

# INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Gleichgewicht und Stabilität eines Plasmas  
mit Oberflächenströmen

(Equilibrium and Stability of a Plasma  
with Surface Currents)

Horst Wobig

IPP 6/53

Juli 1966

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

ABSTRACT: In the following paper we investigate the equilibrium and the stability of toroidal plasma configurations which were found by F. Meyer and H.U. Schmidt [8]. These so-called M- and S-surfaces are characterized by a vanishing total azimuthal current ( $J_{\alpha z} = 0$ ). Starting point is the model of a field-less plasma with surface currents. From the equilibrium condition  $B^2 = 8\pi p$  we obtain a differential equation for the surface  $S$ .

$$\sum_{i,k} g^{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} = 1$$

(  $g_{ik}$  = metric tensor of  $S$ ,  $\phi: \vec{B} = \nabla \phi$  on  $S$   
 $p$  = plasma pressure,  $x^i$  ( $i=1,2$ ) = surface parameter)

The surface  $S$  is described by its distance  $r(x^1, x^2)$  to a closed reference line. If  $\phi(x^1, x^2)$  is given, the equation above yields a differential equation for  $r(x^1, x^2)$

$$g_{ik} = g_{ik} \left( r, \frac{\partial r}{\partial x^1}, \frac{\partial r}{\partial x^2} \right)$$

In the first part of this paper we show how to obtain approximately a solution of this equation. The stability is investigated using the energy principle of magnetohydrodynamics.

It is shown, that the equilibrium surfaces calculated by Meyer and Schmidt are unstable against pure interchange perturbations ( $\delta \vec{B} = 0$ )

Furthermore a stability criterion for interchange disturbances is given. In the limit of a vanishing aspect ratio (linear bumpy  $\mathcal{J}$ -pinch) we also consider perturbations which change the magnetic field ( $\delta \vec{B} \neq 0$ )

We obtain instability for perturbations with constant amplitude along the magnetic field lines. The growth rates are estimated.

# I n h a l t s v e r z e i c h n i s

---

	<u>Seite</u>
I. Einleitung	1
II. Modell und Problemstellung	3
III. Gleichgewicht zwischen Plasma und Magnetfeld	5
IV. Stabilität des Plasmagleichgewichts	14
V. M-und-S-Flächen	22
a) Gleichgewicht	22
b) Konstruktion eines Hilfstorus	26
VI. Stabilität des M-und-S-Torus	30
a) Austauschstörungen	30
b) Störungen mit Feldänderung	32
VII. Gewellter Thetapinch	37
a) Knickinstabilität	39
b) Torus mit kleinem Aspektverhältnis ( $\alpha \ll 1$ )	42
c) Anwachsrate	43
VIII. Schlußbemerkungen	46

---

## I. Einleitung

In den Experimenten zur kontrollierten Kernfusion sind toroidale Gleichgewichte zwischen Plasma und Magnetfeld von besonderem Interesse. Nach den Gleichungen der Magnetohydrodynamik muß das Magnetfeld  $\vec{B}$ , das dem Plasmadruck  $p$  das Gleichgewicht hält, ganz in den Flächen  $p = \text{const}$  liegen und darf im Plasmavolumen keine Singularitäten besitzen. Nach einem Satz der Topologie [1] läßt sich aber nur eine zweifach zusammenhängende Fläche singularitätenfrei von einem Vektorfeld überdecken. Hieraus folgt also, daß die Druckflächen  $p = \text{const}$  toroidale Flächen sein müssen.

Es sind nun in den letzten Jahren verschiedentlich solche toroidalen Gleichgewichtskonfigurationen berechnet worden, wobei immer Näherungsmethoden angewandt wurden, um die Gleichungen der Magnetohydrostatik zu lösen.

$$\begin{aligned}\vec{j} \times \vec{B} &= \text{grad } p \\ \text{rot } \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \text{div } \vec{B} &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

( $\vec{j}$  = Stromdichte,  $p$  = Plasmadruck,  $\vec{B}$  = Magnetfeld.)

Bei der sogenannten Entwicklung nach kleinen  $\beta$  ( $\beta = \frac{8\pi p}{B^2}$ ) geht man in nullter Näherung von einem Vakuummagnetfeld  $\vec{B}_0$  aus im ersten Schritt die Rückwirkung der Plasmaströme auf das Feld  $\vec{B}_0$ . Die bekanntesten Beispiele für diese Art von Gleichgewichten mit  $\beta \ll 1$  sind der "Stellarator" [2], "Tokamak" [3], "Bumpy torus" [4].

Bei der zweiten Klasse von toroidalen Gleichgewichten macht man von dem Pincheffekt Gebrauch. In diesem Fall sind aber die Ströme im Plasma so groß, daß das Vakuumfeld  $\vec{B}_0$  durch diese Plasmaströme erheblich gestört wird. Die Entwicklung nach kleinem  $\beta$  ist nicht möglich. In diesem Fall benutzt man gerne das Modell, in dem die Plasmaströme nur in einer dünnen Schicht auf der Plasmaoberfläche fließen, so daß sich also die Berechnung dieses Gleichgewichts im wesentlichen auf die Berechnung dieser stromführenden Schicht reduziert.

Dieses Modell wurde theoretisch von R. Kippenhahn [5], R. Lüst und E. Martensen [6], L. Biermann et al. [7], F. Meyer und H.U. Schmidt [8] untersucht. Die vorliegende Untersuchung ist eine Fortsetzung dieser früheren Arbeiten und befaßt sich im wesentlichen mit den sogenannten M-und-S-Flächen [8]. Die M-und-S-Konfigurationen sind durch einen verschwindenden Gesamtstrom in azimuthaler Richtung  $I_{az} = 0$  charakterisiert und stellen das toroidale Analogon zu dem gewöhnlichen linearen Thetapinch dar. Man kann daher ein M-und-S-Gleichgewicht auch als toroidalen Thetapinch bezeichnen. Experimentell sind solche Gleichgewichte von E. Remy et al. [9] untersucht worden, wobei die Möglichkeit eines solchen toroidalen Gleichgewichts bestätigt wurde.

In der vorliegenden Arbeit soll nun die in [7] gefundene Klasse von M-und-S-Flächen verallgemeinert und ihr Stabilitätsverhalten untersucht werden.

Ich danke Herrn Professor A. Schlüter für die Anregung zu dieser Arbeit. Ebenso schulde ich Herrn Dr. D. Pfirsch für zahlreiche Diskussionen herzlichen Dank.

## II. Modell und Problemstellung

In Wirklichkeit kann nun eine solche stromführende Schicht auf der Oberfläche des Plasmas nicht unendlich dünn sein, da sie ja aus um die Feldlinien gyrierenden Teilchen aufgebaut wird. Einfache Abschätzungen über die Dicke der Randschicht [10] führen auf das geometrische Mittel zwischen Ionen- und Elektronengyroradius ( $\delta \approx \sqrt{\rho_i \rho_e}$ ). Weiterhin muß man beachten, daß auf Grund der endlichen Leitfähigkeit das Magnetfeld in das Plasma hineindiffundieren kann und auf diese Weise die Randschicht verbreitert. Dieser Effekt nimmt aber mit steigender Temperatur ab und ist bei Fusionstemperaturen ( $kT \approx 10$  keV) während der erforderlichen Einschlußzeit des Plasmas vernachlässigbar. Wir können daher erwarten, daß das obige Modell brauchbare Aussagen liefert, solange wir uns auf Dimensionen größer als einige Ionengyroradien beschränken. Dies ist besonders für die Stabilitätsuntersuchung von Wichtigkeit. In Arbeiten von M.N. Rosenbluth et al. [11, 12] wurde gezeigt, daß die Berücksichtigung des endlichen Ionengyroradius stabilisierend wirkt, sobald die Wellenlänge der betrachteten Störung gegenüber dem Ionengyroradius hinreichend klein ist. Hingegen liefern ältere Untersuchungen von J.B. Bernstein et al. [16] im Rahmen der unendlich dünnen Randschicht grundsätzlich Instabilität, sobald die Randschicht ungünstig gekrümmt ist, d.h. der Krümmungsmittelpunkt im Innern des Plasmas liegt.

Es soll daher in dieser Arbeit hauptsächlich das Stabilitätsverhalten gegenüber nichtlokalisierten Störungen behandelt werden, Störungen, die große Teile der Plasmaoberfläche erfassen. Besonders interessieren hier die Austauschstörungen, d.h. Störungen, die das Magnetfeld im Außenraum unverändert lassen ( $\delta \vec{B} = 0$ ). Auf diese Störungen haben äußere leitende Wände keinen Einfluß, so daß also das Stabilitätsverhalten allein von der Form der Plasmaoberfläche abhängt.

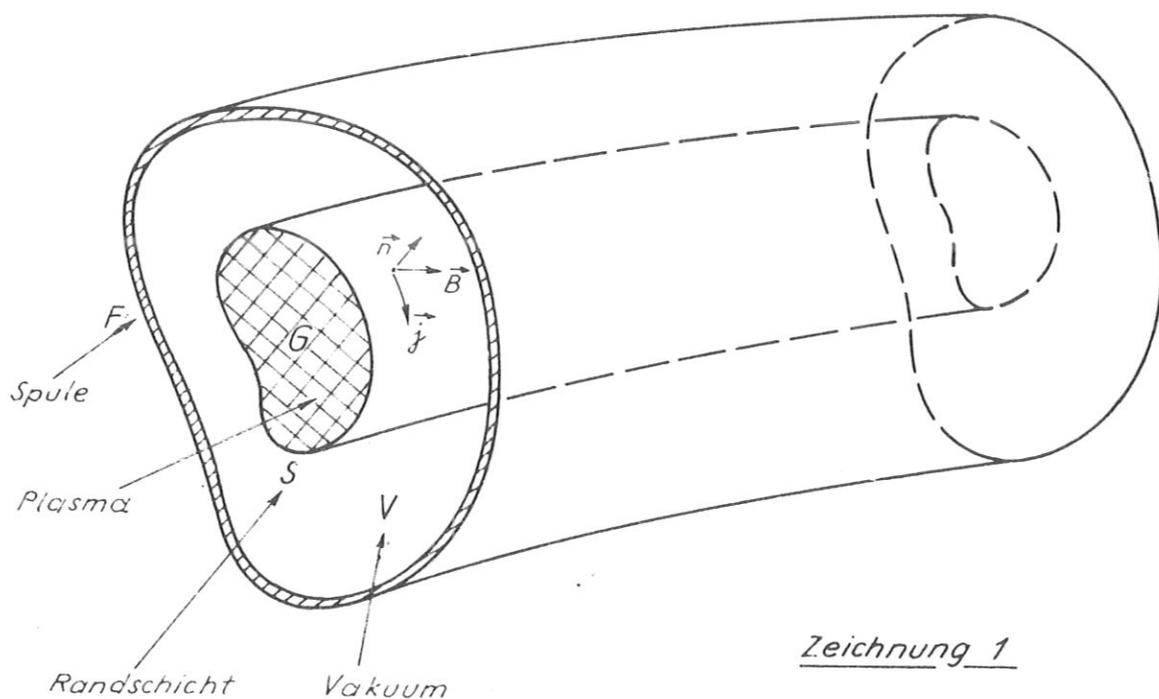
Von der Theorie her gesehen ist die Form der Randschicht  $S$  das Primäre, während dagegen in der experimentellen Situation die Dinge anders liegen. Hier sind im allgemeinen die Form der äußeren felderzeugenden Kompressionsspule  $F$  sowie der Anfangsplasmadruck die gegebenen Parameter, und es fragt sich, ob in einer vorgegebenen Geometrie mit vorgegebenem Parameter überhaupt ein Gleichgewicht möglich ist. Da das Magnetfeld  $\vec{B}$  parallel zur Plasmaoberfläche

verlaufen soll und auf dieser die Gleichgewichtsbedingung  $\delta \pi p = B^2$  erfüllt sein muß, haben wir es hier mit einem "freien" Rand zu tun. Dieses Problem ist analog zu jenen Problemen des freien Randes in der Hydrodynamik und im dreidimensionalen Fall äußerst schwierig zu lösen. Wir umgehen daher diese Schwierigkeit, indem wir nur die Randschicht  $S$  berechnen. Damit kennt man dann auf  $S$  auch das Magnetfeld nach Größe und Richtung, und man hätte dann zur Berechnung des Magnetfeldes im Außenraum ein Anfangswertproblem zu lösen. Wie R. Kippenhahn [5] gezeigt hat, ist ein solches Problem für analytische Anfangsflächen eindeutig lösbar, und wir wollen uns daher bei unseren Betrachtungen auf analytische Gleichgewichtsflächen beschränken. Weiterhin wollen wir auch den Fall ausschließen, daß im Plasmavolumen noch ein rotationsfreies Feld eingefangen ist. Dies vereinfacht die mathematische Behandlung der Gleichgewichtsfläche wesentlich, da ja ein solches Innenfeld durch die Form der Randschicht bestimmt wird, andererseits die Randschicht über die Gleichgewichtsbedingung wieder vom Innenfeld abhängt. Außerdem ist eine solche Situation auch im Experiment nicht wünschenswert, da im allgemeinen Innenfeld und Außenfeld auf der Randschicht nicht parallel verlaufen und diese Verscherung bei Berücksichtigung des sehr kleinen aber endlichen Widerstandes des Plasmas Anlaß zu Widerstandsinstabilitäten gibt.

Durch alle diese Vereinfachungen reduziert sich die Berechnung der Plasmaoberfläche auf die Behandlung einer partiellen Differentialgleichung, die im III. Kapitel abgeleitet wird. In Kapitel IV soll das Stabilitätsverhalten einer solchen Randschicht untersucht werden, wobei wir von dem Energieprinzip der Magnetohydrodynamik ausgehen [16], [17]. Insbesondere wird ein Stabilitätskriterium für Austauschstörungen ( $\delta \vec{B} = 0$ ) abgeleitet. In den folgenden Kapiteln werden dann die allgemeinen Ergebnisse von Kapitel III und IV auf spezielle Gleichgewichte angewandt, vor allem auf den symmetrischen M- und S-Torus und auf den gewellten linearen Thetapinch. Es zeigt sich, daß man über die Form und das Stabilitätsverhalten des M- und S-Torus einige allgemeine Aussagen machen kann, ohne die Differentialgleichung für das Gleichgewicht zu lösen.

### III. Gleichgewicht zwischen Plasma und Magnetfeld

Das Gebiet  $G$  des Raumes werde von Plasma mit konstantem Druck  $p$  erfüllt. Das Plasma sei durch eine stromführende Randschicht  $S$  vom Vakuumgebiet  $V$  getrennt. Eine ideal leitende äußere Spule  $F$  möge das Vakuumgebiet  $V$  begrenzen. Das Magnetfeld  $\vec{B}$  in  $V$  kann daher die Flächen  $F$  und  $S$  nicht durchsetzen und verläuft parallel zu beiden Flächen.



Die Beziehungen, die auf der Plasmaoberfläche zwischen den einzelnen Größen gelten, sind schon verschiedentlich in der Literatur abgeleitet worden [5, 6, 7, 8]. Wir folgen hier im besonderen der Bezeichnungsweise von R. Kippenhahn [5].

Man hat es hier mit 3 Gleichungen zu tun:

- 1) Eine Randbedingung für das Magnetfeld  $\vec{B}$  auf  $S$ . Aus der Stetigkeit der Normalkomponenten folgt  $\vec{n} \cdot \vec{B}^* = 0$  auf  $S$ .
- 2) Die Gleichgewichtsbedingung zwischen Plasmadruck und magnetischem Druck auf  $S$ .
- 3) Die aus der Maxwellgleichung folgende Beziehung zwischen der Oberflächenstromdichte  $\vec{j}$  und dem Magnetfeld  $\vec{B}^*$  auf  $S$ .

Da bei der Betrachtung des Gleichgewichts nur noch von den Größen auf  $S$  die Rede sein wird, wollen wir im weiteren das \*-Zeichen wieder fortlassen. Die

zur Verfügung stehenden Gleichungen sind:

$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{n} \cdot \vec{B} &= 0 && \text{auf } S \\ \text{b) } \frac{1}{8\pi} B^2 &= p && \text{auf } S \\ \text{c) } \vec{n} \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} && \text{auf } S \end{aligned} \quad (2)$$

Mit diesen 3 Gleichungen ist die Gleichgewichtsfläche  $S$  vollständig beschrieben und man kann sie benutzen, um bei gegebener Fläche das System der Strom- und Feldlinien zu berechnen [5], oder man verlangt von den Strom- und Feldlinien gewisse Eigenschaften wie Gesamtströme bestimmter Größe oder eine Rotationstransformation der Feldlinien.

Wie beschreibt nun das System (2) die Gleichgewichtsfläche? Da wir es im Außenraum mit einem Vakuummagnetfeld zu tun haben, läßt sich dieses bekanntlich als Gradient eines im allgemeinen mehrwertigen skalaren Potentials  $\phi(\vec{r})$  darstellen. Denken wir uns nun ein Koordinatensystem  $x^1, x^2, x^3$  so eingeführt, daß die Plasmaoberfläche  $S$  mit der Fläche  $x^3 = \text{const}$  zusammenfällt, dann sieht die Darstellung des Magnetfeldes  $\vec{B}$  auf  $S$  folgendermaßen aus:

$$\vec{B} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x^1}, \frac{\partial \phi}{\partial x^2}, 0 \right). \quad (3)$$

Das Magnetfeld ist auf  $S$  wegen der Randbedingung (2a) ein Oberflächengradient. Die Gleichgewichtsbedingung (2b) liefert uns dann:

$$(\text{Grad } \phi)^2 = 8\pi p$$

oder

$$\sum_{i,k=1}^2 g^{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} = 1 \quad (4)$$

( $g_{ik}(x^1, x^2)$  ist der metrische Tensor von  $S$ )

Der konstante Plasmadruck  $8\pi p$  wurde hier gleich 1 gesetzt,

d.h. 
$$\frac{\phi}{8\pi p} \longrightarrow \phi' =: \phi.$$

Wie nun in Lehrbüchern über partielle Differentialgleichungen gezeigt wird [13], gehört zur obigen Gleichung das Variationsprinzip:

$$\delta \int \sqrt{\sum_{i,k=1}^2 g_{ik} dx^i dx^k} = 0. \quad (5)$$

Die Charakteristiken der Gl.(4), die Magnetfeldlinien sind also geodätische Linien auf der Gleichgewichtsfläche, wie schon in [8] festgestellt wurde. Der Zusammenhang ist hier derselbe wie zwischen dem Hamilton'schen Prinzip und der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung der Mechanik. Die "Hamiltonfunktion" zu unserem Problem lautet dann

$$H = \sum_{i,k}^2 g^{ik} p_i p_k \quad (6)$$

mit  $p_i = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$  als den zu  $x^i$  kanonisch konjugierten Impulsen.

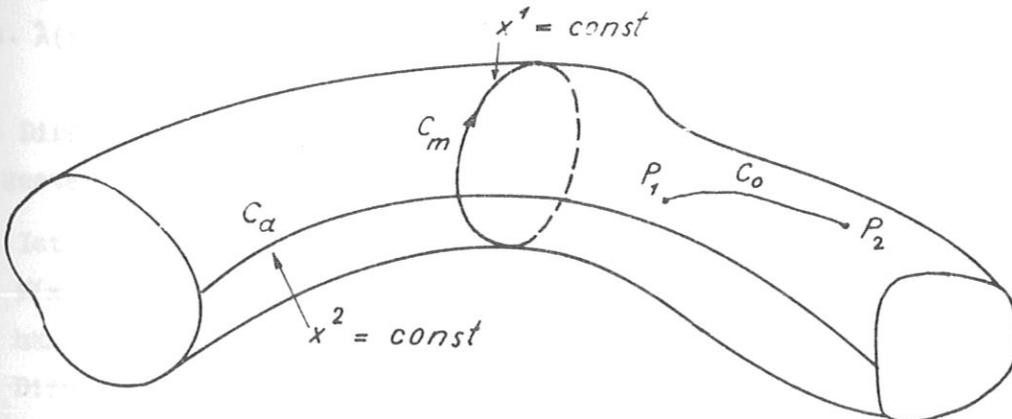
Die letzte Gleichung von (2) besagt, daß alle 3 Vektoren  $\vec{B}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{n}$  senkrecht aufeinander stehen und liefert zusammen mit  $p = \text{const}$  und der Gleichgewichtsbedingung

$$|\vec{j}| = \text{const} \quad \text{auf } S \quad (7)$$

Die Stromlinien erhalten wir durch die Linien  $\phi = \text{const}$ , denn  $\vec{B} = \text{Grad } \phi$  besagt ja gerade, daß die Linien  $\phi = \text{const}$  senkrecht auf den Magnetfeldlinien stehen.

Weiterhin läßt sich aus (2) und (3) die physikalische Bedeutung und die allgemeine Form von  $\phi(x^1, x^2)$  ableiten:

Auf der toroidalen Fläche  $S$  seien die Parameterlinien  
 $x^1 = \text{const.}$  : meridional geschlossen und die Linien  
 $x^2 = \text{const.}$  : azimuthal geschlossen (siehe Zeichnung 2).



Zeichnung 2

Im allgemeinen gibt es auf dem Torus  $S$  drei verschiedene Klassen geschlossener Kurven, die nicht stetig ineinander überführbar sind:

- 1)  $\{C_o\}$  : Menge der auf  $S$  liegenden geschlossenen Kurven
- 2)  $\{C_a\}$  : Azimutal geschlossene Kurven, d.h. diese lassen sich nun außerhalb des Torus auf einen Punkt zusammenziehen.
- 3)  $\{C_m\}$  : Meridional geschlossene Kurven, die sich innerhalb des Torus auf einen Punkt zusammenziehen lassen.

Die Funktion  $\varphi(P) \int_P = (x^1, x^2)$  liefert uns die Gesamtströme, die eine die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  verbindende Kurve auf  $S$  durchfließen.

$$I = \int_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_C d\varphi = \varphi(P_2) - \varphi(P_1)$$

Die Beziehung  $I_o = \int_C d\varphi = 0$  besagt nichts weiter als die Divergenzfreiheit des Oberflächenstromes.

Mit

$$I_{az} = \int_{C_m} d\varphi ; I_{mer} = \int_{C_{az}} d\varphi$$

bekommen wir somit den azimutalen und meridionalen Gesamtstrom. Diese Größen sind wegen der Divergenzfreiheit des Stromdichtefeldes vom Weg unabhängig, und die allgemeine Form der Potentialfunktion  $\varphi(x^1, x^2)$  lautet somit:

$$\varphi(x^1, x^2) = I_{az} x^2 + I_{mer} x^1 + \lambda(x^1, x^2) \quad (9)$$

$\lambda(x^1, x^2)$  ist eine beliebige in beiden Argumenten periodische Funktion, d.h.  $\lambda(x^1, x^2) = \lambda(x^1 + 1, x^2) = \lambda(x^1, x^2 + 1)$ .

Die Differentialgleichung (4) kann nun benutzt werden, um zwei verschiedene Fragestellungen zu beantworten:

- 1.) Ist die Gleichgewichtsfläche vorgegeben, dann liefert uns die Lösung  $\varphi(x^1, x^2)$  das System der Stromlinien auf der Oberfläche. Diese Funktion hängt im allgemeinen noch von einer Integrationskonstanten ab, und die Differentiation nach dieser Konstanten ergibt die integrierte "Bahn", die Magnetfeldlinie.

2.) Andererseits kann man aber auch die Potentialfunktion  $\varnothing$  und damit die Gesamtströme vorgeben und über die Differentialgleichung (4) einen passenden metrischen Tensor, d.h. ein Gleichgewicht suchen, wie es etwa bei dem M+S-Torus gemacht wurde. Hier ging man von dem Problem aus, einen Torus ohne azimuthalen Gesamtstrom  $I_{az} = 0$  zu finden.

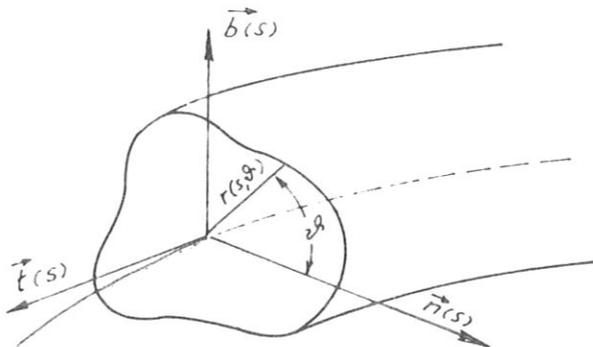
Dieses Problem läßt sich wesentlich schwieriger beantworten als die obige Fragestellung, denn man verlangt hier von der Lösung noch eine Eigenschaft im Großen, nämlich die toroidale Geschlossenheit.

Ein allgemeiner Existenzsatz, der besagt, unter welchen Voraussetzungen die toroidale Geschlossenheit gesichert ist, steht noch aus. Die von F. Meyer und H.U. Schmidt [8] gerechneten Beispiele zeigen aber, daß solche geschlossenen Flächen existieren.

Wir wollen daher die Differentialgleichung (4) benutzen, um allgemeine Eigenschaften der M- und S-Flächen studieren zu können, wobei wir die Existenz solcher analytischer toroidal geschlossener Lösungen voraussetzen.

Um nun aus Gl.(4) eine Gleichung für die toroidale Fläche  $S$  zu gewinnen, müssen wir diese in einem geeigneten Koordinatensystem durch eine skalare Funktion darstellen.

Es sei  $\vec{R}(s)$  der Ortsvektor einer stetigen doppeltpunktfreien geschlossenen Kurve, der "Seele" des Koordinatensystems.  $S$  ist die Bogenlänge längs der Seele. Dann spannen der Normalen- und der Binormalenvektor eine Ebene senkrecht zum Tangentenvektor auf. In dieser Ebene führen wir nun Polarkoordinaten ein  $r, \vartheta$ , die Funktion  $r(s, \vartheta)$  beschreibt damit in diesem System eine toroidale Fläche.



Zeichnung 3

Der Ortsvektor der Fläche  $S$  läßt sich hier darstellen durch

$$\vec{r}(s, \vartheta) = \vec{R}(s) + r(s, \vartheta) \cos \vartheta \vec{n}(s) + r(s, \vartheta) \sin \vartheta \vec{b}(s) \quad (10)$$

und das Bogenelement auf  $S$  lautet

$$\begin{aligned} (dl)^2 = & r_s^2 + \left(1 - \frac{r}{R} \cos \vartheta\right)^2 + \frac{r^2}{\tau^2} (ds)^2 \\ & + 2 \left(r_s r_\vartheta + \frac{r^2}{\tau}\right) ds d\vartheta + (r^2 + r_\vartheta^2) (d\vartheta)^2 \end{aligned} \quad (11)$$

Hierbei bedeuten:

$$\frac{1}{R(s)}, \frac{1}{\tau(s)} = \text{Krümmung und Torsion der Seele}$$

$$r_s, r_\vartheta = \text{Ableitungen nach } s \text{ und } \vartheta.$$

Die Differentialgleichung (4) sieht dann explizit folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} \left[ r_s^2 + \left(1 - \frac{r}{R} \cos \vartheta\right)^2 + \frac{r^2}{\tau^2} \right] \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right)^2 - 2 \left(r_s r_\vartheta + \frac{r^2}{\tau}\right) \frac{\partial \vartheta}{\partial s} \frac{\partial \vartheta}{\partial \vartheta} \\ + (r^2 + r_\vartheta^2) \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right)^2 = (r^2 + r_\vartheta^2) \left(1 - \frac{r}{R} \cos \vartheta\right)^2 + r_\vartheta^2 r_s^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Diese Gleichung ist quadratisch in den Ableitungen  $r_s, r_\vartheta$  und somit nicht eindeutig nach einer dieser Ableitungen auflösbar. Sucht man bei vorgegebener Fläche  $r(s, \vartheta)$  alle möglichen Gleichgewichte, muß man ein vollständiges Integral  $\vartheta(s, \vartheta, a)$  von (12) finden. Dies gelingt oft durch Separationsansatz, z.B. bei rotationssymmetrischen Flächen [5].

Dann sind die Linien

$$\psi(s, \vartheta) = \frac{\partial \vartheta}{\partial a} = \text{const.} \quad (13)$$

die Magnetfeldlinien.

Fäßt man (12) aber als Gleichung für  $r(s, \vartheta)$  auf, dann haben wir ein Cauchysches Anfangswertproblem. Es wird eine Kurve  $r_0(\vartheta)$  vorgegeben,

und die durch diese Kurve laufenden Charakteristiken spannen die gesuchte Fläche auf.

Bevor nun diese Gleichung auf spezielle Gleichgewichte angewandt wird, wollen wir noch einige allgemeine Beziehungen auf der Fläche  $S$  aufzeigen. Wie schon erwähnt, hat das Potential  $\phi$  die allgemeine Gestalt

$$\phi = I_{az} \frac{\vartheta}{2\pi} + I_{mer} \frac{s}{L} + \lambda(s, \vartheta) \quad (14)$$

Daraus folgt für  $\psi(s, \vartheta)$  dieselbe Gestalt, da ja  $\psi(s, \vartheta)$  durch eine lineare Operation aus  $\phi(s, \vartheta)$  hervorgeht

$$\psi = C_a \frac{\vartheta}{2\pi} + C_{mer} \frac{s}{L} + p(s, \vartheta) \quad (15)$$

(  $p(s, \vartheta)$  ist periodisch in beiden Argumenten.)

Die Konstanten  $C_a, C_m$  bzw.  $I_{mer}, I_{az}$  geben uns nun Auskunft über die Geschlossenheit der Strom- oder Feldlinien.

Die Stromlinien sind geschlossen bei rationalem Verhältnis  $\frac{I_{az}}{I_{mer}}$ .  
Es sei also  $\frac{I_{az}}{I_{mer}} = \frac{m}{n}$  ( $m, n =$  ganze Zahlen).

Der Ausdruck (14) läßt sich dann überführen in

$$\phi^1 = m \frac{\vartheta}{2\pi} + n \frac{s}{L} + \lambda^1(s, \vartheta) \quad (16)$$

mit

$$\phi^1 =: \frac{n \phi}{I_{mer}} \quad \lambda^1 =: \frac{n \lambda}{I_{mer}}$$

Wegen der Periodizitätseigenschaft von  $\lambda^1(s, \vartheta)$  ist  $\phi^1(s, \vartheta)$  invariant gegenüber der Transformation

$$\begin{aligned} \vartheta &\longrightarrow \vartheta + n 2\pi \\ s &\longrightarrow s - m L . \end{aligned}$$

Nach  $n$  Umläufen in meridionaler Richtung und  $m$  Umläufen in azimuthaler Richtung kehrt die Stromlinie  $\phi^1 = \text{const}$  zum Ausgangspunkt zurück.

Ohne Azimutalstrom ( $I_{az} = 0$ ) ist die Stromlinie somit meridional geschlossen.

Diese 4 "Perioden"  $I_{az}$ ,  $I_{mer}$ ,  $C_a$ ,  $C_m$  der Vektorfelder auf der Oberfläche sind nun nicht unabhängig voneinander, es besteht zwischen ihnen ein Zusammenhang, wie er auch schon im allgemeinen Fall mit magnetischen Oberflächen und Volumenströmen abgeleitet wurde [14].

Da die Magnetfeldlinien senkrecht auf den Stromlinien stehen, lautet die Gleichung für die Magnetfeldlinien

$$\vec{j} \cdot d\vec{l} = 0$$

oder in Komponentenschreibweise

$$\omega =: \sum_{i=1}^2 j^i dx_i = 0. \tag{17}$$

Das Differential  $\omega$  ist im allgemeinen nicht vollständig, aber bei zweidimensionalen Differentialformen existiert immer ein Multiplikator  $\mu$ , der das Differential vollständig macht [15]

$$\mu \omega = d\psi. \tag{18}$$

Die Integralitätsbedingung liefert für  $\mu$  die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x^2} \mu j^1 - \frac{\partial}{\partial x^1} \mu j^2 = 0. \tag{19}$$

Wegen dieser Eigenschaft und wegen des zweifachen Zusammenhangs der Fläche  $S$  hat die über (18) definierte Funktion die Form:

$$\psi = \int_{C_{mer}} \mu \omega \frac{\vartheta}{2\pi} + \int_{C_{az}} \mu \omega \frac{s}{L} + P(s, \vartheta)$$

Sie stimmt bis auf einen konstanten Faktor mit der über Gl.(13) definierten Funktion  $\psi$  für die Magnetfeldlinien überein; deswegen wollen wir im weiteren zwischen beiden nicht unterscheiden. Eine andere Schreibweise für (18) ist

$$\mu \vec{j} = \text{Grad } \psi.$$

Um nun einen Zusammenhang zwischen den 4 Perioden herzustellen, benutzen wir die Identität

$$\iint_S (\text{Grad } \vartheta \times \text{Grad } \psi) \cdot d\vec{f} = \iint_S d\vartheta d\psi = \int_C \vartheta d\psi = - \int_C \psi d\vartheta. \tag{20}$$

Nun ist  $(\text{Grad } \vartheta \times \text{Grad } \psi) \cdot d\vec{f} = B^2 \mu df$ .

Um die Formel (20) auf den Torus anzuwenden, müssen wir diesen durch 2 Kurven  $C_a$ ,  $C_m$  einfach zusammenhängend machen und erhalten

$$B^2 \iint_S \mu \, df = \int_{C_a} \phi \int_{C_m} \psi - \int_{C_m} \phi \int_{C_a} \psi. \quad (21)$$

Die Klammern  $\int_{C_a} \phi$  usw. bedeuten die Umläufe von  $\phi$

etwa  $\int_{C_a} \phi = \phi \left( \vartheta, \frac{s}{L} + 1 \right) - \phi \left( \vartheta, \frac{s}{L} \right) = I_{\text{mer}}.$

Damit lautet die gesuchte Beziehung

$$B^2 \iint_S \mu \, df = I_{\text{mer}} C_a - I_{\text{az}} C_m.$$

Die physikalische Bedeutung des Multiplikators  $\mu$  soll nun noch etwas näher erläutert werden, da dieser bei den Stabilitätsbetrachtungen eine wesentliche Rolle spielt.

Wir denken uns die Oberfläche  $S$  durch die Stromlinien  $\phi = \text{const}$  und die Feldlinien  $\psi = \text{const}$  parametrisiert, diese bilden ein orthogonales Netz.

Das Bogenelement längs der Feldlinie lautet

$$(ds)^2 = \frac{1}{j^2} (d\phi)^2$$

und längs der Stromlinie nach (18)

$$(ds)^2 = \frac{1}{j^2} \left( \frac{d\psi}{\mu} \right)^2.$$

Und damit dann das Bogenelement allgemein ( $B^2 \sim j^2$ )

$$(ds)^2 = \frac{1}{B^2} \left[ (d\phi)^2 + \frac{1}{\mu^2} (d\psi)^2 \right]$$

Der Abstand zwischen zwei Magnetfeldlinien lautet

$$(\Delta s)^2 = \frac{1}{B^2} \frac{1}{\mu^2} (\Delta \psi)^2.$$

Damit haben wir in  $\frac{1}{\mu} = d$  ein Maß für den Abstand der Magnetfeldlinien auf der Gleichgewichtsfläche  $S$ .

#### IV. Stabilität des Plasmagleichgewichts

Bevor nun nach der oben angezeigten Methode spezielle Gleichgewichte behandelt werden, sollen einige Aussagen über das Stabilitätsverhalten einer solchen Plasmaoberfläche gemacht werden. Wir gehen dazu von dem Energieprinzip der Magnetohydrodynamik [16, 17] aus, da in allgemeiner dreidimensionaler Geometrie die Methode der Normalschwingungen praktisch unanwendbar ist. Das Plasma ist instabil, wenn bei einer Verschiebung  $\vec{\xi}$  aus der Gleichgewichtslage die Gesamtenergie des Systems abnimmt.

Allgemein ist nun schon von J.B. Bernstein [16] gezeigt worden, daß ein Plasma mit Oberflächenströmen immer instabil ist, sofern es Gebiete ungünstiger Krümmung auf der Oberfläche gibt, d.h. wenn der Krümmungsmittelpunkt innerhalb des Plasmas liegt. Solche Störungen müssen aber stark auf die Gebiete ungünstiger Krümmung lokalisiert sein und relativ kleine Wellenlängen quer zum Magnetfeld aufzeigen. Nun ist aber bei diesen lokalisierten Störungen die Anwendbarkeit des Modells überhaupt fraglich, so daß wir also hier nichtlokalisierte Störungen betrachten wollen.

Eine interessante Klasse von Störungen ist die der Austauschstörungen, bei denen trotz einer Verschiebung der Oberfläche zwischen Plasma und Magnetfeld das Magnetfeld im Vakuumgebiet nicht verändert wird. Das bedeutet, daß diese Störung des Plasmas auch nicht durch eine leitende äußere Wand beeinflusst werden kann.

Es sei nun  $\vec{\xi}(\mathcal{V})$  irgendeine Störung des Plasmas, dann besteht nach [16] die Änderung der Energie aus dem Gleichgewicht aus einer Summe von 3 Termen:

$$\delta W = \delta W_V + \delta W_F + \delta W_a \quad (1)^*$$

$$\delta W_V = \frac{1}{2} \gamma p \iiint_{V_0} (\operatorname{div} \vec{\xi})^2 d^3x$$

$$\delta W_F = \frac{1}{8\pi} \iint_{S_0} \xi_n^2 \frac{B^2}{\rho} df$$

$$\delta W_a = \frac{1}{8\pi} \iiint_{V_1} (\delta \vec{B})^2 d^3x$$

Hierbei ist:

$$\gamma = \frac{C_D}{C_V}, V_0 = \text{Plasmavolumen}, V_1 = \text{Vakuurvolumen}, \xi_n = \vec{n} \cdot \vec{\xi} \text{ auf } S_0,$$

$1/\rho$  = Krümmung der Magnetfeldlinie,  $\overline{\delta B}$  = Änderung von  $\vec{B}$  in  $V_1$ .

$\delta W_V$  ist die Änderung der inneren Energie des Plasmas und hier immer positiv.

Nur im Falle einer Störung, die das Volumen des Plasmas konstant läßt

( $\text{div } \vec{\xi} = 0$ ), liefert  $\delta W_V$  keinen stabilisierenden Beitrag zu  $\delta W$ . Die beiden anderen Terme in  $\delta W$  hängen nur von  $\xi_n$  auf  $S_0$  ab. Damit können wir bei vorgegebener Verschiebung der Randfläche  $S_0$  die Störung  $\vec{\xi}$  immer so in das Plasmavolumen fortsetzen, daß  $\delta W_V$  verschwindet ( $\text{div } \vec{\xi} = 0$ ), ohne die beiden anderen Terme zu verändern. Die Beschränkung, die  $\xi_n$  dazu auferlegt werden muß, ist

$$\iint_{S_0} \xi_n \, df = 0.$$

$\delta W_F$  ist der Term, der von der Verschiebung der Oberfläche selbsterregt, während  $\delta W_a$  die durch diese Verschiebung bewirkte Verbiegung der Feldlinien beschreibt.  $\overline{\delta B}$  kann im allgemeinen als Gradient eines mehrwertigen Potentials  $\phi$  geschrieben werden, was in einer Arbeit von R. Lüst und E. Martensen [6] untersucht wurde. Wir schließen uns hier deren Bezeichnungsweise an.

$$\begin{aligned} \delta W_a &= \frac{1}{8\pi} \iint_{S_0} \xi_n (\vec{B} \cdot \nabla \phi^*) \, df \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^2 L_{ik} (-1) \iint_S \xi_n (\vec{B} \cdot \vec{Y}_i) \, df \iint_S \xi_n (\vec{B} \cdot \vec{Y}_k) \, df \end{aligned} \quad (2)$$

Die einzelnen Größen haben hier folgende Bedeutung:

Das Potential  $\phi^*$  genügt den Bedingungen:

$$\Delta \phi^* = 0 \text{ in } V_1 \quad \phi^* \text{ einwertig in } V_1$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \text{Div} (\xi_n \vec{B}) \text{ auf } S \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \text{ auf } F$$

Die Magnetfelder  $\vec{Y}_i$  sind definiert durch

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{Y}_i &= 0 & \text{div } \vec{Y}_i &= 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{Y}_i &= 0 & \text{auf } S \text{ und } F & \\ \int_{C_i} \vec{Y}_k \cdot d\vec{s} &= \delta_{ik} \end{aligned} \quad (4)$$

$\vec{Y}_1$  ist ein Magnetfeld mit nur meridionalen Gesamtfluß und  $\vec{Y}_2$  ein Feld mit nur azimuthalem Gesamtfluß.  $C_i$  ( $i = 1, 2$ ) sind meridional und azimuthal geschlossene Kurven.

Diese Felder hängen als Lösung des Neumannschen Potentialproblems nur von der geometrischen Form der Flächen  $S$  und  $F$  ab, während das Potential  $\phi^*$  durch die Form der Störung bestimmt wird. Die Induktionsmatrix ist definiert durch

$$L_{jk} = 4\pi \iiint_{V_1} \vec{Y}_j \cdot \vec{Y}_k \, d^3x. \quad (5)$$

Die spezielle Gestalt von  $\delta W_a$  entsteht aus der allgemeinen Energieänderung durch Berücksichtigung der Mehrwertigkeit des magnetischen Potentials  $\phi$

$$\vec{B} = \text{grad } \phi.$$

Wir suchen nun die Störungen  $\xi_n$ , die  $\delta W_a$  zum Verschwinden bringen. Unter den Voraussetzungen:

- 1)  $\iint_S \xi_n \, df = 0$
- 2) die Magnetfeldlinien sind geschlossen

wollen wir beweisen:

$$\delta W_a = 0 \quad \text{X} \quad \text{Div } \xi_n \vec{B} = 0 \quad \text{auf } S \quad (6)$$

Div ist hier eine Flächendivergenz.

Es sei nun

$$\text{Div } \xi_n \vec{B} = 0$$

Führen wir wieder Magnetfeldlinien und Stromlinien als Parameterlinien ein,

dann schreibt sich die Flächendivergenz in diesem System

$$\text{Div } \xi_n \vec{B} = \mu \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\xi_n}{\mu} B \right).$$

Da  $B = \text{const}$  auf  $S$  ist, verschwindet also die Divergenz, wenn  $\xi_n$  die Form hat

$$\xi_n = \mu F(\psi), \quad (7)$$

wobei  $F(\psi)$  eine beliebige Funktion von  $\psi$  ist, bis auf die Einschränkung

$$\int F(\psi) d\psi = 0. \quad (8)$$

Diese Einschränkung entsteht aus Gl.(1) mit der Darstellung des Flächenelements

$$df = \frac{1}{B\mu} d\phi d\psi \quad (9)$$

und aus  $\iint_S \xi_n df = 0$ .

Betrachten wir nun den ersten Term in  $\delta W_\alpha$ .

Es gilt die Formel

$$\xi_n \vec{B} \cdot \nabla \phi^* = \text{Div} (\xi_n \vec{B} \phi^*) - \phi \text{Div} \xi_n \vec{B}.$$

Um nun das Integral

$$\iint_S \text{Div} (\xi_n \vec{B} \phi^*) df$$

auszuwerten, machen wir die Oberfläche  $S$  durch eine beliebige Kurve einfach zusammenhängend und wenden den Gauß'schen Satz an:

$$\iint_S \text{Div} (\xi_n \vec{B} \phi^*) df = \int_C \vec{N} \cdot \vec{B} \xi_n \phi^* ds. \quad (10)$$

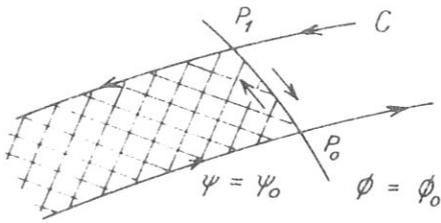
$\vec{N}$  ist hier der in der Fläche liegende Normalenvektor der Kurve  $C$ . Wegen der Einwertigkeit von  $\phi^*$  verschwindet das Kurvenintegral, da jeweils längs beider Ufer der Kurve  $C$  in entgegengesetzter Richtung integriert wird.

Die Felder  $\vec{Y}_1$  lassen sich genau wie  $\vec{B}$  als Oberflächengradienten darstellen

$$\vec{Y}_1 = \text{Grad} \phi_1.$$

Mit  $\phi_1$  in der allgemeinen Gestalt (III. 9).

Es sei nun  $\phi = \phi_0$  eine bestimmte Stromlinie und  $\psi = \psi_0$  eine Magnetfeldlinie.



Die Feldlinie möge die Stromlinie im Punkte \$P\_0\$ schneiden. Nach einem Umlauf in azimuthaler Richtung werde dieselbe Stromlinie in \$P\_1\$ geschnitten.

Der so von der Feldlinie zwischen \$P\_0\$ und \$P\_1\$ aufgespannte Streifen überdeckt die ganze Torusfläche, da ja die Feldlinie nach einer endlichen Anzahl von Umläufen wieder den Punkt \$P\_0\$ erreicht. Wählen wir nun die Randkurve dieses Streifens als Integrationsweg, dann trägt wegen \$\vec{N} \cdot \vec{B} = 0\$ nur der Weg längs der Stromlinie etwas zum Integral bei

$$\int_C \vec{N} \cdot \vec{B} \xi_n \delta \phi_i ds = B \delta \phi_i \int_{P_0}^{P_1} \xi_n ds \quad (11)$$

\$\delta \phi\_i = \text{const}\$ ist die Änderung von \$\phi\_i\$ bei einer endlichen Anzahl von Umläufen in azimuthaler Richtung.

Nun ist aber

$$\int_{\phi = \phi_0} \xi_n ds = \int_{\mu} F(\psi) \frac{d\psi}{\mu} = 0 \quad (12)$$

Damit verschwindet auch der zweite Anteil in \$\delta W\_a\$.

Um den Beweis in umgekehrter Richtung zu führen, geht man von dem ersten Term in \$W\_a\$ aus. Dieser läßt sich umschreiben in

$$\delta W_a^{(1)} = \frac{1}{8\pi} \iiint (\text{grad } \phi^*)^2 d^3x$$

aus \$\delta W\_a^{(1)} = 0\$ folgt dann \$\phi^\* = \text{const}\$ in \$V\_1\$ und daraus

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } S \text{ und } F.$$

Es genügt hier, von dem ersten Term auszugehen, da die positiv definite Matrix \$L\_{ik}^{(-1)}\$ den zweiten Term immer positiv macht. Es müssen aber beide Terme in \$\delta W\_a\$ für sich verschwinden.

Mit Hilfe der Bedeutung der Funktion \$\mu\$ können wir uns nun leicht ein anschauliches Bild von den Austauschstörungen machen. Nach der Darstellung (7) ist die Amplitude der Austauschstörung dem Abstand der Feldlinien umgekehrt proportional, das liegt daran, daß man hier ja Flußröhren vertauscht. Wegen der

konstanten Feldstärke auf der Oberfläche ist der magnetische Fluß ungefähr der Fläche proportional, wenn man von der Änderung des Magnetfeldes in Normalenrichtung absieht. Betrachten wir 3 Feldlinien  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  an einer Stelle  $\phi_0$ , an der diese Feldlinien weiter auseinanderliegen als an einer Stelle  $\phi_1$ .



Zeichnung 4

Die Amplitude ist eine infinitesimale Größe und daher lautet der Fluß durch die Fläche  $F_0$

$$H = \mathbf{B} F_0 = B F_1 .$$

Wegen der Flächengleichheit bekommt die Störung  $\xi_n$  bei  $\phi_1$  eine größere Amplitude als bei  $\phi_0$ .

Diese Eigenschaft der Austauschstörungen läßt sich nun nützlich verwenden, um ein Gleichgewicht gegen Austauschstörungen stabil zu machen. Dazu muß man ein solches Gleichgewicht konstruieren, bei dem die Magnetfeldlinien in den Gebieten günstiger Krümmung einen kleineren Abstand haben als in Gebieten ungünstiger Krümmung. Ist diese unterschiedliche Wichtung hinreichend groß, dann kann

$$\delta W_F = \frac{1}{8\pi} \int_S \xi_n^2 \frac{B^2}{c} df$$

positiv sein.

Die Bedeutung dieses Oberflächenterms ist nun die folgende: Bei der Austauschstörung mit  $\text{div } \vec{\xi} = 0$  wird die Flußröhre  $F_1$  durch die Flußröhre  $F_2$  ersetzt. Die Volumina dieser beiden Flußröhren sind zwar die gleichen, aber die gesamte magnetische Energie der Flußröhren ist wegen des inhomogenen Magnetfeldes verschieden. Bei einem Austausch tritt daher eine Energiedifferenz auf.  $\delta W_F$  ist damit der Anteil der Änderung der magnetischen Energie, der durch die Formänderung des Integrationsvolumens entsteht.

Mit Hilfe von (III 7, 9) schreibt sich dieser Ausdruck

$$\delta W_F = \frac{1}{8\pi} B^2 \iint F^2(\psi) \frac{\mu(\varphi, \psi)}{\zeta(\varphi, \psi)} d\varphi d\psi .$$

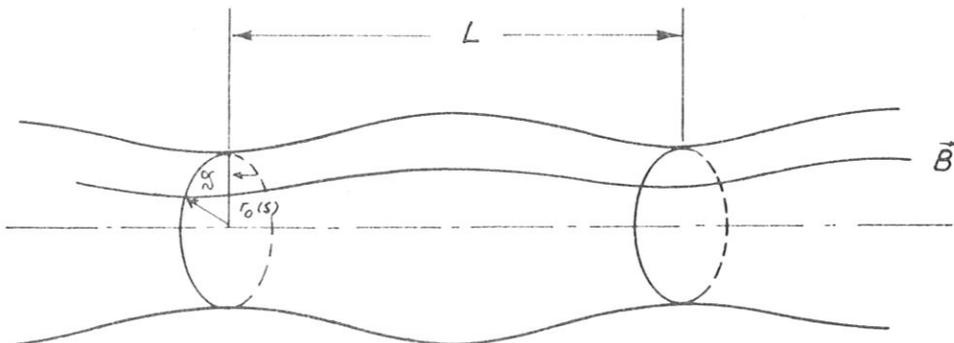
Es kommt hier also nur auf das Vorzeichen der Funktion

$$G(\psi) =: \int \frac{\mu(\varphi, \psi)}{\zeta(\varphi, \psi)} d\varphi$$

an. Da die Funktion  $F(\psi)$  bis auf die Einschränkung (III 8) beliebig ist, können wir ein Stabilitätskriterium gegenüber Austauschstörungen formulieren: Notwendig und hinreichend für Stabilität ist die Bedingung

$$G(\psi) > 0 \quad \text{für alle } \psi . \tag{14}$$

Die mit  $\mu \sim 1/d$  gemittelte Krümmung der Magnetfeldlinien muß positiv sein. Als Beispiel dazu wollen wir einen Thetapinch mit periodischen Wellungen betrachten.



Zeichnung 5

Das Gleichgewicht läßt sich hier wegen der Rotationssymmetrie ganz leicht behandeln. Von der Gleichgewichtsgleichung (III 12) bleibt nur noch übrig:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\partial r_0}{\partial s}\right)^2 \tag{15}$$

Das Potential  $\varphi(s)$  ist der Bogenlänge längs den Kurven  $\varphi = \text{const}$  proportional, diese sind mit den Magnetfeldlinien identisch. Das Bogenelement senkrecht zu den Feldlinien lautet

$$d\ell = r_0(s) d\varphi$$

und somit ist

$$\mu \sim \frac{1}{r_0(s)} . \tag{16}$$

Wählen wir als Randkurve eine Cosinuskurve

$$r_0(s) = r_m + a \cos k s \quad (17)$$

dann lautet die "mittlere" Krümmung

$$G \sim - \int_0^L \frac{\cos k s}{1 + \frac{a}{r_m} \cos k s} \sqrt{1 + a^2 k^2 \sin^2 k s} \, ds .$$

Durch Entwicklung nach  $a$  erhalten wir:

$$G \sim \frac{a}{r_m} + O \left( \left( \frac{a}{r_m} \right)^2 \right) .$$

Dieser gewellte Thetapinch ist also austauschstabil. Beim gewöhnlichen Thetapinch ( $a = 0$ ) bekommen wir marginale Stabilität, und ganz analog wird beim z-Pinch - die Feldlinien weisen nur ungünstige Krümmungen auf -  $G(\psi) < 0$  für alle  $\psi$ .

Wir haben damit das Ergebnis, daß bei  $\beta = 1$  die bei kleinem  $\beta$  so gefährlichen Austauschinstabilitäten verhältnismäßig leicht zu unterbinden sind. Das Plasma kann dann nur durch solche Störungen instabil werden, die auch das Magnetfeld verbiegen ( $\delta \vec{B} \neq 0$ ). Zu dieser Rechnung ist aber die Kenntnis der äußeren Berandung  $F$  notwendig. In Kap. VII soll dazu ein spezielles Beispiel gerechnet werden.

## V. M-und-S-Flächen

### A) Gleichgewicht

In folgendem wollen wir die im vorigen Kapitel beschriebene Theorie auf spezielle Gleichgewichte anwenden. In einer früheren Arbeit haben F. Meyer und H.U. Schmidt [8] toroidale Gleichgewichte ohne azimuthalem Gesamtstrom berechnet. Unter der Annahme, daß alle Stromlinien meridional geschlossene ebene Kurven sind, konnten sie durch geometrische Betrachtungen eine Differentialgleichung für die Gleichgewichtsfläche aufstellen.

An solchen sogenannten M- und-S-Flächen ist man aus folgendem Grunde interessiert:

Bei einem Torus mit nur azimuthalem Gesamtstrom treten die gefährlichen "sausage"-Instabilitäten auf. Dies liegt an der starken Krümmung der Magnetfeldlinien. Daher versucht man, diese Krümmung möglichst zu reduzieren, was natürlich nur bis zur Gesamt-Krümmung des Torus selbst geht. Der andere Grenzfall aber, der toroidale Theta-Pinch ist bekanntlich nicht im Gleichgewicht, der magnetische Druck ist auf der Innenseite des Torus stärker als auf der Außenseite, das Plasma driftet nach außen. Die Oberfläche  $S$  muß also so verformt werden, bis - anschaulich gesprochen - die Stromlinien überall den gleichen Abstand haben. Dies ist offensichtlich bei einem Kreistorus nicht der Fall. Eine mathematische Formulierung dieser Aussagen findet man in [5].

In der folgenden Betrachtung wollen wir nun die Bedingung, daß die Stromlinien eben sind, fallenlassen und zeigen, daß die in [8] gefundene Gleichung ein Spezialfall von Gl. (III 12) ist.

Die M-und-S-Flächen sind allgemein durch die Potentialfunktion

$$\varphi(s, \vartheta) = I_{\text{mer}} \frac{s}{L} + P(s, \vartheta) \quad (1)$$

( $L$  = Gesamtlänge der Seele)

charakterisiert.

Sollen die Stromlinien nun in der Ebene  $s = \text{const}$  liegen, dann darf  $\varphi$  nicht von  $\vartheta$  abhängen.

$$\varphi = \varphi(s) \quad (2)$$

Gehen wir hiermit in Gl. (III 12) ein, dann lautet das Ergebnis (mit  $1/\tau = 0$ )

$$(r^2 + r_{\vartheta}^2) \left(\frac{\partial \phi}{\partial s}\right)^2 = (r^2 + r_{\vartheta}^2) \left(1 - \frac{r}{R} \cos \vartheta\right)^2 + r_{\vartheta}^2 r_s^2. \quad (3)$$

Wählen wir noch die Seele in der Darstellung

$$\vec{R} = \left\{ R(\varphi) \cos \vartheta, R(\varphi) \sin \vartheta, 0 \right\}$$

dann geht Gl. (3) in die in [8] benutzte Gl.(13) über mit

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial s}\right)^2 (R^2 + R'^2(\varphi)) =: g^2(\varphi).$$

Die Funktion  $g(\varphi)$  wurde nun aber nicht willkürlich vorgegeben, sondern als Bogenlänge längs einer geschlossenen Kurve  $r_{\alpha}(\varphi)$  definiert. Dann ergab sich diese vorgegebene Kurve  $r_{\alpha}(\varphi)$  gerade als eine der Charakteristiken von Gl.(3).

Läßt man nun aber die Beschränkung auf ebene Stromlinien fallen, dann kann man die so gewonnene Freiheit in der Wahl von  $\phi(s, \vartheta)$  ausnutzen, um weitere Charakteristiken der Gl. (III 12) zu finden. Nach diesem Prinzip wollen wir nun in folgendem einige Aussagen über den M- und S-Torus machen, ohne die Differentialgleichung (III 12) explizit zu lösen. Dazu wählen wir die Geometrie so einfach wie möglich: Die Bezugslinie  $\vec{R}(s)$  sei ein Kreis

$$\frac{1}{\tau} = 0 \qquad \frac{1}{R} = 1$$

und der gesuchte Torus  $r(s, \vartheta)$  möge symmetrisch in Bezug auf  $\vartheta = 0$  sein. Dies erfordert natürlich dieselbe Symmetrie von der Potentialfunktion  $\phi(s, \vartheta)$ . Die Differentialgleichung (III 12) schreibt sich nun

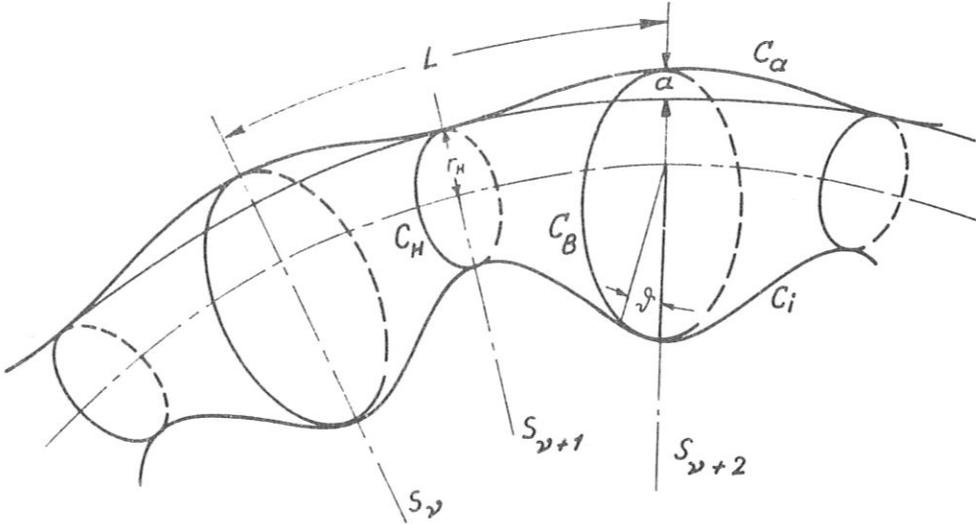
$$\begin{aligned} r_s^2 + (1 - r \cos \vartheta)^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vartheta}\right)^2 - 2 r_s r_{\vartheta} \frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} + (r^2 + r_{\vartheta}^2) \left(\frac{\partial \phi}{\partial s}\right)^2 \\ = (r^2 + r_{\vartheta}^2) (1 - r \cos \vartheta)^2 + r_{\vartheta}^2 r_s^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Alle Längen werden hier in Einheiten des großen Torusradius  $R$  (Radius der Seele) gemessen, die Bogenlänge  $s$  geht dann in den Azimutwinkel  $\varphi$  über.

Wählen wir nun  $\phi$  symmetrisch in  $\vartheta$  d.h.  $\phi = \phi(\cos \vartheta)$ , dann ist Gl.(III 5) gegen die Transformation  $\vartheta \rightarrow -\vartheta$  invariant, wenn auch  $r$  nur von  $\cos \vartheta$  abhängt.

$$r = r(s, \vartheta) .$$

Die Lösung ist auch symmetrisch.



Zeichnung 6

Besonders interessiert nun natürlich die innere und äußere Kontur des Torus. Aus Symmetriegründen sind diese beiden Kurven Magnetfeldlinien. Sie haben somit die gleiche Gesamtlänge. Dies ist leicht einzusehen: Da ja senkrecht durch alle Magnetfeldlinien der gleiche meridionale Gesamtstrom  $I_{mer}$  fließt, die Stromdichte aber konstant ist, müssen alle Feldlinien die gleiche Gesamtlänge besitzen. Damit kann die innere Kontur  $C_i$  kein Kreis mehr sein. Der nächst einfache Fall wäre also, daß der Torus zu gewissen gleichabständigen Stellen  $s_\nu$  ( $\nu = 1 \dots n$ ) symmetrisch ist, wie es schon in der obigen Zeichnung angedeutet wurde.

Wie muß nun  $\vartheta(s, \vartheta)$  gewählt werden, um Auskunft über  $C_a$  und  $C_i$  zu erhalten?

Dazu wollen wir folgendermaßen vorgehen: Wir konstruieren einen Hilfstorus  $r_0(s, \vartheta)$ , der auch schon die von dem gesuchten M-und-S-Torus verlangten Symmetrien aufweist. Weiterhin sollen die Linien  $\vartheta = \text{const}$  auf diesem Torus die gleiche Gesamtlänge besitzen. Dieser Hilfstorus ist also beinahe schon so etwas wie ein M-und-S-Torus, nur sind die Parameterlinien  $\vartheta = \text{const}$  im allgemeinen nicht auch gleichzeitig geodätische Linien. Formelmäßig lauten die Beziehungen an dem Hilfstorus:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_0}{\partial \vartheta} &= 0 & \text{für } \vartheta &= 0, \pi \\ \frac{\partial r_0}{\partial s} &= 0 & \text{für } s &= s_\nu \quad (\nu = 0, 1 \dots n) \end{aligned}$$

Die Länge  $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\partial r_0}{\partial s'}\right)^2 + (1 - r_0 \cos \vartheta)^2} ds'$  ist unabhängig von  $\vartheta$ .

Die Potentialfunktion  $\vartheta$  definieren wir nun als Bogenlänge längs  $\vartheta = \text{const.}$  auf dem Hilfstorus.

$$\vartheta(s, ) = \int_0^s \sqrt{\left(\frac{\partial r_0}{\partial s'}\right)^2 + (1 - r_0 \cos \vartheta)^2} ds' . \quad (7)$$

Diese Darstellung hat offensichtlich die verlangte Form.

$$\vartheta = L \frac{s}{2\pi} + P(s, \vartheta) . \quad (8)$$

$P(s, \vartheta)$  ist eine in beiden Argumenten periodische Funktion. Geht man nun mit dieser Darstellung in die Differentialgleichung (5) ein, dann zeigt sich, daß die äußere und innere Kontur  $C_a$  und  $C_i$  des Hilfstorus Charakteristiken der Gl. (5) sind und damit also auf dem gesuchten N- und S-Torus liegen. Da wir noch die Anfangskurve für die Charakteristiken frei haben, wählen wir dafür die "Hals"-Kontur  $C_H$  oder die "Bauch"-Kontur  $C_B$  des Hilfstorus. Aus der Gl. (5) folgt dann wegen  $\frac{\partial r_0}{\partial s} = 0$  und  $\frac{\partial \vartheta}{\partial \vartheta} = 0$  an diesen Stellen:

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{\partial r_0}{\partial s} = 0 \quad \text{für } C_H \text{ oder } C_B$$

d.h. die Charakteristiken berühren den Hilfstorus längs  $C_H$  oder  $C_B$ . Es sei nun  $C_H$  als Anfangskurve gewählt. Da wir nur an analytischen Flächen interessiert sind, folgt aus Symmetriegründen für  $C_B$ :

$$\frac{\partial r}{\partial s} = 0 \quad \text{längs } C_B \quad (9)$$

Von der Differentialgleichung (5) bleibt nur noch übrig

$$(1 - r_0 \cos \vartheta)^2 = (1 - r \cos \vartheta)^2, \quad (10)$$

was zu  $r = r_0(\vartheta)$  längs  $C_B$  führt.

Es steht noch der Beweis aus, daß  $C_a$  und  $C_i$  Charakteristiken sind. Hierzu lösen wir die partielle Differentialgleichung (5) nach  $r_s$  auf.

$$r_s = \frac{1}{(\varrho_{\vartheta}^2 - r^2)} \left\{ r_{\vartheta} \varrho_s \varrho + \sqrt{r_{\vartheta}^2 \varrho_s^2 \varrho^2 - (\varrho_{\vartheta}^2 - r^2)} \right\} \\ \frac{\varrho_{\vartheta}^2 \left(1 - \frac{r}{R} \cos \vartheta\right)^2 + (r_{\vartheta}^2 + r^2) \left[ \varrho_s^2 - \left(1 - \frac{r}{R} \cos \vartheta\right)^2 \right]}{\varrho_{\vartheta}^2} \right\} \quad (11)$$

$$=: G(s, \vartheta, r_{\vartheta}) .$$

Die Charakteristikengleichungen lauten in diesem Fall

$$\frac{d\vartheta}{ds} = - \frac{\partial G}{\partial r_{\vartheta}}$$

$$\frac{dr}{ds} = G - r_{\vartheta} \frac{\partial G}{\partial r_{\vartheta}} \quad (12)$$

$$\frac{dr_{\vartheta}}{ds} = r_{\vartheta} \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{\partial G}{\partial \vartheta} .$$

Längs  $C_a$  und  $C_i$  verschwindet nun  $\frac{\partial G}{\partial \vartheta}$ , die letzte Gleichung von (12) reduziert sich zu

$$\frac{\partial r_{\vartheta}}{\partial s} = r_{\vartheta} \frac{\partial G}{\partial r} . \quad (13)$$

Mit dem Anfangswert  $r_{\vartheta} = 0$  auf  $C_H$  bleibt damit  $r_{\vartheta} = 0$  längs  $C_a, C_i$ . In der Ableitung  $\frac{\partial G}{\partial r_{\vartheta}}$  kommen nur Terme linear in  $\frac{\partial \varrho}{\partial \vartheta}$  und  $r_{\vartheta}$  vor, die erste Gleichung ist somit längs  $C_{a,i}$  auch erfüllt. Dann ist aber auch die totale Ableitung in der zweiten Gleichung gleich der partiellen Ableitung, und diese Gleichung ist dann auch erfüllt. Zusammenfassend läßt sich das Ergebnis formulieren: Wählt man als Anfangskurve für die Charakteristiken die Kontur  $C_H$  des Hilfstorus, dann liegen auch die Kurven  $C_B, C_a$  und  $C_i$  auf dem gesuchten M-und-S-Torus.

### B) Konstruktion eines Hilfstorus

Wir hatten den Hilfstorus  $r_0(s, \vartheta)$  durch seine Eigenschaften (6) definiert. Im folgenden wollen wir nun ein konkretes Beispiel angeben und den Fehler zwischen M-und-S-Torus und Hilfstorus abschätzen. Für den Hilfstorus machen wir den Ansatz

$$r_0(s, \vartheta) = r_H + b(\vartheta) \frac{a}{2} (1 - \cos 2ns) \quad (14)$$

$r_H, a$  sind Konstanten,  $n =$  natürliche Zahl. Die Amplitude muss aus der Forderung nach Längengleichheit der Linien  $\vartheta = \text{const}$  bestimmt werden. Für eine Linie z.B. die Außenkontur  $C_a$  können wir  $b(\pi)$  vorschreiben.

$$r_a = r_H + b(\pi) \frac{a}{2} (1 - \cos 2 n s). \quad (15)$$

Die Gleichung zur Bestimmung von  $b(\vartheta)$  lautet

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\partial r_a}{\partial s}\right)^2 + \left(1 + \frac{r_a(\varphi)}{R}\right)^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\partial r_o}{\partial s}\right)^2 + \left(1 - \frac{r_o}{R} \cos \vartheta\right)^2} d\varphi.$$

mit  $R\varphi = s$

Nun ist das Aspektverhältnis  $\alpha = \frac{r_H}{R}$  im allgemeinen recht klein gegen 1 ( $\alpha \ll 1$ ). Unter dieser Annahme lassen sich die Integrale näherungsweise auswerten und wir erhalten für  $b(\vartheta)$  (16)

$$b(\vartheta) \approx \frac{R}{a n^2} \cos \vartheta + \sqrt{\left(\frac{R}{a n} \cos \vartheta\right)^2 + b^2(\pi) + \frac{4r_H R (1 + \cos \vartheta) + 2aRb(\pi)}{a^2 n^2}}$$

Für  $b(\pi) = 0$  wird die Außenkontur ein Kreis. Im Hinblick auf die Stabilität ist aber der Fall  $b(\pi) \neq 0$  interessanter, denn dann können längs der Außenkontur auch Gebiete günstiger Krümmung auftreten. Dieser so konstruierte Hilfstorus geht für sehr kleines Aspektverhältnis in eine rotationssymmetrische Fläche  $r_o(s)$  über. Bei dem Grenzübergang  $\frac{1}{R} \rightarrow 0$  müssen wir die Periodenlänge  $L$  festhalten.

Es ist

$$n = \frac{\pi R}{L}$$

und damit strebt  $b(\vartheta)$  mit  $\frac{1}{R} \rightarrow 0$  gegen  $b(\pi)$

$$b(\vartheta) \approx 1 + \left(2 \frac{r_H}{a} + 1\right) (1 + \cos \vartheta) \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (17)$$

$$b(\pi) = 1$$

mit  $\varepsilon = \frac{L^2}{a \pi^2 R}$  als Entwicklungsparameter und  $b(\pi) = 1$ .

Zeichnung 6 veranschaulicht die Größen am Hilfstorus. Unter nicht allzu

extremen Verhältnissen sind  $L^2$  und  $r_H$  a  $\pi^2$  von gleicher Größenordnung und somit

$$\varepsilon \approx \frac{r_H}{R} = \alpha.$$

Im Rahmen einer solchen Entwicklung nach  $\alpha$  läßt sich auch der Fehler zwischen M-und-S-Torus und Hilfstorus abschätzen. Wir machen dazu den Ansatz:

$$r = r_0(s, \vartheta) + \delta(s, \vartheta) \quad (18)$$

und linearisieren die Differentialgleichung (V 5) unter der Annahme:

$$\delta \ll r_0.$$

Mit Gl.(5)  $F(r, r_s, r_{\vartheta}) = 0$  wird die linearisierte Gleichung

$$F_{r_s} \delta_s + F_{r_{\vartheta}} \delta_{\vartheta} + F_r \delta + F = 0 \quad (19)$$

mit

$$F_{r_s} = 2 r_s \vartheta^2 - 2 r_{\vartheta} \vartheta_s \vartheta_{\vartheta} = 2 r_s r^2$$

$$F_{r_{\vartheta}} = 2 r_{\vartheta} r_s^2 - 2 r_s \vartheta_{\vartheta} \vartheta_s$$

$$F_r = \left(1 - \frac{r}{R} \cos \vartheta\right) \frac{\cos \vartheta}{R} \left\{r^2 + 2 \vartheta^2\right\}$$

$$F = \left[r_s^2 + \left(1 - \frac{r}{R} \cos \vartheta\right)^2\right] \vartheta^2 - 2 r_s r_{\vartheta} \vartheta_s \vartheta_{\vartheta} + r_{\vartheta}^2 r_s^2.$$

In diesen Koeffizienten steht überall  $r_0(s, \vartheta)$  anstelle von  $r(s, \vartheta)$ . Die Anfangswerte auf  $C_H$  sind:  $\delta = 0$  für alle  $\vartheta$ . Mit Hilfe der Definition von  $\vartheta(s, \vartheta)$  kann man aus Gl.(19) sofort sehen, daß  $\vartheta = 0$  für  $C_a$  und  $C_i$  ist. Man kann daher vermuten, daß die größte Abweichung zwischen diesen beiden Kurven liegt, etwa in der Nähe von  $\vartheta = \pi/2 ; \sqrt[3]{2} \pi$ . Um hier  $\delta$  abzuschätzen, wollen wir die Koeffizienten in Gl.(19) nach Größenordnungen in  $\alpha$  ordnen. Benutzen wir die Definition  $\vartheta(s, \vartheta)$  Gl.(7) sowie die Darstellung des Hilfstorus Gl.(14) und Gl.(17), dann erhalten wir:

$$F_{r_s} \approx -2 r_s r^2 + O(\alpha^2)$$

$$F_r \approx O(\alpha) \quad F \approx O(\alpha^2) \quad (20)$$

$$F_{r_{\vartheta}} \approx O(\alpha)$$

Damit wird nach Gl.(19) die Abweichung  $\delta$  von der Ordnung  $\alpha^2$  und Gl.(19) lautet in niedrigster Ordnung

$$F_{r_s} \delta_s + F = 0, \quad (21)$$

d.h. die Charakteristiken von Gl.(19) liegen in niedrigster Ordnung in der Ebene  $\vartheta = \text{const.}$

Der Quotient  $\delta_s = -F/F_{r_s}$  ist in jedem Intervall der s-Achse beschränkt. Obgleich längs  $C_i$  und  $C_a$  Zähler und Nenner verschwinden, bleibt der Quotient beschränkt. Aus Gl.(19) sieht man, daß  $F$  stärker gegen null strebt als  $F_{r_s}$ . Damit verschwindet  $\delta$  mit  $\alpha^2$ .

Für diesen ganzen Beweisgang wurde die spezielle Gestalt des Hilfstorüs (14) gar nicht herangezogen. Wichtig war lediglich die Art und Weise, wie  $r_o(s, \vartheta)$  für  $\alpha \rightarrow 0$  gegen eine rotationssymmetrische Konfiguration  $r_o(s)$  strebt.

Zusammenfassend lautet unser Ergebnis:

Man konstruiere einen symmetrischen Hilfstorüs  $r_o(s, \vartheta)$  mit den Eigenschaften Gl. (III 6), der sich für kleines Aspektverhältnis  $\alpha$  wie

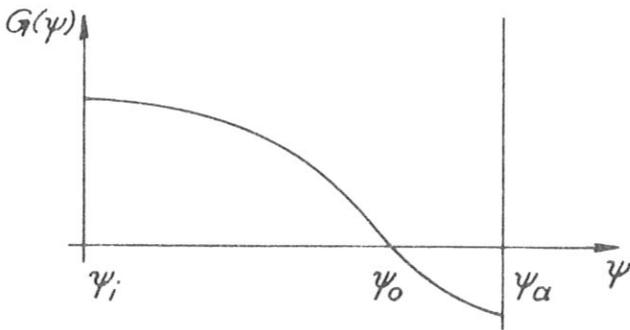
$$r_o(s) + O(\alpha)$$

verhält. Definiert man das Potential  $\vartheta(s, \vartheta)$  als Bogenlänge längs der Linien  $\vartheta = \text{const}$  auf  $r_o(s, \vartheta)$  und wählt als Anfangskurve  $C_H$  auf  $r_o(s, \vartheta)$ , dann berühren sich der gesuchte M-und-S-Torus und der Hilfstorüs längs der 4 Linien  $C_a, C_i, C_H, C_B$ . Ansonsten ist der Unterschied zwischen beiden Flächen von der Ordnung  $\alpha^2$ . Der Hilfstorüs liefert uns somit ein ungefähres Bild der M-und-S-Fläche, ohne daß wir die Gleichgewichtsgleichung explizit lösen müssen.

## VI. Stabilität des M-und-S-Torus

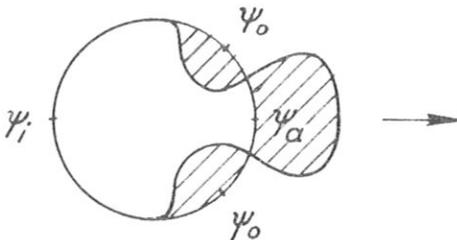
### A) Austauschstörungen

Die nahe Übereinstimmung zwischen M-und-S-Torus und Hilfstorus kann man nun mit Vorteil benutzen, um Aussagen über das Stabilitätsverhalten des M-und-S-Torus zu bekommen. Wir berechnen die Werte  $\alpha = 1/\rho$ ,  $\mu$ , die in das Stabilitätskriterium Gl. (IV 14) eingehen, an dem Hilfstorus; die Korrekturen sind dann auch von der Ordnung  $\alpha^2$ . Die Funktion  $G(\psi)$  müßte nun für jede Feldlinie berechnet werden, aber man kann sich hier wohl auf die Außenkontur beschränken. Wie schon im Kap. IV am linearen gewellten Thetapinch gezeigt wurde, ist hier  $G(\psi)$  konstant und positiv. Krümmt man nun diese Konfiguration etwas, dann kommt längs der Innenkontur  $C_i$  noch ein Betrag von der hier positiven Gesamtkrümmung hinzu, längs der Außenkontur  $C_a$  wird dieser Betrag aber abgezogen. Tritt längs der Außenkontur  $C_a$  überhaupt keine günstige Krümmung auf, wie bei den in [8] berechneten Konfigurationen, dann wird negativ auf  $C_a$



Die Folge ist nun, daß der Torus längs dieser Feldlinie aufspaltet. Dazu müssen wir die Störung  $F(\psi)$  in folgender Weise wählen:

$F(\psi)$  negativ in der Umgebung von  $\psi_0$   
 $F(\psi)$  positiv in der Umgebung von  $\psi_a$   
 $F(\psi) = 0$  sonst.



Zeichnung 7

Zeichnung 7 zeigt einen Querschnitt durch den Torus mit der oben beschriebenen Störung. Diese Instabilität ist also eine Folge der Toruskrümmung. Die äußere Kontur  $C_a$  ist hier die Feldlinie mit dem niedrigsten Wert von  $G(\psi)$ . Bei der obigen Geometrie ist  $G(\psi)$  eine monotone Funktion in  $\psi$ , und daher genügt es  $G(\psi)$  längs der äußeren Kontur positiv zu machen, um den Torus gegen Austausch zu stabilisieren. Längs  $C_a$  läßt sich  $G(\psi_a)$  aber

leicht berechnen, da hier ja die Krümmung und die Bogenlänge  $\vartheta$  bekannt sind. Für  $\mu^{-1}$  benutzen wir den Abstand der Linien  $\vartheta = \text{const}$  und damit wird

$$\mu^{-1} \approx r_0(s) \quad \text{für } \vartheta = \pi.$$

Dieses Verfahren wollen wir benutzen, um die Außen- und Innenkontur eines austauschstabilen M- und S-Torus zu berechnen. Benutzen wir den Ansatz Gl. (V 14) mit  $b(\pi) = 1$  für den Hilfstorus und berechnen wir  $G(\psi_a)$  in der Näherung:  $\alpha = r_H/R \ll 1$ ,  $a/R \ll 1$ , dann ergibt sich in niedrigster Ordnung für die Bedingung  $G(\psi_a) \geq 0$

$$\frac{a}{R} n^2 \left( \frac{a/2r_H}{1 + a/2r_H} \right) \geq 1. \quad (1)$$

Ersetzen wir noch  $n$  durch die Periodenlänge  $L$  und den Torusradius  $R$  dann lautet das Stabilitätskriterium für Austauschstörungen:

$$\pi^2 \frac{a R}{L^2} \frac{a}{a + 2 r_H} \geq 1. \quad (2)$$

Zeichnung 8 zeigt zwei M- und S-Konturen, die das obige Kriterium erfüllen. Der Faktor  $b(0)$  wurde dazu nach Gl. (V 16) berechnet. Austauschstabilität kann man umso leichter erreichen, je größer die Anzahl der Perioden und die Amplitude der Welle ist. Dadurch werden aber auch die lokal auftretenden Krümmungen - etwa längs  $C_i$  - größer, und die lokalisierten Störungen können umso leichter auftreten.

Die maximalen Krümmungen längs der Innenkontur sind:

$$\frac{1}{\rho_H} = \frac{1}{R} \left( 1 + 2 \frac{b(0) a}{R} n^2 \right)$$

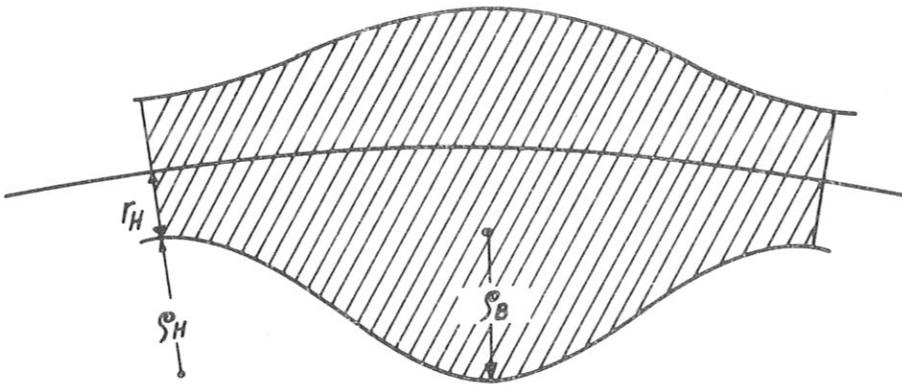
$$\frac{1}{\rho_B} = \frac{1}{R} \left( 1 - 2 \frac{b(0) a}{R} n^2 \right)$$

Die Krümmungen nehmen mit dem Faktor  $\frac{a}{R} n^2$  ab. Das bedeutet nach Gl. (1)

$$a \gg 2 r_H \quad (4)$$

für schwache Krümmungen.

Definieren wir als Welligkeit des Torus das Verhältnis zwischen "Hals"- und "Bauch"-Durchmesser in der Ebene  $\vartheta = 0, \pi$  so bedeutet eine Verringerung



M+S - Kontur

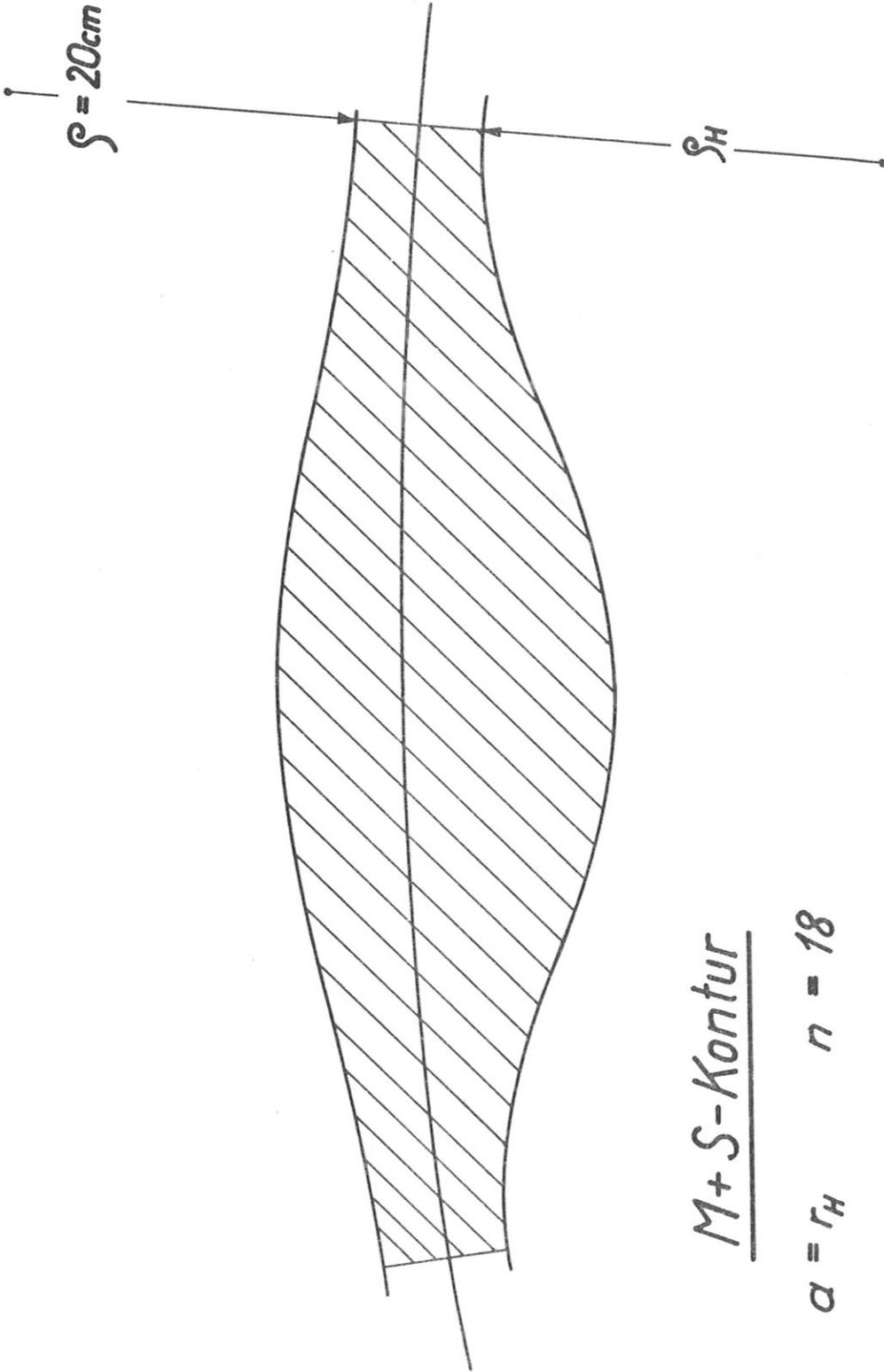
$$r_a(\varphi) = r_H + \frac{\alpha}{2} (1 - \cos 2n\varphi)$$

$$r_i(\varphi) = r_H + b \frac{\alpha}{2} (1 - \cos 2n\varphi)$$

$$R_o = 30 \text{ cm} \quad \alpha = r_H \quad n = 10$$

$$r_H = 1 \text{ cm} \quad b = 2.4$$

Zeichnung 8a



M+S-Kontur

$a = r_H$      $n = 18$

$R_o = 100\text{cm}$      $\lambda = 17,5\text{cm}$

$b = 2,4$      $r_H = 1\text{cm}$

Zeichnung 8b

der maximalen Krümmung eine Erhöhung der Welligkeit.

Mit Hilfe von Gl.(1) (Gleichheitszeichen) und Gl.(V.16) lassen sich dann Welligkeit und Krümmungen eines austauschstablen M-und-S-Torus als Funktionen des Verhältnisses  $x = \frac{a}{2 r_H}$  ausdrücken.

$$W(x) = 1 + x \left[ 1 + \frac{x}{1+x} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{(1+x)^2} + \frac{x}{1+x} \left( \frac{4}{x} + 2 \right)} \right]$$

$$\frac{R}{\varrho_H} = 1 + 2 \left( 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{1+x}{x} \right)^2 + \frac{1+x}{x} \left( \frac{4}{x} + 2 \right)} \right) \quad (5)$$

$$\frac{R}{\varrho_B} = 1 - 2 \left( 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{1+x}{x} \right)^2 + \frac{1+x}{x} \left( \frac{4}{x} + 2 \right)} \right)$$

$$b(0) = \frac{x}{1+x} + \sqrt{1 + \left( \frac{x}{1+x} \right)^2 + \frac{x}{1+x} \left( \frac{4}{x} + 2 \right)}$$

In den Zeichnungen 9 und 10 sind diese Kurven dargestellt.

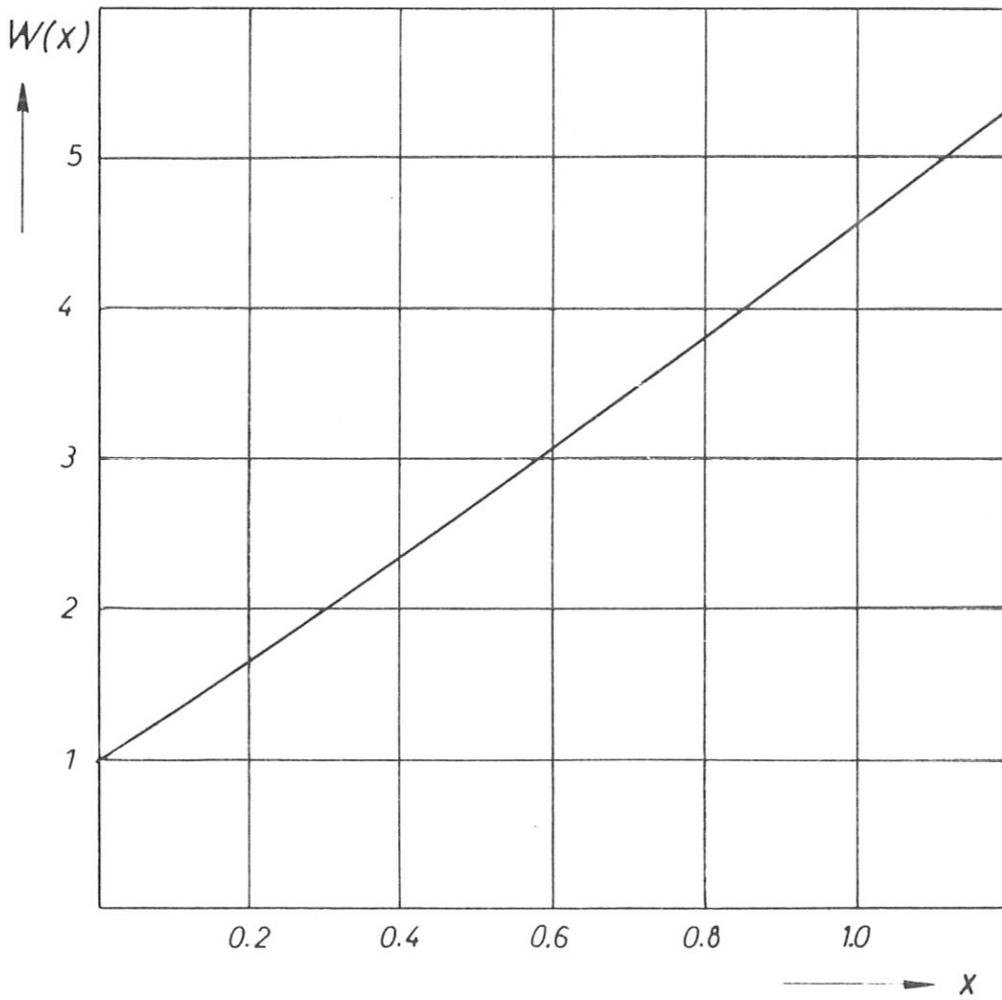
#### B) Störungen mit Feldänderung

Im vorigen Abschnitt hatten wir gezeigt, daß ein M-und-S-Torus unter Umständen austauschstabil sein kann. Um nun aber eine Aussage über das gesamte Stabilitätsverhalten machen zu können, müssen wir nach instabilen Störungen suchen. Da die Verbiegung des Magnetfeldes immer einen positiven Beitrag zur gesamten Energieänderung liefert, sind vermutlich diejenigen Störungen instabil, die in der Nachbarschaft einer Austauschstörung liegen, im Gegensatz zu diesen die Gebiete günstiger und ungünstiger Krümmung aber nicht unterschiedlich wichten.

Eine Störung, die diese Forderung erfüllt, ist

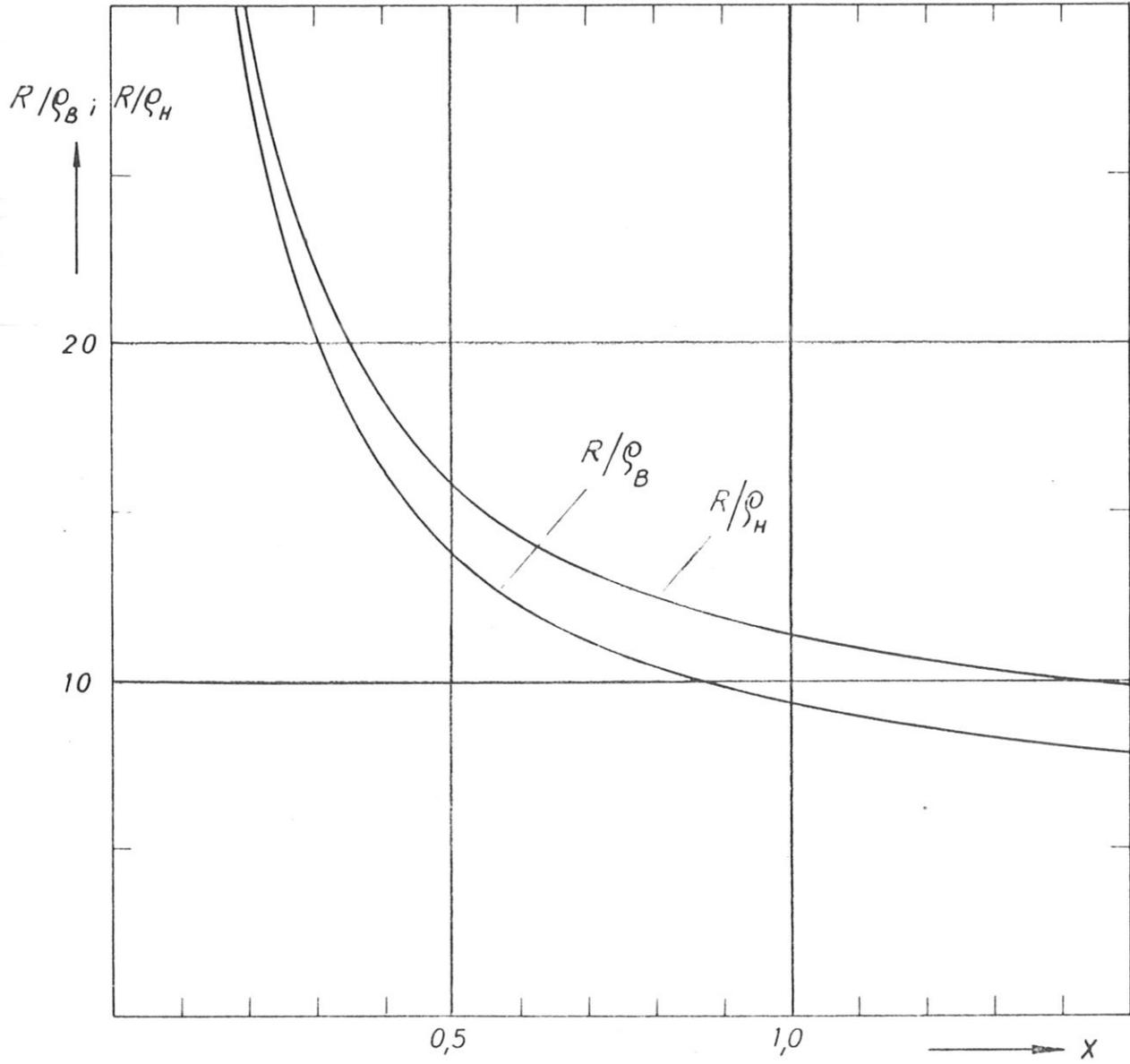
$$\xi_n = F(\psi) \quad \text{mit} \quad \iint F(\psi) \frac{d\psi}{\mu} d\vartheta = 0 \quad (6)$$

Die zweite Forderung besagt wieder, daß das Plasmavolumen erhalten bleibt. Diese Störung hängt nicht von der Bogenlänge längs der Feldlinien ab, es



Welligkeit eines austauschstabilen M-und-S-Torus

Zeichnung 9



Extremale Krümmungen eines austauschstabilen M- und S-Torus

Zeichnung 10

ist eine gleichmäßig durchlaufende "Rille". Der Oberflächenterm in der Energieänderung lautet mit der obigen Störung

$$\delta W_F = \frac{B^2}{8\pi} \iint F^2(\psi) \frac{d\psi}{\varrho(\vartheta, \psi)} \frac{d\vartheta}{\mu(\vartheta, \psi)} \quad (7)$$

Das Vorzeichen des Integrals wird im wesentlichen durch das Vorzeichen des Integranden

$$H(\psi) =: \int \frac{d\vartheta}{\mu\varrho} \quad (8)$$

bestimmt. In dem Integranden von  $H(\psi)$  werden die Gebiete günstiger und ungünstiger Krümmung gerade umgekehrt gewichtet wie bei den Austauschstörungen. Dies ergibt sich aus dem Flächenverhältnis der Gebiete mit unterschiedlicher Krümmung.

Beim M-und-S-Torus überwiegt die Gesamtfläche mit ungünstiger Krümmung und die Funktion  $H(\psi)$  wird hier negativ. Ohne Kenntnis der Gleichgewichtsfläche läßt sich die Funktion  $H(\psi)$  natürlich nicht explizit berechnen, aber im Grenzfall von kleinem Aspektverhältnis oder geringer Welligkeit lassen sich doch einige Aussagen über  $H(\psi)$  machen.

Gehen wir von dem idealen linearen  $\mathcal{J}$ -Pinch aus, dann wird hier offenbar wegen  $1/\varrho = 0$  :  $H(\psi) = 0$ .

Bei leichter Welligkeit der Plasmaoberfläche etwa in der Form:

$$r_0(z) = r_0 + a \sin kz$$

lautet  $H(\psi)$

$$H = \int_0^L (r_0 + a \sin kz) (-ak^2 \sin kz) \sqrt{1 + a^2 k^2 \cos^2 kz} dz \quad (9)$$

$$H \approx -\pi a^2 k + O(a^4)$$

$H(\psi)$  wird also beim gewellten  $\mathcal{J}$ -Pinch negativ und zwar quadratisch in der Amplitude  $a$ .

Führt man aber die Toruskrümmung als Entwicklungsparameter ein, dann ändert sich  $H(\psi)$  - ausgehend von einem linearen  $\mathcal{J}$ -Pinch - schon mit der ersten

Ordnung in  $1/R$ , da die Feldlinienkrümmung sich schon in erster Ordnung von  $1/R$  ändert. Um möglichst wenig Welligkeit zu erhalten, wählen wir als Außenkontur einen Kreis.

$$C_a : r_a(s) = r_H$$

$$C_i : r_i(s) = r_H + b(o) \frac{1}{2} (1 - \cos K s)$$

$$K = \frac{2\pi}{L} \quad n = \frac{\pi R}{L}$$

Die Amplitude  $b(o)$  erhalten wir aus Gl.(V 16)

$$b(o) = \frac{L^2}{\pi^2 R} + \sqrt{\left(\frac{L^2}{\pi^2 R}\right)^2 + \frac{L^2}{\pi^2 R} 8 r_H} \quad (10)$$

Die Wellenlänge  $L$  soll bei der Variation von  $1/R$  konstant bleiben.

Für sehr große  $R$  wird

$$b(o) \approx \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{8 r_H}{R}} \quad (11)$$

Längs der Außenkontur wird  $H(\psi)$  negativ, es tritt nur ungünstige Krümmung auf. Die andere extreme Feldlinie ist die Innenkontur  $C_i$ , hier liefert die Toruskrümmung einen positiven Beitrag zu  $H(\psi)$ . Längs  $C_i$  lautet  $H(\psi)$  in niedrigster Ordnung

$$H(\psi_i) = \int_0^L \left[ r_H + \frac{b(o)}{2} (1 - \cos K s) \right] \left( \frac{1}{R} + 2 \frac{\pi^2 b(o)}{L^2} \cos K s \right) ds$$

oder mit

$$\frac{L}{R} \ll \pi^2 \frac{r_H}{L} \quad (12)$$

$$H(\psi_i) \approx L \left( \frac{r_H}{R} - 4 \frac{r_H}{R} \right) = -3 L \frac{r_H}{R}.$$

Der erste Beitrag in (12) stammt direkt von der Toruskrümmung, der zweite Beitrag von der durch die Toruskrümmung erzeugten Welligkeit. Die beiden Feldlinien  $C_a$  und  $C_i$  machen damit  $H(\psi)$  negativ. Vermutlich gilt für die anderen Feldlinien des beschriebenen Torus dasselbe, denn bei einer nicht zu ausgearteten M- und S-Fläche mit den obigen Symmetrien Gl.(V 6) sind  $\mu$ ,  $1/\rho$  monotone Funktionen in  $\psi$  und damit auch  $H(\psi)$ .

Welligkeit und Toruskrümmung liefern beide einen destabilisierenden Beitrag zur Energieänderung,  $W_F$  ändert sich quadratisch mit der Amplitude der Wellung und linear mit der Toruskrümmung.

Um nun den zweiten Anteil in der Energieänderung - den Anteil der Magnetfeldverbiegung - zu berechnen, muß man das Neumannsche Problem (IV 3) lösen. Dies ist explizit nur bei einfachen geometrischen Verhältnissen möglich, so daß wir hier auf Näherungsrechnungen angewiesen sind.

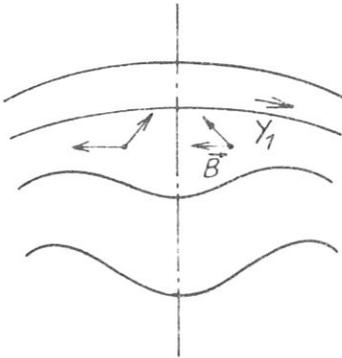
Zuerst läßt sich zeigen, daß der zweite Term in  $\delta W_a$  bei der oben gewählten Störung am M-und-S-Torus verschwindet. Die durchlaufenden Störungen

$$\xi_n = F(\psi)$$

sind symmetrisch zu den Symmetrielinien  $C_B$  oder  $C_H$ . Dann verschwinden am M-und-S-Torus alle Integrale

$$\iint_S \xi_n (\vec{B} \cdot \vec{Y}_i) df .$$

Es sei  $\vec{Y}_1$  das rein meridionale Feld und aus der Symmetrie des M-und-S-Torus folgt, daß das Skalarprodukt  $\vec{B} \cdot \vec{Y}_1$  antisymmetrisch in Bezug auf die Linien  $C_H$  und  $C_B$  ist.



Der ganze Integrand  $\xi_n \vec{Y} \cdot \vec{B}$  verhält sich antisymmetrisch zu  $C_B$  und das Integral über die Periode verschwindet. Es sei nun  $\vec{Y}_2$  das rein azimuthale Feld. Da  $\vec{Y}_2$  den gleichen Randbedingungen genügt wie das Gleichgewichtsfeld  $\vec{B}$  - die Fläche  $F$  ist ja Flußröhre von  $\vec{B}$  - ist also  $\vec{Y}_2$  wegen der eindeutigen Lösbarkeit des Neumannschen Problems bis auf

einen konstanten Faktor mit  $\vec{B}$  identisch. Wegen der konstanten Magnetfeldstärke auf  $S$  ist auch das Skalarprodukt  $\vec{B} \cdot \vec{Y}_2$  auf  $S$  eine Konstante.

$$\vec{B} \cdot \vec{Y}_2 = \text{const} \quad \text{auf } S . \quad (13)$$

Da das Plasmavolumen bei der Störung erhalten bleibt (Gl. 6), verschwindet auch das Integral

$$\iint_S \xi_n \vec{B} \cdot \vec{Y}_2 df = 0 .$$

Wesentlich bei diesem Beweis ist die Symmetrie der Gleichgewichtsfläche  $S$  und der Störung, während bei den Austauschstörungen hierzu nur die Geschlossenheit der Magnetfeldlinien vorausgesetzt werden mußte.

Von der Feldänderung bleibt also nur noch der Term übrig:

$$\delta W_a^I = \frac{1}{8\pi} \iint_S \phi^* \operatorname{Div} \xi_n \vec{B} \, df. \quad (14)$$

Allgemein läßt sich nun noch über Gl.(14) folgende Aussage machen:

Verschwindet die Randbedingung  $\frac{d\phi}{dn} = \operatorname{Div} \xi_n \vec{B}$  auf  $S$  mit irgendeinem Entwicklungsparameter  $\epsilon$ , d.h.  $\frac{d\phi}{dn} = O(\epsilon)$ , dann verschwindet  $\delta W_a^I$  mit  $\epsilon^2$ .

$$\frac{d\phi}{dn} \sim \epsilon \longrightarrow \delta W_a^I \sim \epsilon^2. \quad (15)$$

Dazu setzen wir voraus, daß die Lösung  $\phi$  in einer gewissen Umgebung von  $\epsilon = 0$  existieren. Damit ist  $\delta W_a^I$  in einer Umgebung von  $\epsilon = 0$  beschränkt. Die Lösung  $\phi$  entsteht nun durch eine lineare Operation aus dem vorgegebenen Randwert  $\frac{d\phi}{dn}$  auf  $S$ . Nach den üblichen Methoden der Potentialtheorie [18] macht man für  $\phi$  den Ansatz:

$$\phi = \frac{1}{2\pi} \iint_{S^*} \frac{h \, df}{r} \quad (16)$$

( $S^*$  ist hier die Summe aus Plasmaoberfläche  $S$  und der äußeren Berandung  $F$ ). Für die Flächendichte  $h$  erhält man die Integralgleichung

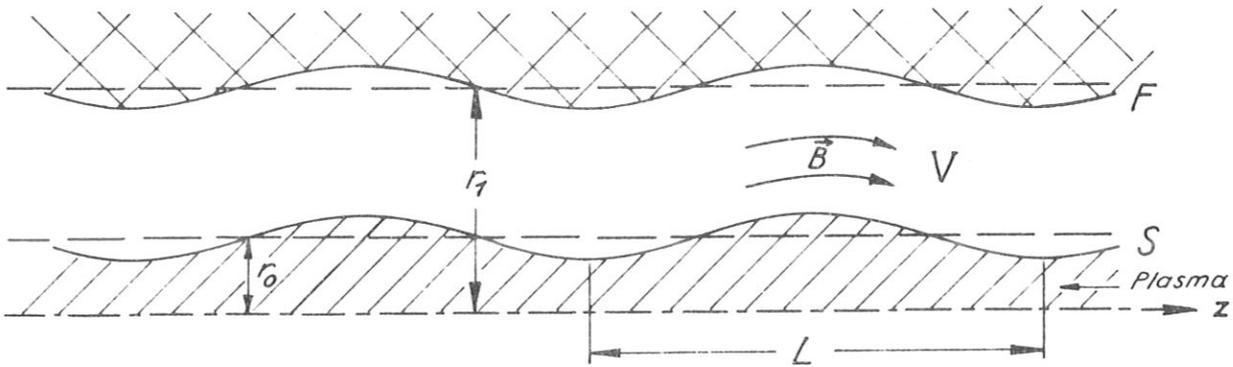
$$h - \frac{1}{2\pi} \iint_{S^*} h \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \, df = - \frac{d\phi^*}{dn}. \quad (17)$$

Die homogene Gleichung besitzt nur die Nulllösung und die Lösung der inhomogenen Gleichung, die Neumannsche Reihe, verschwindet mit  $\frac{d\phi^*}{dn}$ . Damit verschwindet auch  $\phi$  mit dem Entwicklungsparameter  $\epsilon$  und  $\delta W_a^I$  mit  $\epsilon^2$ .

Der mehrfache Zusammenhang des Gebietes  $V$  spielt hier im Beweisgang keine Rolle, da das Potential  $\phi$  einwertig ist und somit keine Sprünge an den Schnittflächen auftreten, die  $V$ , einfach zusammenhängend machen.

VII. Gewellter Thetapinch

Dieses Verhalten der Energieänderung wollen wir nun an einem Thetapinch mit periodischer Wellung etwas genauer untersuchen. Wir wollen die Amplitude der Wellung als klein gegenüber dem mittleren Plasmaradius betrachten und alle Größen nach Potenzen dieser Amplitude entwickeln.



Zeichnung 11

Die Randkurve des rotationssymmetrischen Plasmavolumens habe die Form:

$$r = r_0 + a \cos k z . \quad (1)$$

Die äußere Spule sei eine Flußröhre des Gleichgewichtsfeldes  $\vec{B}$ . Solange wir noch innerhalb der Singularitäten des Gleichgewichtsfeldes sind, hat die äußere Spule eine ähnliche Form wie die Plasmaoberfläche.

$$r \approx r_1 + b \cos k z \quad (2)$$

Dies ist nur der Anfang einer Fourierreihenentwicklung, beim Übergang zum linearen Thetapinch ( $a \rightarrow 0$ ) wird das Außenfeld aber homogen und damit  $b \rightarrow 0$ .

Wir setzen noch voraus, daß die Wellenlänge  $L$  groß gegenüber den Querdimensionen des Plasmas ist.

$$a k \ll 1 \quad r_0 k \ll 1 \quad r_1 k \ll 1 \quad (3)$$

Die gleichmäßig durchlaufende "Rille" hat in dieser Geometrie die Form:

$$\xi_n = \xi_0 \sin m \vartheta ; \quad m = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Der Oberflächenanteil  $W_F$  lautet bis zur zweiten Ordnung in der Amplitude  $a$

$$W_F = - \frac{B^2}{8} \xi_0^2 a^2 k^2 \int_0^L \cos^2 k z dz . \quad (5)$$

Damit müssen wir den stabilisierenden Anteil  $\delta W_a^I$  auch nur bis zur zweiten Ordnung in  $a$  berechnen. Die Randbedingung für das Störfeld wird auf der Plasmaoberfläche

$$\frac{d\vartheta^*}{dn} = \text{Div} \xi_n \vec{B} \approx - \xi_0 B \frac{a k \sin k z \sin m \vartheta}{r_0} + O(a^2). \quad (6)$$

Nun ist aber der Integrand in  $W_a^I$  schon allein von der Ordnung  $a^2$ , wir brauchen daher die geometrische Form des Plasmavolumens nur in der nullten Ordnung berücksichtigen. Das bedeutet, daß bei der Lösung des Neumannschen Problems zur Bestimmung von  $\vartheta$  in Zylinderkoordinaten gerechnet werden kann; in nullter Ordnung gibt es keine Wellung. Als Lösung der Laplacegleichung bekommen wir hier die modifizierten Besselfunktionen  $I_m(kr)$ ,  $K_m(kr)$  und  $\vartheta^*$  hat die Form

$$\vartheta^* = \left\{ A K_m(kr) + B I_m(kr) \right\} \sin m \vartheta \sin kz . \quad (7)$$

Die Konstanten  $A$  und  $B$  berechnen sich aus den Randbedingungen:

$$A K'_m(k r_1) + B I'_m(k r_1) = 0 \quad (8)$$

$$A K'_m(k r_0) + B I'_m(k r_0) = \frac{a B \xi_0}{r_0}$$

Als Ergebnis erhalten wir für den Feldanteil

$$\delta W_a^I = \frac{B^2}{8} \xi_0^2 \frac{a^2 k^2}{k r_0} C \int_0^L \cos^2 kz dz \quad (9)$$

mit

$$C = \frac{I'_m(k r_1) K_m(k r_0) - I_m(k r_0) K'_m(k r_1)}{I'_m(k r_1) K'_m(k r_0) - I'_m(k r_0) K'_m(k r_1)} .$$

Das Verhältnis zwischen stabilisierendem und destabilisierendem Anteil in

$\delta W$  wird aus (5) und (9)

$$Q =: \frac{\delta W_a^I}{\delta W_F} = \frac{C}{k r_0} . \quad (10)$$

Die Konstante  $C$  läßt sich wegen der Voraussetzung (3) durch die Näherungsformeln für Besselfunktionen bei kleinem Argument [19] noch vereinfachen und der Stabilitätsquotient  $Q$  lautet:

$$Q \approx \frac{1}{m} \frac{1 + (r_0/r_1)^{2m}}{1 - (r_0/r_1)^{2m}} \quad (11)$$

Hieraus läßt sich nun folgendes Resultat ablesen:

- 1) Eine gleichmäßige Verrückung des Plasmas, d.h.  $m = 1$  wird durch die Anwesenheit einer äußeren Wand stabilisiert ( $Q > 1$ )

Der Unterschied zwischen der oben definierten Verschiebung in Normalrichtung und der gleichmäßigen Verrückung, d.h.  $\xi$  in  $r$ -Richtung, ist von der Ordnung  $(ka)^2$  und deshalb in der obigen Näherung vernachlässigbar.

- 2) Eine Aufspaltung des Plasmas längs der Feldlinien, d.h.  $m = 2$  ist instabil ( $Q < 1$ ).

Im Prinzip könnte die äußere Wand auch die Störungen mit höherem  $m$  stabilisieren, aber dazu müßte sie sehr nahe zur Plasmaoberfläche liegen. Bei  $m = 2$  lautet die Bedingung dafür:

$$r_1 \leq \sqrt[4]{3} r_0 \longrightarrow Q \geq 1.$$

Bei den üblichen Pinchexperimenten benötigt man aber  $r_1 \approx 5 - 10 r_0$ , um eine genügende Kompression zu bekommen. Je weiter die äußere Wand entfernt ist, umso weniger Einfluß hat sie auf die  $m = 1$ -Störung. Für  $r_1 \rightarrow \infty$  wird  $Q = 1$ .

#### A) Knickinstabilität

Die oben behandelte Stabilität gegenüber der  $m = 1$ -Störung kam nur dadurch zustande, daß die Gebiete günstiger Krümmung zu  $\delta W_F$  einen erheblichen Beitrag liefern. Das Plasma wird durch die äußere Spule an den "Hälsen" sozusagen festgehalten. Reduziert man nun diesen Beitrag, dann erhöht sich auch der Feldverbiegungseffekt.

Im folgenden wollen wir Störungen betrachten, die die Gebiete günstiger Krümmung fast unverändert lassen. Eine solche Störung hat die Form:

$$\xi_n = \xi_0 \sin m \vartheta \cos \frac{kz}{2}. \quad (12)$$

Die Wellenlänge längs des Magnetfeldes ist gerade die doppelte Periodenlänge der Gleichgewichtskonfiguration. Der destabilisierende Term  $\delta W_F$  lautet:

$$W_F = \frac{B^2}{8\pi} \xi_0^2 \frac{\pi}{2} (a r_0 + a^2) k^2 \int_0^{2L} \cos^2 k z dz \quad (13)$$

Für die Randbedingung des Störfeldes bekommen wir

$$\text{Div } \xi_n \vec{B} = - \frac{\xi_0 B}{r_0} \left\{ a k \left( \sin k z \cos \frac{k z}{2} + \frac{1}{2} \cos k z \sin \frac{k z}{2} \right) + \frac{k r_0}{2} \sin \frac{k z}{2} \right\} \sin m \vartheta + O(a^2) .$$

Man sieht hieraus nun folgendes: Auch im Falle  $a = 0$  verschwindet das Störfeld nicht, während der destabilisierende Anteil verschwindet. Das bedeutet, daß der lineare Thetapinch sich gegenüber Verbiegungen stabil verhält.

Mit ansteigender Amplitude wächst aber der destabilisierende Anteil in der Energieänderung. Wir wollen die Amplitude  $a$  abschätzen, bis zu der man noch mit Sicherheit Stabilität hat.

Vernachlässigt man in Gl.(14) den Anteil mit  $a$ , dann erhält man einen zu kleinen stabilisierenden Energieanteil  $\delta W_a^I$ . Die Berechnung von  $\delta W_a^I$  liefert mit dieser Vernachlässigung analog zu Gl.(9)

$$\delta W_a^I \approx \frac{B^2}{8} \xi_0^2 \frac{(k r_0)^2}{4} \frac{C}{k/2 r_0} \int_0^{2L} \cos^2 \frac{k z}{2} dz \quad (15)$$

mit  $C$  aus Gl.(9) .

Der Stabilitätsquotient hat in dieser Näherung die Form

$$Q \approx \frac{1}{m} \frac{r_0^2}{a r_0 + a^2} \frac{1 + (r_0/r_1)^{2m}}{1 - (r_0/r_1)^{2m}} . \quad (16)$$

In einem realistischen Fall ist die äußere Wand relativ weit vom Plasma entfernt  $r_1 \approx 10 r_0$ . Bei der  $m = 1$ -Störung erhalten wir aus Gl.(16) für alle Amplituden bis zu

$$a \approx 0.6 r_0 \quad (17)$$

noch Stabilität. Für die höheren m-Werte muß man dazu die Bedingung erfüllen:

$$\frac{r_0}{a} \geq m . \quad (18)$$

Diesen kritischen Amplituden entsprechen folgende Welligkeiten

$$m = 1 : \quad W = 4$$

$$m \geq 2 : \quad W \approx \frac{m + 1}{m - 1} .$$

Wie erklärt sich nun dieses Verhalten des linearen gewellten Thetapinchs?

Betrachten wir zuerst den Fall verschwindender Welligkeit ( $a = 0$ ). Diese Konfiguration ist gegenüber den Störungen Gl.(4), die hier gleichzeitig Austauschstörungen sind, marginal stabil. Gegenüber Verbiegungen verhält sie sich stabil, da eine Verbiegung die Energie des Magnetfeldes erhöht. Führt man nun eine endliche Welligkeit ( $a \neq 0$ ) ein, dann geben die Gebiete ungünstiger Krümmung Anlaß zu einer Instabilität. Eine Verrückung des gesamten Plasmas bleibt aber stabil. Der Grund hierfür liegt wesentlich in folgender Tatsache:

Das gesamte Magnetfeld  $\vec{B}$  im Außenraum wird aufgebaut von Strömen, die in der äußeren Spule fließen und den diamagnetischen Strömen auf der Plasmaoberfläche. Bei verschwindender Welligkeit haben wir es in Bezug auf die diamagnetischen Ströme mit einer idealen Spule zu tun. Die diamagnetischen Ströme liefern in diesem Fall keinen Beitrag zu dem Feld im Außenraum.

Erst bei endlicher Welligkeit liefern die diamagnetischen Ströme einen Beitrag zu dem Feld im Außenraum. Verschiebt sich nun die Plasmaoberfläche, dann wird dieses Feld verbogen, da ja kein Feld in die äußere Spule eindringen kann. Man kann auch sagen, daß durch die Bewegung des Plasmas in der äußeren Spule Ströme induziert werden, die die Bewegung zu hemmen suchen.

Mit steigendem  $m$  (abnehmender Wellenlänge) verringert sich aber dieser Verbiegungseffekt und die Störungen werden instabil.

Ein solches Verhalten wurde explizit in einer Arbeit von Kilb et al. [20] an dem Analogmodell einer leitenden Kugel im Magnetfeld berechnet.

B) Torus mit kleinem Aspektverhältnis ( $\alpha \ll 1$ )

Es soll nun noch die Frage behandelt werden, wie die Toruskrümmung sich auf die Rillenstörung mit  $m = 1$  und  $m \geq 1$  auswirkt. Wir betrachten dazu eine Folge von Gleichgewichten mit  $\alpha$  als Parameter, die im Grenzfall  $\alpha \rightarrow 0$  gegen den oben behandelten linearen gewellten Thetapinch streben. Dann besagt Low's Theorem [21], daß die Eigenwerte des Stabilitätsoperators bei der Änderung eines Gleichgewichtsparameters  $\alpha$  sich in derselben Ordnung ändern. Das bedeutet auf unseren Fall angewandt, daß stabile Störungen bei einer kleinen Änderung des Aspektverhältnisses stabil und instabile Störungen instabil bleiben. Die hier betrachteten Störungen sind im allgemeinen keine Eigenschwingungen, aber da sich jede Störung nach Eigenschwingungen entwickeln läßt, muß in einer instabilen Störung <sup>daß</sup> auch eine instabile Eigenschwingung enthalten sein. Das bedeutet also, die beim linearen gewellten Thetapinch gefundenen instabilen Störungen auch im schwach gekrümmten Torus auftreten. Eine Ausnahme von der obigen Regel bilden die für  $\alpha = 0$  marginalen Störungen. Hier muß man nach Low das Stabilitätsverhalten direkt berechnen.

Wir betrachten daher eine Folge von M- und S-Gleichgewichten, die für  $\alpha \rightarrow 0$  gegen den idealen linearen Thetapinch ( $a = 0$ ) streben. Die äußere Kontur dieser Gleichgewichte sei jeweils ein Kreis.

Wie schon in VI,A gezeigt wurde, sind diese Gleichgewichte austauschinstabil, das Plasma spaltet in zwei Teile auf. Dieses Aufspalten entspricht der  $m = 2$  - Instabilität. Wählt man nun eine  $m = 2$  - Störung nach dem Ansatz Gl.(6), dann wird diese Aufspaltung entsprechend dem in B) Gesagten noch verstärkt. Der Torus hat also danach noch eine größere Tendenz zum Aufspalten ( $m = 2$ ) als der lineare gewellte Thetapinch.

Interessant ist nun der Fall der  $m = 1$  - Störung, d.h. eine gleichmäßige Verdrückung des gesamten Plasmas. Hierzu machen wir eine grobe Abschätzung. In Gl.(12) hatten wir  $H(\psi_1) \approx -3L \frac{r_H}{R}$  abgeleitet. Analog findet man für  $H(\psi_a) \approx -L \frac{r_H}{R}$ . Als Mittelwert für die ganze Fläche wählen wir  $H \approx -2L \frac{r_H}{R}$ .

Der destabilisierende Teil der Energieänderung ist damit nach (7)

$$\delta W_F \approx -\frac{B^2}{8} \left( \int F^2(\psi) d\psi \right) 2L \frac{r_H}{R} \quad (19)$$

$$F(\psi) = \sin m \psi \longrightarrow \int F^2 d\psi = \pi.$$

Als Näherung für den stabilisierenden Anteil betrachten wir die für den gewellten Thetapinch abgeleitete Formel (9) und ersetzen die Amplitude  $a$  durch die von der Toruskrümmung herrührende Amplitude  $b$ ,  $a \rightarrow b/2$  Gl.(11). Da nur ungefähr die Hälfte der Oberfläche eine wesentliche Welligkeit aufweist, berücksichtigen wir dies noch durch den Faktor  $1/2$ . Weiterhin ist  $Q \approx 1$ . Mit diesen Vereinfachungen lautet der stabilisierende Anteil

$$W_{st} \approx \frac{B^2}{8} \xi_0^2 \frac{L}{\pi} \frac{8 r_H}{R} . \quad (20)$$

Ein Vergleich mit (54) zeigt, daß die  $m = 1$  - Störung in dieser Abschätzung stabil ist. Der stabilisierende Torus  $\delta W_a$  ändert sich hier auch linear mit  $\alpha = r_H/R$ , da die Welligkeit des Torus mit  $\sqrt{\alpha}$  anwächst.

### C) Anwachsraten

In den vorhergehenden Kapiteln war nur nach dem Vorzeichen der Energieänderung, d.h. nach Stabilität oder Instabilität, gefragt worden. Bei einer instabilen Störung interessiert aber auch die Anwachsraten dieser Instabilität. Es sei  $\vec{\xi}(\vec{x})$  eine Störung und  $\delta W(\vec{\xi}, \vec{\xi})$  die daraus resultierende Änderung der potentiellen Energie. Wird diese Energie nun in kinetische Energie des Plasmas übergeführt, dann lautet die Bilanzgleichung :

$$\delta W(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = \frac{1}{2} n \iiint_V \vec{\xi}^2 d^3x . \quad (21)$$

Die konstante Dichte  $n$  kann vor das Integralzeichen gezogen werden. Es wird hier über das Plasmavolumen integriert. Mit  $\vec{\xi} = \vec{\xi}_0 e^{\omega t}$  erhalten wir als Maß für die Anwachsraten

$$\omega^2 = \frac{2}{n} \frac{\delta W}{\iiint_V \vec{\xi}^2 d^3x} \quad (22)$$

Die Störung  $\vec{\xi}(\vec{x})$  war bis jetzt nur durch die Bedingungen

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{\xi} &= \xi_n \quad \text{auf } S \\ \text{div } \vec{\xi} &= 0 \quad \text{in } V \end{aligned} \quad (23)$$

definiert worden. Diese beiden Bedingungen legen nun aber  $\vec{\xi}(\vec{x})$  noch nicht

eindeutig fest. Eine weitere Bedingung erhalten wir auf folgende Weise: Die gefährlichste Störung ist die mit der größten Anwachsrate. Die Energieänderung  $\delta W$  hängt nur von der Randkomponente  $\xi_n$  ab. Die Anwachsrate erreicht also ihren Maximalwert, wenn die Norm

$$N = \iiint_V \vec{\xi}^2 d^3x \quad (24)$$

bei vorgeschriebenem Randwert  $\xi_n$  minimal wird. Dies ist aber gerade das Variationsprinzip für harmonische Vektorfelder. Das Feld  $\vec{\xi}$  berechnet sich damit aus

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{\xi} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{\xi} &= 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{\xi} &= \xi_n & & \text{auf } S. \end{aligned} \quad (25)$$

Die Störung  $\vec{\xi}$  läßt sich im allgemeinen als Gradient eines mehrwertigen skalaren Potentials darstellen. Man kann aber zeigen, daß hier nur der einwertige Anteil des Potentials  $U$  in Betracht kommt. Wegen des zweifachen Zusammenhanges des Plasmavolumens muß man zur vollständigen Bestimmung von  $\vec{\xi}$  aus (24) noch die Zirkulation  $\oint_{C_a} \vec{\xi}_a \cdot d\vec{s}$  vorgeben, wobei  $C_a$  eine azimuthal geschlossene Kurve im Plasmavolumen ist. Ganz analog zu dem Störfeld  $\delta \vec{B}$  (Kap. IV) hat die Störung linear die Darstellung

$$\vec{\xi} = \nabla U^* + \gamma \vec{\xi}_a \quad (26)$$

wobei  $\vec{\xi}_a$  den Bedingungen genügt

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{\xi}_a &= 0 & \vec{n} \cdot \vec{\xi}_a &= 0 & \text{auf } S \\ \operatorname{div} \vec{\xi}_a &= 0 & \oint_{C_a} \vec{\xi}_a \cdot d\vec{s} &= 1. \end{aligned} \quad (27)$$

Somit ergibt sich für die Norm

$$N(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = \iiint_V (\nabla U^*)^2 d^3x + \gamma \iiint_V \nabla U^* \cdot \vec{\xi}_a d^3x + \gamma^2 \iiint_V \vec{\xi}_a^2 d^3x. \quad (28)$$

Der zweite Term verschwindet wegen der Einwertigkeit von  $U^*$  und der Randbedingung für  $\vec{\xi}_a$  auf  $S$ . Der letzte Term ist positiv und verschwindet nur

für  $\gamma = 0$ . Die gesuchte minimale Norm lautet damit

$$N = \iiint_V (\nabla U^*)^2 d^3x. \quad (29)$$

Die Bedingungen für das Störpotential sind:

$$\begin{aligned} \Delta U^* &= 0 && \text{in } V \\ \frac{dU^*}{dn} &= \xi_n && \text{auf } S. \end{aligned} \quad (30)$$

Mit Hilfe dieser Formeln läßt sich die Anwachsrate für die obige Rilleninstabilität verhältnismäßig leicht abschätzen.

Mit der Randbedingung  $\xi_n = \xi_0 \sin m \vartheta$  auf  $S$  lautet die Lösung von (30) in nullter Ordnung von  $a$ .

$$U^* = r^m \sin m \vartheta \quad (31)$$

und die Norm

$$N = \xi_0^2 L r_0^2 \frac{\pi}{m}. \quad (32)$$

Mit Hilfe der Formeln (5), (11), (22) und (32) erhalten wir für die Anwachsrate der Rilleninstabilität (flute-instability):

$$\omega \approx V_a \sqrt{\frac{(1-Q)m}{r_0 \varrho_{\min}} \frac{a}{2r_0}} \quad m \geq 2 \quad (33)$$

$V_a = \frac{B}{\sqrt{4\pi n}}$  ist die Alfrégeschwindigkeit.  $\varrho_{\min}$  ist der minimale ungünstige Krümmungsradius längs der Feldlinie. Der Faktor  $a/(2r_0)$  entsteht durch den Beitrag der Gebiete günstiger Krümmung. Berechnet man die Anwachsrate aus der einfachen Formel für die Gravitationsinstabilität

$$\omega = \sqrt{gk} \quad ; \quad g \rightarrow \frac{V_a^2}{\varrho_{\min}} \quad ; \quad K \rightarrow \frac{m}{r_0} \quad (34)$$

dann erhalten wir:

$$\omega \approx V_a \sqrt{\frac{m}{r_0 \varrho_{\min}}}$$

Diese Anwachsrate wird also durch den Beitrag der Gebiete günstiger Krümmung um den Faktor  $\sqrt{\frac{(1-Q)a}{2r_0}}$  reduziert.

### VIII. Schlußbemerkungen

Nach den im vorigen Kapitel abgeleiteten Formeln nimmt die Anwachsrate der Rilleninstabilität mit abnehmender Wellenlänge quer zum Magnetfeld (steigendem  $m$ ) zu. Je kleiner aber nun diese Wellenlänge wird, umso eher macht sich der Einfluß mikroskopischer Effekte bemerkbar. Wie M.N. Rosenbluth et al. [11] gezeigt haben, können bei Berücksichtigung des endlichen Ionen-gyroradius die obigen Störungen unter Umständen stabil sein. Allerdings ist diese Theorie nur für Plasmen mit  $\beta \ll 1$  aufgestellt worden und ihre Anwendbarkeit in unserem Fall fraglich. Nach [11] muß zur Stabilität der  $m = 2$  Störung die Bedingung erfüllt sein

$$a_i > r_o \sqrt{\frac{2 r_o}{\xi_{\min}}} \quad (a_i = \text{Ionengyroradius})$$

Die  $m = 1$  - Störung kann nach dieser Theorie nicht stabilisiert werden. Wir hatten abgeleitet, daß diese Störung in unserem Fall durch die äußere Wand stabilisiert werden kann. Man kann daraus den Schluß ziehen, daß am M-und-S-Torus und am gewellten Thetapinch die  $m = 2$  - Störungen wahrscheinlich die gefährlichsten sind.

Die bis jetzt durchgeführten Experimente deuten darauf hin, daß ein solches Aufspalten des Plasmas verschiedentlich auftritt [22].

Literatur

- [1] P. Alexandroff, H. Hopf, Topologie, S. 552, Springer Verlag, Berlin 1935.
- [2] L. Spitzer, Jr., Phys. of Fluids 1/4, 233 (1958).
- [3] V.S. Mukhovatov, Conf. on Plasma Physics and Controlled Nuclear Research. Culham 1965, CN-21/147.
- [4] G. Gibson, W.C. Jordan, E.J. Lauer, Phys. Rev. Letters 4, 261 (1960).
- [5] R. Kippenhahn, Z. f. Naturf. 13a, 260 (1958).
- [6] R. Lüst, E. Martensen, Z. f. Naturf. 15a, 706 (1960).
- [7] L. Biermann, K. Hain, K. Jörgens, R. Lüst, Z. f. Naturf. 12a, 826 (1957).
- [8] F. Meyer, H.U. Schmidt, Z. f. Naturf. 13a, 1005 (1958).
- [9] W. Lotz, E. Remy, G.H. Wolf, Nuclear Fusion 4, 335 (1964).
- [10] C.L. Longmire, Elementary Plasma Physics, Interscience Publ., S. 95, New York - London 1963.
- [11] M.N. Rosenbluth, N.A. Krall, N. Rostoker, Nuclear Fusion, Suppl. Pt. 1, 143 (1962).
- [12] M.N. Rosenbluth, A. Simon, Phys. of Fluids 8, 1300 (1965).
- [13] P.R. Garabedian, Part. Diff. Equations, Wiley, New York
- [14] H. Grad, H. Rubin, Vol. 31, S. 190, Proc. of the 2<sup>nd</sup> U.N. Int. Conf., Genf 1958.
- [15] . Ince, Ordinary Diff. Equations, S. 27, Dover Publ. Inc. 1956.
- [16] J.B. Bernstein, E.A. Frieman, M.D. Kruskal, R.M. Kulsrud, Proc. of the Roy. Soc., London A 244, 17 (1958).
- [17] K. Hain, R. Lüst, A. Schlüter, Z. f. Naturf. 12a, 833 (1957).
- [18] P.R. Garabedian, Part. Diff. Equations, S. 312 ff., Wiley, New York.
- [19] Magnus - Oberhettinger, Formeln u. Sätze f. die spez. Funktionen der math. Physik. Springer Verl., Berlin - Göttingen - Heidelberg, 1948.
- [20] R.W. Kilb, H. Hurwitz, W.F. Westendorp, Phys. of Fluids 6, 1332 (1963).
- [21] F.E. Low, Phys. of Fluids 4, 842 (1961).
- [22] G.H. Wolf, private Mitteilung.

This report is to be treated as strictly confidential.

The 'Institut für Plasmaphysik' holds the exclusive rights of publication, mimeographing, propagation and translation into foreign languages of the original text, inclusive of the drawings, wholly or partially; also of excerpts or résumeés, as well as of the technical or scientific contents of this report. Exceptions to these restrictions require written permission.

Furthermore, the 'Institut für Plasmaphysik' reserves the right of exclusive exploitation of the information contained in this report, for the purpose of obtaining protective industrial rights, particularly patent and utility patent rights at home and abroad. Actions of exploitation taken on the basis of the knowledge gained from this report cannot be regarded as grounds for obtaining the right of prior use ('Vorbenutzungsrecht') according to article 7 paragraph 1, first sentence of the German Patent Law. The reader is referred to article 5 of the Patent Law. For reasons stipulated by the Patent Law, the report must not be exhibited in public libraries, or lent out indiscriminately.

The Institute does not guarantee that the information given in this report is free from protective rights, such as patent rights, utility patent rights or trade-mark rights.

No guarantee is given in respect of the accuracy, completeness or usefulness of the information contained in this report. Thus, no liability can be accepted for damage resulting from use of the information, or of the apparatus, methods and procedures described.