

# INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

"Spezielle magnetohydrostatische axialsymmetrische meridionale Gleichgewichte"

(Special Magnetohydrostatic, Axisymmetric Meridional Equilibria)

J. Nührenberg

IPP 6/50

Mai 1966

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

IPP 6/50

J. Nührenberg

Spezielle magnetohydrosta-  
tische axialsymmetrische  
meridionale Gleichgewichte  
(in German) May 1966

Abstract

An investigation is made of magnetohydrostatic, axisymmetric, meridional equilibria which are periodic along the axis of symmetry and for which the pressure tends monotonically and continuously towards zero as a function of the distance from the axis of symmetry;. Analytical solutions are set up in the vicinity of the axis of symmetry; for a certain class of boundary value problems an approximation method is developed which reduces calculation of the equilibrium to solving a system of ordinary differential equations.

### I. Einleitung

Es werden magnetohydrostatische Gleichgewichte, also Lösungen von

$$\begin{aligned} \mu_0 \nabla p &= (\nabla \times \underline{B}) \times \underline{B} \\ \nabla \cdot \underline{B} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

untersucht, die zwei Symmetrievoraussetzungen genügen:

1. Axialsymmetrie
2. rein meridionales Magnetfeld.

Unter diesen Voraussetzungen reduziert sich (1) bei Einführung von Zylinderkoordinaten  $s, \varphi, z$  auf

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} - \frac{1}{s} \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \mu_0 s^2 \frac{dp}{dF} = 0 \quad (2)$$

worin  $F$  (falls  $F(s, z)_{s=0} = 0$ ) als Flußfunktion interpretiert werden kann und der Druck  $p$  eine willkürliche Funktion von  $F$  ist (vgl. z. B. [1]). Es sollen in  $z$  periodische Lösungen betrachtet werden, die ein Plasma beschreiben, das im wesentlichen in einem Schlauch um die Symmetrieachse enthalten ist, wobei der Übergang zum Vakuum mit wachsendem  $s$  kontinuierlich sein soll (d. h. es werden keine Gleichgewichte mit Diskontinuitätsflächen behandelt; auch der in [1] benutzte lineare Ansatz für  $dp/dF$  kommt nicht in Frage). Es wird sich später zeigen, daß diese Eigenschaft der Lösungen in angemessener Weise so formuliert werden kann:

$$\begin{aligned} \text{es gibt ein Intervall } I = (s_1, s_2) \text{ mit der Eigenschaft:} \\ p(s, z) < \epsilon \quad \forall s \in I, \forall z \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (3)$$

wobei  $\epsilon$  eine gegen den Druck auf der Achse kleine Größe ist. Die Funktion  $p(F)$  muß nun geeignet gewählt werden; in [2] wird der Ansatz

$$\frac{dp}{dF} = - \frac{A}{1 + (BF)^2} \quad (4)$$

benutzt, woraus sich

$$p(F) = \frac{A}{B} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan BF \right) \quad (4a)$$

ergibt. Dabei sind  $A, B$  positive Konstanten, die zur Anpassung

der Lösungen an spezielle experimentelle Bedingungen dienen.

Aus (4a) folgt, daß, sofern

$$F > \frac{A}{B_2} \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall s \in I, \forall z \in R \quad (3a)$$

gilt, die Lösung die Eigenschaft (3) besitzt. In dieser Arbeit wird der Ansatz (4) aus zwei Gründen beibehalten:

1. Es wird sich zeigen, daß unter gewissen einschränkenden Bedingungen an die z-Abhängigkeit von  $F(s, z)$ 
  - a) Lösungen mit der Eigenschaft (3a) gefunden werden können, die in hinreichendem Maße an experimentelle Bedingungen angepaßt werden können,
  - b) diese Lösungen in ihrer Abhängigkeit von den verschiedenen Parametern qualitativ einfach zu diskutieren sind.
2. Dadurch, daß (4) eine einfache rationale Funktion von  $F$  ist, lassen sich sowohl analytische Lösungen gewinnen, als es auch möglich ist, ein Näherungsverfahren einzuschlagen, das die PDGL (2) auf ein System von GDGLen zurückführt. Wie sich zeigen wird, würden die rein rechen-technischen Schwierigkeiten bei beiden Verfahren z. B. durch Wahl einer Funktion  $p(F) = e^{-F}$  sehr zunehmen, wogegen andererseits in physikalischer Hinsicht wohl keine wesentlich anderen Gesichtspunkte auftreten würden.

Da es sich bei (2) um eine elliptische PDGL handelt, wäre der mathematisch korrekte Weg zur Lösung die Betrachtung des Randwertproblems:

$s(z)$  : periodische Funktion in der  $s, z$ -Ebene ( $s(z) > 0 \quad \forall z$ )

$F(0, z) = F_0$

$F(s(z), z) = F_1$ , wobei  $F_1$  (3a) genügt.

Dieser Weg wird aus zwei Gründen nicht eingeschlagen. Einmal wäre die Lösung des Problems in dieser Form schwierig, und zum anderen müßte man die Funktion  $s(z)$  vorgeben, ohne ein Kriterium dafür zu haben, bei welcher Wahl man Lösungen bekommt, die in guter Näherung einfach beschreibbar sind. Stattdessen wird, wie oben schon angedeutet,

1. gezeigt, daß sich (2) in ein analytisches Anfangswertproblem, überführen läßt, dessen Lösungen man numerisch leicht erhalten kann;

2. ein Näherungsverfahren entwickelt, mit dem man unter bestimmten einschränkenden Voraussetzungen Lösungen mit der Eigenschaft (3a) gewonnen werden können, wobei auch ein Kriterium dafür gefunden wird, unter welchen Bedingungen an die Funktion  $s(z)$  die Lösungen in guter Näherung einfach zu erhalten sind;
3. an numerisch gerechneten Beispielen die Brauchbarkeit der entwickelten Methoden verifiziert.

## II. Analytische Lösung

### II.1. Bezeichnungen

Für das Folgende wird (2) auf dimensionslose Form gebracht:

mit

$$S = S_0 S^*, \quad z = z_0 z^*, \quad F = F_0 F^*, \quad p = p_0 p^*$$

wobei  $s_0, z_0, F_0, p_0$  die jeweilige Dimension und einen Skalenfaktor enthalten und gelten soll:

$$S_0 = z_0 \quad ; \quad \frac{F_0^2}{S_0^4} = \mu_0 p_0$$

ergibt sich aus (2), (4) eine Gleichung in dimensionslosen Größen, an denen zur Vereinfachung der Schreibweise \* wieder weglassen wird:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} - \frac{1}{s} \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + s^2 \frac{dp}{dF} = 0 \quad ; \quad \frac{dp}{dF} = - \frac{A}{1 + (BF)^2} \quad (2a)$$

Ferner ist es für das Folgende zweckmäßig, mittels

$$\frac{s^2}{2} = x$$

eine neue Variable  $x$  einzuführen. Damit erhält man aus (2a)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{2x} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{dp}{dF} = 0 \quad (2b)$$

Schließlich werden noch folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$G : = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2x} \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$F^* : = \frac{F}{2x}$$

$\Delta_5$  : Laplace-Operator im 5-dim. eukl. Raum.

In Zylinderkoordinaten, d. h. in den Koordinaten  $s, \vartheta_1, \vartheta_2, \varphi, z$ , die durch

$$\begin{aligned} x_1 &= s \cos \vartheta_1 \\ x_2 &= s \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \\ x_3 &= s \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \varphi \\ x_4 &= s \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \varphi \\ x_5 &= z \end{aligned}$$

gegeben sind, lautet  $\Delta_5$  (vgl. z. B. [3]):

$$\begin{aligned}\Delta_5 &= \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{3}{s} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + D^2(v_1, v_2, \varphi) \\ &= 2Gx + D^2(v_1, v_2, \varphi)\end{aligned}$$

Dabei ist  $D^2$  ein Differentialoperator zweiter Ordnung in  $v_1, v_2, \varphi$ . Somit ergibt sich aus (2a), (2b)

$$\Delta_5 F^* = \frac{A}{1 + (2B_x F^*)^2} \quad (2c)$$

worin  $F^*(x, z)$  als im fünfdimensionalen Raum zylindersymmetrische Funktion aufzufassen ist.

## II.2. Berechnung der Lösung aus den Anfangsbedingungen

Für  $F$  wird der Ansatz gemacht

$$F = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \sum_{\rho=0}^{\infty} a_{\nu\rho} x^\rho \right) \cos \nu \sqrt{\lambda} z \quad (5)$$

(in  $z$  gerade Lösungen sind mit (2) verträglich). Da

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \frac{\partial F}{\partial z}$$

$s$ - bzw.  $z$ -Komponente des Magnetfeldes sind, ist

$$\begin{aligned}F(0, z) &= a_{00} \\ \frac{\partial F}{\partial x}(0, z) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu 1} \cos \nu \sqrt{\lambda} z\end{aligned} \quad (6)$$

der allgemeinste Ansatz für die Anfangsbedingungen, der zu regulärem Feld an der Stelle  $x=0$  führt. Im Anhang 1 wird gezeigt, daß die Lösung durch (6) eindeutig bestimmt ist; ferner werden folgende Formeln für die Koeffizienten  $a_{\nu\rho}$  ( $\nu \geq 0, \rho \geq 2$ ) hergeleitet:

$$a_{02} = \frac{A}{2(1 + (Ba_{00})^2)}$$

und für  $m \geq 1, \tau \geq 0$ , aber  $(\tau, m) \neq (0, 1)$

$$a_{\tau, m+1} = \frac{1}{2m(m+1)} \left\{ \lambda \tau^2 a_{\tau, m} + \frac{B^2}{2(1+(Ba_{00})^2)} \sum_{\nu=1}^{m-1} \left( \sum_{\sigma=0}^{\tau} A_{\sigma, \nu} B_{\tau-\sigma, m-\nu} + \sum_{|\mu_1-\mu_2|=\tau} A_{\sigma_1, \nu} B_{\sigma_2, m-\nu} \right) \right\} \quad (7)$$

worin

$$A_{\sigma, \nu} = \frac{1}{2} \left( \sum_{\rho=0}^{\nu} \left( \sum_{\mu=0}^{\sigma} a_{\mu, \rho} a_{\sigma-\mu, \nu-\rho} + \sum_{|\mu_1-\mu_2|=\sigma} a_{\mu_1, \rho} a_{\mu_2, \nu-\rho} \right) \right)$$

$$B_{\tau, \rho} = 2\rho(\rho+1) a_{\tau, \rho+1} - \lambda \tau^2 a_{\tau, \rho}$$

Dabei ist für  $m=1$  die Summe in der ersten Formel leer. Sofern nur endlich viele der Koeffizienten  $a_{\nu, 1}$  von Null verschieden sind, läßt sich innerhalb des Konvergenzintervalls der Reihe (5) die Lösung aus (7) numerisch leicht und genau berechnen (für einen Ansatz  $p = e^{-F}$  wären die (7) entsprechenden Rekursionsformeln dagegen viel komplizierter, der Rechenaufwand würde sehr zunehmen, vgl. z. B. [4]). Explizit soll noch für den einfachsten nicht trivialen Fall die Lösung bis zur fünften Ordnung in  $x$  angegeben werden: sei

$$a_{00} = 0; a_{01}, a_{11} \neq 0; a_{\nu 1} = 0 \quad \forall \nu \geq 2; A = B = 1 \quad (8)$$

Dann ergibt sich aus (7)

$$F = \left[ a_{01} x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{24} (2a_{01}^2 + a_{11}^2) x^4 - \frac{1}{20} \left( a_{01} + \frac{1}{4} a_{11}^2 \right) x^5 \right] + a_{11} \left[ x + \frac{1}{1!2!} \frac{\lambda}{2} x^2 + \frac{1}{2!3!} \frac{\lambda^2}{4} x^3 + \left( \frac{1}{3!4!} \frac{\lambda^3}{8} - \frac{a_{01}}{6} \right) x^4 + \left( \frac{1}{4!5!} \frac{\lambda^4}{16} - \frac{17}{240} \lambda a_{01} - \frac{1}{20} \right) x^5 \right] \cos \sqrt{\lambda} x + \left[ -\frac{a_{11}^2}{24} x^4 - \frac{1}{60} \lambda a_{11}^2 x^5 \right] \cos 2\sqrt{\lambda} x \quad (8a)$$



Wie zu erwarten, enthält der z-unabhängige Anteil die partikuläre Lösung  $x^2/2$  der inhomogenen linearen Gleichung  $GF = 1$ , und der erste Fourierkoeffizient die Lösung der homogenen Gleichung  $GF = 0$ :

$$\left( \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\nu-1}}{\nu!(\nu-1)!} x^{\nu} \right) \cos \sqrt{\lambda} z = \sqrt{x} I_1(\sqrt{2\lambda x}) \cos \sqrt{\lambda} z := W(x) \cos \sqrt{\lambda} z$$

( $I_1$ : modifizierte Besselfunktion 1. Ord., vgl. z.B. [5])

wobei  $W(x)$  die im Punkt  $x=0$  reguläre Lösung der GDGL

$$W''(x) - \frac{1}{2x} W(x) = 0$$

ist. Schließlich sieht man aus (8a), daß die auf Grund der Nichtlinearität der Gleichung (2) vorhandene Kopplung zwischen den den Fourierkomponenten erst in 4-ter Ordnung in  $x$  (d. h. in 8-ter Ordnung in  $s$ ) eintritt; im Falle  $a_{00}=0$  ist dies auch bei sonst beliebigen Anfangsbedingungen so, wie man aus (7) sieht. In diesem Sinne kann man also die Nichtlinearität der Gleichung (2) als schwach bezeichnen. Tatsächlich ergibt die numerische Auswertung (vgl. IV) für spezielle Anfangsbedingungen vom Typ (8), daß im ganzen Konvergenzintervall der Reihe (5) die höheren Fourierkomponenten überraschend klein bleiben. Dies zu zeigen, ist der Sinn dieser Reihenentwicklung, die so dazu beiträgt, die guten Konvergenzeigenschaften des im Abschnitt III entwickelten Näherungsverfahrens zu erklären.

### II.3. Existenz der Lösungen in einer Umgebung von $x=0$

Die Gl.(2b) zeigt, daß es sich bei den Anfangsbedingungen (6) um ein nicht-analytisches Anfangswertproblem im zweidimensionalen  $x, z$ -Raum handelt, so daß der Cauchy-Kowalewski'sche Existenzsatz nicht anwendbar ist (diese Schwierigkeit läßt sich auch durch Übergang zu kartesischen Koordinaten nicht beheben). Aus (5) und (6) folgt aber, daß  $F$  folgende Form hat:

$$F^* = \frac{a_{00}}{2x} + \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \sum_{\rho=0}^{\infty} a_{\nu\rho+1} x^{\rho} \right) \cos \nu \sqrt{\lambda} z$$

$$:= \frac{a_{00}}{2x} + \bar{F}$$
(9)

Somit genügt  $\bar{F}$  im fünfdimensionalen Raum den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \bar{F}(0,0,0,0,x_5) &= \frac{1}{2} \sum_{v=0}^{\infty} a_{v1} \cos v \sqrt{\lambda} x_5 \\ v = 1, \dots, 4 \quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial x_v}(0,0,0,0,x_5) &\equiv 0 \end{aligned} \quad (10a)$$

und nach (2c) lautet die DGL für  $\bar{F}$

$$\Delta_5 \bar{F} = \frac{A}{1 + B^2 (a_{00} + 2x\bar{F})^2} \quad (10b)$$

Die Gln. (10) stellen offenbar ein analytisches Anfangswertproblem in der Umgebung jedes Punktes  $(0,0,0,0,x_5)$  dar, sofern sich die Reihe (10a) in eine überall konvergente Potenzreihe in  $x_5=z$  entwickeln läßt. Unter dieser Bedingung folgt aus dem Cauchy-Kowalewski'schen Satz sofort die Existenz der Lösung in einer Umgebung von  $x=0$ . Die Größe dieser Umgebung hängt u. a. vom Konvergenzradius der rechten Seite von (10b) ab, worin  $\bar{F}$  als unabhängige Variable aufzufassen ist. Da dieser

$$\sqrt{a_{00}^2 + \frac{1}{B^2}}$$

ist, kann die Reihe (5) nur konvergieren für

$$\begin{aligned} F - a_{00} &< \sqrt{a_{00}^2 + \frac{1}{B^2}} \\ (F - a_{00} \text{ ist die Flußfunktion}) \end{aligned}$$

Setzt man in (4a) den nach dieser Abschätzung größten zulässigen Wert ein, also

$$p(a_{00} + \sqrt{a_{00}^2 + \frac{1}{B^2}}) = \frac{A}{B} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan(Ba_{00} + \sqrt{B^2 a_{00}^2 + 1}) \right)$$

so sieht man, daß unabhängig von der Wahl von  $a_{00}$  (d. h. unabhängig davon, ob man ein Gleichgewicht mit kleinem  $(\partial p / \partial s)_{\max}$  ( $a_{00} > 0$ ) oder großem  $(\partial p / \partial s)_{\max}$  ( $a_{00} < 0$ ) beschreibt) die Reihe (5) ungefähr in dem Bereich, in dem

$$p > \frac{1}{2} p(x=0)$$

ist, konvergieren sollte. Die numerische Auswertung bestätigt diese Vermutung.

### III. Näherungslösung

#### III.1. Das Näherungsverfahren

Der Ausgangspunkt für die Herleitung eines Näherungsverfahrens zur Lösung der Gleichung (2) ist die Überlegung, daß bei Aufspaltung der Lösung in einen z-unabhängigen ( $F_0$ ) und einen z-abhängigen ( $\tilde{F}$ ) Anteil, also

$$F = F_0 + \tilde{F} \quad (11)$$

eine Störungsrechnung möglich sein sollte, mit der man die Lösung  $F$  aus der ungestörten Lösung  $F_0$  der GDGL

$$GF_0 = F_0''(x) = \frac{A}{1 + (BF_0)^2} \quad (12)$$

erhalten kann, wenn die Störung  $\tilde{F}$  in einem noch festzulegenden Sinne klein ist. Aus (2a) und (11) folgt

$$GF = \frac{A}{1 + B^2(F_0 + \tilde{F})^2} \quad (13)$$

Betrachtet man in der rechten Seite von (13)  $F_0$  als Konstante und  $\tilde{F}$  als unabhängige Variable, so sieht man, daß für

$$|\tilde{F}| < \sqrt{F_0^2 + \frac{1}{B^2}} \quad (14)$$

die rechte Seite in eine Reihe nach Potenzen von  $\tilde{F}$  entwickelbar ist. Andererseits sollte die Störung  $\tilde{F}$  selbst nach Potenzen eines sie charakterisierenden Parameters  $\xi$  entwickelbar sein, so daß eine Zerlegung der Form

$$\tilde{F} = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_{\nu} \quad (15)$$

möglich ist, in der sich  $F_{\nu}$  und  $F_{\nu+1}$  jeweils um eine Größenordnung in  $\xi$  unterscheiden. Mit den Annahmen (14) und (15) kann man die rechte Seite von (13) nach Potenzen von  $\xi$  entwickeln. Dann läßt sich Gl.(13) dadurch in eine Folge von Gleichungen für die Funktionen  $F_{\nu}$  zerlegen, daß man jeweils die zu gleicher Potenz von  $\xi$  gehörigen Terme zu einer Gleichung zusammenfaßt. Kann man jede dieser Gleichungen lösen und konvergiert die Reihe (15) zu einer Funktion  $\tilde{F}$ , die (14) genügt, so hat man eine Lösung

der Gleichung (2). - Zunächst sollen nun die DGLen für die Funktionen  $F_\nu$  aufgestellt werden. Dazu wird für  $\nu \geq 1$  noch eingeführt:

$$\sigma_\nu := \sum_{\rho=0}^{\nu} F_\rho F_{\nu-\rho} \quad (16)$$

Damit erhält man für  $F^2$  (das also als Cauchy-Produkt ausgerechnet wird)

$$F^2 = F_0^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_\nu \quad (17)$$

Somit folgt aus (13)

$$\begin{aligned} GF &= \frac{A}{1 + B^2(F_0^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_\nu)} \\ &= \frac{A}{1 + (BF_0)^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{B^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_\nu}{1 + B^2 F_0^2}} \\ &= \frac{A}{1 + (BF_0)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-B^2)^n \left( \sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_\nu \right)^n \left( \frac{1}{1 + (BF_0)^2} \right)^n \end{aligned}$$

Hieraus folgt in nullter Ordnung die Gl.(12), so daß sich weiter ergibt

$$\begin{aligned} GF &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{B^2}{A} \right)^n \left( \sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_\nu \right)^n GF_0^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{B^2}{A} \right)^n \left( \sum_{\substack{\alpha_\rho = n \\ \rho=1}}^{\infty} \frac{n!}{\prod_{\rho=1}^{\infty} \alpha_\rho!} \prod_{\rho=1}^{\infty} \sigma_\rho^{\alpha_\rho} \right) GF_0^{n+1} \end{aligned}$$

Hierin wird nun nach gleichen Größenordnungen zusammengefaßt, also

$$GF = GF_0 + \sum_{N=1}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^N \left( -\frac{B^2}{A} \right)^n \left( \sum' \frac{n!}{\prod \alpha_\rho!} \prod \sigma_\rho^{\alpha_\rho} \right) GF_0^{n+1} \right)$$

wobei die Summe ' mit den Nebenbedingungen

$$\sum_{p=1}^{\infty} p \alpha_p = N$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p = n$$
(18)

auszuführen ist. Somit folgen für die Funktionen  $F_N$  die Gleichungen

$$GF_0 = \frac{A}{1 + (BF_0)^2} \quad (19a)$$

$$GF_N = \sum_{n=1}^N \left(-\frac{B^2}{A}\right)^n \left(\sum' \frac{n!}{\prod \alpha_p!} \prod \sigma_p^{\alpha_p}\right) GF_0^{n+1} \quad (19b)$$

(mit Nebenbedingung (18) für  $\Sigma'$ )

Gemäß seiner Herleitung hat das System von PDGLen (19b) folgende Eigenschaften:

1. Die N-te Gleichung ist linear in der Funktion  $F_N$ , denn auf der rechten Seite von (19b) kommt  $F_N$  nur in dem Term

$$-\frac{B^2}{A} 2F_0 F_N GF_0^2$$

vor. Die Gleichung für  $N=1$  ist homogen, sie lautet

$$GF_1 = -\frac{B^2}{A} 2F_0 GF_0^2 F_1 \quad (20)$$

Für  $N \geq 2$  sind die Gleichungen inhomogen.

2. Das System ist sukzessive lösbar, denn in der N-ten Gleichung kommt keine Funktion  $F_\nu$  mit  $\nu > N$  vor. Diese Rekursivität erkennt man auch aus der (19b) äquivalenten Form der Gleichungen

$$GF_N = -\frac{B^2}{A} GF_0 \sum_{n=1}^N \sigma_n GF_{N-n} \quad (19c)$$

die man so einsieht:

$$GF(1 + (BF)^2) = (GF_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} GF_\nu)(1 + (BF)^2) + B^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_\nu$$

$$\begin{aligned}
 &= GF_0 (1 + (BF_0)^2) + GF_0 B^2 \sum_{v=1}^{\infty} \sigma_v \\
 &\quad + (1 + (BF_0)^2) \sum_{v=1}^{\infty} GF_v + B^2 \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{v=1}^{n-1} \sigma_v GF_{n-v} \\
 &= A + AGF_0^{-1} \left( \frac{B^2}{A} GF_0^2 \sigma_1 + GF_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (GF_n + \right. \\
 &\quad \left. \frac{B^2}{A} GF_0 \sum_{v=1}^n \sigma_v GF_{n-v}) \right) \\
 &= A
 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von aus experimentellem Gesichtspunkt interessanten Lösungen wird man nun

1. durch Wahl der Konstanten A, B und der beiden freien Anfangsbedingungen in (19a) eine Lösung festlegen, die den gewünschten Druckverlauf ergibt, wenn man zunächst von der z-Abhängigkeit absieht,
2. dieser eine einfache periodische Struktur geben, indem man eine einfache Lösung der Gl.(20) addiert,
3. über die noch verbleibende Freiheit so zu verfügen suchen (bei der Lösung der Gln.(19b) für  $N \geq 2$ ), daß man der beabsichtigten Lösung möglichst nahe kommt.

Demgemäß wird für  $F_1$  der Ansatz

$$F_1 = W_{11} \cos \sqrt{\lambda} z \quad (21)$$

gewählt, woraus sich mit (20) für  $W_{11}$  die GDGL

$$W_{11}'' = \left( \frac{\lambda}{2x} - \frac{B^2}{A} 2F_0 GF_0^2 \right) W_{11} \quad (22)$$

ergibt. Damit hat man über zwei weitere die Lösung charakterisierende Parameter, nämlich Periode und Welligkeit an der Stelle  $x=0$  verfügt (von den beiden linear Lösungen der Gl.(22) ist nur eine im Nullpunkt regulär). Bei dieser Wahl von  $F_1$  lauten die einfachsten mit (19b) verträglichen Ansätze für die Funktionen  $F_N$ :

$$F_N = \sum_{v=0}^{[N/2]} W_{N-2vN}(x) \cos (N-2v) \sqrt{\lambda} z \quad (23)$$

womit sich das System von PDGLen (19) auf ein System von GDGLen für die Funktionen  $W_{\mu\nu}$  reduziert. Für  $N \geq 2$  sind dabei die Gleichungen von der Form

$$W_{N-2\nu N}'' = \left( \frac{(N-2\nu)^2 \lambda}{2x} - 2 \frac{B^2}{A} F_0 G F_0^2 \right) W_{N-2\nu N} + f_{N-2\nu N}(W_{\mu\nu}; \mu, \nu < N) \quad (24)$$

Die expliziten Ausdrücke für die Funktionen  $f_{N-2\nu N}$  sind für die allgemeine Untersuchung der Gln. (24) nicht wichtig; sie werden nur für die numerischen Rechnungen gebraucht und deshalb im Anhang 2 hergeleitet. Wie der folgende Abschnitt zeigt, hat man für jede Funktion  $W_{N-2\nu N}$  noch eine freie Anfangsbedingung, über die geeignet verfügt werden muß.

### III.2. Diskussion des Systems von GDGLen

a) Zunächst müssen die Gln. (19a) und (22) in Abhängigkeit von  $F_0(0)$ ,  $F_0'(0)$ ,  $W_{11}'(0)$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $\lambda$  kurz untersucht werden (vgl. auch [2]), insbesondere in Hinblick auf die Konvergenzbedingung (14).

(19a): Wird der Druck so normiert, daß

$$p(x=0) = 1$$

ist, so folgt mit (4a)

$$F_0' = \sqrt{F_0'^2(0) + 2 - \frac{\pi A}{B} + \frac{2A}{B} \arctan B F_0}$$

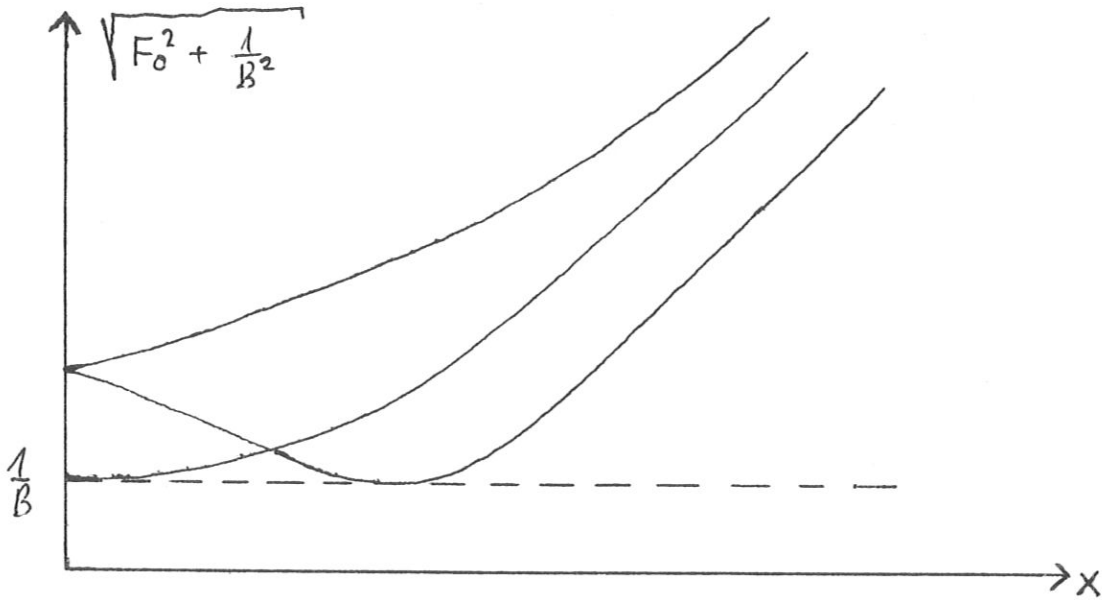
also

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_0' = \sqrt{F_0'^2(0) + 2}$$

woraus der qualitative Verlauf von  $F_0$  ersichtlich ist. Daraus ergibt sich für den Verlauf von

$$\sqrt{F_0^2 + \frac{1}{B^2}}$$

bei verschiedenen Anfangsbedingungen  $F_0(0)$  und festgehaltenem  $F_0'(0)$ ,  $B$



(22): Die beiden linear unabhängigen Lösungen seien mit  $W_{11}^1$  und  $W_{11}^2$  bezeichnet. Da (22) für  $x \rightarrow 0$  und  $x \rightarrow \infty$  asymptotisch in

$$W'' = \frac{\Delta}{2x} W \quad (22a)$$

übergeht, haben  $W_{11}^1$  und  $W_{11}^2$  für  $x \rightarrow 0$  und  $x \rightarrow \infty$  das gleiche Verhalten wie die beiden linear unabhängigen Lösungen von (22a), die mit  $W^1$  und  $W^2$  bezeichnet seien und die mit der Bessel- bzw. Neumann-Funktion erster Ordnung folgendermaßen zusammenhängen: (vgl. z. B. [5])

$$W^1 = -i\sqrt{x} Y_1(i\sqrt{2\lambda x})$$

$$W^2 = -i\sqrt{x} N_1(i\sqrt{2\lambda x}) - iW^1$$

( $W^1, W^2$  sind reell)

Da

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{dW^2}{dx} = -\infty$$

ist, kommt nur die  $W^1$  entsprechende Lösung  $W_{11}^1$  in Frage. Da weiter

$$W^1 \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} (2\lambda x)^{\frac{1}{4}} e^{\sqrt{2\lambda x}} \quad (25)$$

ist, gilt das gleiche für  $W_{11}^1$ .

Somit folgt, daß es bei nicht verschwindendem  $F_1$  stets nur



ein endliches Intervall  $I_0$  ( $0 \leq x \leq x_0$ ) gibt, in dem die notwendige Konvergenzbedingung

$$W_{11} < \sqrt{F_0^2 + \frac{4}{B^2}} \quad (14a)$$

erfüllt ist. Dieses Intervall fällt bei festgehaltenem  $F_0$  um so kleiner aus, je größer  $W'_{11}(0)$  und  $\lambda$  sind. Bei festgehaltenem Intervall  $I_0$  ist die Bedingung (14a) um so schärfer, je kleiner  $F_0(0)$  (d. h. je größer  $(\partial p / \partial s)_{\max}$ ) und je größer  $B$  (d. h. je kleiner  $\epsilon$  (aus Gl.(3)) ist.

Ferner wird man nur solche Lösungen zulassen, für die, wenigstens wenn man nur die nullte und erste Ordnung betrachtet, im ganzen Raum  $V$  zwischen der Achse  $x=0$  und der Leiteroberfläche (der das Feld erzeugenden Spule)

$$\frac{\partial p}{\partial x} < 0$$

gilt. Das führt für  $W_{11}$  zu der weiteren Einschränkung

$$F_0' \geq W_{11}' \quad (26)$$

insbesondere

$$F_0'(0) \geq W_{11}'(0) \quad (26a)$$

und sofern in (26a) das Gleichheitszeichen gilt (d. h. für große Welligkeit der Lösung in der Umgebung der Achse)

$$\frac{A}{2(1 + (BF_0(0))^2)} \geq W_{11}'(0) \frac{\lambda}{4} \quad (26b)$$

(aus (7) und (8a))

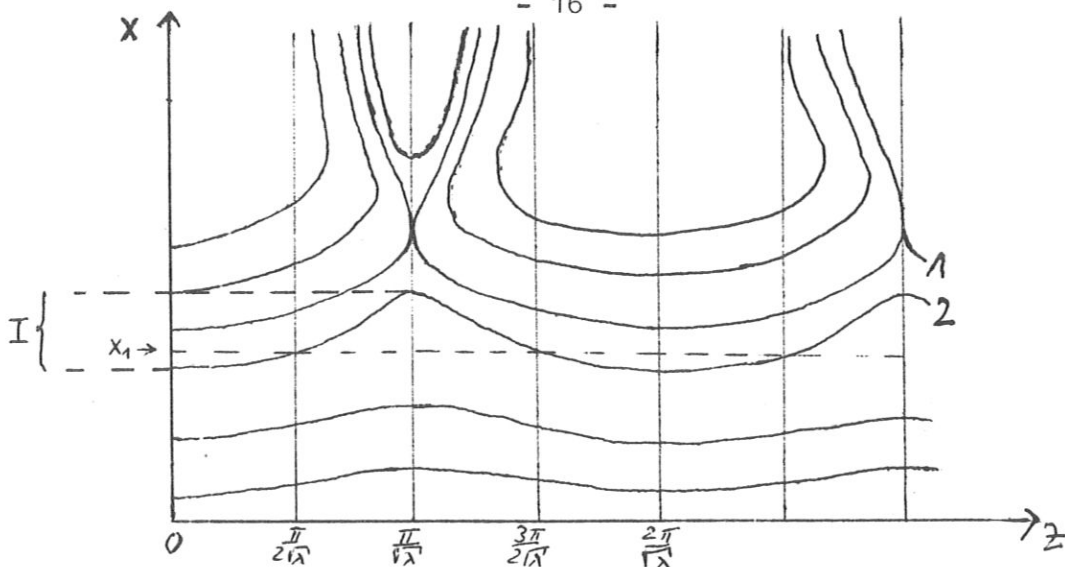
Die Bedingung (26) hängt folgendermaßen mit dem Feldlinienverlauf zusammen: aus

$$F_0(x) + F_1(x, z) = F_0(x) + W_{11}(x) \cos \sqrt{\lambda} z = \text{const}$$

folgt

$$\frac{dx}{dz} = \frac{W_{11}(x) \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} z}{F_0'(x) + W_{11}'(x) \cos \sqrt{\lambda} z}$$

woraus sich als für diese Näherung typisches Feldlinienbild qualitativ ergibt:



Auf der mit 1 bezeichneten Feldlinie gilt an der Stelle

$$z = \frac{\pi}{\lambda} : F_0'(x) = W_{11}'(x)$$

Somit muß  $V$  innerhalb des durch die Feldlinie 1 gegebenen Gebietes liegen. Wäre  $F_0 + F_1$  strenge Lösung, so könnte man etwa Feldlinie 2 als Leiteroberfläche wählen, wenn  $I$  (vgl. Fig.) (3) genügt.

- b) Die Frage ist nun, wie die in (24) noch freien Anfangsbedingungen zu wählen sind, damit in ganz  $V$  die Lösung möglichst wenig von  $F_0 + F_1$  abweicht. Zunächst erscheint am einfachsten:

$$W_{N-2\nu N}'(0) = 0 \quad \forall N \geq 2, 0 \leq \nu \leq \left[ \frac{N}{2} \right] \quad (27)$$

denn mindestens in der Umgebung von  $x=0$  führt das zu dem gewünschten Lösungsverhalten (vgl. auch II.). Die allgemeine Lösung von (24) lautet aber

$$W_{N-2\nu N}(x) = \frac{1}{\pi} \left( W_{N-2\nu N}^1 \int_0^x W_{N-2\nu N}^2(t) f_{N-2\nu N}(t) dt - W_{N-2\nu N}^2(x) \int_0^x W_{N-2\nu N}^1(t) f_{N-2\nu N}(t) dt \right) + C_{N-2\nu N} W_{N-2\nu N}^1(x) \quad (28)$$

(Dabei sind  $W_{N-2\nu N}^1, W_{N-2\nu N}^2$  die beiden lin. unabh. Lösungen der homogenen Gleichung; (28) folgt daraus, daß für DGLen dieses Typs die Wronski-Determinante konstant und damit gleich derjenigen der beiden Lösungen von

$$W'' = \frac{(N-2\nu)^2 \lambda}{2x} W.$$

ist.) Daraus sieht man, daß wegen (25) insbesondere die höheren Fourierkomponenten mit wachsendem  $x$  bei der Wahl der Anfangsbedingungen (27) sehr schnell ansteigen werden, so daß die höheren Näherungen nicht in ganz  $V$  klein bleiben. Dagegen kann man vermuten, daß man das gewünschte Lösungsverhalten bekommt, wenn man im Intervall  $(0, x_1)$  (vgl. obige Fig.) für jede Funktion  $W_{N-2\nu N}$  die halbhomogene Randwertaufgabe

$$W_{N-2\nu N}(0) = W_{N-2\nu N}(x_1) = 0 \quad (29)$$

löst, was wegen (28) offenbar möglich ist. Tatsächlich läßt sich näherungsweise folgende Abschätzung herleiten (s. Anhang 2):

$$|W_{N-2\nu N}| < \max_{0 \leq x \leq x_1} |f_{N-2\nu N}| \frac{2x_1}{(N-2\nu)^2 \lambda} \quad N \geq 2, 2\nu < N \quad (30)$$

die wenigstens konsistent mit der Annahme ist, das Näherungsverfahren konvergiere gegen eine Lösung, die sich in  $V$  nur wenig von  $F_0 + F_1$  unterscheidet. Außerdem ist die Wahl der Randbedingungen (29) geeignet, neben dem notwendigen Konvergenzkriterium (14a) auch das hinreichende Kriterium (14) zu erfüllen. Schließlich kann bei dieser Wahl der Randbedingungen angenommen werden, daß, selbst wenn das Näherungsverfahren auf Grund der Wahl von  $W_{11}$  nur langsam konvergiert, doch  $F_0 + F_1$  in der Umgebung von  $x_1$  eine gute Näherung für die Lösung ist, so daß die nur mit  $F_0 + F_1$  berechnete Leiteroberfläche in guter Näherung gleich der mit der vollständigen Lösung berechneten ist.

Damit ist gezeigt, daß das Näherungsverfahren, bei dem nur GDGLen auftreten, geeignet ist zur Lösung folgenden Randwertproblems für die Gl.(2):

$$F(0, z) = F_0(0) \quad (31)$$

$$F(x_1, z) = F_0(x_1) + W_{11}(x_1) \cos \sqrt{\lambda} z$$

das sich somit gegenüber dem in der Einleitung erwähnten Randwertproblem dadurch auszeichnet, daß die Lösungen in guter Näherung einfach zu erhalten sind, obwohl die qualitativen Eigenschaften der Lösungen mit Hilfe der Parameter  $F_0(0)$ ,  $F_0'(0)$ ,  $W_{11}'(0)$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $\lambda$  vorgeschrieben werden können.

#### IV. Numerische Rechnungen

Da in [2] zahlreiche Gleichgewichte (bis zur ersten Ordnung) behandelt werden, sollen hier nur als Anwendungsbeispiele für die in II und III entwickelten Verfahren noch einige Gleichgewichte mit großem  $\beta$  betrachtet werden ( $\beta$  wird dabei mit Hilfe der z-unabhängigen Lösung definiert:

$$\beta = \frac{p(0)}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{B^2}{2\mu_0}} = \frac{2 p'(0)}{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2} \stackrel{p(0)=1}{=} \frac{2}{F'(0)^2 + 2} \quad )$$

Es wird sich zeigen, daß unter den einschränkenden Bedingungen (s. u.), die  $W_{11}$  dabei auferlegt werden, das Näherungsverfahren schnell konvergiert.

Gemäß III werden die Lösungen folgendermaßen konstruiert:

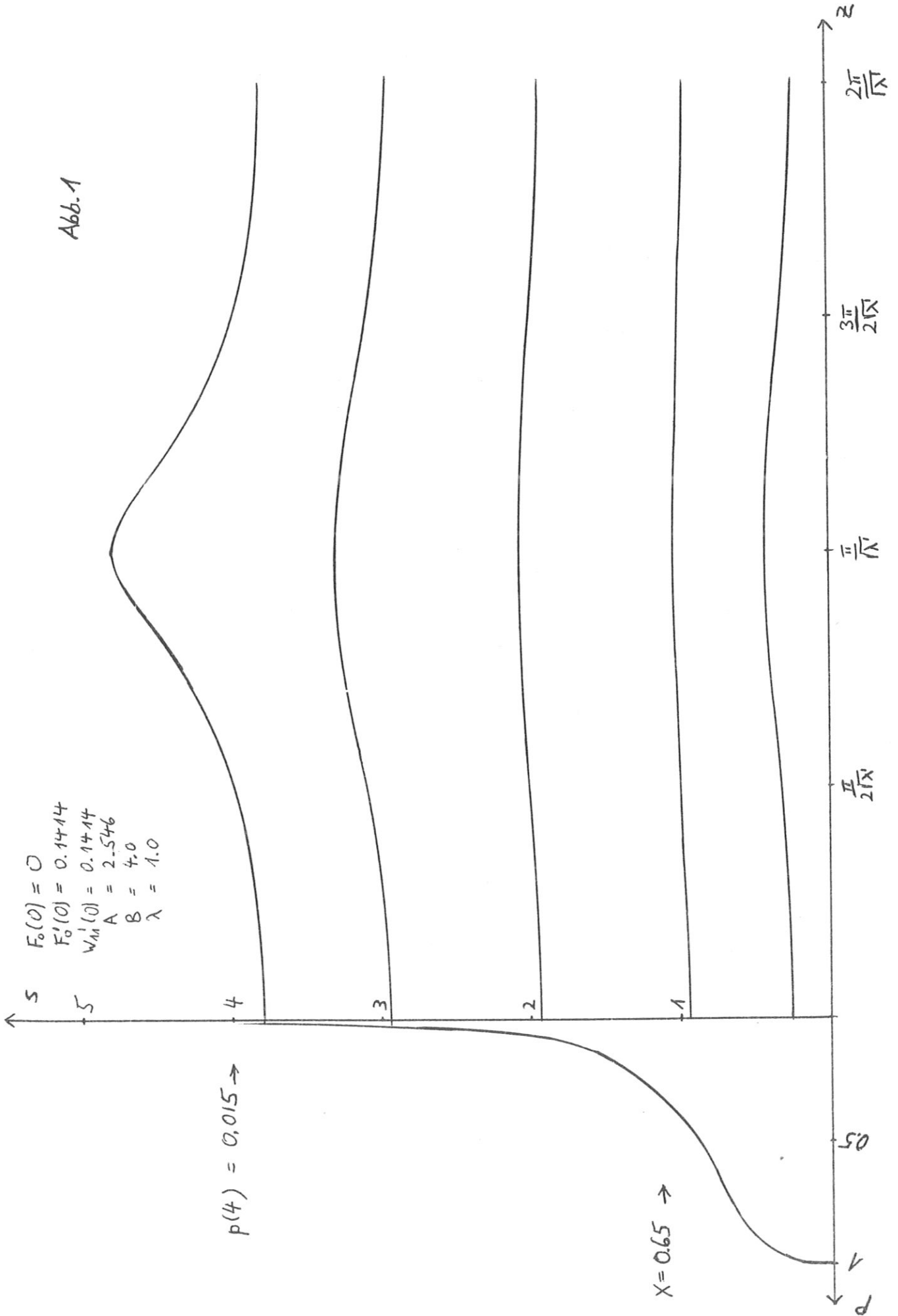
1. Durch Wahl von  $F_0(0)$ ,  $F'_0(0)$ , A, B wird die Lösung in nullter Ordnung festgelegt, wobei  $F'_0(0)$  durch  $\lambda$  bestimmt ist,  $F_0(0)$  zur Festlegung des maximalen Druckgradienten dient und B so gewählt wird, daß beim 2-5-fachen des Wertes s, für den der Druck auf die Hälfte seines Wertes auf der Achse abgefallen ist, nur noch 1-2% des Druckes auf der Achse vorhanden sind.
2. Die erste Näherung wird mit  $W'_{11}(0)$  und  $\lambda$  so festgelegt, daß (26) erfüllt ist, der Druck an der Leiteroberfläche auf 1-2% seines Wertes auf der Achse abgefallen ist und die Periodenlänge zwischen Radius und Durchmesser der Anordnung liegt.
3. Für höhere Näherungen wird (soweit sie betrachtet werden) eine halbhom. RWA vom Typ (29) gelöst.

In den beiden folgenden Beispielen ist  $\beta = 0.99$ . Die übrigen Parameter sind in Abb.1 bzw. Abb.4 angegeben, wo der Druckverlauf in nullter Ordnung und das Feldlinienbild in erster Näherung dargestellt sind. In beiden Fällen ist ungefähr  $F'_0 = W'_{11}$  für  $s=5$ , die Geometrie der Leiteroberflächen ist nahezu gleich. In Abb.2 sind für das erste Beispiel die Funktionen  $W_{\nu\mu}$  bis zur dritten Ordnung dargestellt. Dabei wurde für die zweite und dritte Ordnung die halbhom. RWA in  $(0,8)$  ( $x=8 \hat{=} s=4$ ) gelöst. Bei  $W_{33}$  ist offenbar  $W'_{33}(0)$  dem Betrage nach noch kleiner zu wählen, um  $W_{33}(8) = 0$  zu erreichen. Daß das Verhalten insbesondere der höheren Fourierkomponenten sehr empfindlich von den Anfangsbedingungen abhängt (was natürlich damit zusammenhängt, daß die Behandlung der PDGL (2) als Anfangswertproblem nicht korrekt ist) zeigt deutlich die Abb.3, in der die "Lösung" bis zur dritten "Ordnung"

## Abbildungen

- Abb.1 : Für die angegebenen Parameterwerte sind der Druckverlauf in nullter Ordnung und der Feldlinienverlauf in erster Ordnung (in einem Periodizitätsintervall) aufgetragen. (Der eingezeichnete Druckverlauf liegt also in erster Näherung an den Stellen  $\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}$  und  $\frac{3\pi}{2\sqrt{\lambda}}$  vor.)
- Abb. 2 : Fourierkomponenten bis zur dritten Ordnung für die durch die in Abb.1 angegebenen Parameter bis zur ersten Ordnung bestimmte Lösung, wobei für die zweite und dritte Näherung die halbhom. RWA in  $x=(0;8)$  gelöst wurde! (Es ist darauf zu achten, daß im unteren Teil der Abb. der Ordinatenmaßstab um den Faktor 1000 größer ist.)
- Abb.3 : Wiederum für die in Abb.1 angegebenen Parameter sind  $W_{22}$  und  $W_{33}$  im Vergleich zu  $W_{00}$  und  $W_{11}$  (jetzt im gleichen Maßstab) dargestellt, wobei hier die Anfangsbedingungen so gewählt sind, daß die zweite und dritte Näherung die rein inhomogene Lösung von (24) ist. Man vergleiche mit Abb.2!.
- Abb.4 : Wie Abb.1, aber für andere Parameter.
- Abb.5 : Die zweite Näherung für die durch die in Abb.4 angegebenen Parameter bis zur ersten Ordnung bestimmte Lösung, wobei wieder die halbhom. RWA in  $x=(0;8)$  gelöst wurde. Der Maßstab ist der gleiche wie in Abb.2b. Wie man aus Abb.4 erkennt, fallen die "Sprungstellen" mit dem Plasmarand zusammen.

Abb. 1



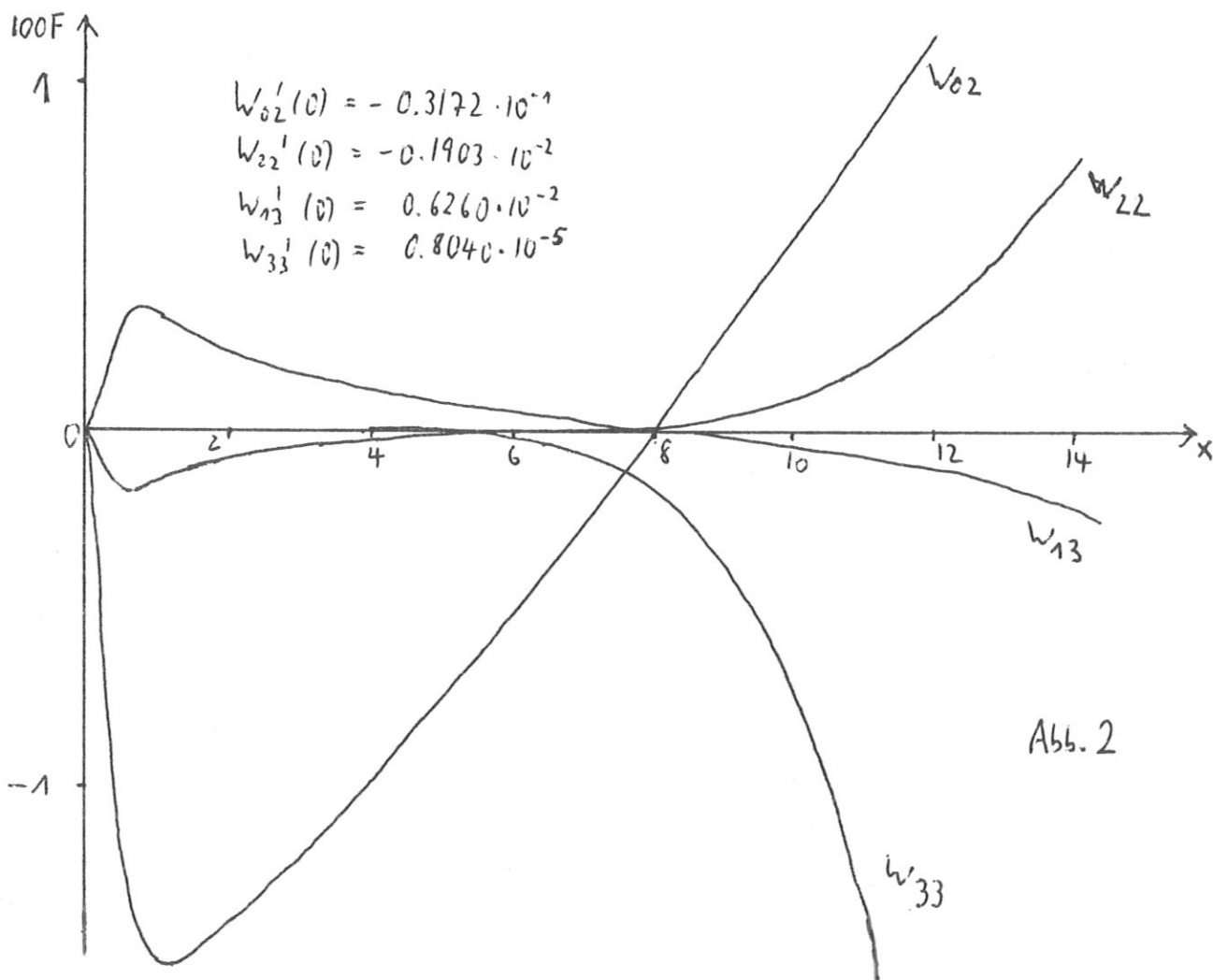
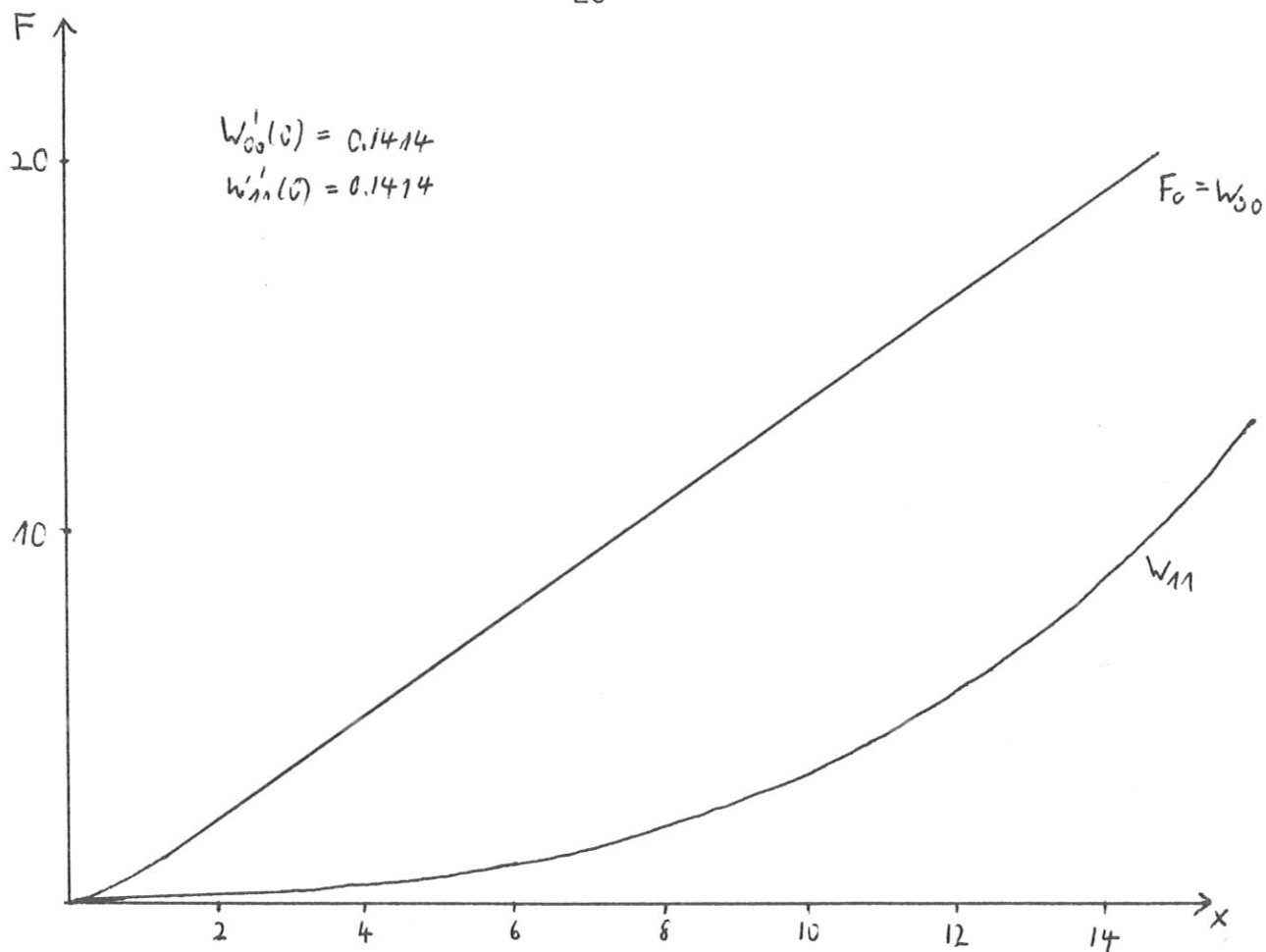


Abb. 2

$$\begin{aligned} w_{00}'(0) &= 0.1414 \\ w_{11}'(0) &= 0.1414 \\ w_{\mu\mu}'(0) &= 0 \quad \mu = 2, 3 \end{aligned}$$

Abb. 3

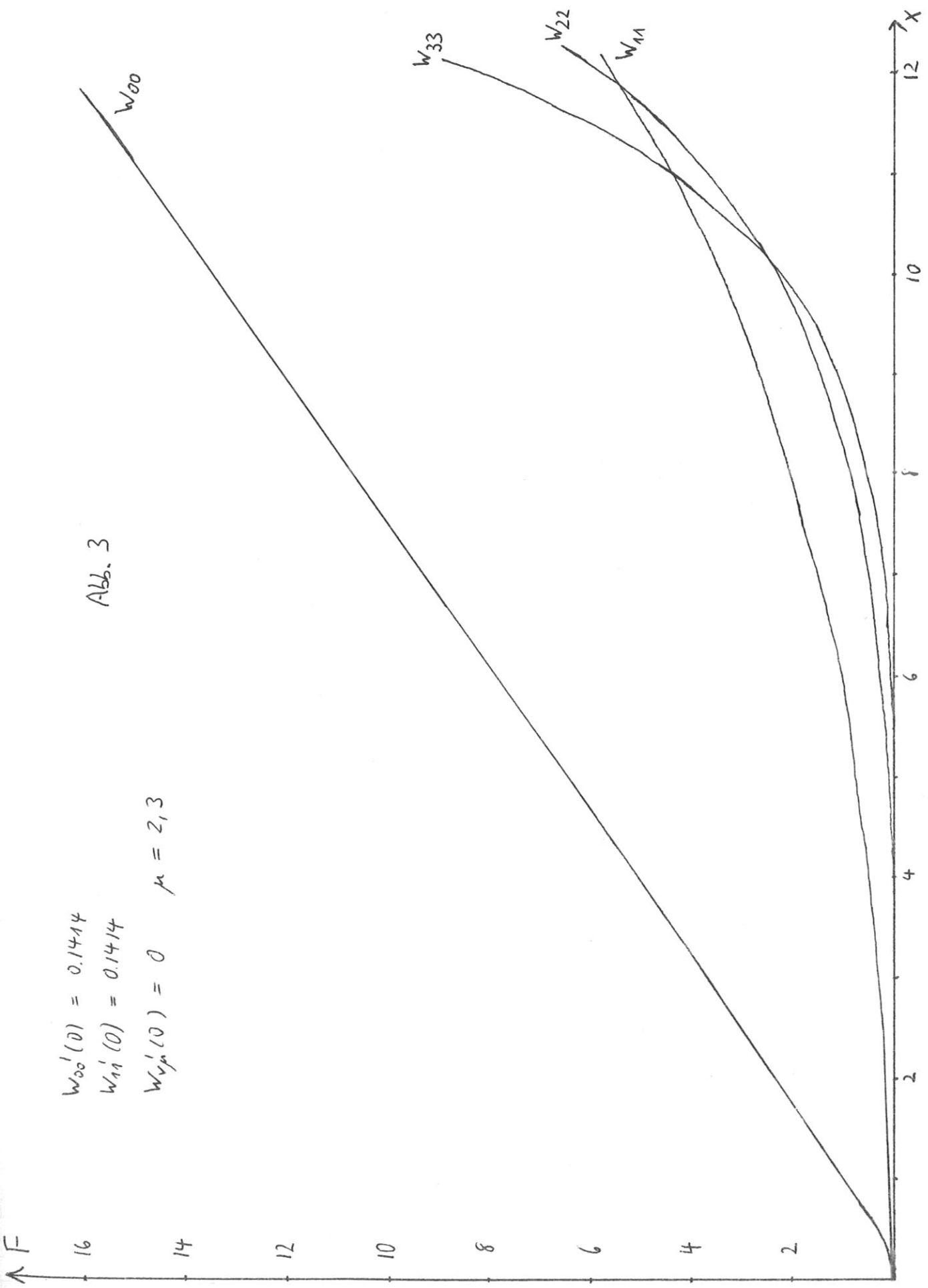
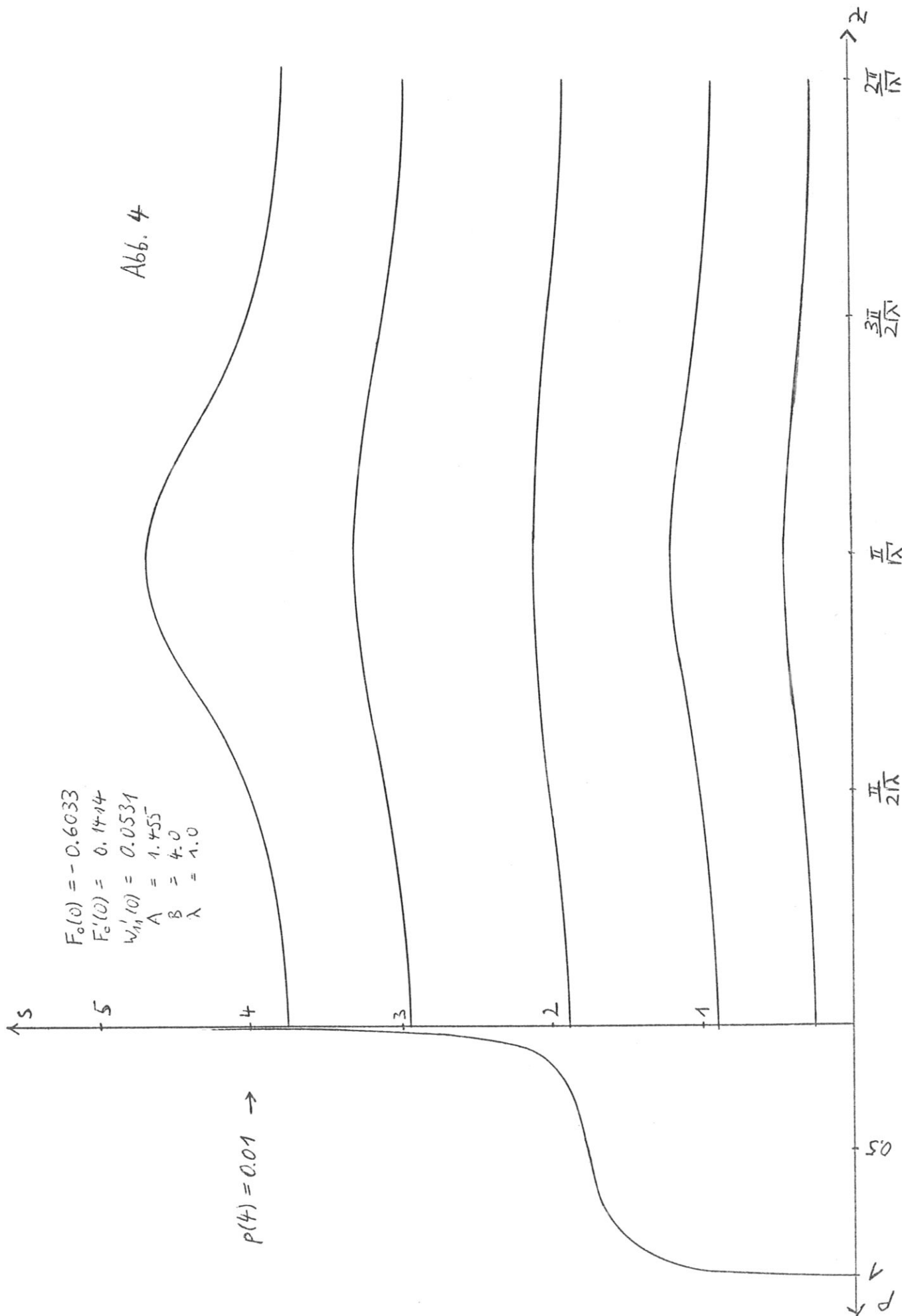




Abb. 4

$$\begin{aligned}
 F_0(0) &= -0.6033 \\
 F_0'(0) &= 0.1714 \\
 w_{11}(0) &= 0.0531 \\
 A &= 1.755 \\
 B &= 4.0 \\
 \lambda &= 1.0
 \end{aligned}$$

$$p(4) = 0.01 \rightarrow$$



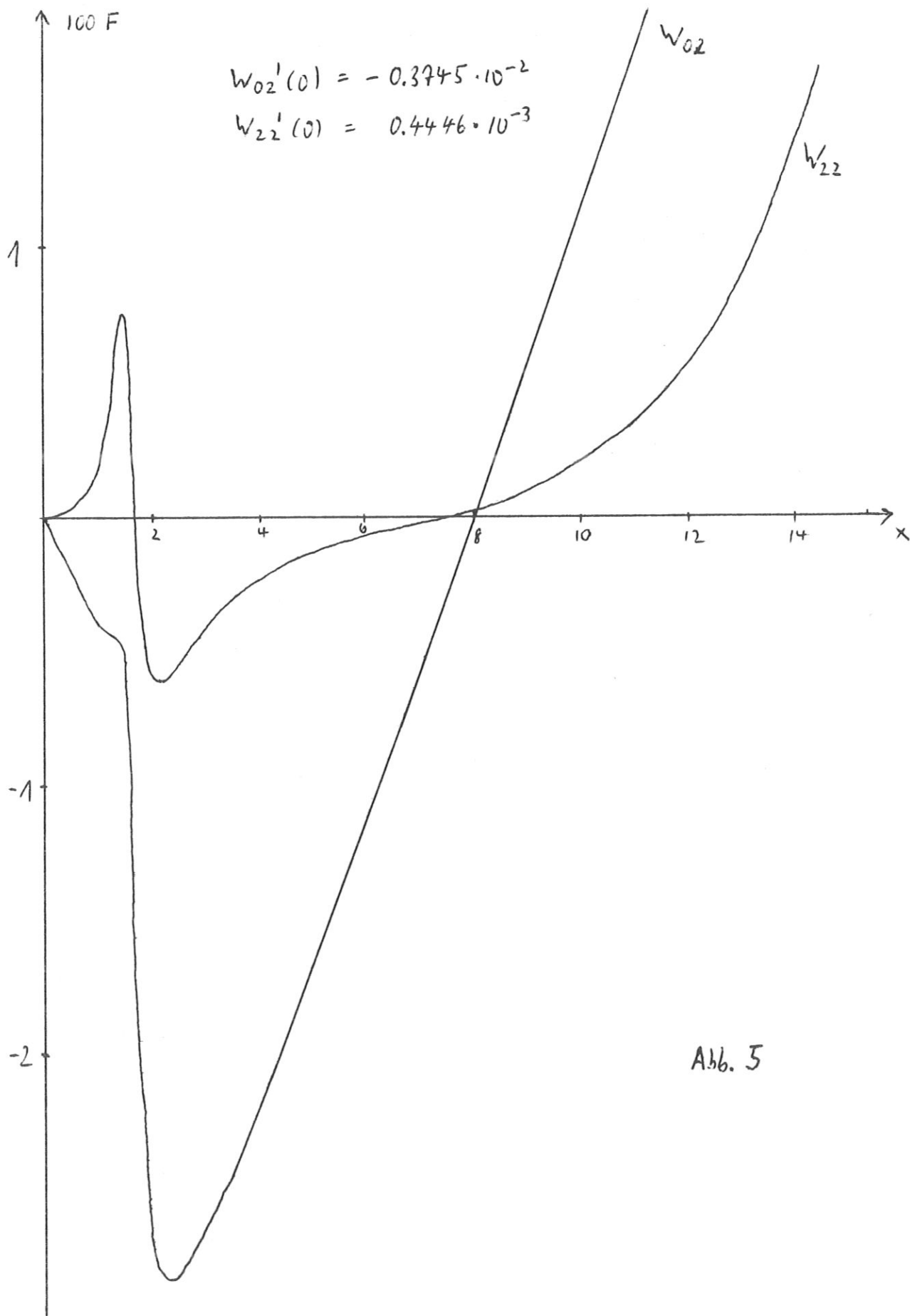


Abb. 5

dargestellt ist, wobei in der zweiten und dritten Ordnung die rein inhomogenen Lösungen von (24) berechnet wurden. Im ersten Beispiel können offenbar die Werte der  $W_{\nu\mu}$  an der Stelle  $x=0.65$

$$\begin{aligned}
 W_{00} &= 0.5275 & W_{02} &= -0.1429 \cdot 10^{-1} \\
 W_{11} &= 0.7737 \cdot 10^{-1} & W_{13} &= 0.3491 \cdot 10^{-2} \\
 & & W_{22} &= -0.1588 \cdot 10^{-2} \\
 & & W_{33} &= 0.6791 \cdot 10^{-4}
 \end{aligned}$$

und die Verhältnisse

$$W_{00}/W_{02} = 37 \quad W_{11}/W_{13} = 22 \quad W_{11}/W_{22}/W_{33} = 49/1/0.04$$

als für die Güte der Näherung charakteristisch angesehen werden, wobei die Konvergenz noch wesentlich besser ist, wenn  $x$  nicht aus einer Umgebung der Stelle  $x=0.65$  ist. Man sieht also, daß die erste Näherung die Lösung mit guter Genauigkeit darstellt, daß andererseits aber insbesondere am Plasmarande strukturelle Feinheiten auftreten. Mit zunehmendem Druckgradienten am Plasmarande werden die höheren Näherungen dort größer. Das zeigt die Abb.5, in der die zweite Näherung für das zweite Beispiel aufgetragen ist. Somit sieht man, daß der Zusammenhang zwischen der Geometrie des Plasmarandes und der Leiteroberfläche sehr unübersichtlich ist (m.a.W., wäre etwa im ersten Beispiel für die höheren Näherungen die halbhom. RWA in  $(0,0.65)$  gelöst worden, so wäre die Leiteroberfläche kompliziert geworden).- Allgemein läßt sich auf Grund dieser beiden Beispiele sagen: für den Fall  $\beta \approx 1$ , in dem zusätzlich die Punkte 1 und 2 von S.18 erfüllt werden, läßt sich das Plasma durch die Formgebung der Leiteroberfläche nur wenig beeinflussen.

Schließlich sollen für das zweite Beispiel die analytische Lösung und die Lösung des Systems von GDGLen bis zur zweiten Ordnung im Intervall  $(s=0;1,7)$  verglichen werden (s. Abb.4). Die analytische Lösung wurde dafür näherungsweise durch Polynome 25-ter Ordnung in  $x$  mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}
 a_{00} &= -0.6033 \\
 a_{01} &= 0.1377 \quad (= 0.1414 - 0.3745 \cdot 10^{-2}) \\
 a_{11} &= 0.0531 \\
 a_{21} &= 0.4446 \cdot 10^{-3} \\
 a_{\nu 1} &= 0 \quad \forall \nu \geq 3
 \end{aligned}$$

berechnet. Die folgende Tabelle zeigt das Ergebnis:

	System von G.D.G.Len			Analytische Lösung
S	$W_{00}$	$W_{02}$	0-te Four. Komp.	0-te Four. Komp.
	$W_{11}$		1-te Four. Komp.	1-te Four. Komp.
		$W_{22}$	2-te Four. Komp.	2-te Four. Komp.
1.0	-0.5036	$-0.1916 \cdot 10^{-2}$	-0.5055	-0.5055
	$0.3090 \cdot 10^{-1}$		$0.3090 \cdot 10^{-1}$	$0.3089 \cdot 10^{-1}$
		$0.3777 \cdot 10^{-3}$	$0.3777 \cdot 10^{-3}$	$0.3775 \cdot 10^{-3}$
1.5	-0.2675	$-0.4277 \cdot 10^{-2}$	-0.2718	-0.2717
	$0.9621 \cdot 10^{-1}$		$0.9621 \cdot 10^{-1}$	$0.9615 \cdot 10^{-1}$
		$0.2627 \cdot 10^{-2}$	$0.2627 \cdot 10^{-2}$	$0.2615 \cdot 10^{-2}$
1.7	$-0.4888 \cdot 10^{-1}$	$0.4881 \cdot 10^{-2}$	-0.0538	-0.0570
	0.1708		0.1708	0.1681
		$0.7442 \cdot 10^{-2}$	$0.7442 \cdot 10^{-2}$	$0.7473 \cdot 10^{-2}$

Anhang 1

Herleitung von (7).

Aus (2) folgt

$$(1 + (BF)^2) \left( 2x \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) = 2Ax \quad (1.1)$$

Durch Differentiation nach x ergibt sich an der Stelle x=0

$$\left( 1 + (BF(0,z))^2 \right) \left( 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(0,z) + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z^2}(0,z) \right) = 2A \quad (1.2)$$

Einsetzen des Ansatzes (5), (6) liefert, da (1.2) für alle z gilt,

$$a_{02} = \frac{A}{2(1 + (\beta a_{00})^2)}$$

$$a_{v2} = \frac{a_{v1} v^2 \lambda}{4} \quad \forall v \geq 1 \quad (1.3)$$

Ganz analog folgen aus (1.1) auch die höheren Koeffizienten:

für  $m \geq 2$  ist

$$0 = \frac{\partial}{\partial x^m} \left[ (1 + (BF)^2) \left( 2x \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) \right]$$

$$= \sum_{\nu=0}^m \binom{m}{\nu} [1 + (BF)^2]^{(\nu)} \left[ 2x \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right]^{(m-\nu)}$$

Führt man die Differentiationen aus und betrachtet die Gleichung für  $x=0$ , so folgt

$$0 = (1 + (\beta a_{00})^2) \left( 2m \frac{\partial^{m+1} F}{\partial x^{m+1}}(0,z) + \frac{\partial^{m+2} F}{\partial x^m \partial z^2}(0,z) \right)$$

$$+ \beta^2 \sum_{\nu=1}^{m-1} \left\{ \binom{m}{\nu} \left[ \sum_{\rho=0}^{\nu} \binom{\nu}{\rho} F^{(\rho)}(0,z) F^{(\nu-\rho)}(0,z) \right] \left[ 2(m-\nu) \frac{\partial^{m-\nu+1} F}{\partial x^{m-\nu+1}}(0,z) + \frac{\partial^{m-\nu+2} F}{\partial x^{m-\nu} \partial z^2} \right] \right\} \quad (1.4)$$

Mit (5) ergibt sich

$$F^{(p)}(0,t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} p! a_{\tau p} \cos \tau \sqrt{\lambda} t$$

also

$$F^{(\rho)}(0,z) F^{(\nu-\rho)}(0,z) =$$

$$\rho! (\nu-\rho)! \sum_{\tau_1, \tau_2} a_{\tau_1 \rho} a_{\tau_2 \nu-\rho} \cos \tau_1 \sqrt{\lambda} t \cos \tau_2 \sqrt{\lambda} t$$

$$= \frac{1}{2} q!(v-q)! \sum_{\sigma=0}^{\infty} \left( \sum_{\mu=0}^6 a_{\mu, q} a_{\sigma-\mu, v-q} + \sum_{|\mu_1-\mu_2|=5} a_{\mu_1, q} a_{\mu_2, v-q} \right) \cos \sigma \sqrt{\lambda} z$$

und mit der Definition von  $A_{\sigma, \nu}$  aus (7)

$$\sum_{q=0}^{\nu} \binom{\nu}{q} F^{(q)}(0, z) F^{(\nu-q)}(0, z) = \nu! \sum_{\sigma=0}^{\infty} A_{\sigma, \nu} \cos \sigma \sqrt{\lambda} z \quad (1.5)$$

Weiter folgt aus (5)

$$2q \frac{\partial^{q+1} F}{\partial x \partial t^{q+1}}(0, z) + \frac{\partial^{q+2} F}{\partial x^2 \partial t^2}(0, z) = \sum_{\tau=0}^{\infty} (2q(q+1)! a_{\tau, q+1} - q! \lambda \tau^2 a_{\tau, q}) \cos \tau \sqrt{\lambda} z$$

und mit der Definition von  $B_{\tau, q}$  aus (7)

$$= q! \sum_{\tau=0}^{\infty} B_{\tau, q} \cos \tau \sqrt{\lambda} z \quad (1.6)$$

Einsetzen von (1.5), (1.6) in (1.4) liefert

$$(1 + (B a_{0,0})^2) \sum_{\tau=0}^{\infty} B_{\tau, m} \cos \tau \sqrt{\lambda} z + \frac{B^2}{2} \sum_{\nu=1}^{m-1} \sum_{\tau=0}^{\infty} \left( \sum_{\sigma=0}^{\tau} A_{\sigma, \nu} B_{\tau-\sigma, m-\nu} + \sum_{|\sigma_1-\sigma_2|=\tau} A_{\sigma_1, \nu} B_{\sigma_2, m-\nu} \right) \cos \tau \sqrt{\lambda} z$$

$$\sim a_{\tau, m+1} = \frac{1}{2m(m+1)} \left( \lambda \tau^2 a_{\tau, m} - \right. \quad (1.7)$$

$$\left. \frac{B^2}{2(1+(B a_{0,0})^2)} \left( \sum_{\nu=1}^{m-1} \left( \sum_{\sigma=0}^{\tau} A_{\sigma, \nu} B_{\tau-\sigma, m-\nu} + \sum_{|\sigma_1-\sigma_2|=\tau} A_{\sigma_1, \nu} B_{\sigma_2, m-\nu} \right) \right) \right)$$

w.z.b.w. Aus den Definitionen für  $A_{\sigma, \nu}$  und  $B_{\tau, q}$  folgt, daß mit (1.6) die Koeffizienten sukzessive berechnet werden können. Daß sich Rekursionsformeln ergeben, die nur endliche Summen enthalten, folgt daraus, daß  $F(0, z)$  nicht von  $z$  abhängt. Man kann also leider nicht auf einfache Weise die Lösung über das Konvergenzintervall hinaus fortsetzen, indem man an der Stelle  $x_0$  (die noch im Konvergenzintervall liege) mit den für diese Stelle berechneten Fourierkoeffizienten und deren Ableitungen erneut das Anfangswertproblem löst.

Anhang 2

a) Beweis für die Abschätzung (30)

Die Näherung beim Beweis besteht darin, daß in (24)

$$2 \frac{B^2}{A} F_0 G F_0^2 \quad (2.1)$$

gegenüber

$$\frac{(N-2\nu)^2 \lambda}{2x}, \quad 2\nu < N \quad (2.2)$$

vernachlässigt wird; sie ist gut, da, evtl. bis auf den schmalen Bereich, in dem (2.1) seine Extremwerte annimmt, stets gilt

$$\frac{(N-2\nu)^2 \lambda}{2x} \gg 2 \frac{B^2}{A} F_0 G F_0^2 \quad (2.3)$$

Die Lösung der halbhomogenen RWA (29) läßt sich folgendermaßen schreiben (vgl. z. B. [6])

$$w_{N-2\nu N}(x) = \int_0^{x_1} \Gamma(x, \xi) f_{N-2\nu N}(\xi) d\xi \quad (2.4)$$

worin  $\Gamma(x, \xi)$  unter der obigen Näherung die Greenfunktion der hom. Gleichung

$$w_{N-2\nu N}'' = \frac{(N-2\nu)^2 \lambda}{2x} w_{N-2\nu N} \quad (2.5)$$

ist. Somit folgt

$$|w_{N-2\nu N}| < \max_{0 \leq x \leq x_1} |f_{N-2\nu N}| \int_0^{x_1} |\Gamma(x, \xi)| d\xi \quad (2.6)$$

Nun ist

$$\Gamma(x, \xi) \leq 0 \quad 0 \leq x \leq x_1, 0 \leq \xi \leq x_1 \quad (2.7)$$

Denn setzt man

$$f_1(x) = \int_0^{x_1} \Gamma(x, \xi) d\xi$$

so ist  $f_1$  die Lösung der halbhom. RWA

$$w_{N-2\nu N}'' = \frac{(N-2\nu)^2 \lambda}{2x} w_{N-2\nu N} + 1$$

und somit von der Form

$$f_1(x) = -\frac{2x}{(N-2\nu)^2 \lambda} + c_1 w_{N-2\nu N}^1$$

mit einer positiven Konstanten  $c_1$ . Daraus folgt

$$f_n(x) \leq 0 ; |f_n(x)| \leq \frac{2x}{(N-2v)^2 \lambda} ; 0 \leq x \leq x_n \quad (2.8)$$

Also ist das Integral über  $\Gamma(x, \xi)$  bezüglich  $\xi$  für alle  $x$  aus dem Intervall  $(0, x_1)$  negativ. Außerdem ist  $\Gamma(x, \xi)$  als Funktion von  $\xi$  in  $(0, x_1)$  stetig und für  $0 \leq \xi \leq x$  sowie  $x \leq \xi \leq x_1$  Lösung von (2.5), hat also stets das gleiche Vorzeichen wie die zweite Ableitung. Daraus folgt die Ungleichung (2.7). Somit ergibt sich aus (2.6) mit (2.8)

$$\begin{aligned} |w'_{N-2vN}| &\leq - \text{Max}_{0 \leq x \leq x_n} |f_{N-2vN}| \int_0^{x_n} \Gamma(x, \xi) d\xi \\ &= \text{Max}_{0 \leq x \leq x_n} |f_{N-2vN}| \cdot |f_n(x)| \\ |w_{N-2vN}| &\leq \text{Max}_{0 \leq x \leq x_n} |f_{N-2vN}| \frac{2x_n}{(N-2v)^2 \lambda} \end{aligned} \quad (2.9)$$

w.z.b.w.

b) Rekursionsformeln für die Funktionen  $f_{N-2vN}$

Diese werden aus (19c) gewonnen. Um die i. f. auftretenden Summen einfach schreiben zu können, werden folgende Bezeichnungen eingeführt

$$w_{00} := F_0 ; w_{vp} \equiv 0 \quad \forall v < 0, \forall v > p ; p \geq 0 \quad (2.10)$$

Dann ergibt sich mit den Hilfsgrößen

$$\left. \begin{aligned} w1_{\mu, p, q} &= \sum_{\sigma, \rho} w_{\sigma, \rho} w_{\mu - \sigma, q} + \sum_{\substack{\sigma_1, \sigma_2 \\ \sigma_1 + \sigma_2 = \mu}} w_{\sigma_1, p} w_{\sigma_2, q} \quad \forall \mu ; \forall p, q \geq 0 \\ w2_{\tau, p, q, m} &= -\frac{B^2 \Delta w_{20}}{A} \left( \sum_{\sigma} w1_{\sigma, p, q} w3_{\tau - \sigma, m} + \sum_{\substack{\sigma_1, \sigma_2 \\ \sigma_1 + \sigma_2 = \tau}} w1_{\sigma_1, p, q} w3_{\sigma_2, m} \right) \quad \forall \tau ; \forall m, p, q \geq 0 \\ w3_{00} &= -4 \frac{A}{B^2} \quad w3_{\tau 0} \equiv 0 \quad \forall \tau \neq 0 \\ w3_{\tau N} &= \sum_{v=1}^N \sum_{\rho=0}^v w2_{\tau, \rho, v-\rho, N-v} \quad \forall \tau ; \forall N \geq 1 \end{aligned} \right\} (2.11)$$

folgendes System von GDGLen:



$$\left. \begin{aligned} W_{00}'' &= \frac{A}{1 + (B W_{00})^2} = G W_{00} \\ W_{\tau N}'' &= \frac{\tau^2 \lambda}{2x} W_{\tau N} - \frac{B^2}{4A} G W_{00} W_{3\tau N} \quad \forall \tau; \forall N \geq 1 \end{aligned} \right\} (2.12)$$

Der Beweis erfolgt durch Induktion über N, bei festem N jeweils für alle  $\tau$ :

N=1:

$$W_{1,0,1} = W_{1,1,0} = 2 W_{00} W_{11} \delta_{\mu 1}$$

$$W_{2,0,1,0} = W_{2,1,0,0} = 4 W_{00} W_{11} G W_{00} \delta_{1\tau}$$

$$W_{3,1} = 8 W_{00} W_{11} G W_{00} \delta_{1\tau}$$

$$W_{\tau,1}'' = \left( \frac{\lambda}{2x} - 2 \frac{B^2}{A} G W_{00}^2 W_{00} \right) W_{11} \delta_{\tau 1}$$

N>1: (2.12) sei für  $n=0, \dots, N-1$  bewiesen. Dann folgt wegen

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sum_{\rho=0}^n F_{\rho} F_{n-\rho} = \frac{1}{2} \sum_{\rho=0}^n \sum_{\mu} \left( \sum_{\sigma} W_{\sigma \rho} W_{\mu-\sigma, n-\rho} + \sum_{|\sigma_1-\sigma_2|=\mu} W_{\sigma_1 \rho} W_{\sigma_2, n-\rho} \right) \omega_{\mu} \sqrt{\lambda} t \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\rho=0}^n \sum_{\mu} W_{1, \rho, n-\rho} \omega_{\mu} \sqrt{\lambda} t \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

mit (19c)

$$G F_N = -\frac{1}{2} \frac{B^2}{A} G W_{00} \sum_{n=1}^N \left\{ \sum_{\rho=0}^n \left( \sum_{\mu} W_{1, \rho, n-\rho} \omega_{\mu} \sqrt{\lambda} t \right) \left( \sum_{\mu} \left( W_{\mu, N-n}'' - \frac{\tau^2 \lambda}{2x} W_{\mu, N-n} \right) \omega_{\mu} \sqrt{\lambda} t \right) \right\}$$

und mit (2.12)

$$= \frac{B^2}{A} \frac{G W_{00}}{4} \frac{B^2}{A} \frac{G W_{00}}{4} \sum_{\tau} \sum_{n=1}^N \sum_{\rho=0}^n \left( \sum_{\sigma} W_{1, \rho, n-\rho} W_{3, \tau-\sigma, N-n} + \sum_{|\sigma_1-\sigma_2|=\tau} W_{1, \sigma_1, n-\rho} W_{3, \sigma_2, N-n} \right) \omega_{\tau} \sqrt{\lambda} t$$

$$= -\frac{B^2}{A} \frac{G W_{00}}{4} \sum_{\tau} \sum_{n=1}^N \sum_{\rho=0}^n W_{2, \tau, \rho, n-\rho, N-n} \omega_{\tau} \sqrt{\lambda} t$$

$$= -\frac{B^2}{A} \frac{G W_{00}}{4} \sum_{\tau} W_{3, \tau, N} \omega_{\tau} \sqrt{\lambda} t$$

↷

$$W_{\tau N}'' = \frac{\tau^2 \lambda}{2x} W_{\tau, N} - \frac{B^2}{4A} G W_{00} W_{3, \tau, N} \quad \forall \tau$$

w.z.b.w.

Herrn Prof. Dr. A. Schlüter danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit; bei ihm und Herrn Dr. P. Merkel bedanke ich mich für zahlreiche Diskussionen.

Literaturverzeichnis

- [1] R. Lüst u. A. Schlüter (1957). Zeitschr. f. Naturforschung,  
12a, 850
- [2] A. Schlüter u. P. Merkel (1965). IPP-Laborbericht
- [3] S. Chandrasekhar (1956). Astroph. J., 124, 232
- [4] G. E. Lewis (1965). Methods of Computational Physics. Vol. 4,  
47 ff. Academic Press, N.Y.
- [5] Jahnke-Emde-Lösch (1960). Tafeln höh. Funktionen, 207.
- [6] E. Kamke (1962). Differentialgleichungen. I. GDGLen, 249
- [2a] A. Schlüter u. P. Merkel (1966). Varenna Symposium on  
Theoretical Plasma Physics 1966

This report is to be treated as strictly confidential.

The 'Institut für Plasmaphysik' holds the exclusive rights of publication, mimeographing, propagation and translation into foreign languages of the original text, inclusive of the drawings, wholly or partially; also of excerpts or résumés, as well as of the technical or scientific contents of this report. Exceptions to these restrictions require written permission.

Furthermore, the 'Institut für Plasmaphysik' reserves the right of exclusive exploitation of the information contained in this report, for the purpose of obtaining protective industrial rights, particularly patent and utility patent rights at home and abroad. Actions of exploitation taken on the basis of the knowledge gained from this report cannot be regarded as grounds for obtaining the right of prior use ('Vorbenutzungsrecht') according to article 7 paragraph 1, first sentence of the German Patent Law. The reader is referred to article 5 of the Patent Law. For reasons stipulated by the Patent Law, the report must not be exhibited in public libraries, or lent out indiscriminately.

The Institute does not guarantee that the information given in this report is free from protective rights, such as patent rights, utility patent rights or trade-mark rights.

No guarantee is given in respect of the accuracy, completeness or usefulness of the information contained in this report. Thus, no liability can be accepted for damage resulting from use of the information, or of the apparatus, methods and procedures described.