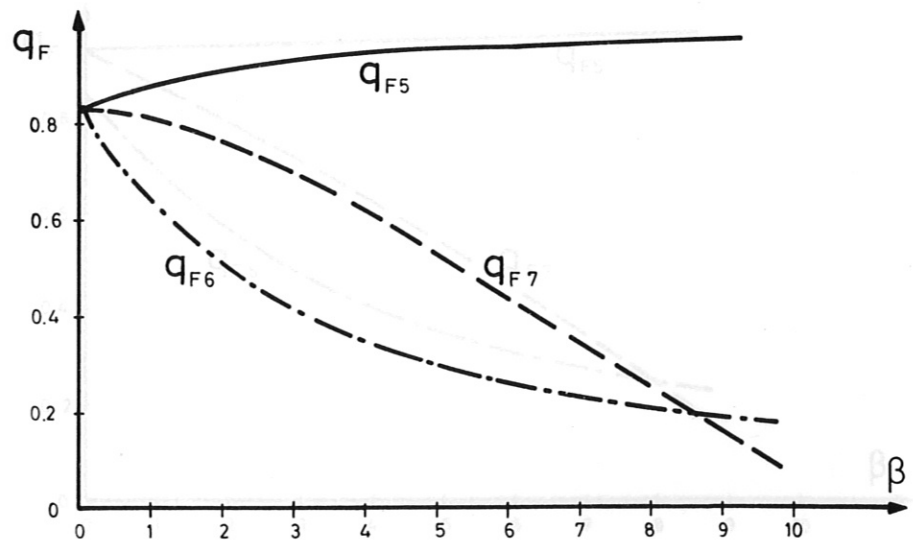
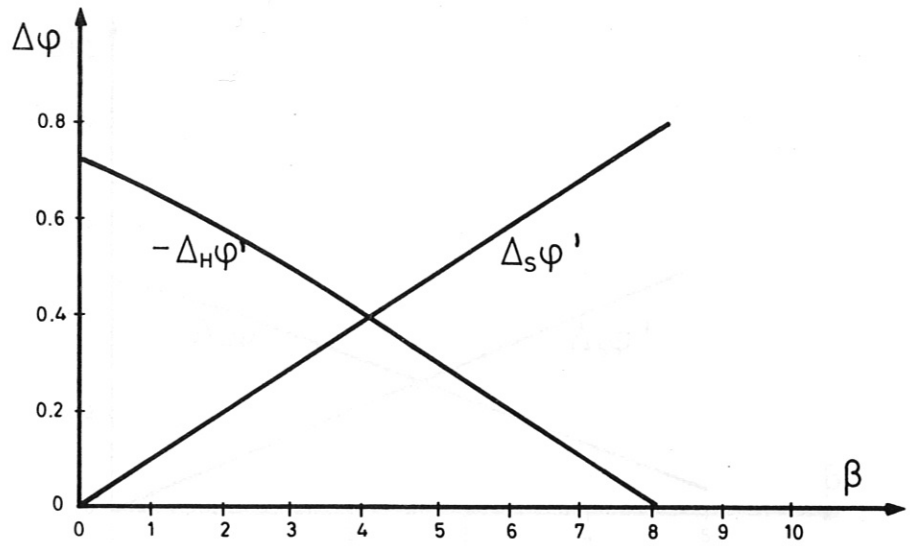
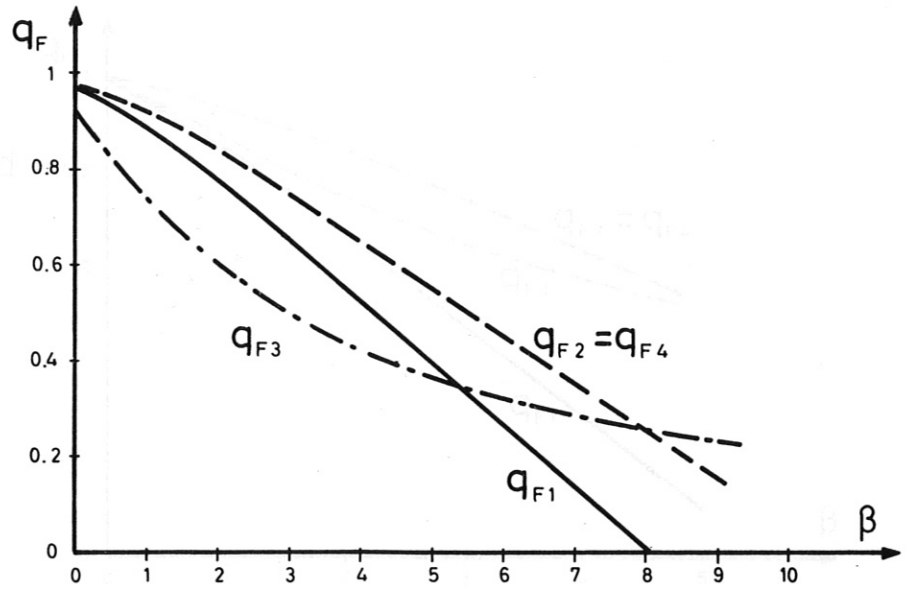


Abb. 7

FARADAY-Generator
 16x40
 $\Delta_s \gamma' = 0.1$
 $S/H = 2/5$
 $C/S = 1/2$



Transvers.
 Spannung und
 Strom



Achsiale
 Spannung

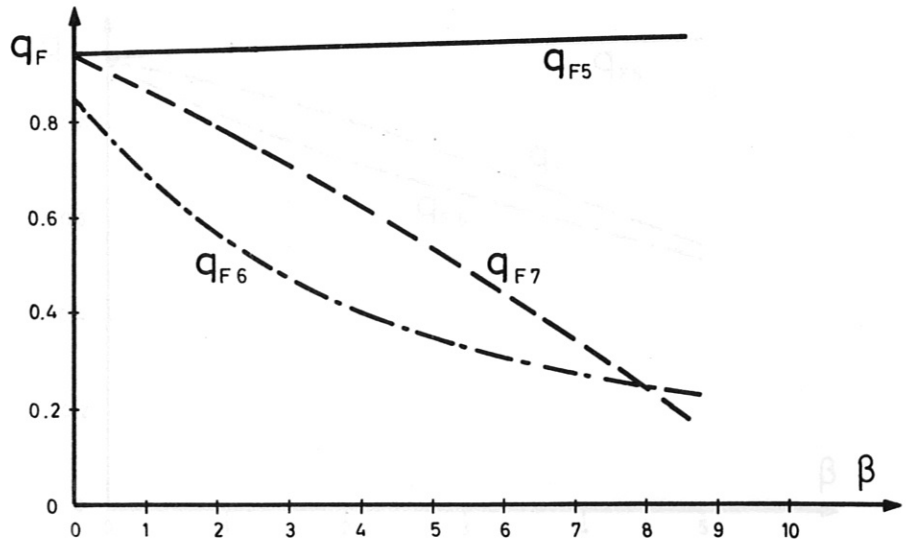
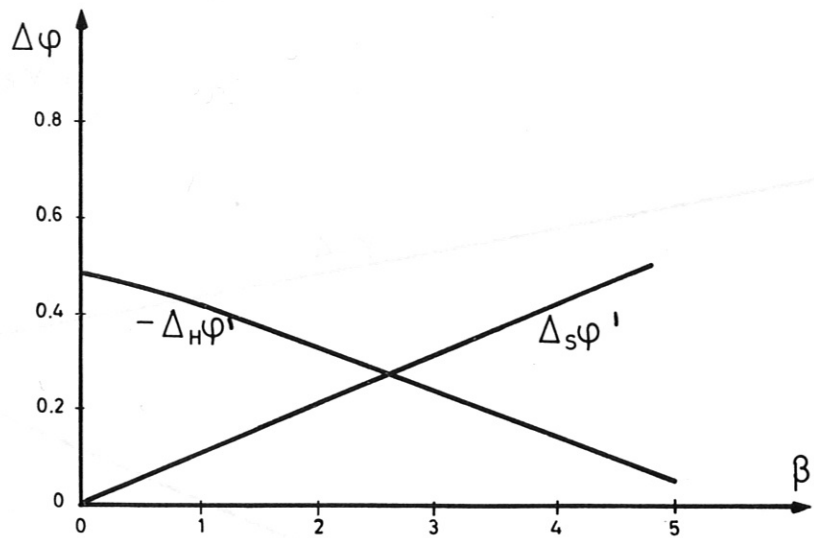
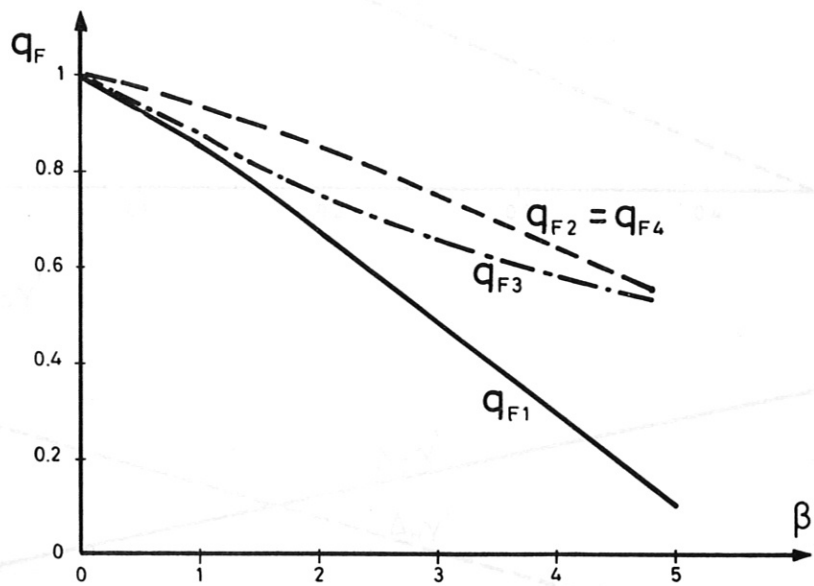


Abb. 8
 FARADAY-
 Generator
 12x60
 $\Delta_S \gamma' = 0.1$
 $S/H = 1/5$
 $C/S = 1/2$



Tranvers.
 Spannung und
 Strom



Achsiale
 Spannung

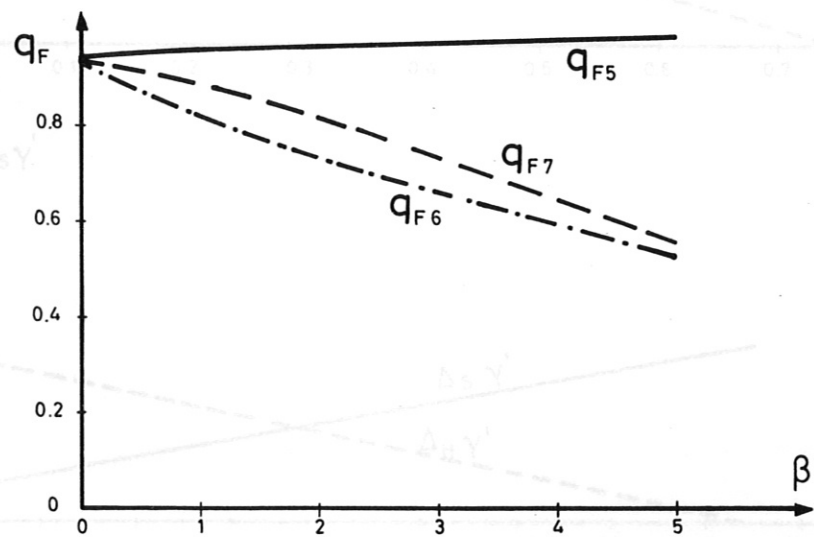
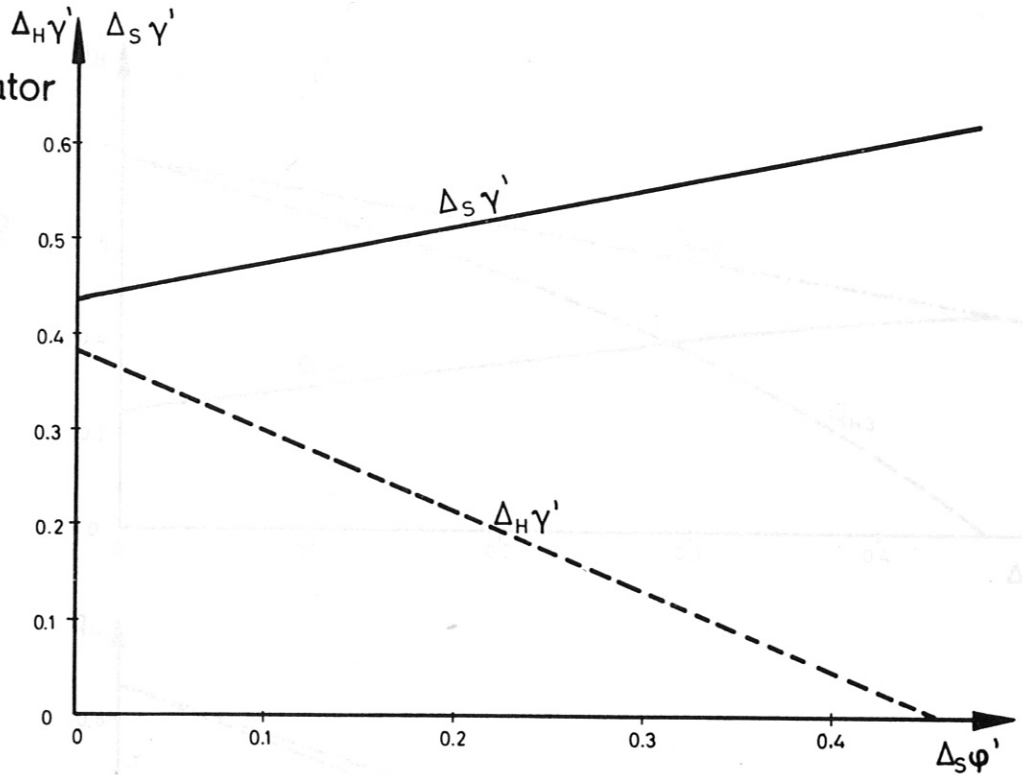


Abb. 9a

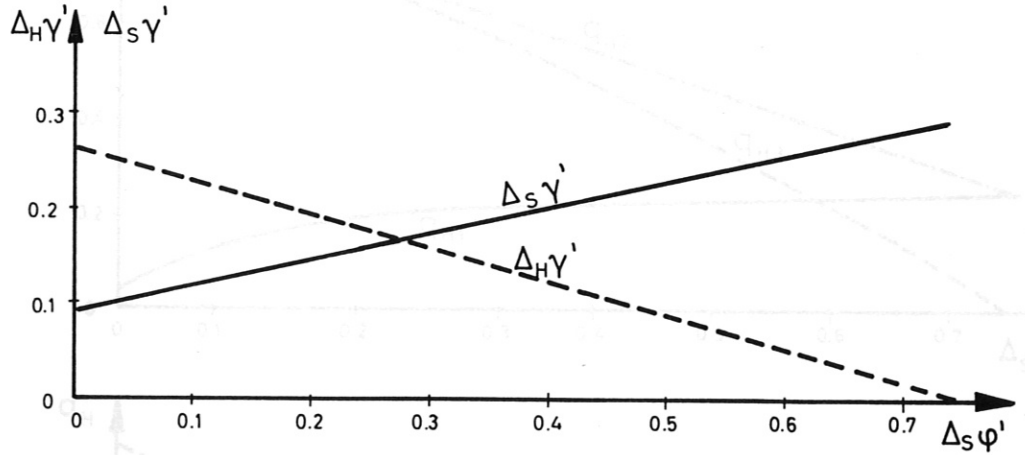
HALL - Generator

$S/H = 1$
 $C/H = 1/2$

$\beta = 1$



$\beta = 3$



$\beta = 5$

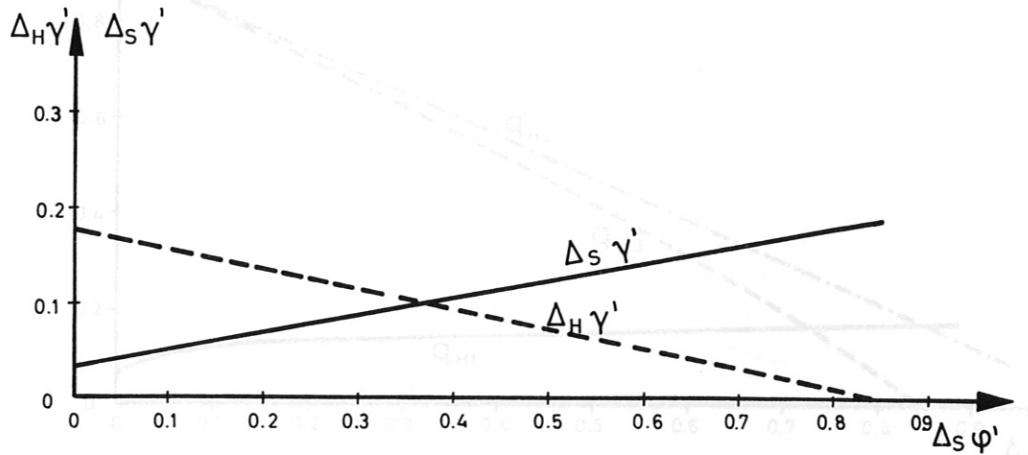
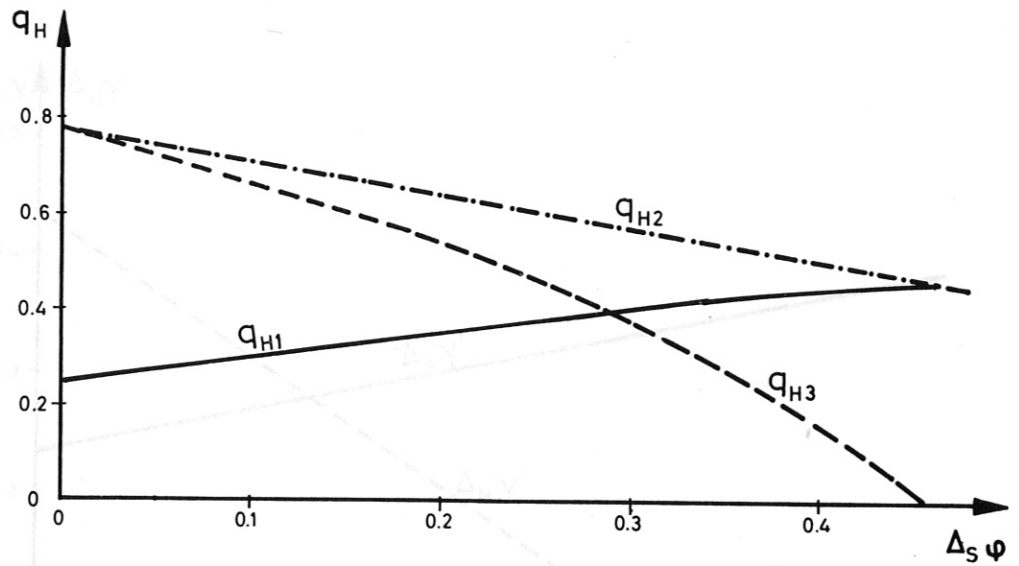


Abb. 9 b

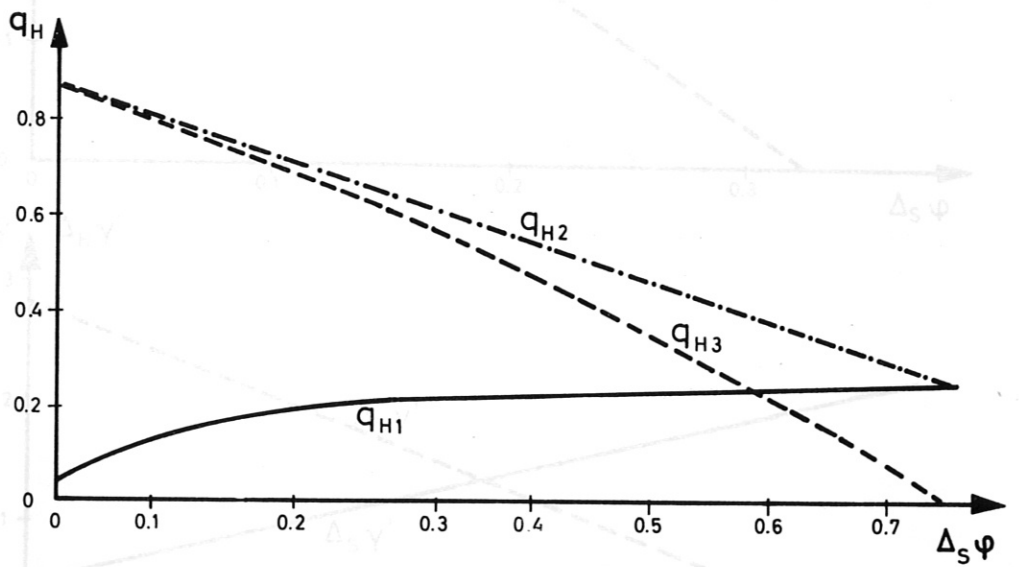
HALL -
Generator

$S/H = 1$
 $C/S = 1/2$

$\beta = 1$



$\beta = 3$



$\beta = 5$

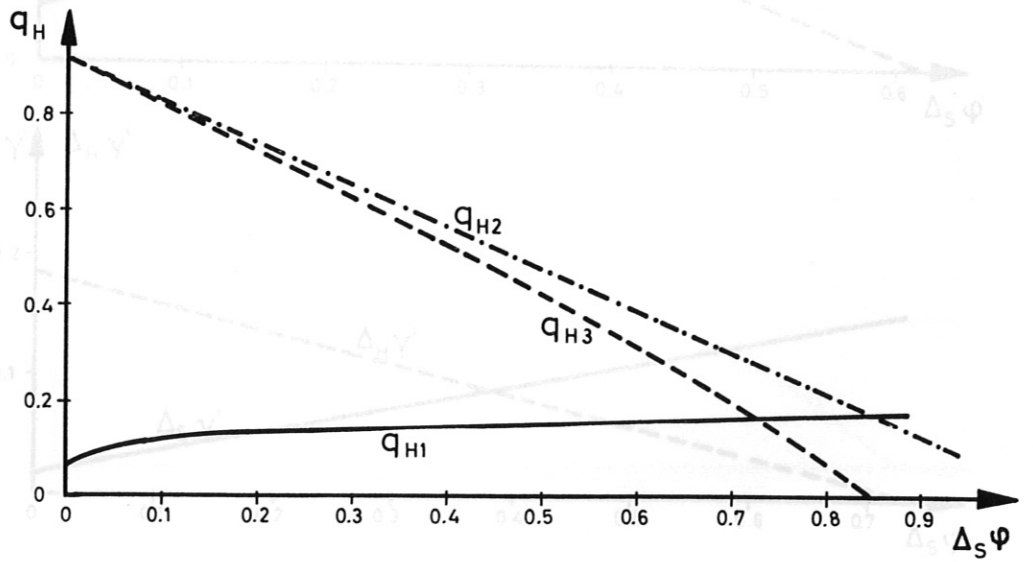
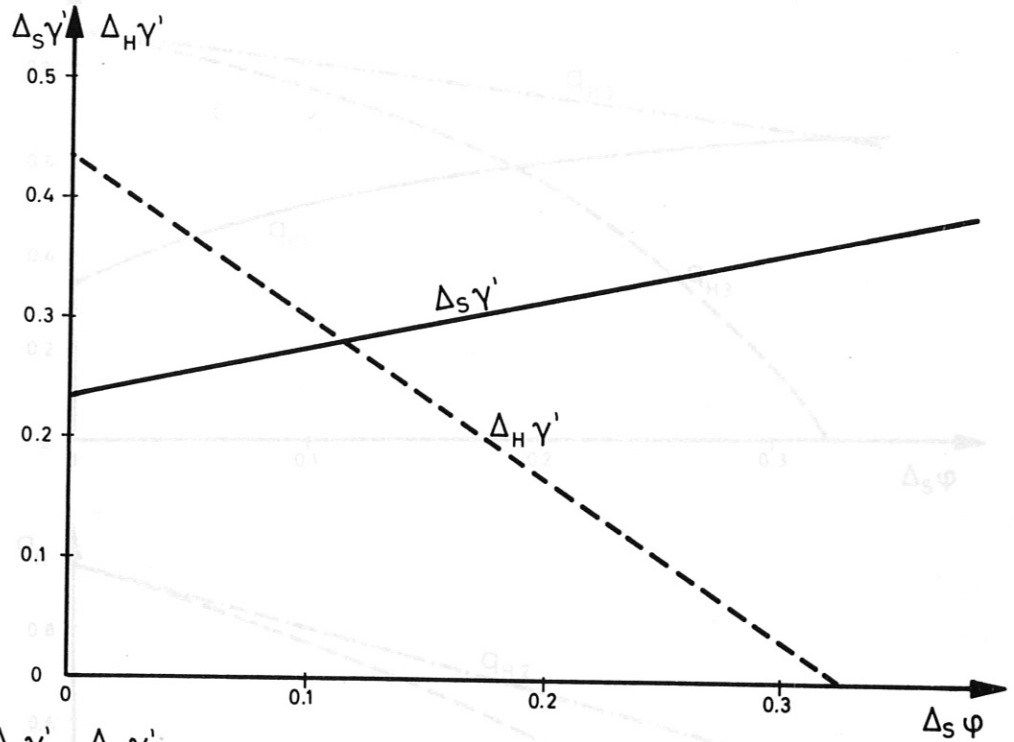


Abb. 10a

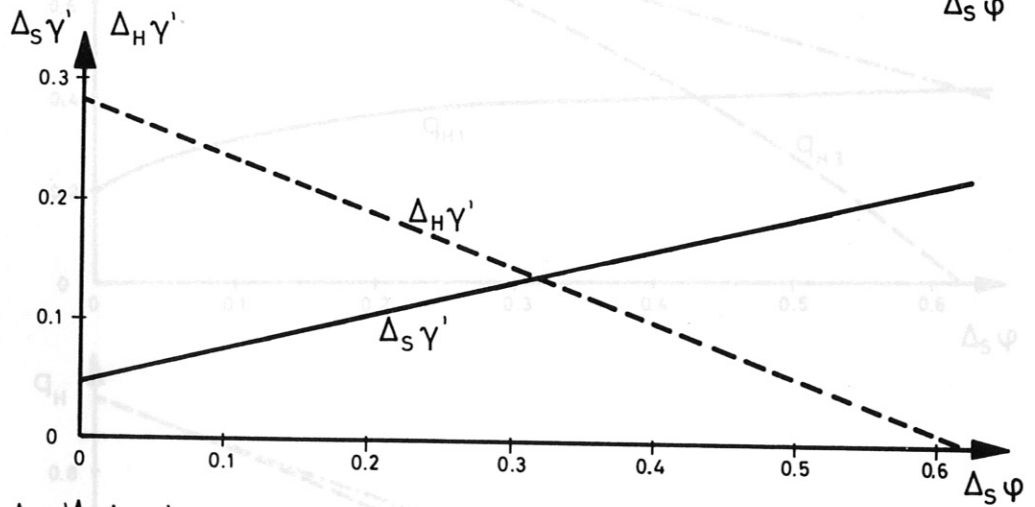
HALL -
Generator

$S/H = 1/2$
 $C/S = 1/2$

$\beta = 1$



$\beta = 3$



$\beta = 5$

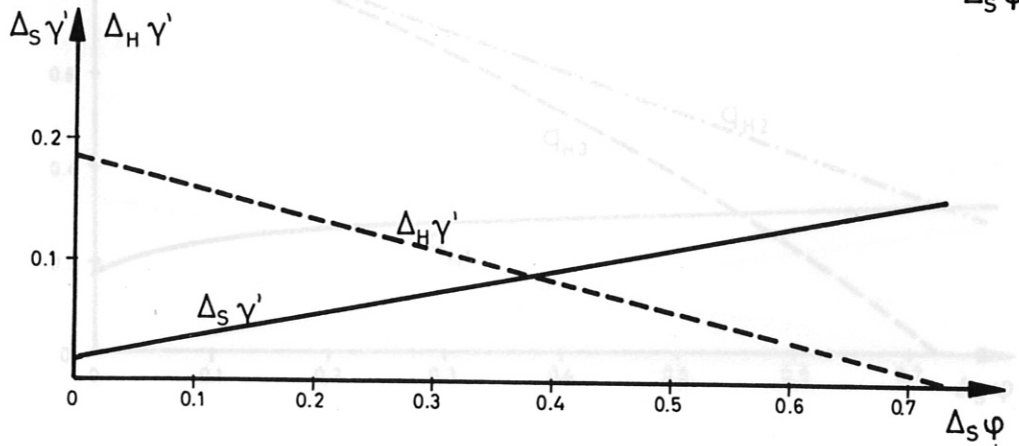
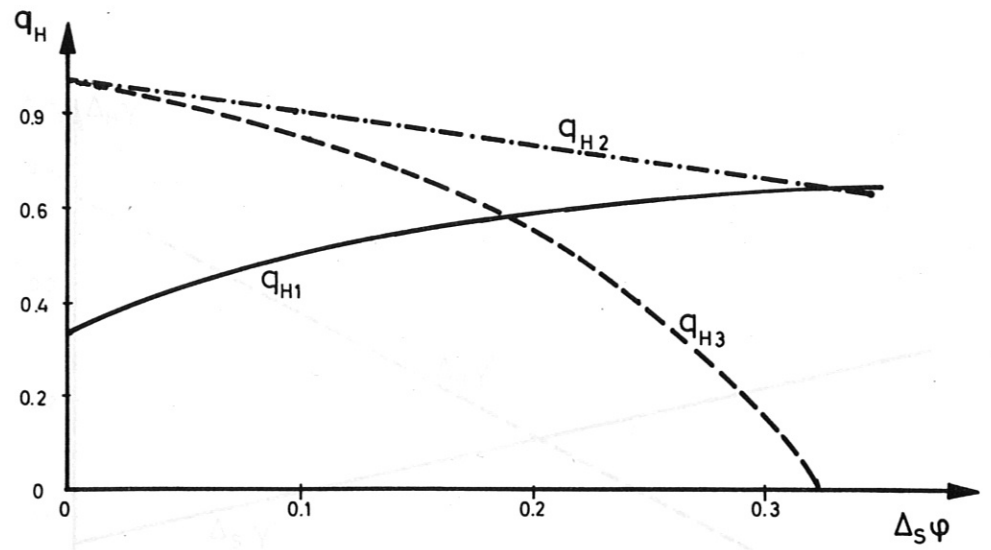


Abb. 10 b

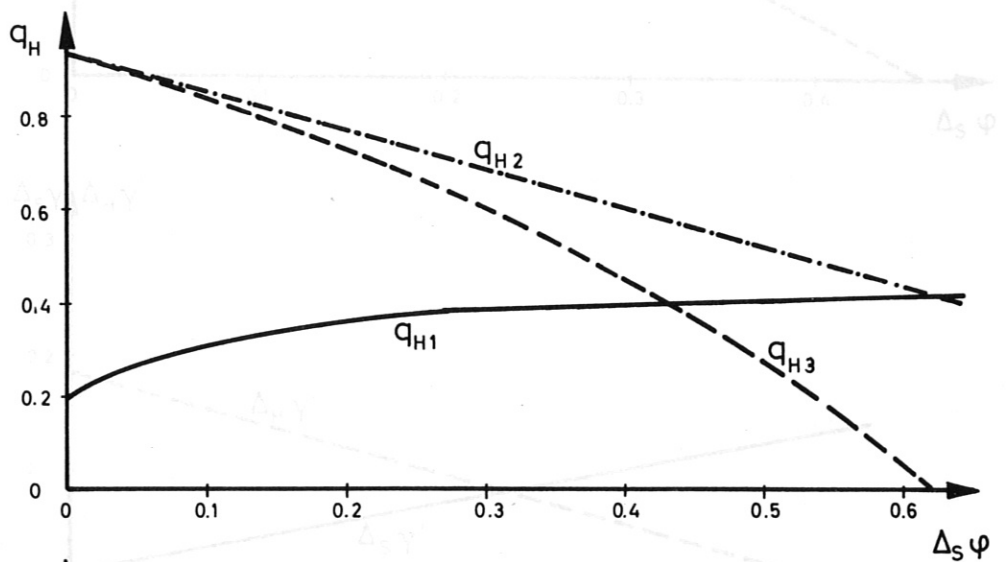
HALL -
Generator

$S/H = 1/2$
 $C/S = 1/2$

$\beta = 1$



$\beta = 3$



$\beta = 5$

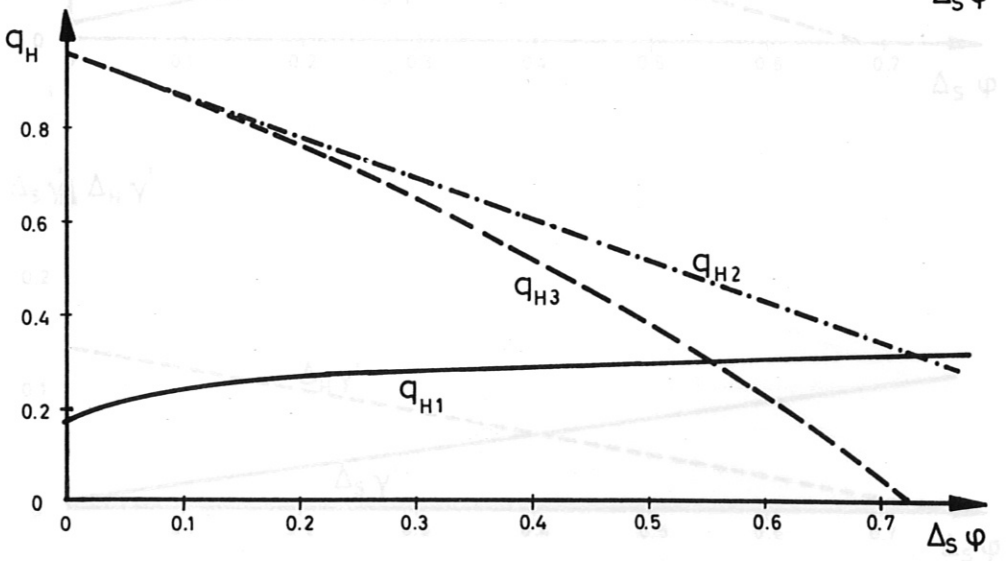
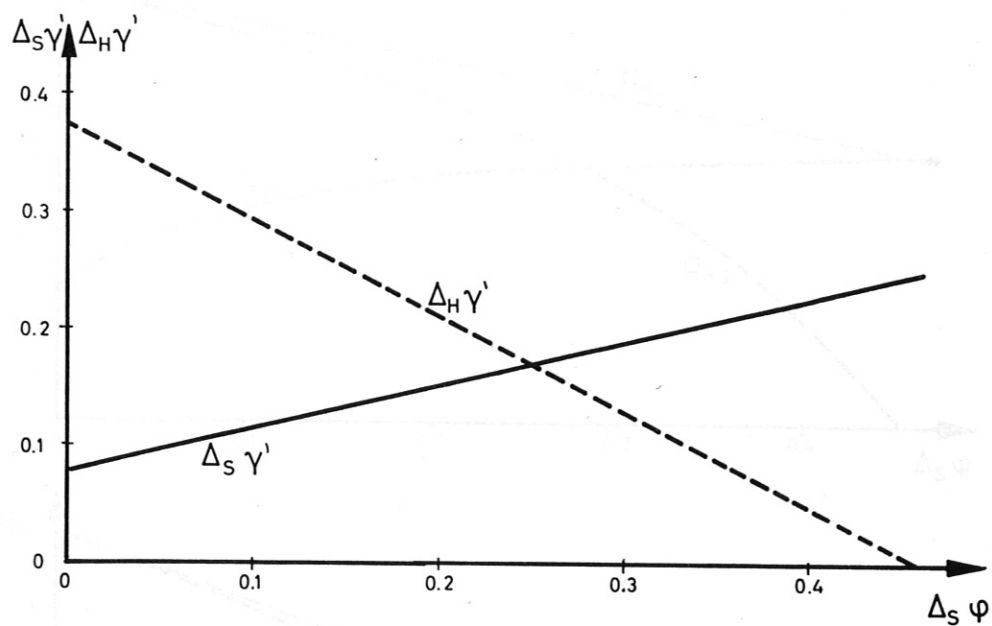


Abb. 11 a

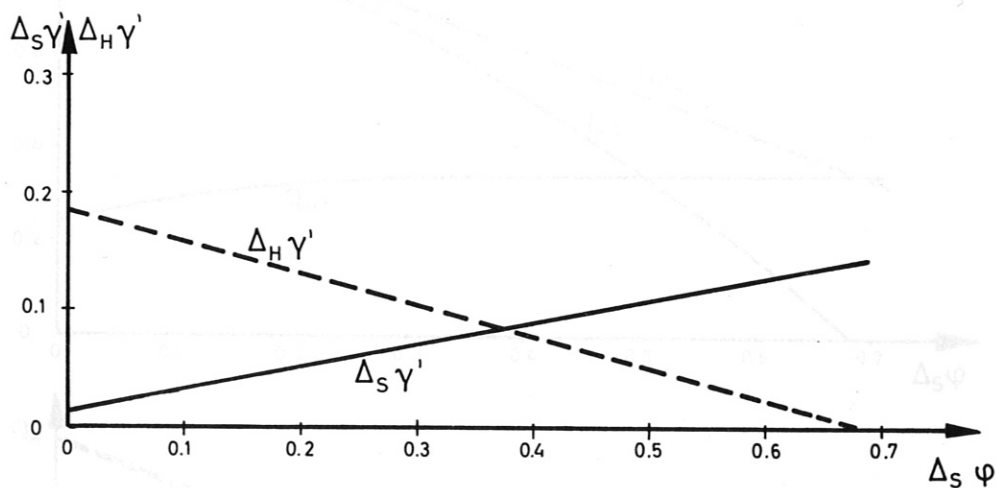
HALL -
Generator

S/H = 2/5
C/S = 1/2

$\beta = 2$



$\beta = 5$



$\beta = 7$

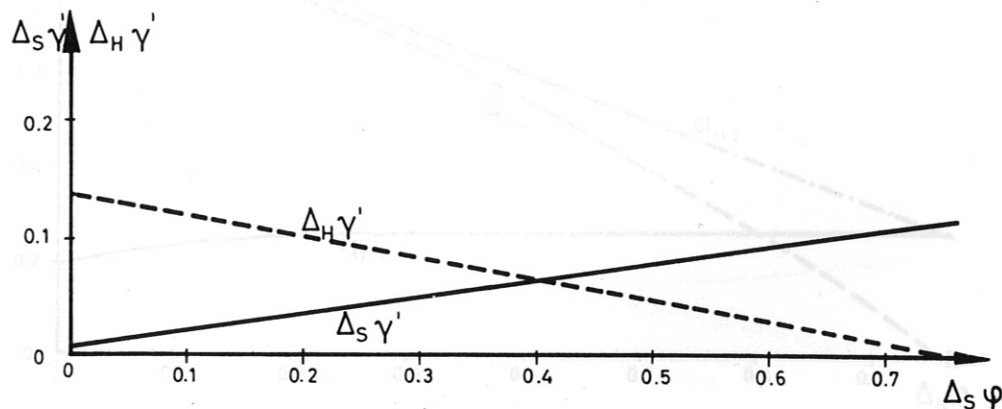
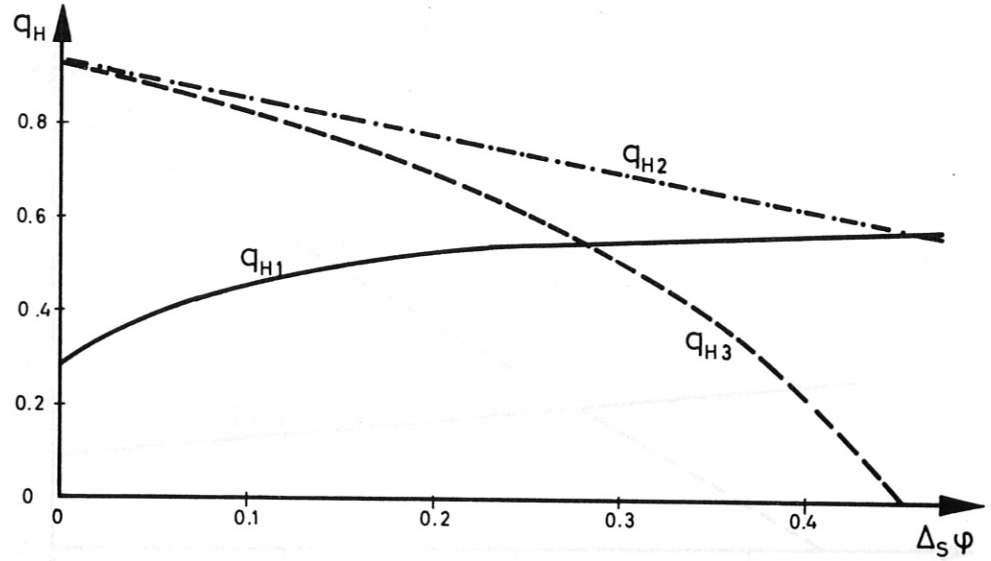


Abb. 11 b

HALL -
Generator

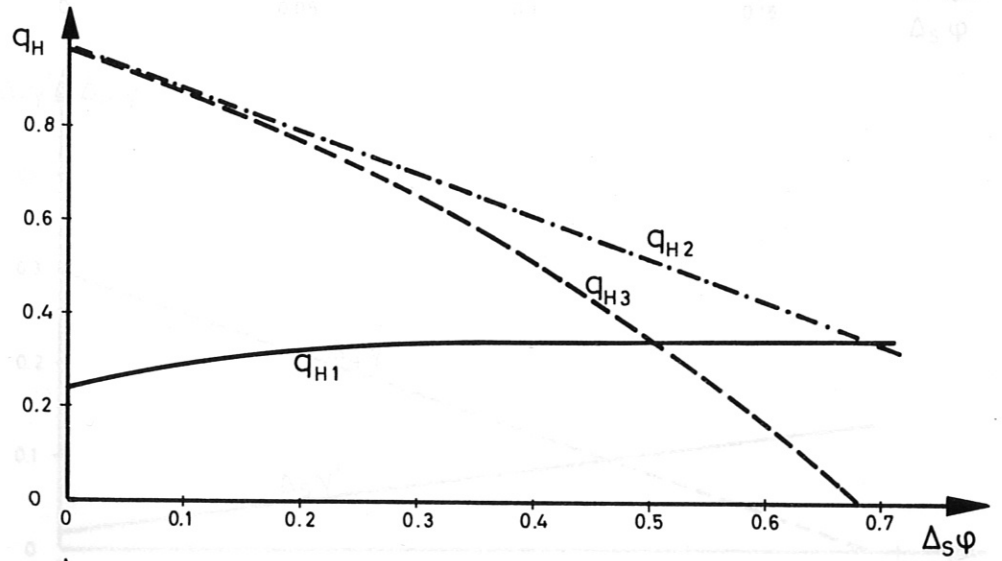
$S/H = 2/5$
 $C/S = 1/2$

$\beta = 2$



$\beta = 5$

$\beta = 3$



$\beta = 7$

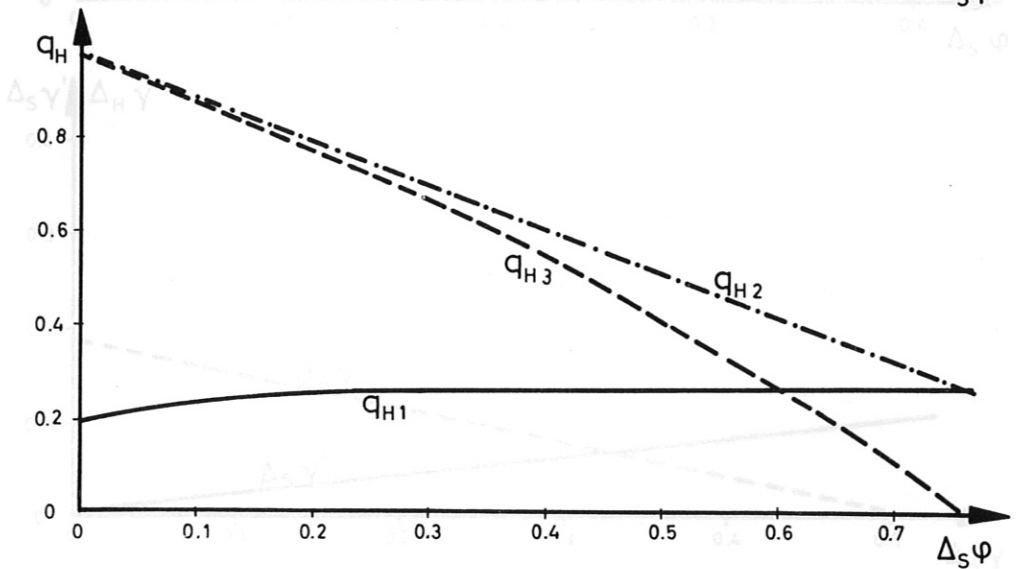
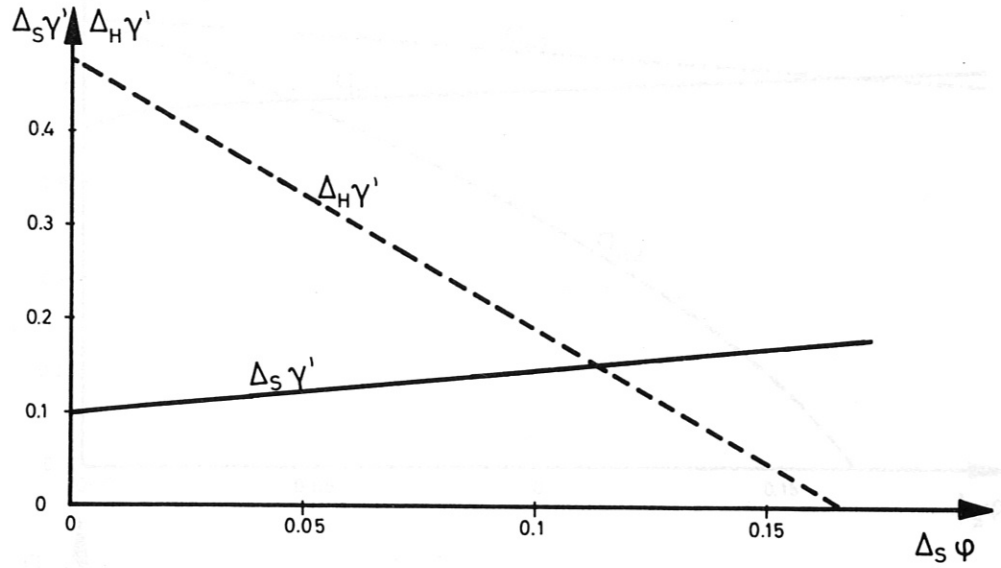


Abb. 12 a

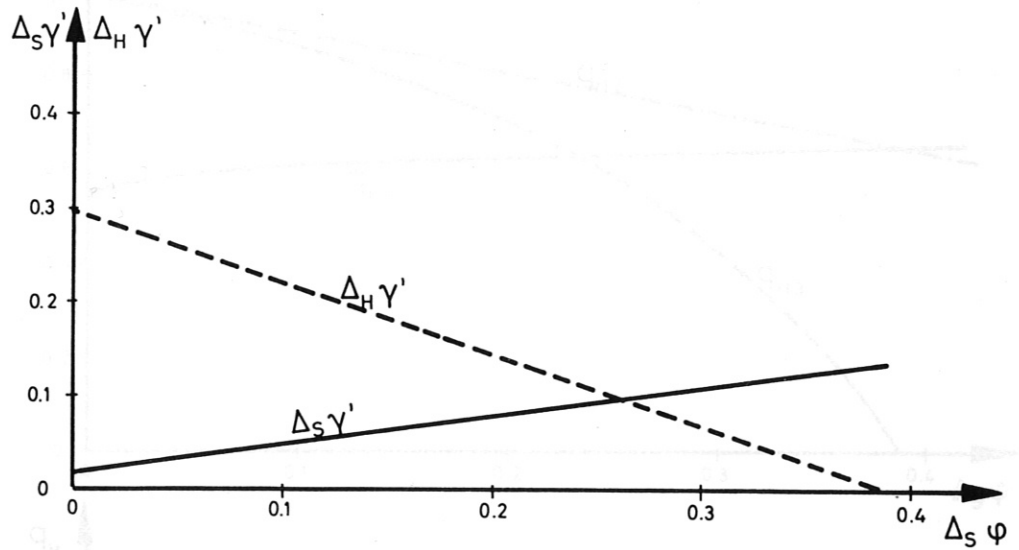
HALL -
Generator

$S/H = 1/5$
 $C/S = 1/2$

$\beta = 1$



$\beta = 3$



$\beta = 5$

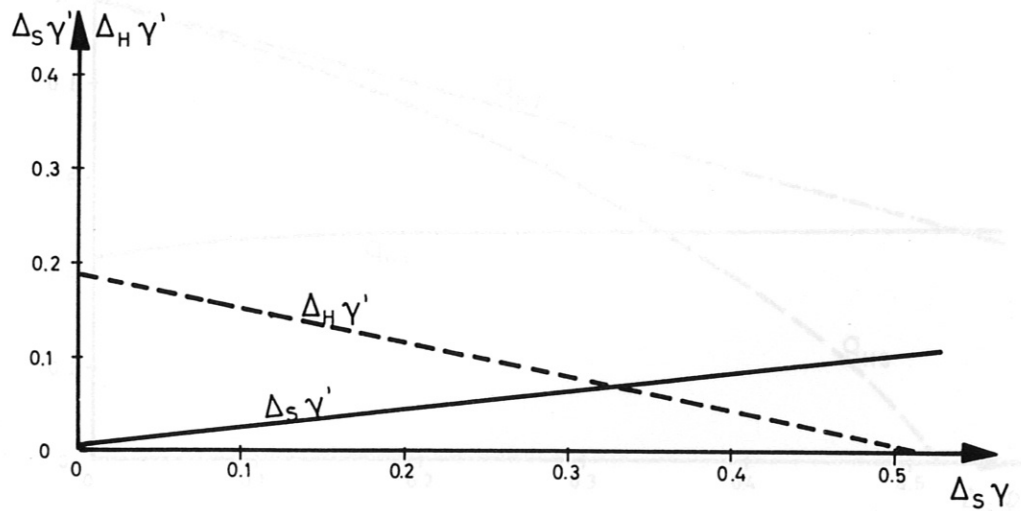
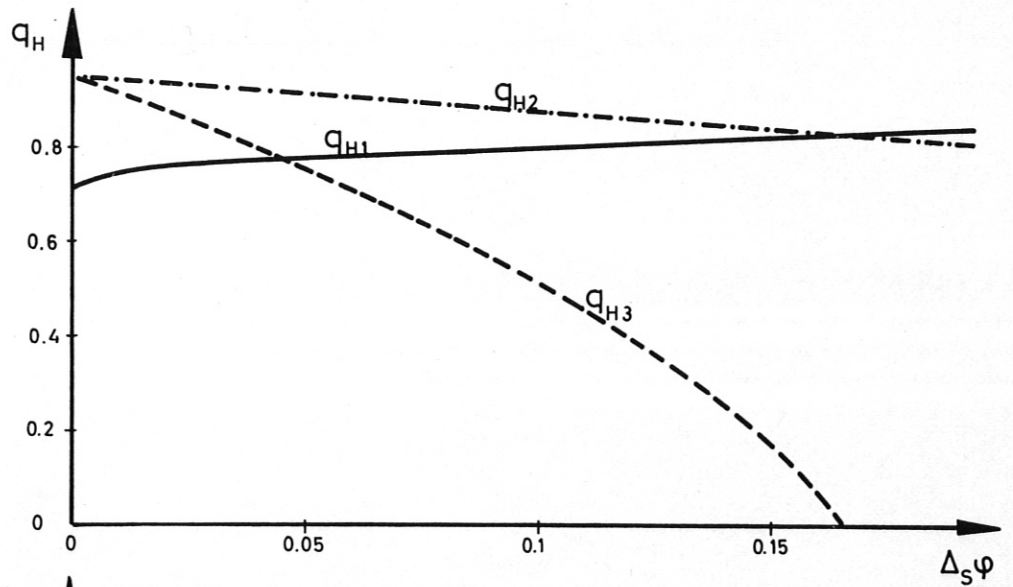


Abb. 12 b

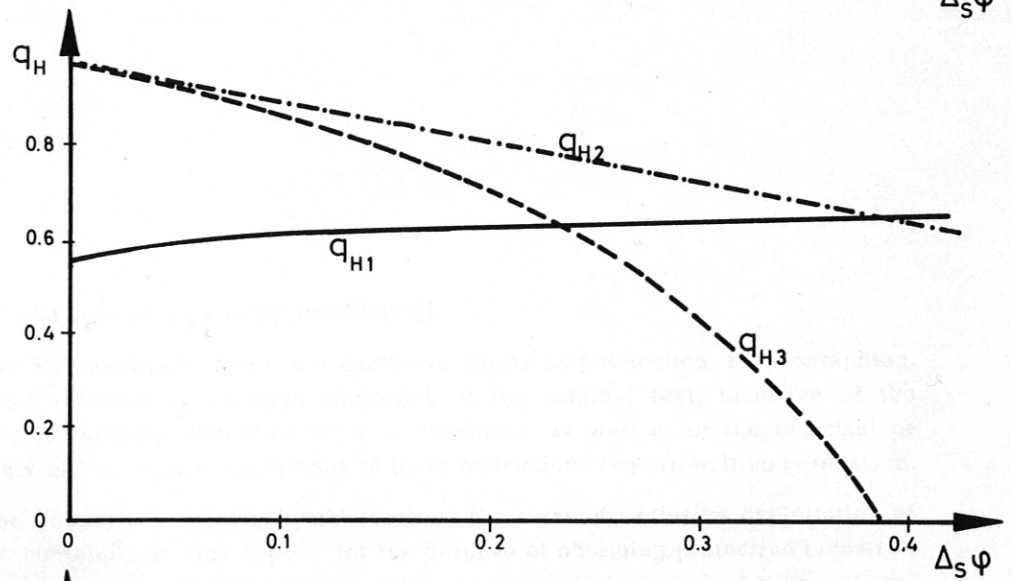
HALL -
Generator

$S/H = 1/5$
 $C/S = 1/2$

$\beta = 1$



$\beta = 3$



$\beta = 5$

