

I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K
G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N

Axialsymmetrische magnetohydrostatische
Gleichgewichte

(Axisymmetric Magnetohydrostatic
Equilibria)

P. Merkel und A. Schlüter

IPP 6/48

Februar 1966

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

ABSTRACT: An approximate solution of an axisymmetric magneto-hydrostatic equilibrium without longitudinal currents is given. In this case the equilibrium problem leads to a partial differential equation for the flux function $\mathcal{F}(s, z)$. The pressure p is a function of $\mathcal{F}(s, z)$ only. This function, which can be chosen arbitrarily, is taken here as $p(\mathcal{F}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctg b\mathcal{F}$. Then in first approximation the partial differential equation can be reduced to a system of ordinary differential equations and the solution shows that this particular choice of $p(\mathcal{F})$ ensures decreasing pressure in the radial direction.

In the second part we study the magnetohydrodynamic stability of the equilibrium solutions. The calculations based on a criterion given by Bernstein et al. show instability for all solutions. There are in fact solutions which are locally stable in regions with sufficiently high pressure gradient and sufficiently small curvature of the lines of force, but on the whole instability results.

I. Die Grundgleichungen

Ein unendlich gut leitendes Plasma mit dem Druck p ist mit einem Magnetfeld \vec{B} im Gleichgewicht, wenn die Gleichung

$$(1) \quad \text{grad } p = - \frac{1}{4\pi} \vec{B} \times \text{rot } \vec{B}$$

erfüllt ist.

Zur Behandlung axialsymmetrischer Konfigurationen führt man zweckmäßigerweise Zylinderkoordinaten (s, φ, z) ein. Axialsymmetrie bedeutet dann, daß alle Größen von φ unabhängig sind. Jedes axialsymmetrische Magnetfeld kann in der folgenden Weise aus einem toroidalen und einem meridionalen Anteil zusammengesetzt werden: ¹⁾

$$(2) \quad \vec{B} = \frac{1}{s^2} (\vec{e}_z \times \vec{r}) \times \text{grad } F + \frac{1}{s^2} T \cdot (\vec{e}_z \times \vec{r})$$

\vec{e}_z ist der Einheitsvektor in z -Richtung, und \vec{r} ist der Ortsvektor. F und T sind skalare Funktionen von s und z . F heißt Flußfunktion und hat die anschauliche Bedeutung, daß die durch Flächen $F = \text{const.}$ begrenzten rotationssymmetrischen Volumina Flußröhren sind. Man kann zeigen ²⁾, daß die Flächen $F = \text{const.}$, $p = \text{const.}$ und $T = \text{const.}$ zusammenfallen, oder mit anderen Worten, daß p und T Funktionen von F sind. Es sei also

$$(3) \quad T^2 = g(F) \quad , \quad p = p(F)$$

Setzt man (2) in (1) ein, so erhält man unter Beachtung von (3) nach einigen Umformungen für $F(s, z)$ die partielle Differentialgleichung ²⁾

$$(4) \quad \underline{\mathcal{G}} F + \frac{1}{2} \frac{d}{dF} g(F) = -4\pi s^2 \frac{d}{dF} p(F) \quad ,$$

wobei $\underline{\mathcal{G}}$ der Differentialoperator

1) R. Lüst und A. Schlüter, Z. Astrophys. 38, 190 (1955)

2) R. Lüst und A. Schlüter, Z. Naturforschg. 12a, 850 (1957)

$$(5) \quad \underline{G} = \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ist.

Das Gleichgewichtsproblem ist damit auf die Lösung einer Differentialgleichung für die skalare Funktion $\bar{F}(s, z)$ zurückgeführt. Die Funktionen $g(F)$ und $p(F)$ kann man zunächst frei vorgeben. Um aber realistische und physikalisch sinnvolle Gleichgewichtskonfigurationen als Lösungen zu erhalten, müssen die Funktionen $g(F)$ und $p(F)$ geeignet gewählt werden, worin eine Schwierigkeit des Problems liegt.

II. Gleichgewichte mit meridionalen Strömen

Interessiert man sich für Gleichgewichte ohne axiale Ströme, d.h. ist $B_y \equiv 0$, so ist nach (2) $T \equiv 0$ und damit $g(F) \equiv 0$. Die Gleichung (4) reduziert sich zu

$$(6) \quad \underline{G}F = -4\pi s^2 \frac{d}{dF} p(F)$$

Diese Gleichung wird zur Vereinfachung umgeformt. Mit den Substitutionen

$$(7) \quad X = \frac{s^2}{2}$$

und

$$(8) \quad \tilde{F}(X, Z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \bar{F}(s, z)$$

erhält man aus (6), wenn man \tilde{F} wieder F nennt,

$$(9) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{1}{2X} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right) F(X, Z) = - \frac{d}{dF} p(F)$$

Den Zusammenhang zwischen $\bar{F}(x, z)$ und den Komponenten des Magnetfeldes $\vec{B} = (B_s, 0, B_z)$ gewinnt man aus (2). Es ergibt sich

$$(10) \quad \begin{aligned} B_s &= -\sqrt{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2x}} \frac{\partial \bar{F}}{\partial z}, \\ B_z &= \sqrt{4\pi} \frac{\partial \bar{F}}{\partial x}. \end{aligned}$$

Aus physikalischen Gründen sind axialsymmetrische Lösungen $\bar{F}(x, z)$ wünschenswert, bei denen der Gasdruck $p(\bar{F})$ von einem maximalen Wert auf der Achse ($x=0$) nach außen abnimmt und gegen Null geht. Das Magnetfeld wird dann für große x Vakuumfeld, d.h. Lösung von (9) mit verschwindender rechter Seite. Hier sollen insbesondere Lösungen interessieren, die in z periodisch sind. Es gilt jetzt, Ansätze für $p(\bar{F})$ zu finden, die den gewünschten Druckverlauf garantieren und die außerdem mathematisch möglichst einfach zu behandeln sind.

Der Ansatz

$$(11) \quad p(\bar{F}) = \frac{a^2}{2} \bar{F}^2 + b\bar{F} + c$$

ist von R. Lüst und A. Schlüter in der bereits zitierten Arbeit ²⁾ untersucht worden. Diese Wahl für $p(\bar{F})$ liegt aus mathematischen Gründen nahe, da sie auf eine lineare Differentialgleichung führt. Man erhält in z -periodische Lösungen, bei denen der Druck p wie gewünscht nach außen abnimmt. Für größere x wird p jedoch negativ, und damit wird die Lösung für große x unphysikalisch.

In dieser Arbeit soll folgender nichtlinearer Ansatz diskutiert werden:

$$(12) \quad p(\bar{F}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(b\bar{F}).$$

Nimmt man einmal an, daß man mit diesem Ansatz Lösungen der Differentialgleichung (9) bekommt, die für alle endlichen

x und z regulär sind und für die $\bar{F}(x, z)$ für jedes z mit x monoton wächst, so sichert (12) einen fallenden Druckverlauf. Außerdem gilt immer $p(\bar{F}) \geq 0$. So kann man hoffen, mit diesem Ansatz brauchbare Lösungen zu finden. Mit (12) erhält man aus (9) die nichtlineare Differentialgleichung

$$(13) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \bar{F}(x, z) = \frac{b}{\pi (1 + b^2 \bar{F}^2(x, z))} .$$

Bevor wir uns dem Versuch zuwenden, diese Differentialgleichung zu lösen, soll festgestellt werden, welche neuen Lösungen von (13) man aus gegebenen Lösungen durch Ähnlichkeitstransformationen gewinnen kann. Um die Ähnlichkeitstransformationen, die die Differentialgleichung zuläßt, zu finden, geht man am besten auf die allgemeine Form der Differentialgleichung (9) zurück. Setzt man

$$(14) \quad \begin{aligned} x' &= \alpha^\alpha x, \\ z' &= \alpha^\beta z, \\ \bar{F}' &= \alpha^\delta \bar{F}, \\ p' &= \alpha^\delta p, \end{aligned}$$

in (9) ein, so folgen aus der Forderung, daß auch die gestrichenen Größen die Gleichung (9) erfüllen, zwei Gleichungen für die Exponenten von α

$$(15) \quad \begin{aligned} 3\beta &= \alpha \\ 2\gamma - \delta &= 2\alpha \end{aligned}$$

Das liefert eine zweiparametrische Schar von Transformationen. Betrachtet man zunächst den Fall $\alpha = \beta = 0$, d.h. läßt man x und z fest, so folgt mit $2\gamma = \delta$ das Transformationsverhalten von \bar{F} und p zu

$$(16) \quad \begin{aligned} \bar{F}' &= c^2 \bar{F} \\ p' &= c p \end{aligned}$$

Diese Transformationseigenschaft ist im Ansatz (12) mit seiner speziellen Normierung $p^{(0)} = \frac{1}{z}$ bereits ausgenutzt worden. Alle

Lösungen mit anderen Werten $p(0)$ gewinnt man durch diese Ähnlichkeitstransformation.

Die übrigen Ähnlichkeitstransformationen erhält man, wenn man p untransformiert ($\delta=0$) läßt; dann ergibt sich aus $\beta = \frac{\alpha}{z}$, $\gamma = \alpha$

$$(17) \quad \begin{aligned} \bar{f}' &= c \bar{f} , \\ x' &= c x , \\ z' &= \sqrt{c} z . \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß es bei dem Ansatz (12) für p genügt, alle Lösungen für einen Wert von b zu kennen. Alle übrigen folgen durch Ähnlichkeitstransformation. (Das kann von Nutzen sein, wenn die Lösung numerisch gegeben ist).

Wenden wir uns nun der Lösung von (13) zu. Die von z unabhängige Lösung läßt sich sofort angeben. Nach Multiplikation beider Seiten von (13) mit $\frac{d\bar{f}}{\alpha x}$ kann man die Gleichung integrieren. Man erhält

$$(18) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{d}{\alpha x} \bar{f}(x) \right)^2 = \frac{1}{2} \bar{f}_0^2 + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} b \bar{f}(x)$$

und daraus

$$(19) \quad x - x_0 = \int_0^{\bar{f}} \frac{\alpha \bar{f}'}{\sqrt{\bar{f}_0^2 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} b \bar{f}'}} d\bar{f}$$

\bar{f}_0 und x_0 sind Integrationskonstante.

Ungleich schwieriger ist die Frage nach von z abhängigen Lösungen. Speziell sollen im folgenden in z -periodische Lösungen interessieren. Auf der Achse ($x=0$) sei $\bar{f}(0, z) = 0$. Dann kann man die rechte Seite von (13) für kleine \bar{f} in der Nähe der Achse nach Potenzen von \bar{f}^2 entwickeln. Berücksichtigt man von der Entwicklung nur das erste Glied, eine Konstante, so wird aus (13) eine lineare, inhomogene Differentialgleichung, deren Lösung bekannt ist ²⁾. Eine in z periodische überall reguläre Lösung ist

$$(20) \quad F(x, z) = \alpha_0 \lambda \sqrt{x} J_1(i\lambda \sqrt{2x}) \cos \lambda z + \frac{b}{2\pi} x^2 + c_0 x, \quad \lambda \text{ reell},$$

wobei $J_1(i\lambda \sqrt{2x})$ eine Besselfunktion mit imaginärem Argument ist. Diese Besselfunktion wächst monoton mit x , asymptotisch für große x geht sie in eine Exponentialfunktion über. Die allgemeine in z -periodische Lösung erhält man durch Superposition weiterer Lösungen der homogenen Gleichung, also Lösungen der Form (20) ohne das in x quadratische Glied

$$(21) \quad \bar{F}_h(x, z) = \alpha_1 \lambda \sqrt{x} J_1(i\lambda \sqrt{2x}) \cos \lambda z + k_1 x$$

Damit haben wir die Lösung von (13) in Achsennähe. Für große x soll das Magnetfeld in das Vakuumfeld übergehen, d.h. die rechte Seite von (13) soll klein werden. Dann hat (13) gerade die Funktionen (21) als Lösung. Es ist daher naheliegend, für (13) den Lösungsansatz

$$(22) \quad F(x, z) = k(x) + w(x) \cos \lambda z$$

zu versuchen.

Leider sind die obigen Annahmen über die Lösung $\bar{F}(x, z)$ für große x nicht konsistent mit der Differentialgleichung (13). In der Lösung für das Vakuumfeld (21), die sich für große x ergeben soll, überwiegt wegen des exponentiellen Anwachsens der Besselfunktion J_1 der erste Term. Setzt man diese Funktion in die Diffgl. (13) ein, so ist die rechte Seite keineswegs für alle z klein gegen 1. Andererseits ergibt sich aber nur dann das Vakuumfeld als Lösung, wenn die rechte Seite vernachlässigbar ist. Der Ansatz führt also auf einen Widerspruch.

Man möchte jedoch an dem Ansatz (12) für $p(\bar{F})$ festhalten, da er für kleine x den gewünschten abfallenden Druckverlauf liefert, wie sich später zeigen wird. Der Ausweg aus dieser Schwierigkeit dürfte der folgende sein. Falls es Lösungen $\bar{F}(x, z)$ gibt, die in einem Intervall von x die Be-

dingung $b \bar{F}(x, z) \ll 1$ für alle z erfüllen, dann ist dort der Druck p bereits klein geworden, wie man aus (12) sieht, und das Magnetfeld in guter Näherung zum Vakuumfeld. (In diesem Intervall ist notwendig $|k(x)| > |w(x)|$, $w(x)$ wächst dort noch nicht exponentiell.) An diese Lösung schließt man für größere x die Vakuumfeldlösung an, also eine Lösung von (13), in der die rechte Seite null gesetzt wird; dort gilt dann $p = \text{const.}$. Auf diese Frage wird später noch genauer eingegangen.

Wir gehen also vom Lösungsansatz (22) aus. Setzt man diesen in (13) ein, so ergibt sich

$$(23) \quad \left\{ 1 + b^2 (k^2 + 2wk \cos \lambda z + w^2 \cos^2 \lambda z) \right\} \left\{ k'' + (w'' - \frac{\lambda^2}{2x} w) \cos \lambda z \right\} = \frac{b}{\pi},$$

mit $k' = \frac{d}{dx} k$ und entsprechend für die anderen Ableitungen. Um daraus Differentialgleichungen für die Funktionen $k(x)$ und $w(x)$ zu bekommen, ordnet man zunächst die einzelnen Terme von (23) mit Hilfe der Beziehungen

$$(24) \quad \begin{aligned} \cos^2 \lambda z &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\lambda z, \\ \cos^3 \lambda z &= \frac{3}{4} \cos \lambda z + \frac{1}{4} \cos 3\lambda z \end{aligned}$$

nach Harmonischen $\cos n\lambda z$ von $\cos \lambda z$. Berücksichtigt man nur die Glieder mit $n=0$ und $n=1$, erhält man für $k(x)$ und $w(x)$ die beiden Gleichungen

$$(25) \quad \begin{aligned} (1 + b^2 k^2 + \frac{1}{2} b^2 w^2) k'' + w k b^2 (w'' - \frac{\lambda^2}{2x} w) &= \frac{b}{\pi}, \\ 2 k w b^2 k'' + (1 + b^2 k^2 + \frac{3}{4} b^2 w^2) (w'' - \frac{\lambda^2}{2x} w) &= 0, \end{aligned}$$

die, nach k'' und w'' aufgelöst, ergeben

$$(26) \quad \begin{aligned} k'' &= \frac{1}{D} \frac{b}{\pi} \left(1 + b^2 k^2 + \frac{3}{4} b^2 w^2 \right), \\ w'' - \frac{\lambda^2}{2x} w &= -\frac{1}{D} \frac{b}{\pi} 2 w k b^2, \end{aligned}$$

mit

$$(27) \quad D = (1 + b^2 k^2 + \frac{1}{2} b^2 w^2) (1 + b^2 k^2 + \frac{3}{4} b^2 w^2) - 2 k^2 w^2 b^4$$

Dieses Vorgehen zur Bestimmung der Gleichungen für $k(x)$ und $w(x)$ läßt sich etwa so rechtfertigen. Den Lösungsansatz (22) kann man als eine nach zwei Gliedern abgebrochene Fourierreihe und die Gleichungen (25) als niedrigste Näherung für die Koeffizienten $k(x)$ und $w(x)$ auffassen. Berücksichtigt man n Glieder der Fourierreihe, so liefert das Verfahren n Gleichungen für die Koeffizienten. Die Gleichungen (22) für die ersten zwei Koeffizienten werden natürlich durch Glieder mit höheren Fourierkoeffizienten modifiziert, von denen man hofft, daß sie klein sind. Die Vermutung ist, daß dieses Verfahren konvergiert und man schon in der hier betrachteten niedrigsten Näherung für $k(x)$ und $w(x)$ brauchbare Ergebnisse erhält. Eine strenge Begründung kann natürlich erst gegeben werden, wenn der allgemeine Fourieransatz systematisch studiert wird.

Die Lösung des Gleichungssystems (25) für $k(x)$ und $w(x)$ ist nur numerisch möglich. Den qualitativen Verlauf von $k(x)$ und $w(x)$ kann man allerdings den Gleichungen selbst entnehmen. Zunächst läßt sich die Lösung in der Nähe der Achse ($x=0$) als Reihe darstellen. Geht man mit einem Potenzreihenansatz für $k(x)$ und $w(x)$ in (25) ein, so ergibt sich

$$(28) \quad \begin{aligned} k(x) &= k_1 x + \frac{b}{2\pi} x^2 - \frac{b}{12\pi} (b^2 k_1^2 + \frac{1}{3} b^2 w_1^4) x^4 + \dots \\ w(x) &= w_1 \left(x + \frac{\lambda^2}{4} x^2 + \frac{\lambda^4}{48} x^3 + \frac{1}{12} \left(\frac{\lambda^6}{2 \cdot 48} - \frac{b}{\pi} 2 b^2 k_1^2 \right) x^4 + \dots \right) \end{aligned}$$

Dabei sind k_1 und w_1 Integrationskonstanten. Die beiden weiteren Integrationskonstanten, die die Lösung von (21) hat, sind durch die Forderungen $w(0)=0$ und $k(0)=0$ bestimmt. Die erste Bedingung muß erfüllt werden, damit das Magnetfeld bei $x=0$ regulär ist, und die zweite folgt aus der Forderung $\vec{F}(0, z) = 0$ für alle z .

Wir werden nur den Fall diskutieren, daß der Magnetfeldvektor auf der Achse in positive z -Richtung weist. Es sei also vorausgesetzt

$$(29) \quad k_1 > 0, \quad k_1 \geq w_1.$$

Aus (12) folgt dann mit (23) und (22), daß der Druck p - jedenfalls in Achsennähe - für alle z mit x abnimmt, da $\bar{F}(x, z)$ wächst. Den Verlauf von $k(x)$ und $w(x)$ für größere x kann man qualitativ den Differentialgleichungen (26) entnehmen. Aus der ersten Gleichung folgt, daß $k(x)$ monoton wächst und asymptotisch in eine Gerade $k(x) = a + bx$ übergeht und zwar unabhängig davon, welche Eigenschaften $w(x)$ im Einzelnen hat. In der Gleichung für $w(x)$ kann man für hinreichend kleine und hinreichend große x die rechte Seite gegen den zweiten Term der linken Seite vernachlässigen. In diesen Intervallen ist die Lösung die Besselfunktion $J_1(i\lambda\sqrt{x})$, eine monoton wachsende Funktion. Im x Intervall, in dem die rechte Seite nicht zu vernachlässigen ist, bewirkt sie wegen ihres negativen Vorzeichens, daß $w(x)$ schwächer als die Besselfunktion wächst; unter Umständen kann dort $w'(x) < 0$ werden. In Abb. 1 ist die numerische Lösung von (26) für $\lambda = 1.0$ und $k_1 = w_1 = 0.1$ dargestellt.

Wenden wir uns jetzt der Frage zu, inwieweit die Lösung von (25) eine Näherung der Lösung von (13) ist und für welche Parameterwerte λ und Anfangswerte k_1, w_1 brauchbare Lösungen zu erwarten sind. Die eben durchgeführte qualitative Diskussion der Lösung von (25) ergibt, daß $\bar{F}(x, z)$ für große x in die Vakuumfeldlösung (21) übergeht. Das bedeutet aber, daß für große x die Lösung von (25) keine Näherung für die Lösung von (13) ist. Denn setzt man (21) in (13) ein, so verschwindet die linke Seite von (13), aber die rechte Seite ist keineswegs für große x und alle z klein, wie schon bei der Diskussion des Ansatzes (13) bemerkt wurde. Dort wurde aber auch festgestellt, daß der Ansatz (13) keine Lösung haben kann, die für große x in die Vakuumfeldlösung übergeht; vielmehr muß man an die

Lösung von (13) für große x eine Lösung von (9) mit einem Ansatz für den Druck $p(F) = \text{const}$, also die Lösung von

$$(30) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \bar{F}(x, z) = 0$$

anschließen.

Zur genaueren Diskussion dieses Punktes ist es günstig, das zu einer Lösung von (25) gehörige Feldlinienbild zu betrachten. In Abb. 2 ist das Feldlinienbild für $\lambda = 0.6$, $k_1 - w_1 = 0.2$ dargestellt. Unter den Feldlinien ist eine, die sogenannte Separatrix, ausgezeichnet. Auf ihr liegen Nullstellen des Magnetfeldes, die Punkte $P_n = (s_B, \frac{\pi}{\lambda}(1+2n))$, n ganz, der s - z Ebene. Die Separatrix ist durch

$$(31) \quad \bar{F}(x, z) = \bar{F}(x_B, \frac{\pi}{\lambda})$$

definiert, wobei $x_B = \frac{s_B^2}{2}$ - siehe (7) - durch die Gleichung

$$(32) \quad \left. \frac{\partial \bar{F}(x, z)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_B \\ z=\frac{\pi}{\lambda}}} \equiv k'(x_B) - w'(x_B) = 0$$

gegeben ist.

Der Fluß $\bar{F}(x, z)$ nimmt von der Achse aus bis zu dem der Achse zugewandten Zweig der Separatrix von Feldlinie zu Feldlinie zu und somit der Druck gemäß (12) ab. Über die Separatrix hinaus gilt das nicht mehr. Denn für festes $z = \frac{\pi}{\lambda}$ hat der Fluß $\bar{F}(x, z)$ als Funktion von x betrachtet, bei x_B ein Maximum. Für $x > x_B$ nimmt $\bar{F}(x, z)$ wieder ab und der Druck nimmt zu, was natürlich unerwünscht ist. Wenn aber der Druck p längs der Separatrix klein geworden ist, d.h. wenn gilt

$$(33) \quad p_s := \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctg b \cdot \bar{F}(x_B, \frac{\pi}{\lambda}) \ll \frac{1}{2},$$

so ist das Magnetfeld dort in guter Näherung Vakuumfeld. Die Lösung von (25) dürfte dort auch eine gute

Näherung für (13) sein. Für größere λ kann man dann die Vakuumfeldlösung, also die Lösung von (30) anschließen. Da aber die Lösung von (25) in die Vakuumfeldlösung übergeht, ist sie für große λ Lösung von (30). In der Lösung von (25) liegt danach eine Näherung vor, die im Gebiet zwischen Achse und Separatrix Lösung von (13) ist und außerhalb der Separatrix Lösung von (30) ist. Es ist dabei auf den Zusammenhang zwischen Druck p und Fluß F zu achten. Für das Gebiet, in dem (13) gilt, ist $p(F)$ durch (12) gegeben, im Gebiet, in dem (30) gilt, durch

$$(34) \quad p(F) = p_s = \text{const.}$$

Im folgenden werden die Ergebnisse der numerischen Lösung von (25) angegeben. Zur übersichtlichen Charakterisierung der Konfigurationen genügt es, die Lösung in den Schnitten durch die Ebenen

$$z=0, \quad z = \frac{\pi}{2\lambda}, \quad z = \frac{\pi}{\lambda}$$

zu betrachten. Bei $z=0$ liegt der "Hals" der Feldlinien, bei $z = \frac{\pi}{\lambda}$ der "Bauch", und die Lage der Feldlinien bei $z = \frac{\pi}{2\lambda}$ definiert einen mittleren Abstand von der Achse (siehe Abb. 3). Die s -Koordinaten ($s = \frac{r^2}{2}$)

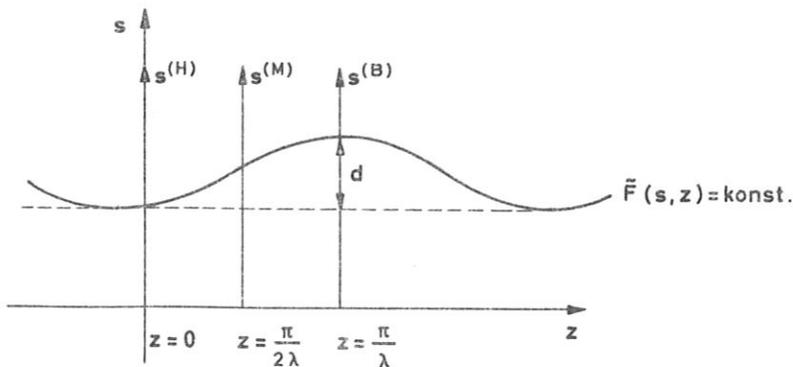


Abb. 3
Bezeichnungen zur Charakterisierung
der Gleichgewichtskonfiguration

in diesen drei Ebenen bezeichnen wir mit $s^{(H)}$, $s^{(M)}$, $s^{(B)}$.
 In der s - z Ebene ist der Fluß gegeben durch $\tilde{F}(s, z) = F(\frac{s^2}{2}, z)$.
 Die Flüsse in den ausgezeichneten Ebenen sind

$$(35) \quad \begin{aligned} \tilde{F}_H(s^{(H)}) &= k(\frac{1}{2} s^{(H)2}) + W(\frac{1}{2} s^{(H)2}), \\ \tilde{F}_M(s^{(M)}) &= k(\frac{1}{2} s^{(M)2}), \\ \tilde{F}_B(s^{(B)}) &= k(\frac{1}{2} s^{(B)2}) - W(\frac{1}{2} s^{(B)2}), \end{aligned}$$

und entsprechend sind die Drücke dort mit p_H, p_M, p_B bezeichnet. Bei der Lösung von (25) ist die Konstante b jeweils so gewählt worden, daß

$$(36) \quad b \tilde{F}_H(1) = b k(\frac{1}{2}) = 1$$

ist. Das bedeutet, daß der Druck p bei $s^{(H)} = 1$ auf die Hälfte abgesunken ist. Damit ist der Plasmaradius normiert. Alle Lösungen mit einer anderen Plasmadicke gewinnt man daraus durch Ähnlichkeitstransformationen (16).

In den Abb. 4 - 5 sind Lösungen für verschiedene Werte von λ , k_1 und w_1 dargestellt. Es sind der Gasdruck $p_H(s^{(H)})$ und die Welligkeit d der Feldlinien als Funktion von $s^{(M)}$ aufgetragen. Dabei ist $d = s^{(B)} - s^{(H)}$, wobei zusammengehörige $s^{(B)}$, $s^{(H)}$ und $s^{(M)}$ auf einer Feldlinie liegen (siehe Abb. 3).

Die Wellenlänge L der Feldlinien wurde variiert zwischen $L = 63 \text{ cm} - 6.3 \text{ cm}$, das entspricht Werten von $\lambda = 0.1 - 1.0$. Die beiden Anfangsbedingungen k_1 und w_1 bestimmen das Magnetfeld auf der Achse

$$(37) \quad B_z(0, z) = \sqrt{4\pi} (k_1 + w_1 \cos \lambda z)$$

Praktisch interessant ist die Angabe des Verhältnisses von Gasdruck p und magnetischem Druck $\frac{1}{8\pi} B^2$ auf der Achse. Daher definieren wir auf der Achse an der Stelle $z = \frac{\pi}{2\lambda}$ - zwischen

"Bauch und Hals" der Feldlinien - die Größe

$$(38) \quad \beta = \frac{p(0)}{p(0) + \frac{1}{8\pi} B_s^2(0, \frac{\pi}{2\lambda})}$$

Der Druck p auf der Achse ist normiert: $p(0) = \frac{1}{2}$. Zusammen mit (38) ergibt sich damit für β

$$\beta = \frac{1}{1 + k_1^2}$$

In den Abbildungen ist neben k_1 und w_1 auch der Wert von β angegeben.

III. Stabilität

Das Energieprinzip für magnetohydrodynamische Stabilität ³⁾ liefert für rotationssymmetrische Anordnungen mit rein meridionalen Strömen folgendes Stabilitätskriterium

$$(39) \quad \tilde{\Lambda} = \gamma \cdot p (q - \gamma p L')^{-1} \left(\frac{dq}{d\bar{r}} - \frac{dq_0}{d\bar{r}} L' \right) \left(\frac{1}{q} \frac{dq}{d\bar{r}} + \frac{1}{\gamma p} \frac{dp}{d\bar{r}} \right) > 0 \quad \text{stabil}$$

Darin ist $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$; q und L' sind definiert als

$$(40) \quad q = \int_c \frac{1}{|B|} dl \quad ; \quad L' = \int_c \frac{1}{|B|^3} dl$$

Die Integrationen sind längs Feldlinien über eine Periode zu erstrecken. q und L' sind ebenso wie der Druck p allein Funktionen des Flusses \bar{r} ; sie sind also auf Flächen konstanten Flusses konstant.

Das Kriterium ist notwendig und hinreichend für Stabilität, falls in allen Punkten

$$(41) \quad \frac{L^2}{R a^2} \ll 1$$

gilt. Dabei ist R der Krümmungsradius der Feldlinie, L die charakteristische Länge für die Änderung der Gleichgewichtsgrößen längs einer Feldlinie und a die Länge, längs

3) J.B. Bernstein et al. Proc. Royal Soc. A 244, 17 (1958)

der die Druckänderung in der Größenordnung von p selbst liegt.

Dieses Kriterium soll der Stabilitätsuntersuchung der im vorigen Abschnitt näherungsweise berechneten Gleichgewichte zu Grunde gelegt werden. Da in das Stabilitätskriterium die Gleichgewichtsgrößen eingehen, wird das aus (39) gewonnene Ergebnis fragwürdig, wenn die Güte der Näherung für das Gleichgewicht - wie im vorliegenden Fall - unbekannt ist. Wir beschränken uns daher auf die Frage der Stabilität von Gleichgewichten, die nur wenig von der Zylindersymmetrie abweichen, da in diesen Fällen die Näherung für das Gleichgewicht gut sein sollte.

Rein zylindersymmetrische Gleichgewichte, also Lösungen von (9) ohne z -Abhängigkeit, sind marginal stabil ($\tilde{\Lambda}=0$), wie sich später zeigen wird. Unter Gleichgewichtslösungen, die wenig von der Zylindersymmetrie abweichen, wollen wir solche verstehen, für die

$$(42) \quad \frac{2b^2 k(x) w(x)}{1 + b^2 k^2(x)} \ll 1$$

und

$$(43) \quad \frac{w(x)}{k'(x)}, \quad \frac{w'(x)}{k'(x)}, \quad \frac{w''(x)}{k'(x)} \ll 1$$

erfüllt ist. Unter diesen Annahmen ist (27) erfüllt, wie später gezeigt wird, sodaß (39) anwendbar ist.

Die Gleichungen für das Gleichgewicht (26) vereinfachen sich, wenn (42) vorausgesetzt wird. Man erhält, wenn man die rechten Seiten nach $\frac{b w^2}{1 + b^2 k^2}$ entwickelt und nur bis zu in w quadratischen Gliedern geht,

$$(44) \quad \begin{aligned} k'' &= -\frac{d}{dk} p(k) - \frac{1}{4} \frac{d^3 p}{d k^3} w^2 \\ w'' &= +\frac{\lambda^2}{2x} w - \frac{d^2 p(k)}{d k^2} w \end{aligned}$$

mit

$$(45) \quad \frac{d}{dk} p(k) = - \frac{b}{\pi (1 + b^2 k^2)}$$

Die Gleichungen (44) kann man auch direkt aus (10) gewinnen, indem man die rechte Seite von (10) entwickelt. Die Lösungen der Gleichungen (44) für das Gleichgewicht werden der Stabilitätsuntersuchung zugrunde gelegt.

In dieser Näherung werden die Integrale q und \mathcal{L}' berechnet. Dazu müssen wir uns zunächst eine Darstellung für die Feldlinien verschaffen. Die Gleichung der Feldlinie sei

$$(46) \quad x_f(z) = x_0 + f(z)$$

Die Abspaltung der Konstanten x_0 wird so gewählt, daß $f(\frac{\pi}{2\lambda}) = 0$ ist. Die Funktion $f(z)$ ist bestimmt durch die Definition der Feldlinie

$$(47) \quad k(x_0) = \bar{F}(x_f(z), z) \equiv k(x_0 + f(z)) + w(x_0 + f(z)) \cos \lambda z$$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß unter den Feldlinien immer die durch (47) definierten Kurven in der $S-z$ Ebene gemeint sind. Man erhält diese aus (46) mit der Transformation (7). Wir werden jedoch weiter die bequemere Darstellung in der $x-z$ Ebene benutzen (siehe Abb. 6).

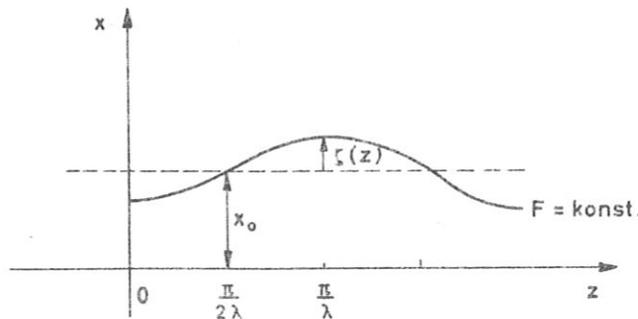


Abb. 6 Bezeichnungen zur Beschreibung der Feldlinien

In (47) entwickelt man nun k und w um x_0 und erhält

$$(48) \quad \text{const.} = k(x_0) = k(x_0) + \int k'(x_0) + \frac{1}{2} \int^2 k''(x_0) + (w(x_0) + \int w'(x_0) + \frac{1}{2} \int^2 w''(x_0)) \cos \lambda z.$$

Daraus ergibt sich unter Beachtung von (43) für $f(z)$ in niedrigster Näherung

$$(49) \quad \overset{\circ}{f}(z) = - \frac{w(x_0)}{k'(x_0)} \cos \lambda z,$$

und in der nächsten Näherung findet man

$$(50) \quad \overset{1}{f}(z) = - \frac{w(x_0)}{k'(x_0)} \cos \lambda z + \left(\frac{w(x_0)w'(x_0)}{k'^2(x_0)} - \frac{k'(x_0)w^2(x_0)}{2k'^3(x_0)} \right) \cos^2 \lambda z.$$

Damit hat man eine Darstellung für die einparametrische Schar der Feldlinien. Der Parameter ist x_0 .

Zur Berechnung von q und L' benötigt man die magnetische Feldstärke längs der Feldlinien. Aus (10) folgt mit (22)

$$(51) \quad \begin{aligned} B_z(x_f, z) &= \sqrt{4\pi} \left\{ k'(x_0 + f(z)) + w'(x_0 + f(z)) \cos \lambda z \right\}, \\ B_s(x_f, z) &= -\sqrt{4\pi} \frac{1}{12x_0} \lambda w(x_0 + f(z)) \sin \lambda z. \end{aligned}$$

Auch hier entwickelt man die rechten Seiten um x_0 bis zu quadratischen Gliedern. Für B_z findet man

$$(52) \quad B_z(x_f, z) = \sqrt{4\pi} \cdot \left\{ k'(x_0) + \int k''(x_0) + \frac{1}{2} \int^2 k'''(x_0) + w'(x_0) \cos \lambda z + \int w''(x_0) \cos \lambda z \right\}.$$

Unter Beachtung von (43) und mit (49) und (50) folgt für B_z

$$(53) \quad B_z(x_f, z) = \sqrt{4\pi} k'(x_0) \left\{ 1 + \alpha_0 \cos \lambda z + \alpha_1 \cos^2 \lambda z \right\}$$

mit

$$(54) \quad \alpha_0 = - \frac{w}{k'} \frac{k''}{k'} + \frac{w'}{k'} \quad ; \quad \alpha_1 = \frac{1}{2k_1^2} \left(\frac{k'' w^2}{k'} \right)' - \frac{w'' w}{k'^2}.$$

$B_s(x_f, z)$ tritt nur in niedrigster Näherung auf; dafür folgt

$$(55) \quad B_s(x_f, z) = -\sqrt{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2x_0}} W(x_0) \lambda \sin \lambda z.$$

Damit kann man jetzt die Integrale q und L' auswerten.

$$(56) \quad q = \int_c \frac{1}{|B|} dl = \int_0^{\frac{2\pi}{\lambda}} \frac{1}{\sqrt{1 + B_s^2/B_z^2} \sqrt{B_z^2 + B_s^2}} dz = \int_0^{\frac{2\pi}{\lambda}} \frac{1}{B_z(x_f, z)} dz$$

und entsprechend

$$(57) \quad L' = \int_c \frac{1}{|B|^3} dl = \int_0^{\frac{2\pi}{\lambda}} \frac{1}{B_z^2 + B_s^2} \cdot \frac{1}{B_z} dz.$$

Setzt man (52) und (53) in (56) und (57) ein und entwickelt wieder bis zu quadratischen Gliedern in w , so erhält man schließlich nach der Integration

$$(58) \quad q(x_0) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{k'(x_0)} \left\{ 1 - \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_0^2}{2} \right\}$$

und

$$(59) \quad L'(x_0) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{k'(x_0)} \left\{ 1 + 3\alpha_0^2 - \frac{3}{2}\alpha_1 - \frac{\lambda^2 W^2(x_0)}{4x_0 k'(x_0)} \right\},$$

wobei α_0 und α_1 durch (54) gegeben sind. Die Größen q und L' sind allein Funktionen von x_0 , dem Feldlinienparameter. Der Fluß längs der zu x_0 gehörenden Feldlinie ist $k(x_0)$, wie aus (47) ersichtlich.

Mit den so berechneten Größen geht man ins Stabilitätskriterium (39) ein. Zur Diskussion der Stabilität kann man die ersten beiden stets positiven Faktoren weglassen. Das Kriterium reduziert sich dann zu

$$(60) \quad \Lambda = \frac{1}{k'(x_0)} \left(\frac{dq}{dx_0} - \frac{dp}{dx_0} L' \right) \cdot \left(\frac{1}{q} \frac{dq}{dx_0} + \frac{1}{p} \frac{dp}{dx_0} \right) > 0 \quad \text{stabil.}$$

Dabei ist

$$(61) \quad \frac{dp}{dx_0} = -k'(x_0) \cdot \frac{b}{\pi(1+b^2k^2(x_0))} := p' \quad , \quad \frac{d^2p}{dx_0^2} := p'' \quad ;$$

$$(62) \quad L' = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{k^{13}} \left[1 + \frac{W^2}{k^{12}} \left\{ \frac{15}{4} \frac{p^{12}}{k^{14}} - \frac{3}{4} \frac{p''}{k^{12}} + \frac{\lambda^2}{2x_0} \right\} + \frac{WW'}{k^{12}} \frac{15}{2} \frac{p^{12}}{k^{12}} + 3 \frac{W^{12}}{k^{12}} \right] ;$$

$$(63) \quad \frac{dq_0}{dx_0} = \frac{2\pi}{\lambda \cdot k'} \left[\frac{p'}{k^{12}} + \frac{W^2}{k^{12}} \left\{ \frac{15}{4} \frac{p^{13}}{k^{16}} - \frac{3}{4} \frac{p'p'}{k^{14}} + \frac{3}{2} \frac{p'\lambda^2}{x_0 k^{12}} - \frac{\lambda^2}{4x_0^2} \right\} + \right. \\ \left. + \frac{WW'}{k^{12}} \left\{ \frac{15}{2} \frac{p^{12}}{k^{14}} + \frac{\lambda^2}{x_0} \right\} + \frac{W^{12}}{k^{12}} \frac{3p'}{k^{12}} \right]$$

Zur Berechnung wurden die Gleichungen für das Gleichgewicht (44) verwendet. Das Argument x_0 bei k, w usw. wurde weggelassen.

Zunächst sieht man, daß im Falle $w(x) \equiv 0$ der zweite Faktor in (60) verschwindet; für die z -unabhängige Lösung ergibt sich damit marginale Stabilität $\Lambda(x) = 0$. Es werden nun Lösungen mit $w(x) \neq 0$, die die Bedingungen (42) und (43) erfüllen sollen, betrachtet. Man kann sich davon überzeugen, daß unter den eben genannten Bedingungen auch die Voraussetzung (41) für die Anwendbarkeit des Stabilitätskriteriums erfüllt ist. Denn setzt man $1/R \approx \frac{\lambda^2 w(x)}{S k'(x)}$, $L \approx \frac{1}{\lambda}$ und $a \approx 1$ so wird aus (41)

$$\frac{w(x)}{k'(x)} \ll 1$$

Da stets $\frac{dp}{dx_0} < 0$ ist, folgt Stabilität entweder, wenn $\frac{dq}{dx_0} < -L' \left| \frac{dp}{dx_0} \right|$ ist, oder, wenn $\frac{dq}{dx_0} > \frac{q}{\beta p} \left| \frac{dp}{dx_0} \right|$ ist. Wir fragen jetzt nach der Stabilität der in II gewonnenen Gleichgewichtslösungen für zwei Fälle, nämlich für $\beta \ll 1$ und $\beta \approx 1$, wobei

$$(64) \quad \beta = \frac{p(x_0)}{p(x_0) + \frac{1}{2} k''(x_0)} \Big|_{x_0=0}$$

definiert wird.

Im Falle $\beta \ll 1$ ist das Magnetfeld in guter Näherung Vakuumfeld. Das Kriterium (60) vereinfacht sich dann zu (siehe [3])

$$(65) \quad \Lambda_0(x_0) = \frac{1}{k^2(x_0)} \frac{dq_0}{dx_0} \left(\frac{1}{q_0} \frac{dq_0}{dx_0} + \frac{1}{\gamma p} \frac{dp}{dx_0} \right) > 0 \text{ stabil}$$

mit

$$(66) \quad q_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{k'} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{W'^2}{k'^2} + \frac{1}{2} \frac{W''W}{k'^2} \right\},$$

$$(67) \quad \frac{dq_0}{dx_0} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda^2 W}{k'^3 x_0} \left\{ W' - \frac{W}{4x_0} \right\},$$

wobei für $k(x_0)$ und $W(x_0)$ die Vakuumfeldlösung (21) einzusetzen ist. Für (67) ergibt sich damit

$$(68) \quad \frac{dq_0}{dx_0} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda^2}{k'^3 x_0} a_1^2 \lambda \sqrt{x_0} J_1(i\lambda \sqrt{2x_0}) \cdot \left\{ \frac{1}{4\sqrt{x_0}} J_1(i\lambda \sqrt{2x_0}) + \sqrt{x_0} \frac{d}{dx_0} J_1(i\lambda \sqrt{2x_0}) \right\}$$

Da die Besselfunktion J_1 monoton mit x_0 wächst, folgt $\frac{dq_0}{dx_0} > 0$. Für die Stabilität ist daher das Vorzeichen des zweiten Faktors von (65) maßgebend. Setzt man in diesen (66) und (67) ein, so folgt

$$(69) \quad \lambda^2 \left(\frac{W'W}{k'^2 x_0} - \frac{W^2}{4x_0^2 k'^2} \right) + \frac{1}{\gamma p} \frac{dp}{dx_0} > 0 \text{ stabil.}$$

Der erste Summand ist stets positiv, der zweite negativ. Für ein vorgegebenes Magnetfeld, gibt es in dem x -Intervall, in dem (42) und (43) erfüllt ist, also stabile Lösungen, falls nur der Druckverlauf hinreichend flach ist. Praktisch interessant sind Lösungen, in denen der Druck im stabilen Bereich um mindestens eine Größenordnung abnimmt. Diese Forderung erfüllen die nach (68) stabilen Lösungen jedoch nicht. Um das einzusehen, genügt es, Lösungen mit der Normierung (37) zu betrachten, da alle anderen aus diesen durch Ähnlichkeitstransformationen hervorgehen. Für diese ist der zweite Summand in (68) von der Größenordnung eins; der erste Summand ist aber stets klein gegen eins, da (43) vorausgesetzt ist und auch nicht $\lambda \gg 1$

gewählt werden kann, weil dann für $\chi_0 > 1$ wegen des exponentiellen Anwachsens der Besselfunktion $w(x) = a_1 \sqrt{x} \lambda J_1(i\sqrt{2x} \lambda)$ für Argumentwerte $\lambda \sqrt{2x_0} \gg 1$ die Bedingung (43) nicht erfüllt ist.

Für den Fall $\beta \approx 1$ sind die Gleichgewichtslösungen in II diskutiert worden. In Achsennähe ist das Plasma praktisch feldfrei; mit χ_0 steigt das Magnetfeld stark an, so daß $\frac{dg}{d\chi_0} < 0$ zu erwarten ist. Ist $|\frac{dg}{d\chi_0}|$ dazu hinreichend groß, so sollte Stabilität folgen. In Abb. 7 a - c ist das Ergebnis der numerischen Auswertung des Kriteriums (60) mit (62) und (63) für verschiedene λ, k_1 und w_1 dargestellt. Im χ -Intervall mit starken Druckgradienten sind die Gleichgewichte stabil. Das Stabilitätsintervall wird mit wachsendem λ, k_1 und w_1 schmaler. Für große χ_0 und in Achsennähe sind die Lösungen instabil.

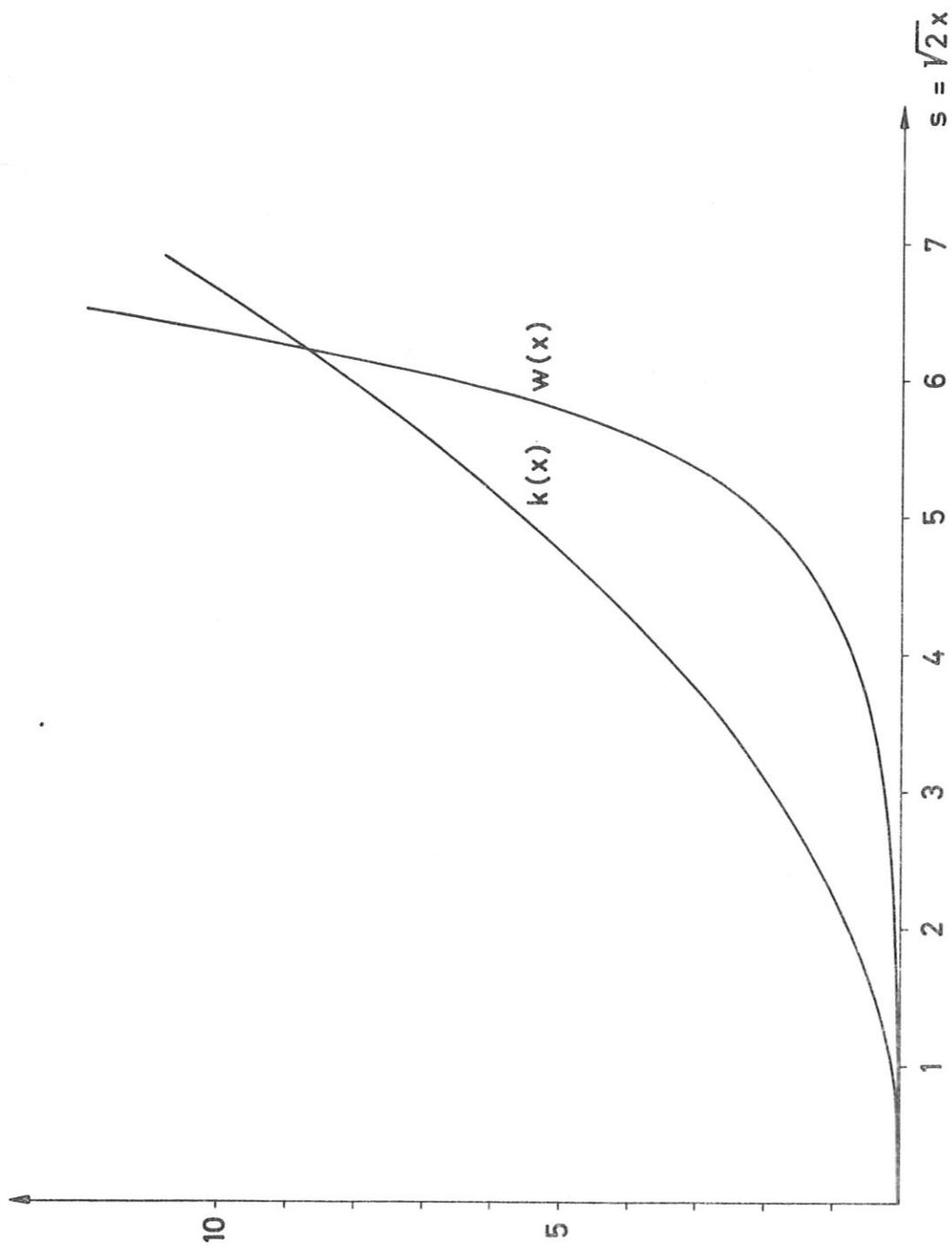


Abb. 1 Die Funktionen $k(x)$ und $w(x)$ aufgetragen über $s = \sqrt{2}x$ für eine Wellenlänge von $L = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi$

und Anfangsbedingungen $k_1 = w_1 = 0.1$. Für das Magnetfeld auf der Achse folgt dann

$$B_z(0, z) = 2 \cdot \sqrt{4\pi} \cos^2 \frac{\lambda}{2} z \text{ mit } \lambda = 1.$$

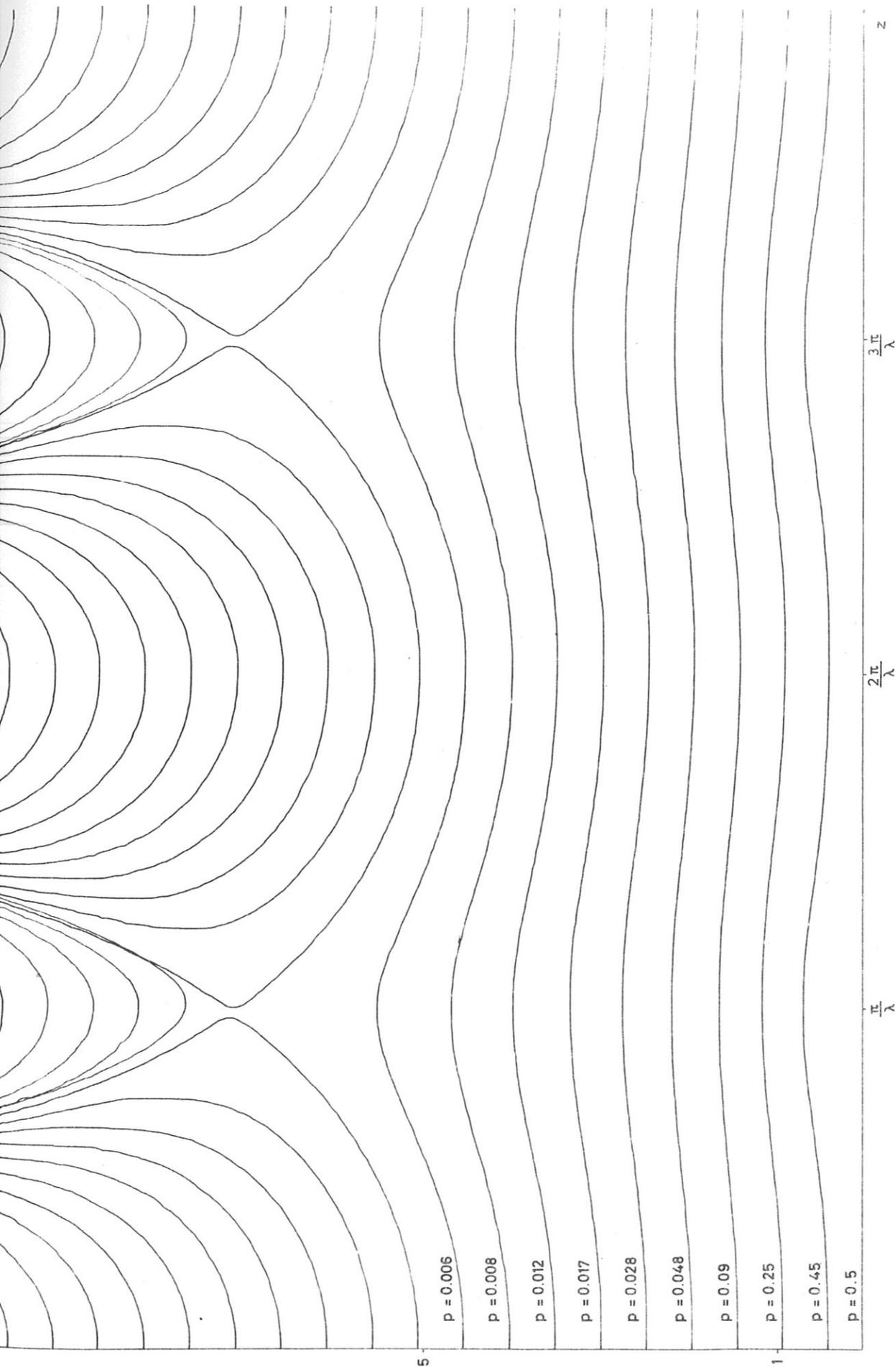


Abb. 2 Feldlinienbild für Wellenlänge $L = \frac{2\pi}{0.6}$ und Anfangsbedingungen $k_1 = w_1 = 0.2$, woraus für das Magnetfeld auf der Achse $B_z(o, z) = 0.4 \sqrt{4\pi} \cos^2 \frac{\lambda}{2} z$ folgt. An jeder Feldlinie ist der dazugehörige Druck p eingetragen.

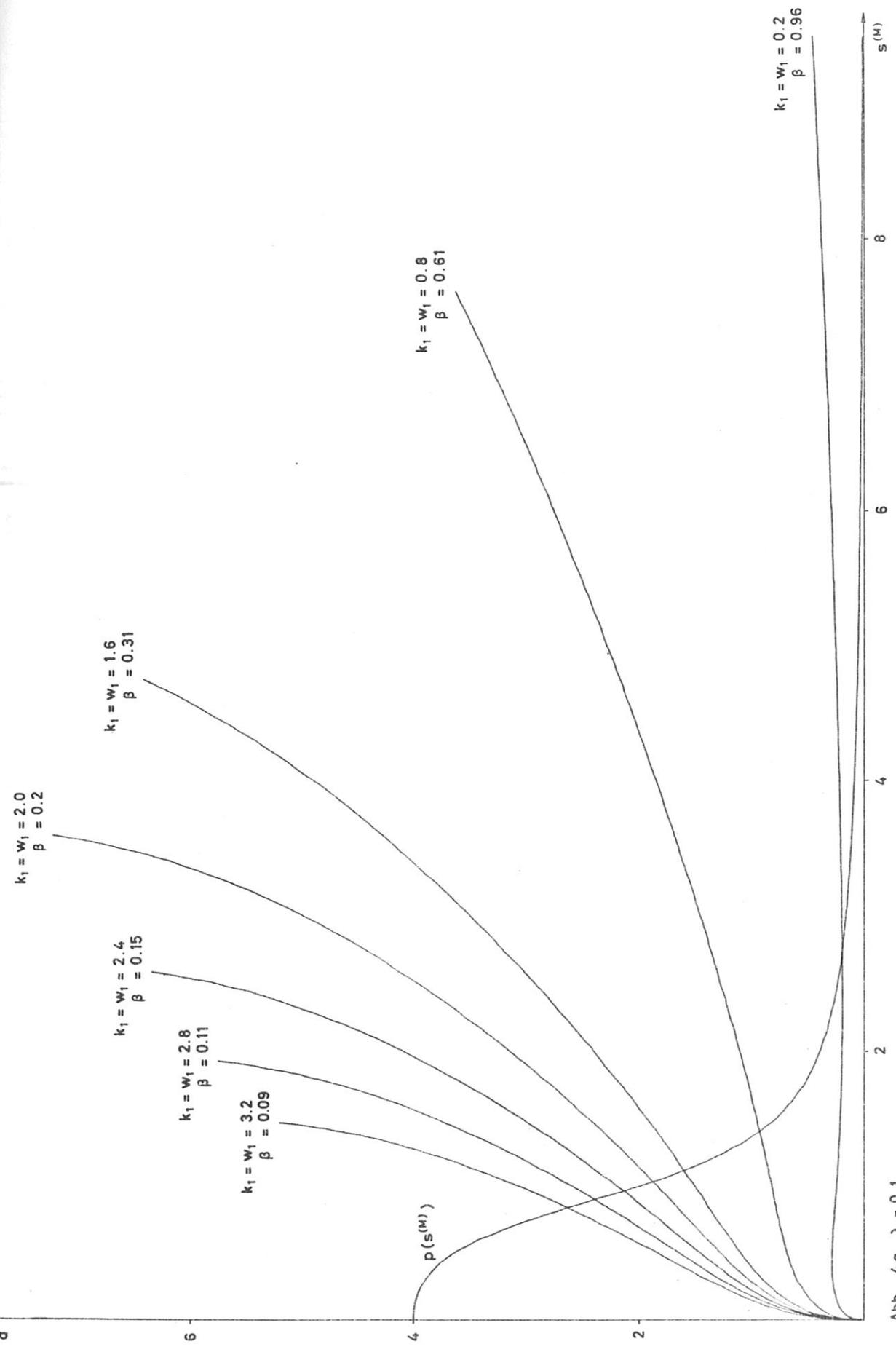


Abb. 4a $\lambda = 0.1$

Abb. 4a - f Druckverlauf $p = p(s^{(M)})$ und Welligkeit $d = s^{(B)} - s^{(H)}$ der Feldlinien für verschiedene Wellenlängen $L = \frac{2\pi}{\lambda}$ und Anfangsbedingungen k_1, w_1 . Der Zusammenhang zwischen k_1, w_1 und dem Magnetfeld auf der Achse ist: $B_z(0, z) = \sqrt{4\pi} (k_1 + w_1 \cos \lambda z)$. Der Druck $p(s^{(M)})$ ist auf der Achse zu $p(0) = \frac{1}{2}$ normiert. Die β -Werte - liegen im Bereich von 0.1 - 1.

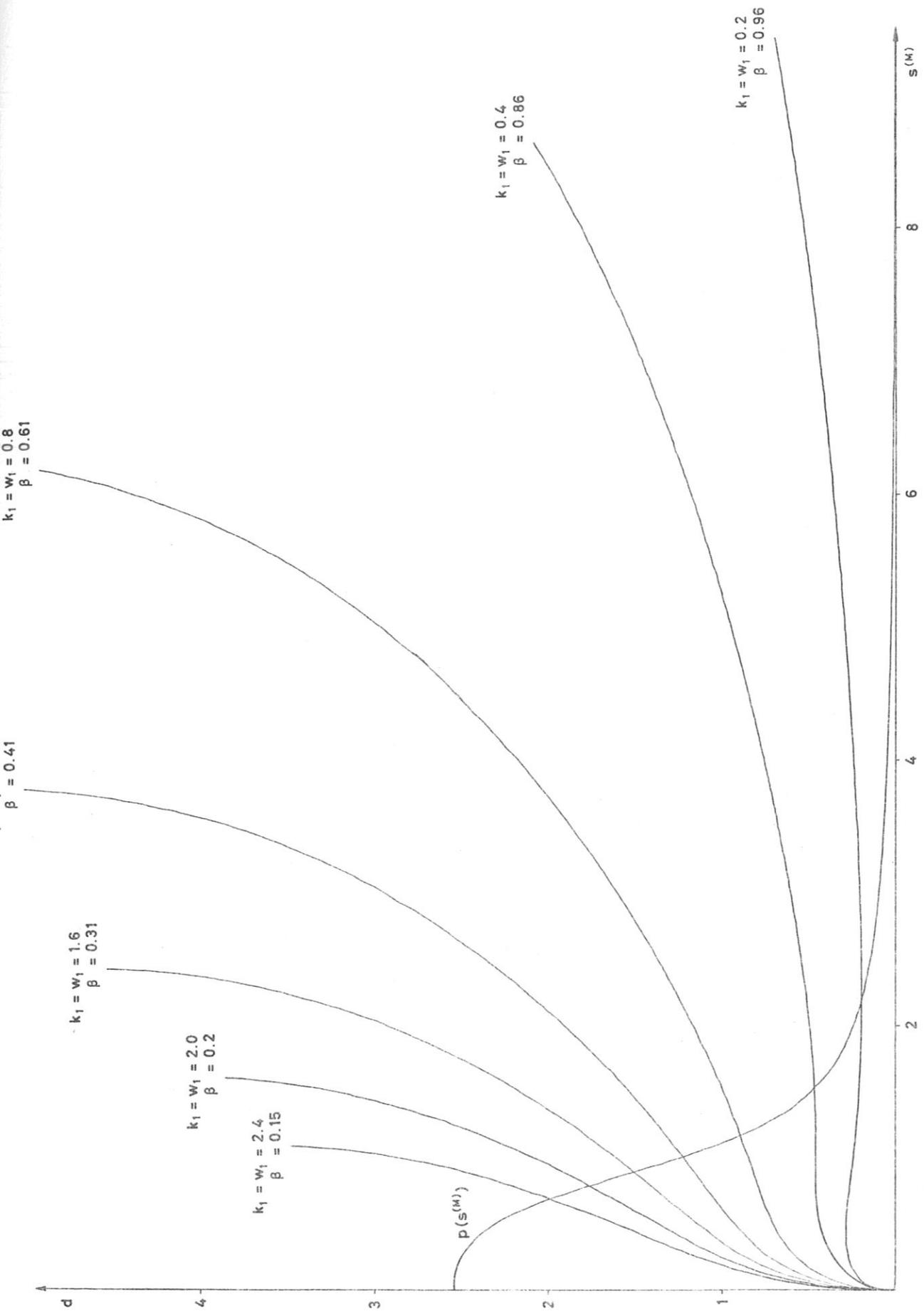


Abb. 4b $\lambda = 0.2$

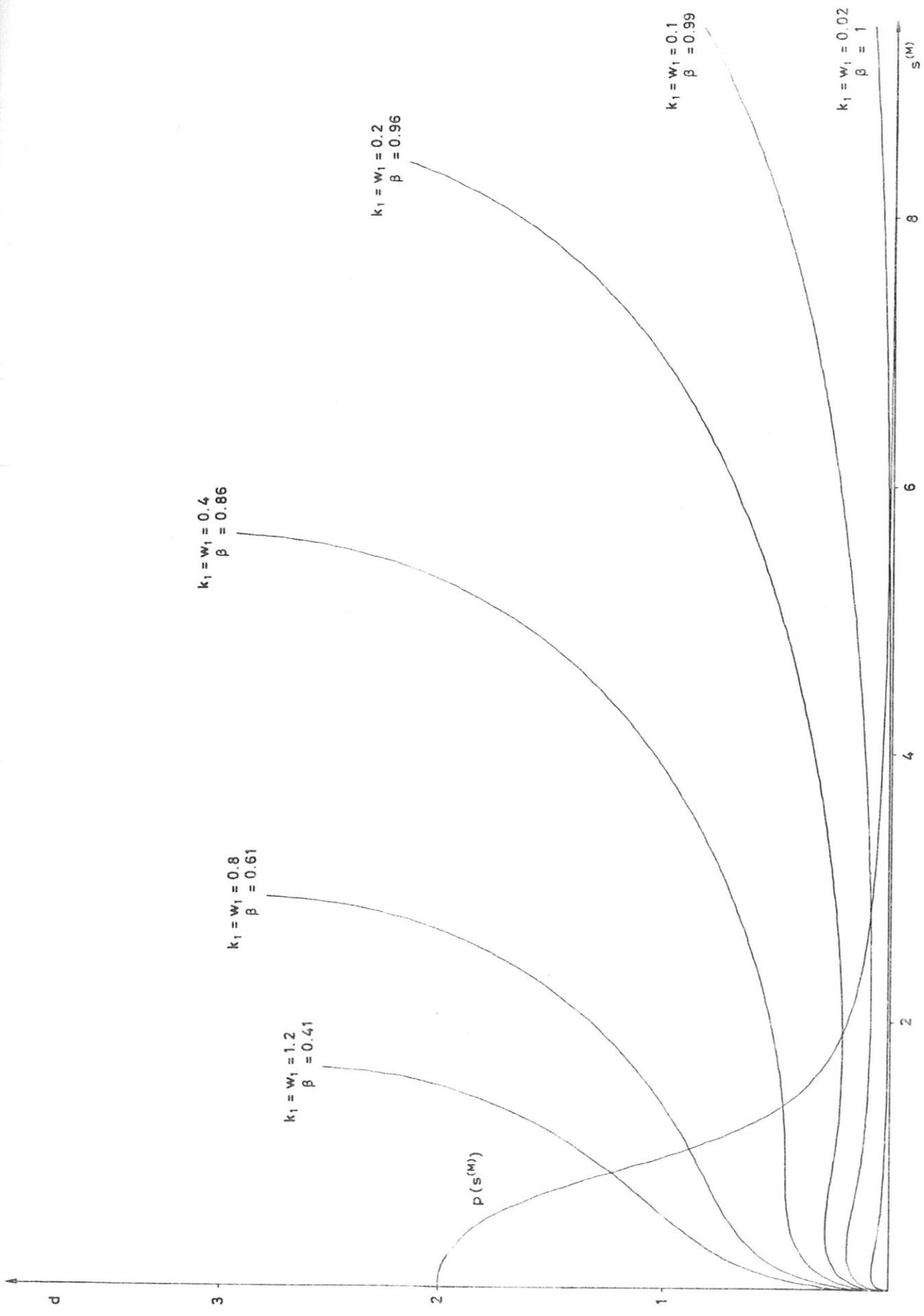


Abb. 4 d $\lambda = 0.4$

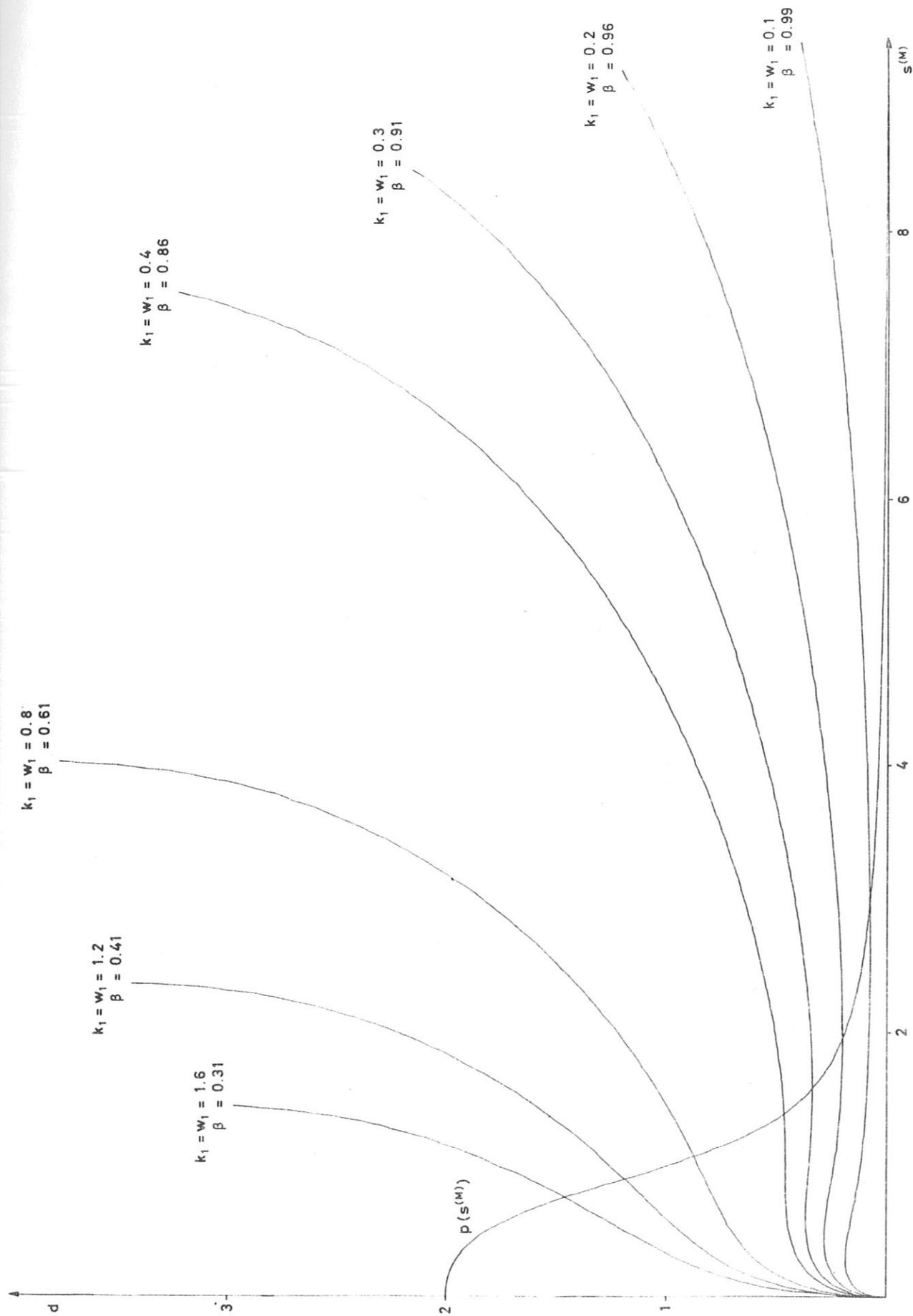


Abb. 4 c $\lambda = 0.3$

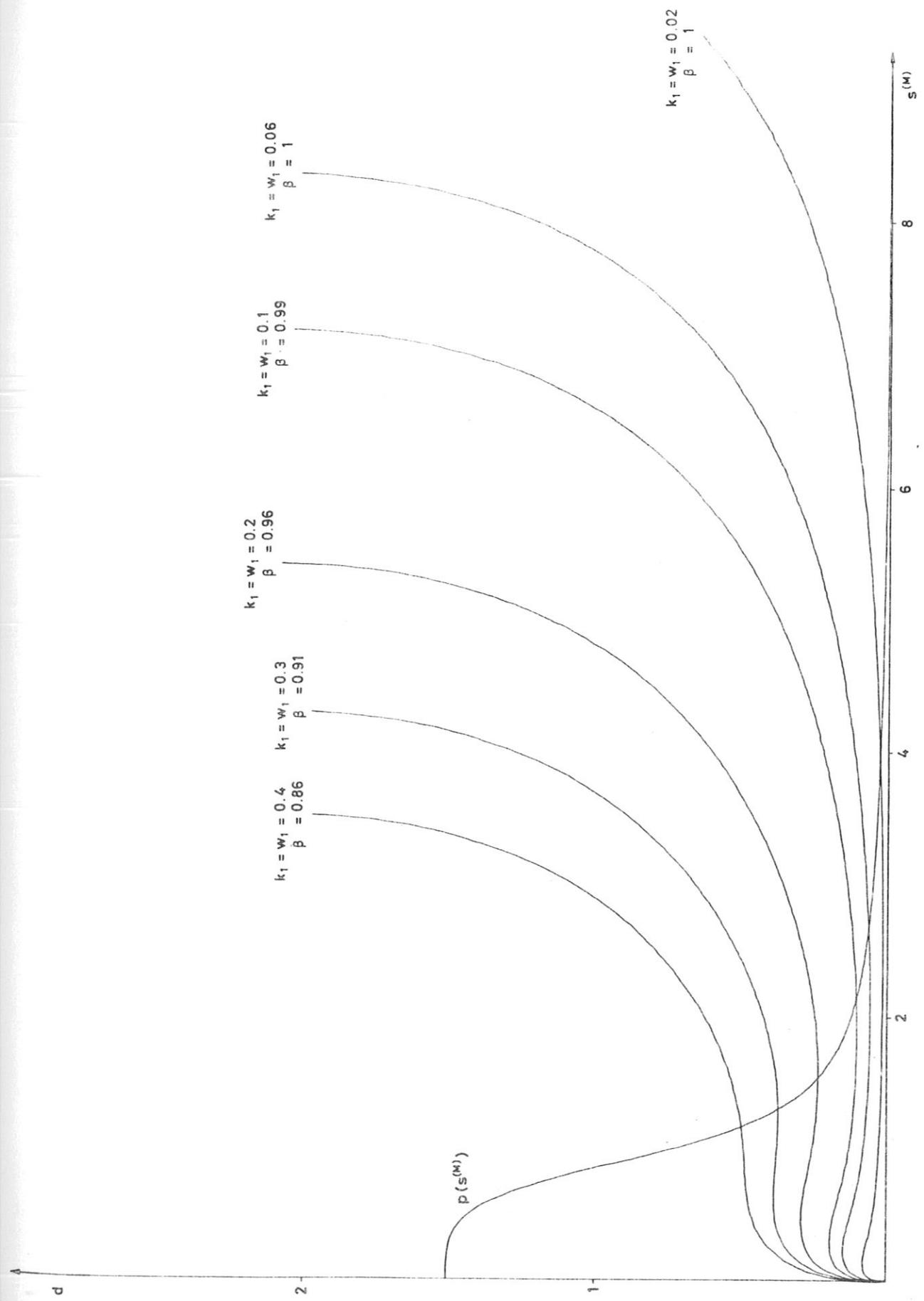


Abb. 4 e $\lambda = 0.6$

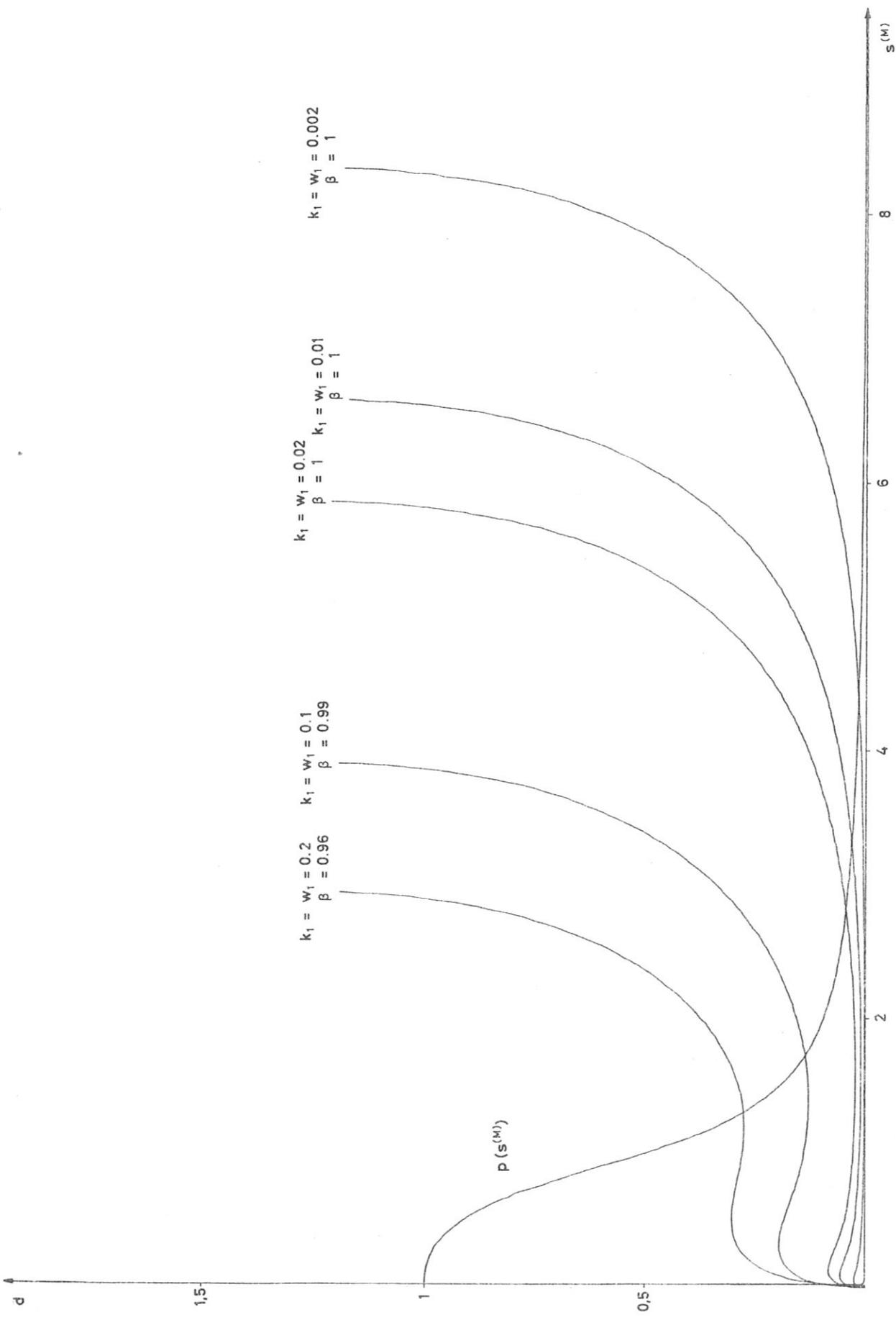


Abb. 4 f $\lambda = 1.0$

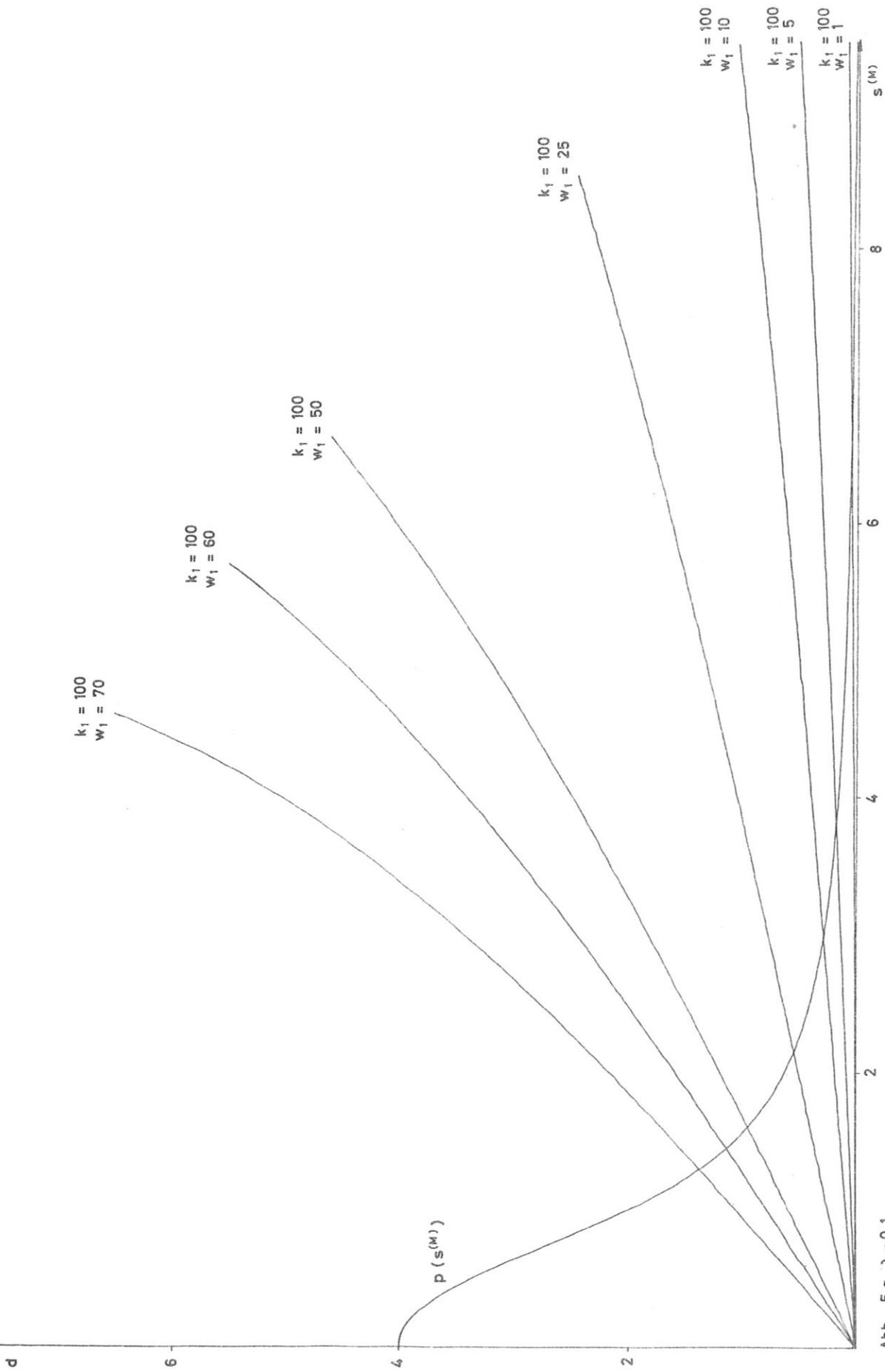


Abb. 5 a $\lambda = 0.1$

Abb. 5 a - f Druckverlauf $p = p(s^{(M)})$ und Welligkeit $d = s^{(B)} - s^{(H)}$ der Feldlinien für verschiedene Wellenlängen $L = \frac{2\pi}{\lambda}$ und Anfangsbedingungen $k_1 = w_1$.

Der Zusammenhang zwischen k_1, w_1 und dem Magnetfeld auf der Achse ist: $B_z(o, z) = \sqrt{4\pi} (k_1 + w_1 \cos \lambda z)$. Der Druck $p(s^{(M)})$ ist auf der Achse zu $p(o) = \frac{1}{2}$ normiert. Für das in Gl. (38) definierte β gilt in allen Fällen $\beta < 1$.

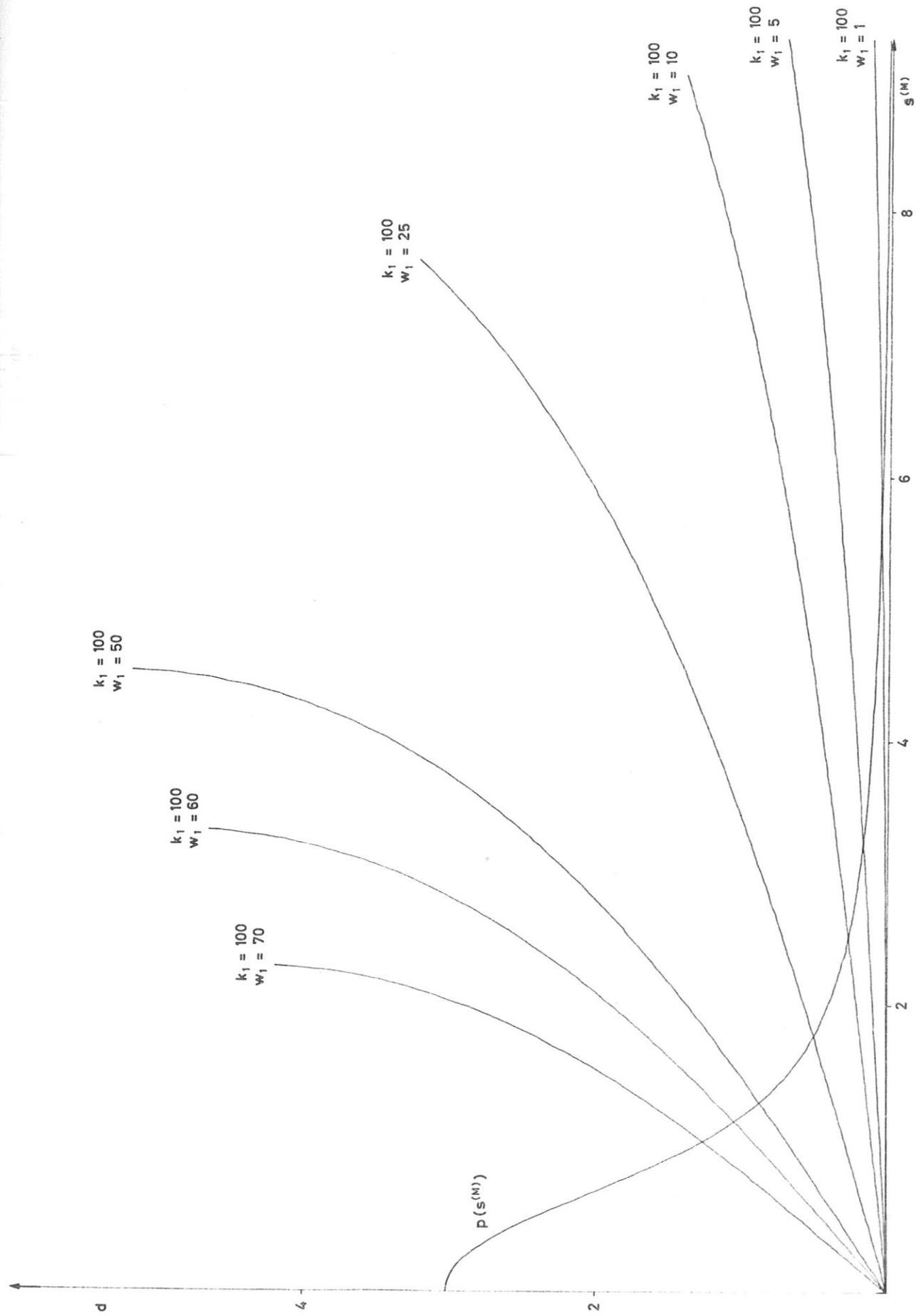


Abb. 5 b $\lambda = 0.2$

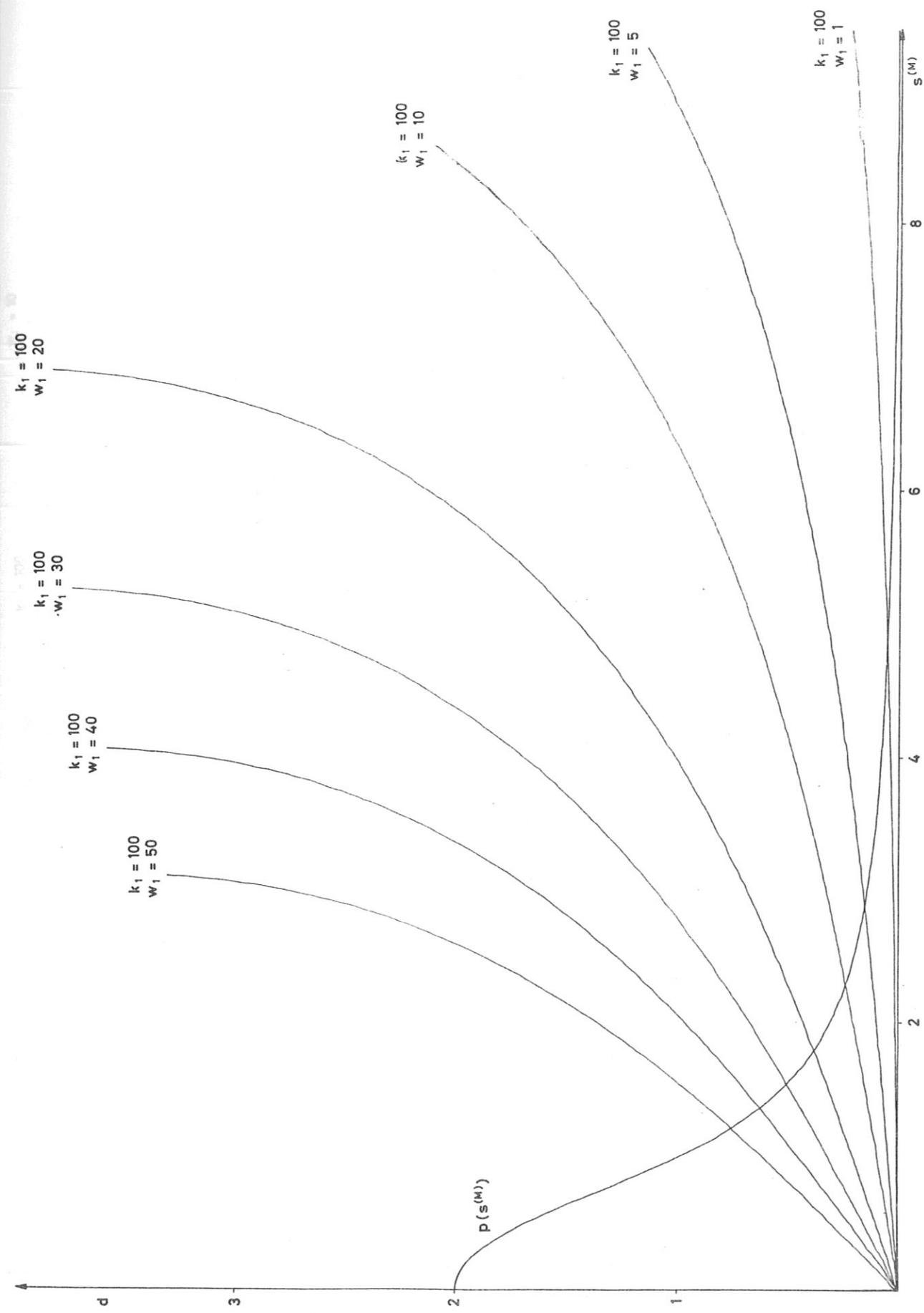


Abb. 5 c $\lambda = 0.3$

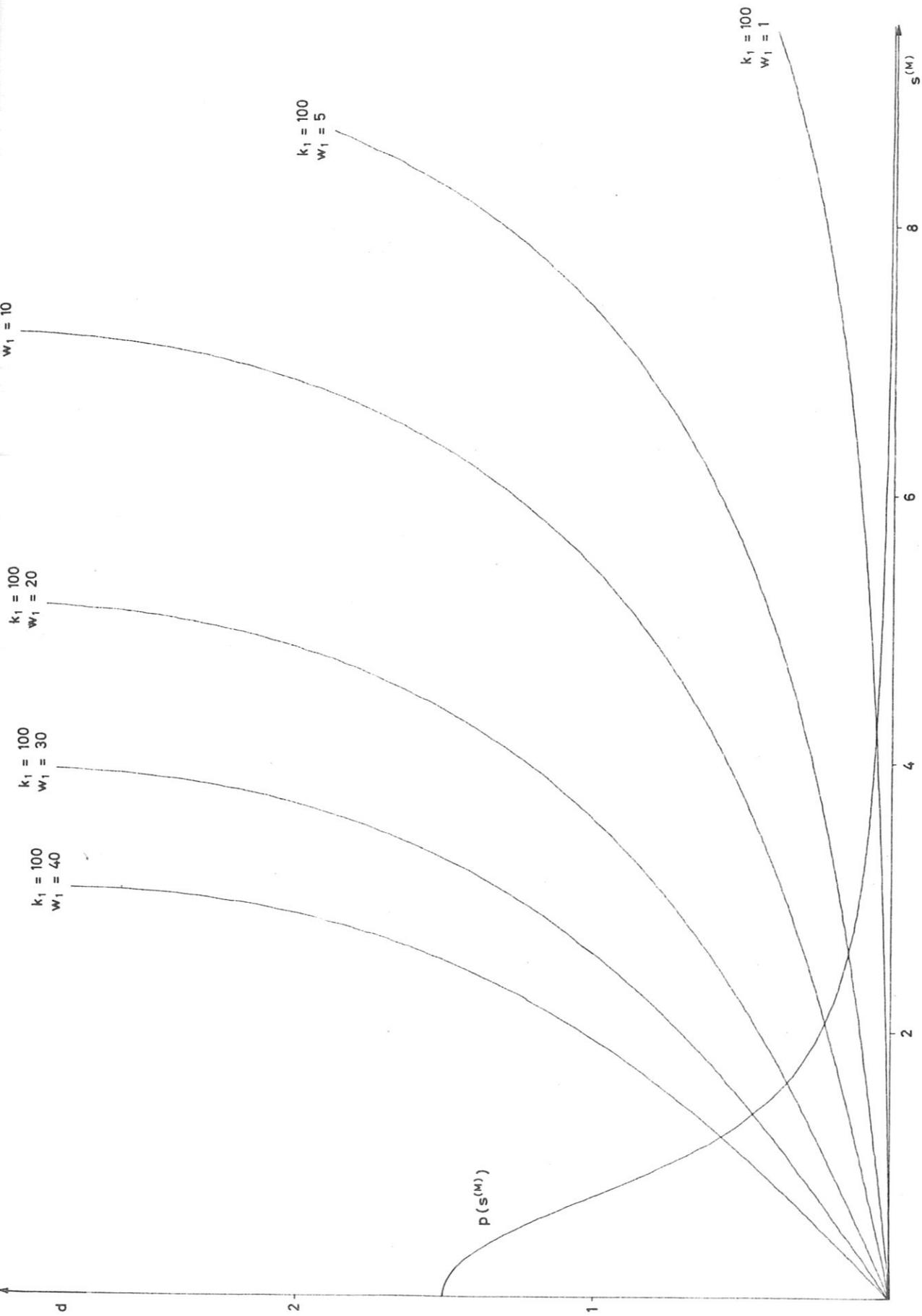


Abb. 5 d $\lambda = 0.4$

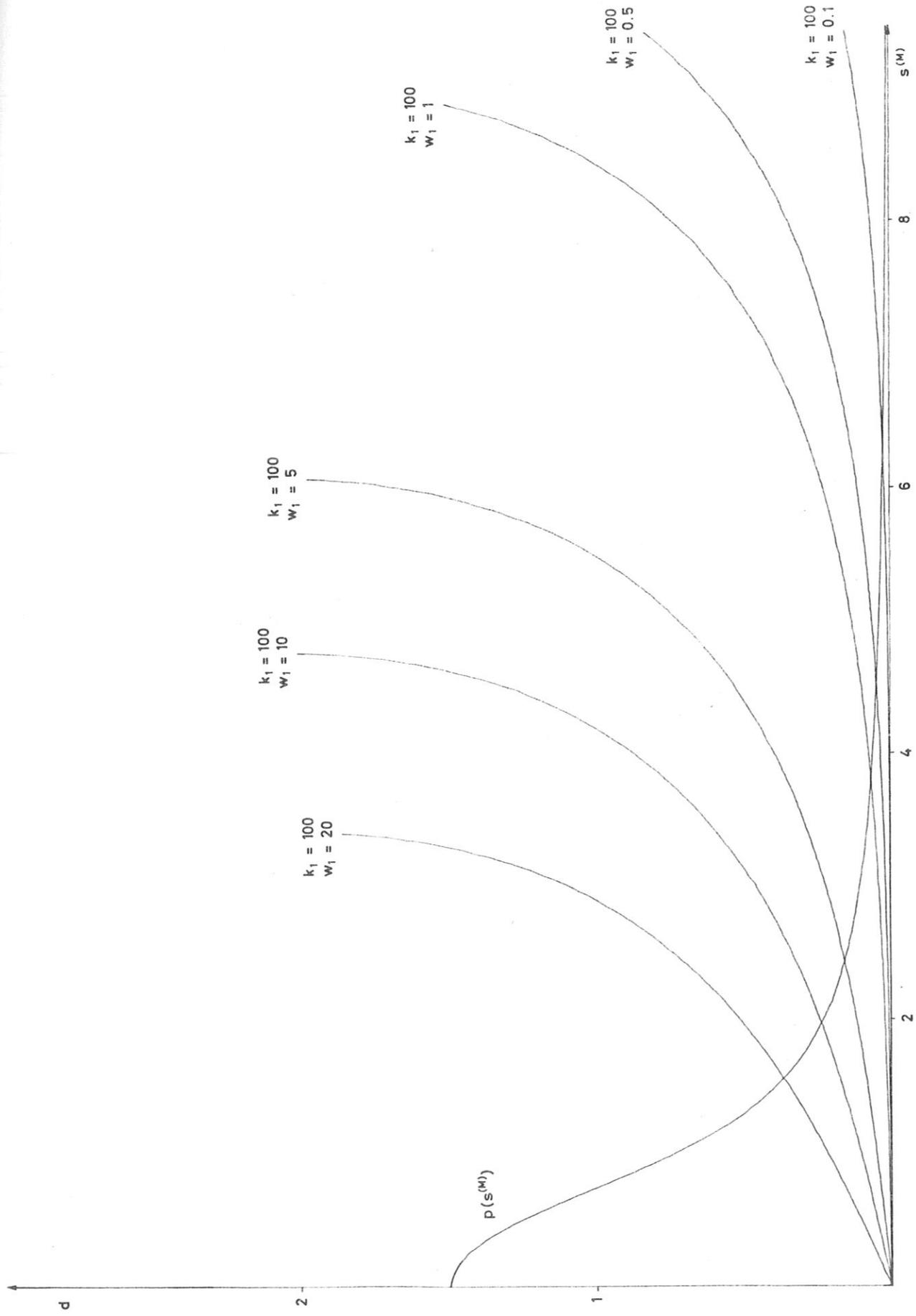


Abb. 5 e $\lambda = 0.6$

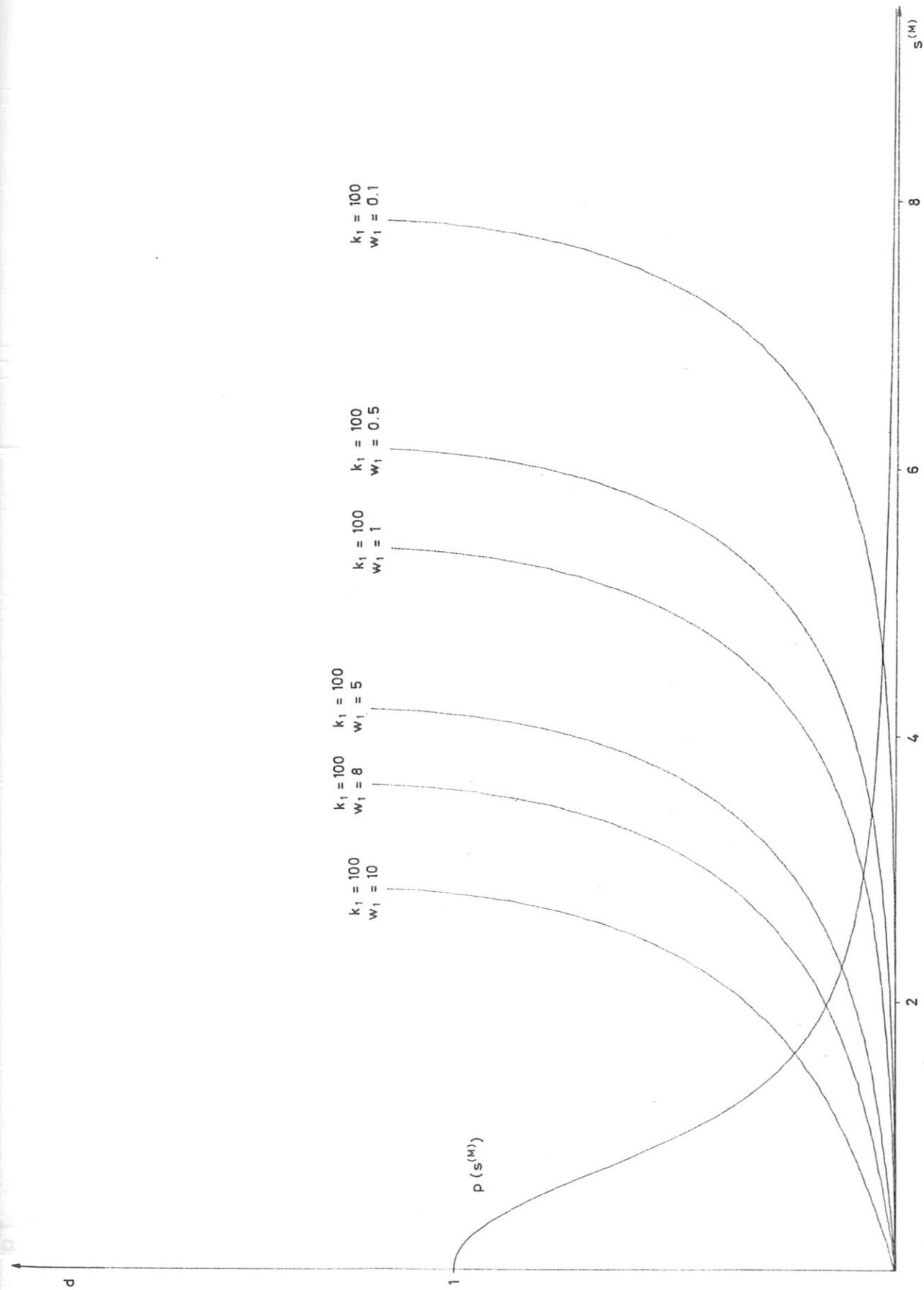


Abb. 5 f $\lambda = 1.0$

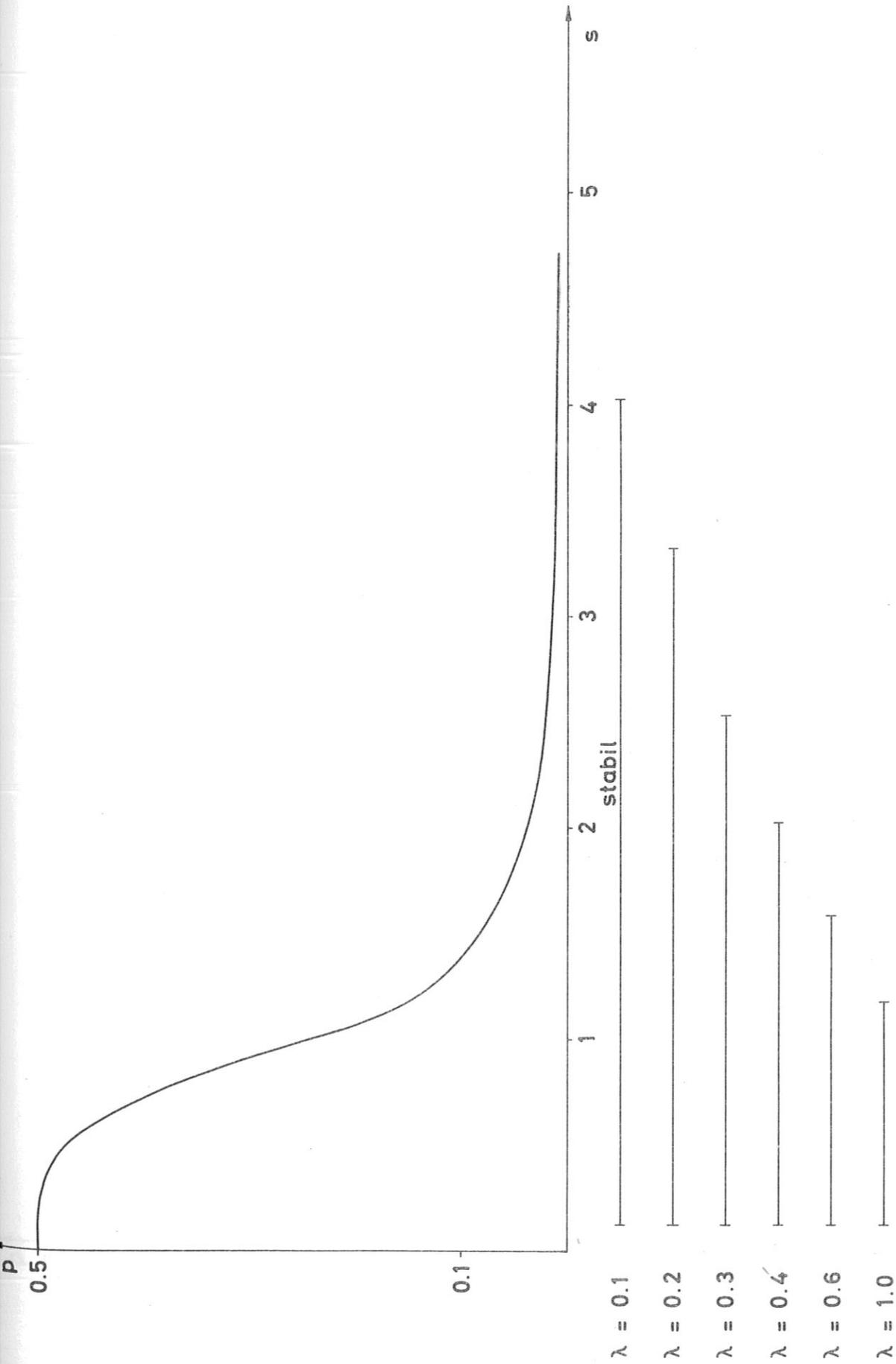


Abb. 7 a Die stabilen Bereiche längs des Druckprofils $p(s^{(M)})$ für Wellenlängen $\frac{2\pi}{\lambda}$ und Anfangsbedingungen $k_1 = w_1 = 0.002$. Das Magnetfeld auf der Achse ist $B_z(o, z) = 0.002 \cdot \sqrt{4\pi} \cos^2 \frac{\lambda}{2} z$.

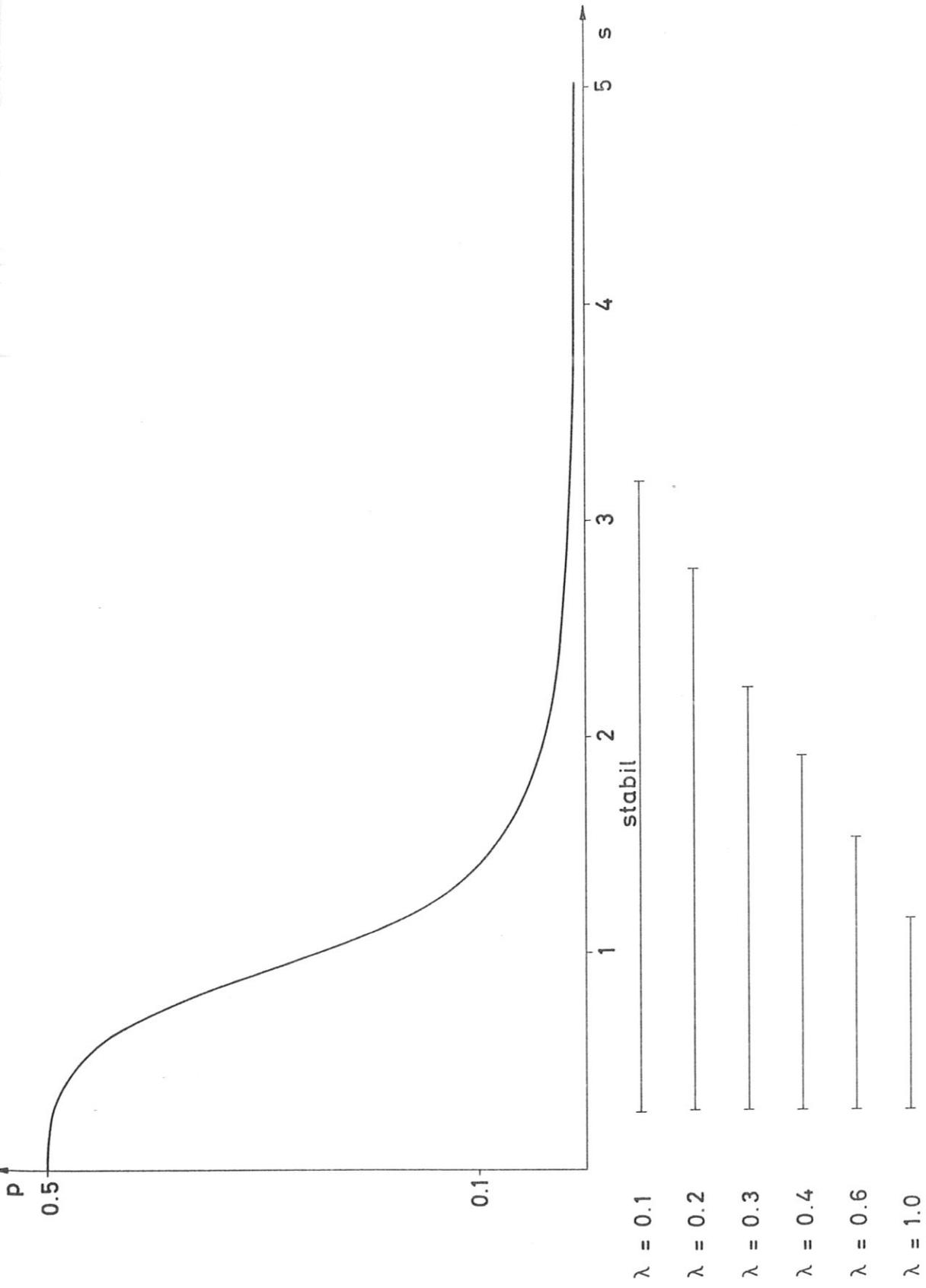


Abb. 7 b Die stabilen Bereiche längs des Druckprofils $p(s^{(M)})$ für Wellenlängen $\frac{2\pi}{\lambda}$ und Anfangsbedingungen $k_1 = w_1 = 0.02$. Das Magnetfeld auf der Achse ist $B_z(o, z) = 0.02 \cdot \sqrt{4\pi} \cos^2 \frac{\lambda}{2} z$.

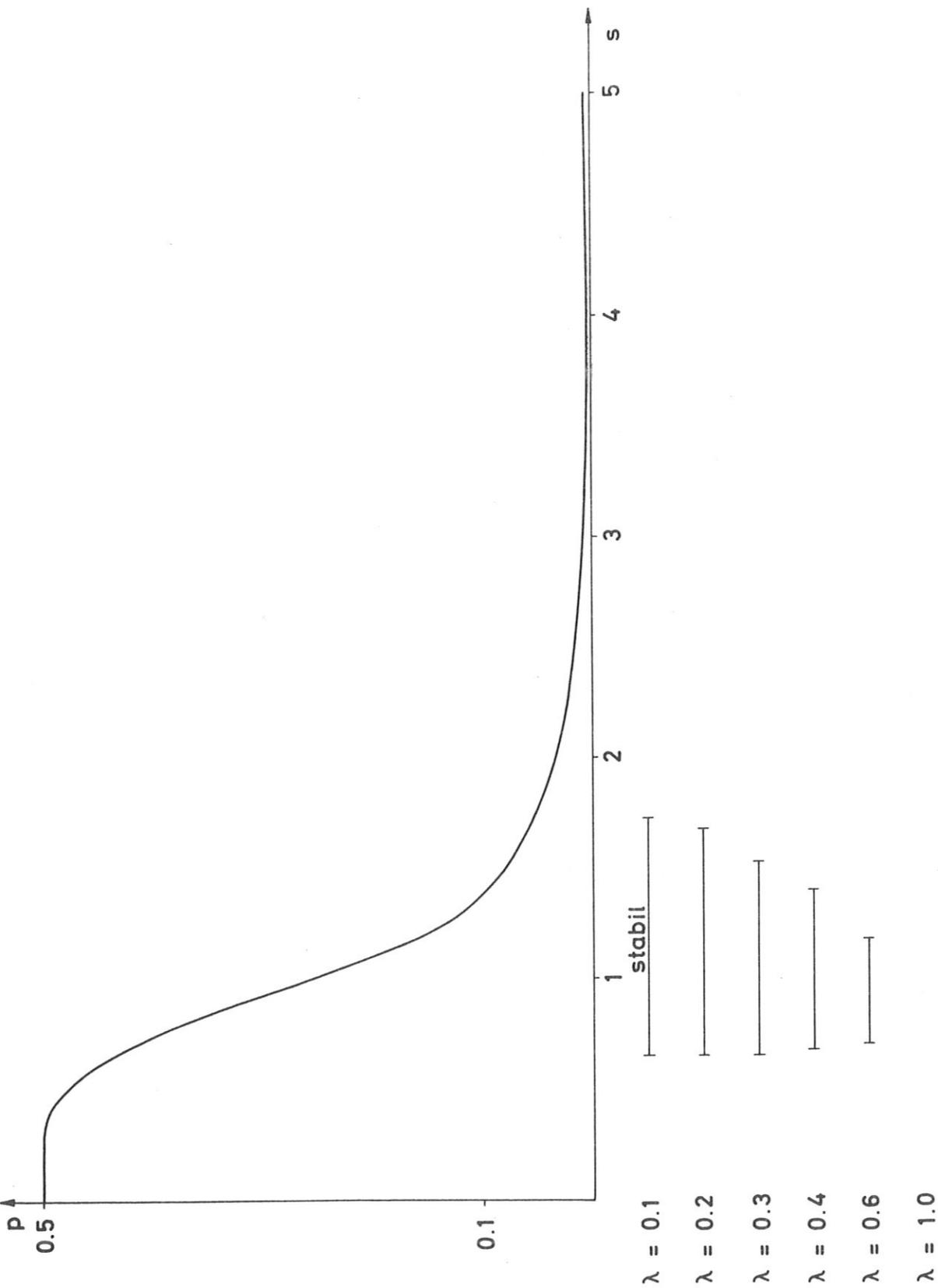


Abb. 7 c Die stabilen Bereiche längs des Druckprofils $p = p(s^{(M)})$ für Wellenlängen $\frac{2\pi}{\lambda}$ und Anfangsbedingungen $k_1 = w_1 = 0.1$. Das Magnetfeld auf der Achse ist $B_z(o, z) = 0.2 \cdot \sqrt{4\pi} \cos^2 \frac{\lambda}{2} z$.

This report is to be treated as strictly confidential.

The 'Institut für Plasmaphysik' holds the exclusive rights of publication, mimeographing, propagation and translation into foreign languages of the original text, inclusive of the drawings, wholly or partially; also of excerpts or résumés, as well as of the technical or scientific contents of this report. Exceptions to these restrictions require written permission.

Furthermore, the 'Institut für Plasmaphysik' reserves the right of exclusive exploitation of the information contained in this report, for the purpose of obtaining protective industrial rights, particularly patent and utility patent rights at home and abroad. Actions of exploitation taken on the basis of the knowledge gained from this report cannot be regarded as grounds for obtaining the right of prior use ('Vorbenutzungsrecht') according to article 7 paragraph 1, first sentence of the German Patent Law. The reader is referred to article 5 of the Patent Law. For reasons stipulated by the Patent Law, the report must not be exhibited in public libraries, or lent out indiscriminately.

The Institute does not guarantee that the information given in this report is free from protective rights, such as patent rights, utility patent rights or trade-mark rights.

No guarantee is given in respect of the accuracy, completeness or usefulness of the information contained in this report. Thus, no liability can be accepted for damage resulting from use of the information, or of the apparatus, methods and procedures described.