INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Einige Testmethoden für Zufallsgeneratoren

(Some Testing Methods for Random Generators)

Rudolf Gorenflo und Maria Grazia Pacco

IPP 6/47 Januar 1966

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

IPP 6/47

R. Gorenflo
M. Pacco

Some Testing Methods for Random Generators, January, 1966 (in German)

ABSTRACT:

A few test methods for random generators and the results of applying them to a few pseudo-random generators are described. The generators investigated are used at the Institut für Plasmaphysik, Munich-Garching, in simulating physical stochastic processes and testing the stability of numerical methods on an IBM 7090.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

In dieser Arbeit werden einige Testmethoden für Zufallsgeneratoren und Resultate ihrer Anwendungen auf einige Pseudozufallsgeneratoren dargestellt. Die untersuchten Generatoren RDM, ZUFAL und RANDM werden im Institut für Plasmaphysik, Garching, verwendet bei der Simulation physikalischer Zufallsprozesse und zum Testen der Stabilität numerischer Verfahren *) auf der IBM 7090.

---

*) s.z.B. [20], [21], [22]

1. Rechnerische Erzeugung von Pseudo-Zufallszahlen

1.1 Allgemeines

Bei der Durchführung von Monte-Carlo-Rechnungen braucht man manchmal sehr lange Folgen von Zufallszahlen. Weil die Monte-Carlo-Methoden immer häufiger benutzt werden (sie bieten oft die einzige Möglichkeit zur Untersuchung zufälliger Vorgänge), ist die Erzeugung von Zufallszahlen ein dringendes Problem.

Einen zusammenfassenden Bericht mit besonders vollständigem Literaturverzeichnis haben T.E. HULL und H.R. DOBELL - s. [9] - verfaßt. Hier sollen nur kurz einige Methoden erwähnt werden, die bisher zur rechnerischen Herstellung von Zufallszahlen entwickelt und getestet worden sind.

Man sollte besser von Pseudo-Zufallszahlen sprechen. Zahlen, die gesetzmäßig (determiniert) erzeugt werden, sind nämlich nicht "echte Zufallszahlen". Über den Begriff "Zufallszahl" selber hat man übrigens sehr lange diskutiert (s.z.B. [10]). Auf diese Frage soll hier nicht eingegangen werden. Man will Zahlenfolgen erzeugen, die gewisse statistische Eigenschaften zeigen. Man verlangt, daß die Zahlen im Intervall (0,1) gleichverteilt sind und keine groben Gesetzmäßigkeiten erkennen lassen. Um das festzustellen, wendet man auf die Zahlenfolge gewisse Tests an: sie ist brauchbar, wenn die Testresultate befriedigend ausfallen. Außerdem soll die Zahlenfolge eine genügend lange Periode *) haben und keine Degeneration zeigen. Es kann auch vorkommen, daß eine Folge von Pseudo-Zufallszahlen einen vorperiodischen Teil enthält, daß also erst von einer gewissen Stelle an Periodizität eintritt. Dann soll der Teil "Vorperiode + Periode" genügend lang sein.

---

*) Statt "Periode" verwendet man oft auch das Wort "Zyklus".

1.2 Einige Methoden zur Erzeugung von Zufallszahlen.

1.2.0

Im allgemeinen erzeugt man ganze nichtnegative Zahlen z, $0 \leq z < M$, wobei M eine Potenz von 2 oder von 10 ist. Division durch M gibt Zahlen zwischen 0 und 1.

1.2.1. Quadrieren und Abschneiden.

Diese Methode stammt von J. von NEUMANN. Die letzte Zufallszahl x_i wird quadriert, und von x_i^2 benutzt man die mittleren Ziffern als neue Zufallszahl.

Obwohl mehrere Tests gegen diesen Generator keine Einwände ergaben, sofern die Menge der erzeugten Zufallszahlen nicht zu groß ist, ist die Methode für praktische Zwecke nicht zu empfehlen, weil die Zahlenfolge degenerieren kann. Wenn z.B. die hintere Hälfte einer Zahl lauter Nullen zeigt, besitzen alle darauffolgenden Zahlen dieselbe Eigenschaft. Man vergleiche die Überlegungen hierzu in [8], Abschnitt D.

1.2.2. Quadrieren und Ergänzen.

S. von HOERNER hat in [8] diese Methode vorgeschlagen, um die Degeneration der Zahlenfolge zu vermeiden. Das Gesetz zur Herstellung der Zufallszahlen lautet wie folgt:

$$x_{i+1} = \begin{cases} x_i^2, \text{wenn} & x_i^2 \geq b, \\ x_i^2 + a, \text{"} & x_i^2 < b, \end{cases}$$

wobei die zwei Konstanten a, b einige Bedingungen erfüllen müssen. Damit die Zahlenfolge befriedigend ist, muß man a und b zweckmäßig wählen und das erste Viertel der Ziffern vernachlässigen. Getestet wurde diese Methode von H. FISSER (man vgl. [23]). Ihre Kompliziertheit ist für die praktische Verwendung ein Nachteil.

1.2.3 Additive Kongruenz-Methode (FIBONACCI-Sequenz).

Jede Zufallszahl wird durch die zwei vorhergehenden gemäß der Regel

$$x_{n+1} \equiv x_n + x_{n-1} \pmod{m}$$

erzeugt.

Statistische Tests haben keine befriedigenden Ergebnisse geliefert. Diese Methode ist deshalb ungeeignet für die Praxis.

1.2.4 Multiplikative und gemischte Kongruenz-Methode.

Die Zufallszahlen werden durch das Gesetz

$$x_i \equiv a\, x_{i-1} + c \pmod{m}$$

hergestellt.

Der Fall $c = 0$ (Multiplikative Kongruenz-Methode) ist noch nicht vollständig untersucht. Es hat sich aber herausgestellt, daß nur die ersten Ziffern brauchbar sind und deswegen wird immer häufiger $c \neq 0$ (gemischte Kongruenz-Methode) genommen.

Bei zweckmäßiger Wahl von a und c (s. darüber [2], [9]) liefern die Tests ziemlich befriedigende Ergebnisse. Weil die Methode außerdem leicht zu programmieren ist, ist sie die beliebteste.

1.2.5 Kombination von zwei Kongruenz-Methoden.

M.D. MAC LAREN und G. MARSAGLIA schlagen in [12] einen Generator vor, der anscheinend einwandfreie Eigenschaften hat. Bei einigen Tests, die bei einfachen Kongruenz-Generatoren schlechte Ergebnisse liefern, ergeben sich ganz befriedigende Resultate.

Die durch die üblichen Generatoren erzeugten Zufallszahlen sind gewöhnlich zu regelmäßig verteilt. Dieser neue Generator vermischt die Zufallszahlen derart miteinander, daß man diese Regelmäßigkeit nicht mehr erkennen kann.

Man habe zwei Zufallsgeneratoren U und V. Eine Tabelle wird mit n durch U erzeugte Zufallszahlen gefüllt. Mit Hilfe des anderen Generators V wählt man eine Zahl aus als erste Zahl der neuen Folge. Der frei gewordene Platz wird mit einer von U erzeugten Zufallszahl gefüllt. Die zweite Zahl der Folge wird wieder durch V aus der Tabelle entnommen, usw.

Diese Methode hat den einfachen Kongruenz-Methoden gegenüber den Nachteil, langsamer zu sein (sie ist ungefähr nur halb so schnell). Diesen Nachteil sollte man allerdings nicht überbewerten; denn oft werden ja mit einer Zufallszahl längere Rechnungen durchgeführt, so daß die Zeit, die die Erzeugung der Zufallszahlen benötigt, nur einen kleinen Bruchteil der gesamten Rechenzeit darstellt.

2. Einige Zufallsgeneratoren

2.1 Der Zufallsgenerator RDM

2.1.1 Erzeugung der Zufallszahlen

RDM, nach Arthur W. KAERCHER (April 1962), ist ein multiplikativ-additiver Kongruenz-Zufallsgenerator. Die Methode, auf der er beruht, ist von A. ROTENBERG (s. [16]) entwickelt worden.

Es wird die Folge von Oktalzahlen

$$r_{i+1} \equiv (2^7+1)\,r_i + 311715164025_{(8)} \pmod{2^{35}}$$

erzeugt.*) Die Konstante $311715164025_{(8)}$ ist ungerade, damit die Periodenlänge der Zahlenfolge 2^{35} ist, und liegt nahe beim Wert $\left[(.5 + \sqrt{3}/6)\cdot 2^{35}\right]$, der nach R.R. COVEYOU (s. [2]) die kleinste Serien-korrelation verursacht. Die Oktalzahlen werden dann durch die Formel $x_i = 2^{-35} r_i$ in Gleitkomma-zahlen zwischen 0 und 1 verwandelt.

Die Anleitung zur Benutzung von RDM findet man im Abschnitt 4.1.

2.1.2 Ein Beispiel

Durch ein explizit durchgeführtes Beispiel sei erläutert, wie die Zufallszahlen erzeugt werden.

Es sei

$$r_1 = 311\ 715\ 164\ 025_{(8)}$$

$$2^7 + 1 = 201_{(8)}$$

*) Der untere Index (p) hinter einer Zahl bedeutet, daß diese im p-al-System geschrieben ist. Zahlen ohne solchen Index sind, sofern nicht anders vermerkt, im Dezimalsystem geschrieben.

	311	715	164	025	* 201	=
62	363	235	005	2		
62	675	152	171	225	+	
	311	715	164	025		
1	207	067	355	252		

Diese ganze Rechnung ist im Oktalsystem durchgeführt.
Es ist also $r_2 = 207\ 067\ 355\ 252_{(8)}$. Diese Oktalzahl wird in der Maschine als Dualzahl gespeichert:

$$r_2 = 010\ 000\ 111\ 000\ 110\ 111\ 011\ 101\ 101\ 010\ 101\ 010_{(2)},$$

wobei die erste Ziffer einfach bedeutet, daß die entsprechende Gleitkommazahl das Vorzeichen + hat.

Durch die Formel $x_i = 2^{-35} r_i$ wird schließlich die positive Zahl

$$x_2 = 2^{-1} + 2^{-6} + 2^{-7} + 2^{-8} + 2^{-12} + 2^{-13} + \ldots \approx 0.52776690$$

geliefert.

2.2 Der Zufallsgenerator ZUFAL

2.2.1 Erzeugung der Zufallszahlen

Der Zufallsgenerator ZUFAL ist von Fr. G. HAIN entworfen und programmiert worden. Leider sind seine Periodenlängen nicht sehr groß. Da aber die statistischen Tests befriedigende Ergebnisse lieferten, soll er hier beschrieben werden.

ZUFAL liefert im Intervall (0,1) gleichverteilte Zufallszahlen gemäß folgendem Verfahren.

Die Zahl ZUF, mit der man initialisieren will, wird in den Zellen ZUF und ZUF + 1 zweimal gespeichert. Die zwei Zahlen werden miteinander multipliziert und das Ergebnis, das in

AC und MQ enthalten ist, 14 bits nach rechts verschoben. Dadurch werden die ersten 14 bits von AC mit Null gefüllt. Die Zahl in MQ wird dann in ZUF gespeichert, um den nächsten Zyklus zu initialisieren. Die Zahl in AC wird jetzt 5 bits nach rechts verschoben, so daß die ersten 19 bits mit Nullen gefüllt sind. AC wird dann mit MQ vertauscht, und AC in ZUF + 1 für den nächsten Zyklus gespeichert. Die Zahl, die jetzt in AC enthalten ist, ist die Oktalzahl ZUFE: sie wird nachher in eine Gleitkommazahl verwandelt, indem man sie 9 bits nach rechts verschiebt und zu ihr die Charakteristik addiert.

Im nächsten Zyklus werden die Zahlen in ZUF und ZUF + 1 miteinander multipliziert, usw.

2.2.2 Zyklen

ZUFAL kann Zyklen verschiedener Länge je nach der Initialisation, oder auch von einer bestimmten Stelle an lauter Nullen oder immer eine gleiche von Null verschiedene Zahl (Zyklen der Länge 1) erzeugen.
In der Erzeugung von $n = 10^6$ Zufallszahlen ergaben sich die Resultate der Tabelle auf Seite 11.

Für die Durchführung dieser Untersuchung danken wir Fr. Y. KOVETZ.

Untersuchung von ZUFAL auf Zyklen

Initialisation	
555 555 555 555	Kein Zyklus
637 452 010 111	"
444 455 556 666	"
111 122 223 333	"
222 222 222 222	In 500 000 Zufallszahlen kein Zyklus. Dann Zyklus der Länge 205 916. Wo der Zyklus beginnt, wurde nicht festgestellt.
	Nullen ab $n =$
036 153 175 607	26 563
063 511 357 067	942 907
444 444 444 444	31 283
333 333 333 333	712 084
103 240 066 502	856 380
214 365 503 412	573 290
	070 000 400 000$_{(8)}$ ab $n =$
111 111 111 111	157 456
666 666 666 666	108 878
123 456 054 321	318 691

In der linken Spalte dieser Tabelle stehen Oktalzahlen, in der rechten Dezimalzahlen.

2.3 Der Zufallsgenerator RANDM

2.3.1

Dieser Zufallsgenerator wurde von Fr. Y. KOVETZ nach M.D. Mac LAREN und G. MARSAGLIA programmiert. Die Methode ist in § 1.2.5 kurz und in [12] ausführlich beschrieben.

3. Durchgeführte Tests

3.1 Iterierter χ^2- Test für die Häufigkeiten

3.1.1 Die Verteilungsfunktion χ^2 und das allgemeine Verfahren des χ^2-Tests.

Es seien X_i unabhängige normalverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert $\mu = 0$ und Varianz $\sigma^2 = 1$. Die Variable

$Y = \sum_{i=1}^{f} X_i^2$ wird χ^2-Variable mit f Freiheitsgraden genannt.

Die Verteilungsdichte dieser Variable hat die folgende Gestalt:

$$g(y) = 0 \qquad \text{für} \qquad y < 0$$

$$g(y) = \frac{y^{f/2-1} \; e^{-y/2}}{(f/2-1)! \; 2^{f/2}} \qquad \text{für} \qquad 0 \leq y < \infty$$

In der Begründung des χ^2- Tests folgen wir der in [18] S. 89ff. gegebenen Darstellung.

Man habe eine Zufallsvariable Z, die die Werte $z_1, \ldots, z_k$ annehmen kann, wobei $P(Z = z_i) = p_i$ sei. Es seien dann Θ_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ Zufallsvariable, die wie folgt definiert werden:

$$\Theta_i = 1, \qquad \text{falls} \qquad Z = z_i,$$
$$\Theta_i = 0 \qquad \text{sonst.}$$

Offenbar gilt die Beziehung $\sum_{i=1}^{k} \Theta_i = 1$.

Wenn man nun das Experiment n-mal wiederholt, kann man allgemeiner die folgenden Variablen definieren:

$$\Theta_{ij} = 1, \qquad \text{wenn} \quad Z = z_i \quad \text{im } j\text{-ten Versuch},$$
$$\Theta_{ij} = 0 \qquad \text{sonst} \qquad (i = 1, 2, \ldots k;\; j = 1, 2, \ldots, n).$$

Es sei dann $X_i = \sum_{j=1}^{n} \Theta_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots k)$.

X_i ist eine Zufallsvariable, die die absolute Häufigkeit des Ereignisses $Z = z_i$ zählt. Jede Variable X_i ist nach Definition eine Summe von n Zufallsvariablen mit der gleichen Verteilung und folgt deshalb dem zentralen Grenzwertsatz. Falls $np_i \geqslant 5$ (oder, nach einigen Autoren, $np_i \geqslant 10$), kann man die Variable $\frac{X_i - np_i}{(np_i)^{1/2}}$ als näherungsweise normal verteilt mit Mittelwert 0 und Varianz 1 betrachten. X_i genügt nämlich näherungsweise einer POISSON-Verteilung mit Mittelwert und Varianz np_i, die mit wachsendem n immer mehr sich einer Normalverteilung nähert.

Die Summe $\sum_{i=1}^{k} \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i}$ stellt also eine χ^2-Funktion dar. Die Variablen erfüllen die Bedingung $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$, weshalb die Anzahl der Freiheitsgrade $f = k - 1$ ist.

Der χ^2- Test dient dazu, die Hypothese zu prüfen, daß die Zufallsvariable Z eine gewisse Verteilungsfunktion hat. (Das ist die sogenannte Null-Hypothese).

Das allgemeine Verfahren ist folgendes. Der Bereich, in dem die von der Zufallsvariable angenommenen Werte liegen können, wird in k Intervalle eingeteilt. Der Versuch wird n- mal wiederholt, und man zählt, wieviele Werte in jedem Intervall liegen. Man erhält dadurch die Zahlen $x_i \ (i = 1, 2, \ldots k)$, $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$. Die Wahrscheinlichkeiten $p_i = P(Z = z_i)$ kennt man schon theoretisch von der Null-Hypothese, man kann damit den Wert $\sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i - np_i)^2}{np_i}$ bilden. Weil np_i der Mittelwert von X_i sein sollte, ist dieser Wert offenbar ein Maß für die Abweichung von der Null-Hypothese. Bei der Einteilung in Intervalle muß man noch berücksichtigen, daß $np_i \geqslant 10$ oder mindestens $np_i \geqslant 5$ sein soll.

Die Null-Hypothese wird gewöhnlich angenommen, wenn dem Wert χ^2 eine Wahrscheinlichkeit P aus dem Intervall $0.025 \leqslant P \leqslant 0.975$ entspricht. Ist χ^2_P das der Wahrscheinlichkeit P entsprechende Fraktil von χ^2, dann soll $\chi^2_{0,025} \leq \chi^2_P \leq \chi^2_{0.975}$ sein. In der Statistik ist es üblich, als Annahmebereich etwa $0 \leqslant P \leq 0.95$ zu nehmen; beim Testen eines Zufallsgenerators sollte man aber auch zu kleine Werte χ^2 ausschließen, da sie auf eine Verteilung hindeuten, die gleichmäßiger ist, als es echtem Zufall entspricht.

Mit $\ddot{u}$ bezeichnen wir im folgenden die Überschreitungswahrscheinlichkeit, d.h. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Zufallsgröße, z.B. χ^2, größer ausfällt als der Wert, den ein jeweiliges Experiment geliefert hat.

Die Fraktilen χ^2_P findet man für $1 \leq k \leq 100$ in [6] schon tabelliert. Für größere Werte von k benutzt man folgende Annäherung durch die Normalverteilung, die schon für $k > 30$ gilt:

$$\chi^2_P \cong \frac{1}{2}\left(\sqrt{2f-1} + u_P\right)^2.$$

Mit f ist die Anzahl der Freiheitsgrade, mit u_P sind die Fraktilen der standardisierten Normalvariablen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u_P} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = P$$

bezeichnet.

3.1.2 Der iterierte χ^2-Test

Die Werte χ^2 müssen aber nicht unbedingt im erlaubten Bereich liegen. Es kann schon vorkommen (und die Wahrscheinlichkeit dafür ist 0.05), daß einige Werte χ^2 geringfügig außerhalb des Bereichs fallen. Außerdem sollen die Werte χ^2 der χ^2 Verteilung genügen. Deswegen empfiehlt es sich, einen weiteren χ^2-Test über die Verteilung der Werte χ^2 durchzuführen.

3.1.3 Iterierter χ^2-Test für die Häufigkeiten

Durch ihn wird untersucht, ob die Zufallszahlen im Intervall (0,1) gleichverteilt sind. Dazu zerlegt man das Intervall in k Teile. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Zufallszahl im i-ten Intervall liegt, ist

$p_i = 1/k$. Es wird deswegen die Größe

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(r_i - n/k)^2}{n/k}$$

berechnet, die jeden nichtnegativen Wert annehmen kann. Um einen χ^2-Test über die Verteilung der χ^2-Werte durchzuführen, teilt man dann die positive Halbachse z.B. in zehn Intervalle durch die Dezilwerte ein, so daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Wert χ^2 in irgendein Intervall hineinfällt, 0,10 ist. Dadurch erhält man einen iterierten χ^2-Test mit 9 Freiheitsgraden. Dabei muß man beachten, daß die Berechnung von χ^2 m-mal ($m \geq 100$) wiederholt werden muß, damit $m \cdot \frac{1}{10} \geq 10$ ist.

3.1.4 Ergebnisse

Mehrere Tests mit verschiedenen Initialisationen wurden für RDM, ZUFAL und RANDM durchgeführt. Die Ergebnisse sind in den Tabellen 1, 1a, 1b dargestellt.

Es wird auch χ^2 für den einfachen Test mit der Gesamtmenge aller $m \cdot n$ Zufallszahlen berechnet (Total - χ^2). In diesen und anderen Tabellen wird jeweils grob ein Intervall angegeben, in dem ü liegt.

Die FORTRAN-Liste des Programms findet man im Abschnitt 4.3.

nitialisation BØA	Freiheitsgrade beim einfachen χ^2- Test	Gesamtanzahl der erzeugten Zufallszahlen $m*n$[1]	Total-χ^2 und ü-Intervall	Iterierter χ^2-Wert und ü-Intervall
33 333 333 333	10	100 * 121	14.745 10% < ü < 20%	15.80 5% < ü < 10%
00 000 000 000	30	100 * 312	27.910 50% < ü < 60%	7.400 50% < ü < 60%
00 000 000 000	99	100 * 1000	97.278 50% < ü < 60%	3.200 97.5% < ü < 99%
33 333 333 333	99	100 * 1000	112.92 10% < ü < 20%	12.400 10% < ü < 20%
00 000 000 000	99	100 * 10 000	99.201 40% < ü < 50%	13.400 10% < ü < 20%
33 333 333 333	99	100 * 10 000	105.36 30% < ü < 40%	5.000 80% < ü < 90%
00 000 000 000	99	1000 * 10 000	103.03 30% < ü < 40%	25.42 0.1% < ü < 0.5%
33 333 333 333	99	1000 * 10 000	99.443 40% < ü < 50%	7.760 50% < ü < 60%

Tabelle 1

Iterierter χ^2- Test für die Häufigkeiten mit RDM

) m = Anzahl der Blöcke, n = Anzahl der Zahlen jedes Blockes.

nitialisation BØA	Anzahl der Freiheitsgrade beim einfachen χ^2- Test	Gesamtanzahl der erzeugten Zufallszahlen $m * n$	Total-χ^2 und ü-Intervall	Iterierter χ^2-Wert und ü-Intervall
33 333 333 333	10	100 * 121	18.818 2.5% < ü < 5%	7.80 50% < ü < 60%
11 122 223 333	99	1000*1000	82.882 90% < ü < 95%	12.38 10% < ü < 20%
44 455 556 666	99	1000*1000	75.208 95% < ü < 97.5%	7.800 60% < ü < 70%
55 555 555 555	99	1000*1000	87.648 70% < ü < 80%	11.880 20% < ü < 30%
66 666 666 666	99	108 * 1000	124.22 2.5% < ü < 5%	5.8889 70% < ü < 80%
44 444 444 444	30	100 * 312	31.111 40% < ü < 50%	12.745 10% < ü < 20%

Tabelle 1a

Iterierter χ^2-Test für die Häufigkeiten - mit ZUFAL

nitialisationen =000 000 000 001 =000 000 000 001	Anzahl der Freiheitsgrade beim einfachen χ^2- Test	Gesamtanzahl der erzeugten Zufallszahlen $m * n$	Total-χ^2 und ü-Intervall	Iterierter χ^2-Wert und ü-Intervall
	10	100 * 121	14.047 10% < ü < 20%	7.000 60% < ü < 70%
	99	1000*1000	109.73 20% < ü < 30%	20.28 1% < ü < 2.5%
	99	108 * 1000	91.193 80% < ü < 90%	13.667 10% < ü < 20%
	99	157 * 1000	103.52 30% < ü < 40%	14.911 5% < ü < 10%
	30	100 * 312	25.549 60% < ü < 70%	3.4 90% < ü < 95%

Tabelle 1b

Iterierter χ^2-Test für die Häufigkeiten - mit RANDM

3.2 Iterierter χ^2- Test über die Verteilung des Maximums von n^* Zufallszahlen.

Mit diesem Test, der von M.D. MACLAREN und G. MARSAGLIA in [12] vorgeschlagen wurde, kann man das Verhalten von n^*- tupeln von Zufallszahlen untersuchen.

Es werden nämlich n^* Zufallszahlen erzeugt, von denen das Maximum bestimmt wird. Die Verteilungsfunktion dieses Maximums ist $F(x) = x^{n^*}$, deswegen soll seine n^*- te Potenz gleichverteilt in (0,1) sein. Auf diese Potenz wurde der iterierte χ^2- Test angewandt. Es ergaben sich die in Tabellen 2, 2a, 2b eingetragenen Ergebnisse.

Initialisation	n^*	Anzahl der Freiheitsgrade beim einfachen χ^2- Test	Gesamtanzahl der Zufallszahlen $m * n$	Total-χ^2 und ü-Intervall	Iterierter χ^2-Wert und ü-Intervall
000 000 000 000	2	10	100 * 100	13.025 20% < ü < 30%	6.000 70% < ü < 80%
333 333 333 333	2	10	100 * 100	8.713 50% < ü < 60%	8.400 40% < ü < 50%
000 000 000 000	5	10	100 * 100	4.689 90% < ü < 95%	8.600 40% < ü < 50%
333 333 333 333	5	10	100 * 100	15.500 10% < ü < 20%	10.000 30% < ü < 40%

Tabelle 2

Verteilung des Maximums von n^* Zufallszahlen - mit RDM

Initialisation	n^*	Anzahl der Freiheitsgrade beim einfachen χ^2- Test	Gesamtanzahl der Zufallszahlen $m * n$	Total-χ^2 und ü-Intervall	Iteriertes χ^2 und ü-Intervall
222 222 222 222	2	10	100 * 100	8.1058 60% < ü < 70%	13.400 10% < ü < 20%
555 555 555 555	2	10	100 * 100	6.3920 70% < ü < 80%	5.400 70% < ü < 80%
222 222 222 222	5	10	100 * 100	10.480 40% < ü < 50%	7.200 60% < ü < 70%
555 555 555 555	5	10	100 * 100	10.275 40% < ü < 50%	19.600 1% < ü < 2.5%

Tabelle 2a

Verteilung des Maximums von n^* Zufallszahlen mit ZUFAL

itialisation	n^*	Anzahl der Freiheitsgrade beim einfachen χ^2 - Test	Gesamtanzahl der Zufallszahlen $m * n$	Total-χ^2 und ü-Intervall	Iteriertes χ^2 und ü-Intervall
000 000 000 001 000 000 000 001	2	10	100 * 100	10.895 30% < ü < 40%	17.200 2.5% < ü < 5%
000 000 000 010 000 100 000 000	5	10	100 * 100	4.991 80% < ü < 90%	7.800 40% < ü < 50%

Tabelle 2b

Verteilung des Maximums von n^* Zufallszahlen mit RANDM

3.3 Coupon - Collector's Test

3.3.1 Testverfahren

Gegeben sei eine Zufallsvariable, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit z Werte annehmen kann. Man fragt sich, wie viele Versuche man wiederholen muß, bis jeder der z möglichen Werte wenigstens einmal erschienen ist.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß $k \leq z$ bestimmte Werte nach r Versuchen aufgetreten sind, ist (s. [3] - Seite 59)

$$(3.3.1) \qquad u(r,k) = \sum_{j=0}^{z} (-1)^j \binom{z}{j} \left(1 - \frac{j}{k}\right)^r .$$

$u(r,k) - u(r-1,k)$ stellt deswegen die Wahrscheinlichkeit dar, daß man genau r Versuche braucht, bis jeder der k gegebenen Werte wenigstens einmal erschienen ist.

Der Mittelwert der Anzahl der nötigen Versuche, damit die k Ausgänge vorkommen, ist nach [3] - S. 210

$$(3.3.2) \qquad E = z \left\{ \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \dots + \frac{1}{z-k+1} \right\},$$

die entsprechende Varianz ([3] - S. 224) ist

$$(3.3.3) \qquad \sigma^2 = z \left\{ \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-2)^2} + \dots + \frac{k-1}{(z-k+1)^2} \right\}.$$

Wenn man nun im Intervall (0,1) gleichverteilte Zufallszahlen hat, zerlegt man das Intervall in z Teile

$$\frac{p}{z} \leq x \leq \frac{p+1}{z}, \qquad p = 0, 1, \dots, z-1,$$

und zählt, wieviele Zufallszahlen man würfeln muß, damit mindestens eine in jedem Unterintervall erschienen ist. Die Werte, die uns das Experiment liefert, werden dann mit den theoretischen verglichen.

Darin besteht der sogenannte Gutscheinsammler-Test, der die erzeugten Zufallszahlen auf Mischung testet. Er ist in [5] beschrieben und auf die Ziffernfolgen von e und π angewandt.

3.3.2 Ergebnisse

Bei der Anwendung dieses Tests (s. FORTRAN-Liste im Abschnitt 4.4) wurde immer $k = z$ gesetzt. Es werden, durch Numerierung der Teilintervalle, ganze Zufallszahlen $r = 0, 1, \ldots, z-1$ erzeugt, und man zählt M-mal, wie oft man würfeln muß, bis jede der z Zahlen mindestens einmal erschienen ist.

Die Ergebnisse findet man in der Tabelle 3.

Zufallsgenerator und Initialisation	Z=Anzahl der möglichen Ausgänge	M=Anzahl der Versuche	A=Anzahl der erzeugten Zufallszahlen	E=Erwartete Anzahl	Normaler Ersatzwert mit Mittelwert 0 u. Varianz 1
RDM BØA=000 000 000 000	10	100	2 961	2 928.97	0.2857
	10	1000	29 171	29 289.68	-0.3348
	10	10 000	292 790	292 896.82	-0.0953
	15	150	7 281	7 466.01	-0.8638
	17	1000	58 301	58 472.39	-0.2709
	20	1000	71 639	71 954.79	-0.4196
	35	350	49 882	50 798.07	-1.5173
ZUFAL BØA=555 555 555 555	10	100	2 911	2 928.97	-0.1603
	10	1000	29 155	29 289.68	-0.3799
	10	10 000	293 726	292 896.82	0.7396
	15	150	7 602	7 466.01	0.6349
	20	1000	70 115	71 954.79	-2.4444
	35	350	50 885	50 798.07	0.1085
RANDM A=B=000 000 000 001	10	100	2 961	2 928.97	-0.0711
	10	1000	29 900	29 289.68	1.7215
	10	10 000	293 646	292 896.82	0.6682
	15	150	7 702	7 466.01	1.1018
	17	1000	59 275	58 472.39	1.2684
	20	1000	73 642	71 954.79	2.2416
	35	350	50 762	50 798.07	-0.0450

Tabelle 3

Coupon-Collector's Test - für RDM, ZUFAL und RANDM

Man sieht, daß der normale Ersatzwert $\frac{A - M \cdot E}{\sqrt{M} \cdot \sigma}$ nur in zwei Fällen in das kritische 5% - Gebiet fällt. Es ist nämlich $P\{|\text{Ersatzwert}| > 2\} = 0.954$ und $P\{|\text{Ersatzwert}| > 2.6\} = 0.991$.

Der Vollständigkeit halber sei noch angemerkt, daß im Falle $k = z$, $z \to \infty$, gilt $E \sim z \ln z$, $\sigma \sim \pi z / \sqrt{6}$

3.4 Lückentest

3.4.1 Testverfahren

Dieser Test dient, wie auch der vorhergehende Coupon-Collector's Test und die folgenden Tests, Serientest und Test über fallende und steigende Teilsequenzen,dazu, die Folge der erzeugten Zufallszahlen auf Mischung zu untersuchen (s. [10]).

Gegeben sei eine Zufallsvariable, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit t Werte annehmen kann. Es wird untersucht, wie viele Versuche man braucht, damit ein gegebener Wert erstmals auftritt. Es sei τ die Anzahl der Versuche oder, wie wir sagen wollen, die Wartezeit. In der Ziffernfolge 0 1 3 0 1 2 3 0 ist der Reihe nach die Wartezeit $\tau = 1,3,4$ für die Ziffer 0, $\tau = 3,4$ für die Ziffer 3. Die Wahrscheinlichkeiten q_k dafür, daß die Wartezeit τ bei t möglichen Ausgängen den Wert k annimmt, sind:

$$q_0 = P\{\tau = 0\} = 0,$$

$$q_k = P\{\tau = k\} = \frac{1}{t}\left(\frac{t-1}{t}\right)^{k-1} \text{ für } \quad k \geqslant 1 .$$

Die mittlere Wartezeit ist

$$\bar{\tau} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{t} \left(\frac{t-1}{t}\right)^{k-1} = t,$$

die Varianz ist

$$\sigma^2 = \overline{\tau^2} - \bar{\tau}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{1}{t} \left(\frac{t-1}{t}\right)^{k-1} - t^2 = t(t-1),$$

also

$$\sigma = \sqrt{t(t-1)}\,.$$

Für große t ist σ näherungsweise $\sigma \approx t = \bar{\tau}$.

Im Fall von in (0,1) gleichverteilten Zufallszahlen z bildet man t "Ziffern" j nach der Formel $j = [t \cdot z]$, wobei $[x]$ den ganzen Teil von x bedeutet, und man zählt, wie lange man wiederholen muß, um eine gegebene Ziffer j zu erhalten. Der Versuch wird n -mal wiederholt, so daß das Experiment eine empirische Verteilung der Wartezeit liefert, zu deren Vergleich mit der theoretischen Verteilung man dann einen χ^2-Test durchführt. Dabei muß man folgendes berücksichtigen. Wenn n_k die Anzahl der Versuche ist, bei denen τ den Wert k annimmt, so ist $E\{n_k\} = n\,q_k$. Damit für den χ^2-Test alle benötigten Erwartungen $\geqslant 10$ oder wenigstens $\geqslant 5$ sind, muß man die Werte k zweckmäßig in Gruppen zusammenfassen.

Der χ^2-Test kann natürlich für jeden der t möglichen Werte ausgeführt werden.

3.4.2 Tests

Mit $t = 10$ zählten wir die Wartezeit für jeden der 10 möglichen Werte j 1000-mal. Die Wartezeiten faßten wir auf folgende Weise zusammen.

$\tau = 1, \tau = 2, \ldots, \tau = 15, 16 \leq \tau \leq 20, 21 \leq \tau \leq 25, 26 \leq \tau \leq 30,$
$31 \leq \tau < 40, \quad \tau \geq 41.$

Dies führt auf einen χ^2-Test mit 19 Freiheitsgraden. Die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Ereignisse sind:

$$p\{\tau = 1\} = q_1$$
$$p\{\tau = 2\} = q_2$$
$$\vdots$$
$$p\{\tau = 15\} = q_{15}$$
$$p\{16 \leq \tau \leq 20\} = q_{16} + q_{17} + \ldots + q_{20}$$
$$\vdots$$
$$p\{\tau \geq 41\} = q_{41} + q_{42} + \ldots = \left(\frac{9}{10}\right)^{40} .$$

In der Tabelle 5 findet man für jede Ziffer j den entsprechenden χ^2- Wert und die Anzahl $N(j)$ von Zufallszahlen, die benötigt wurden, um 1000-mal die Ziffer j zu erzeugen. Es ist

$$E\{N(j)\} = n \cdot \bar{\tau} = n \cdot t = 10\,000$$

Aus den Zahlen $N(j)$ wurde zusätzlich noch der normale Ersatzwert gemäß $\dfrac{N(j) - n\bar{\tau}}{\sqrt{n} \cdot \sigma}$ berechnet, der den Mittelwert 0 und die Varianz 1 hat.

Man sieht, daß keiner dieser Ersatzwerte exzessiv von 0 abweicht. Die Programmliste findet man im Abschnitt 4.5.

fallsgenerator d itialisation	Zif-fer j	$N(j)$ = benötigte Anzahl von Zufallszahlen	χ^2-Wert und ü-Intervall		Normaler Ersatz-wert mit Mittel-wert 0 u. Varianz 1
M 1=000 000 000 000	0	10 142	18.697	40% < ü < 50%	0.473
	1	9 875	20.868	30% < ü < 40%	-0.417
	2	9 708	14.956	70% < ü < 80%	-0.973
	3	10 231	23.047	20% < ü < 30%	0.770
	4	10 042	12.337	80% < ü < 90%	0.140
	5	10 324	33.463	1% < ü < 2.5%	1.080
	6	9 434	19.919	30% < ü < 40%	-1.887
	7	9 954	21.453	30% < ü < 40%	-0.153
	8	10 350	29.170	5% < ü < 10%	1.167
	9	9 929	13.776	70% < ü < 80%	-0.203
FAL 1=222 222 222 222	0	10 038	24.622	10% < ü < 20%	0.127
	1	9 847	21.539	30% < ü < 40%	-0.510
	2	10 115	15.058	70% < ü < 80%	0.383
	3	9 674	22.852	20% < ü < 30%	-1.867
	4	9 856	24.353	10% < ü < 20%	-0.480
	5	10 093	14.592	70% < ü < 80%	0.310
	6	10 403	17.316	50% < ü < 60%	1.343
	7	10 105	12.375	80% < ü < 90%	0.350
	8	10 125	15.973	80% < ü < 90%	0.417
	9	9 790	13.985	90% < ü < 95%	-0.700
NDM 3=000 000 000 001	0	9 795	7.802	97.5% < ü < 99%	-0.683
	1	9 969	16.940	50% < ü < 60%	-0.103
	2	10 496	21.722	20% < ü < 30%	1.653
	3	9 705	14.123	70% < ü < 80%	-0.983
	4	10 188	11.680	80% < ü < 90%	0.627
	5	9 667	25.495	10% < ü < 20%	-1.110
	6	9 988	29.451	5% < ü < 10%	-0.400
	7	10 388	17.340	50% < ü < 60%	1.293
	8	10 031	6.493	99.5% < ü < 99.9%	0.103
	9	9 794	13.341	80% < ü < 90%	-0.687

Tabelle 5

Lückentest für RDM, ZUFAL und RANDM

3.5 Serientest

3.5.1 Testverfahren

Man vergleiche dazu die Arbeit [10]. Von GOOD (s. [17]) wurde gezeigt, daß die Methode von KENDALL und SMITH nicht einwandfrei ist. Das Verfahren wird also in einer einwandfreien Modifikation dargestellt.

Aus den Zufallszahlen bildet man, wie bei den vorhergehenden Tests, t Werte. Man erzeugt $2n$ Zahlen $z_0, z_1, \dots z_{2n-1}$, die in Zweiergruppen eingeteilt werden:

a) $(z_0, z_1), \dots, (z_{2n-2}, z_{2n-1})$,

b) $(z_1, z_2), \dots, (z_{2n-1}, z_0)$.

Daraus wird die Verteilung der t^2 möglichen Paare $(0,0), \dots, (t-1, t-1)$ ermittelt, was auf einen χ^2-Test mit t^2-1 Freiheitsgraden führt. Jede der beiden Gruppen faßt man auf als n-malige Wiederholung des Experiments, ein Paar von Zufallszahlen zu bestimmen. Jedem möglichen Paar entspricht die Wahrscheinlichkeit t^{-2}. Die möglichen Paare werden von 1 bis t^2 numeriert und man zählt in beiden Fällen die Anzahl n_j des Auftretens des j-ten Paares. Damit berechnet man die zwei Größen

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{t^2} \frac{(n_j - n/t^2)^2}{n/t^2} .$$

Im allgemeinen kann man ein Kollektiv von $k \cdot n$ Zufallszahlen auf k-fache Weise in n k-tupel einteilen und dazu k Größen χ^2 berechnen.

3.5.2 Ergebnisse

Zufallsgenerator und Initialisation	Anzahl t der Werte	Anzahl n der erzeugten Paare	χ_1^2- Wert und ü-Intervall	χ_2^2 Wert und ü-Intervall
RDM BØA=000 000 000 000	10	1000	107.2 $20\% < ü < 30\%$	93.2 $20\% < ü < 30\%$
ZUFAL BØA=555 555 555 555	10	1000	149.8 $0.05\% < ü < 0.1\%$	80.8 $90\% < ü < 95\%$
RANDM A=B=000 000 000 001	10	1000	78.2 $90\% < ü < 95\%$	81.4 $80\% < ü < 90\%$

Tabelle 6

Serientest - Für RDM, ZUFAL, RANDM

Die dazugehörige FORTRAN-Liste ist in § 4.6 enthalten.

3.6. Test über steigende, fallende und horizontale Teilsequenzen.

3.6.1 Testverfahren

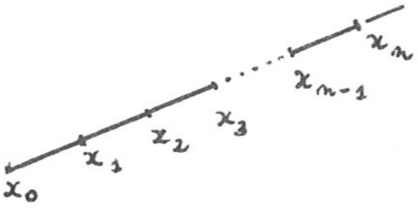
a) Theorie

Aus einer Folge von Zufallszahlen wird ein Element herausgegriffen und x_0 genannt. Die Folge sieht dann so aus

$$\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots$$

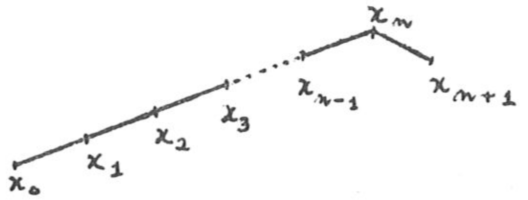
Wir betrachten die Ereignisse (für $n \geq 0$)

$$E_n: \quad x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$



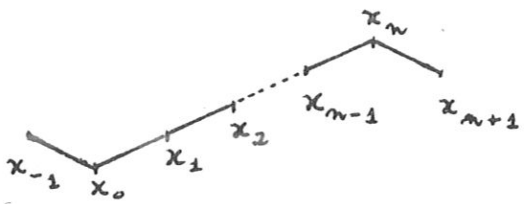
Sonderfall E_0 tritt immer ein.

R_n: $\quad x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n, \quad x_n \geq x_{n+1}.$



Sonderfall R_0: $\quad x_0 \geq x_1.$

S_n: $\quad x_{-1} \geq x_0, \; x_0 < x_1 < \ldots < x_n, \quad x_n \geq x_{n+1},$



Sonderfall S_0: $\quad x_{-1} \geq x_0 \geq x_1.$

Ihre Wahrscheinlichkeiten seien mit e_n, r_n, s_n bezeichnet.
Die Wahrscheinlichkeiten r_n und s_n lassen sich mit Hilfe der Wahrscheinlichkeiten e_n ausdrücken. Das Ereignis E_n kann auf 2 verschiedene Arten eintreten: nämlich entweder R_n oder E_{n+1}. Mithin ist

$$e_n = r_n + e_{n+1}$$

Das Ereignis R_n kann auf 2 verschiedene Arten eintreten; nämlich entweder

S_n: $\quad x_{-1} \geq x_0, \; x_0 < x_1 < \ldots < x_n, \quad x_n \geq x_{n+1},$

oder

$$x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots < x_n, \quad x_n \geq x_{n+1}.$$

Da in der Folge die Elemente x_0 und x_{-1} gleichberechtigt sind, hat das zweite dieser Ereignisse die Wahrscheinlichkeit r_{n+1}. Also ist

$$r_n = s_n + r_{n+1}.$$

Aus diesen Beziehungen folgt

$$r_n = e_n - e_{n+1}\,, \qquad s_n = r_n - r_{n+1} = e_n - 2\cdot e_{n+1} + e_{n+2}\,.$$

Die gleichen Formeln gelten, wenn man überall die Zeichen $<$ und $>$ vertauscht.

Analoge Formeln gelten für die Wahrscheinlichkeiten

$e_n^*,\ r_n^*,\ s_n^*$ der Ereignisse

$$E_n^*: \quad x_0 = x_1 = \dots = x_n\,,$$

$$R_n^*: \quad x_0 = x_1 = \dots = x_n\,,\ x_n \neq x_{n+1}$$

$$S_n^*: \quad x_{-1} \neq x_0 = x_1 = \dots = x_n \neq x_{n+1}\,,$$

nämlich $\qquad e_n^* = r_n^* + e_{n+1}^*\,, \quad r_n^* = s_n^* + r_{n+1}^*\,,$

also $\qquad r_n^* = e_n^* - e_{n+1}^*\,,$

$$s_n^* = r_n^* - r_{n+1}^* = e_n^* - 2\cdot e_{n+1}^* + e_{n+2}^*\,.$$

Spezialfälle:

α). Stetiger Fall: Die x_i seien gleichverteilt im Intervall $0 \leq x \leq 1$. Eine einfache Überlegung führt zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten. Man greife aus dem Intervall $0 \leq x \leq 1$ $\quad n+1$ Punkte heraus.

Die Wahrscheinlichkeit, daß unter diesen 2 gleiche sind, ist 0. Mit Wahrscheinlichkeit 1 können wir also die $n+1$ Punkte als paarweise verschieden ansehen. Da sich $n+1$ Punkte auf $(n+1)!$ Arten anordnen lassen, E_n aber nur bei einer dieser Anordnungen verwirklicht ist, hat man für $n \geq 0$

$$e_n = \frac{1}{(n+1)!}\,,$$

mithin

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}\,, \qquad s_n = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{2}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!}\,.$$

Für $n \geq 1$ ist

$$e_n^* = r_n^* = s_n^* = 0\,.$$

Probe: Eines der Ereignisse R_n, $n \geq 0$, muß eintreten, zwei verschiedene R_j können nicht zugleich eintreten. Tatsächlich ist auch

$$r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + \ldots = \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \ldots =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n!}\right) = 1.$$

Anmerkung: Die Voraussetzung der Gleichverteilung ist hier unwesentlich. Es genügt, daß die x_i in einem Intervall stetig verteilt sind (und alle dieselbe Verteilung haben).

β). Diskreter Fall: x_i nehme mit Wahrscheinlichkeit $1/t$ einen der Werte

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ t-1$$

an.

Für die Teilsequenz $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ gibt es t^{n+1} Möglichkeiten. Die Anzahl der steigenden Sequenzen dieser Länge ist $\binom{t}{n+1}$. Auf soviel Arten kann man nämlich aus t Elementen $n+1$ paarweise verschiedene Elemente herausgreifen und dann der Größe nach ordnen. Mithin ist

$$e_n = \frac{\binom{t}{n+1}}{t^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(1 - \frac{1}{t}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{t}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{t}\right).$$

Es gibt t verschiedene gleichbleibende Sequenzen dieser Länge, nämlich eine für jeden der möglichen Werte $0, 1, \ldots, t-1$. Also ist

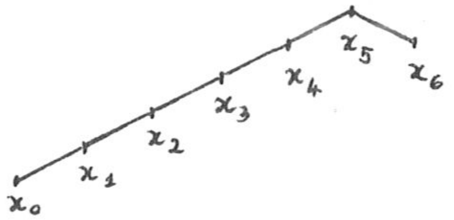
$$e_n^* = \frac{t}{t^{n+1}} = t^{-n}.$$

Die Wahrscheinlichkeiten r_n, s_n, r_n^*, s_n^* berechnet man nach den allgemeinen Formeln.

Für $n \geq t$ ist $e_n = 0$. Für $t \to \infty$ streben alle Wahrscheinlichkeiten des diskreten Falls gegen die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten des stetigen Falles.

b) Praxis

Für die Durchführung eines χ^2-Tests eignen sich die Ereignisse R_n. Sie sind paarweise unvereinbar (für die E_n trifft das nicht zu) und können für jedes Element x der Folge auftreten (dies trifft für die S_n nicht zu). Man muß allerdings beachten, daß für aufeinanderfolgende Glieder der Folge die Ausgänge des "Experiments", R_n zu bestimmen, nicht unabhängig voneinander sind. Tritt wie in nebenstehender Skizze für x_0 das Ereignis R_5 ein, so sind die Ereignisse E_j mit $j \geq 5$ unmöglich für x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.



Für x_6 kann zwar E_5 wieder auftreten, die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines der Ereignisse E_n ist aber abhängig vom Wert x_5, da $x_6 \leq x_5$ sein muß. Wenn R_5 für x_0 eingetreten ist, ist erst wieder ab x_7 der Ausgang des "Experiments" unabhängig von den Werten x_0 bis x_6, d.h., die Wahrscheinlichkeiten für R_n unter der Bedingung, daß R_5 bei x_0 eingetreten ist, sind gleich den unbedingten Wahrscheinlichkeiten r_n. Diese Überlegung verallgemeinert empfiehlt folgendes Verfahren. Man beginnt bei x_0 und stellt fest, daß bei x_0 das Ereignis R_j eingetreten ist. An diesem Ereignis sind beteiligt $x_0, x_1, \ldots, x_{j+1}$. Dann stellt man fest, welches R_k bei x_{j+2} eintritt u.s.f. Wiederholt man dies n mal, stellt man also auf diese Weise n mal das Eintreten eines der Ereignisse R_j fest, und ist hierbei n_j die Anzahl des Eintretens von R_j für $j \leq k$,
n_{k+1} die Anzahl des Eintretens eines der Ereignisse R_j mit $j \geq k+1$, ist ferner $p_j = r_j$ für $j \leq k$,
$p_{k+1} = r_{k+1} + r_{k+2} + \ldots$,

so berechne man die Größe

$$\chi^2 = \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(n_j - n p_j)^2}{n p_j} .$$

Man hat dann einen χ^2-Test mit $k+1$ Freiheitsgraden. Wenn n vorgegeben ist, muß man k so wählen, daß die kleinste Erwartung $n p_j \geq 10$ ist.

Wenn t sehr groß und k nicht zu groß ist, kann man die Wahrscheinlichkeiten r_j des stetigen Falles bei der Rechnung verwenden.

Für den stetigen Grenzfall soll noch geschätzt werden, wieviel Zufallszahlen man erzeugen muß, um n mal R_j bestimmen zu können. Am Eintreten von R_j sind $j+2$ Elemente beteiligt, bei x_0 nämlich $x_0, x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}$, für eine Bestimmung von R_j also im Mittel

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+2)\, r_j = \sum_{0}^{\infty} (j+2)\left(\frac{1}{(j+1)!} - \frac{1}{(j+2)!}\right) =$$

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{j+1}{(j+1)!} + \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!} - \sum_{0}^{\infty} \frac{j+2}{(j+2)!} =$$

$$= \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{j!} = e$$

Elemente. Für n-maliges Bestimmen von R_j benötigt man also im Mittel $N = e \cdot n$ Zufallszahlen.

Programmtechnisch ist es zu empfehlen, parallel die Ereignisse R_j für fallende und steigende Sequenzen zu zählen und so zwei Werte χ^2 zu bestimmen. Gleichzeitig kann man für beliebige Werte j die Anzahl a_j des Eintretens von Ereignissen R_j^* zählen (mit jedem x_i als Anfangselement). Bei großen Werten von N (Umfang des Kollektivs der Zufallszahlen), muß $a_j/N \approx r_j^*$ sein.

Da die r_j^* aber sehr klein sind, sind die Ereignisse R_j^* für Beurteilung mittels eines χ^2-Tests ungeeignet.

3.6.2 Tests

Wir können hier natürlich den stetigen Fall als gegeben annehmen. Zwei Tests wurden durchgeführt: die einfache Zählung der Teilsequenzen mit einer bestimmten Länge und hierzu ein χ^2-Test.

Im ersten Test (FORTRAN-Liste dazu im Abschnitt 4.7.1) erzeugt man n Zufallszahlen und man zählt, wieviel fallende oder steigende Teilsequenzen der Länge i aufgetreten sind. Die Zählung führt man auf folgende Weise durch. Man habe z.B. die Zufallszahlen
$x_0 < x_1 < x_2 > x_3 < x_4$.
Es sind aufgetreten:

2 steigende Teilsequenzen der Länge 1: $(x_0, x_1), (x_3, x_4)$;

1 " " " " 2: (x_0, x_1, x_2);

1 fallende " " " 1: (x_2, x_3).

Weil $r_i = \frac{i+1}{(i+2)!}$ die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß eine fallende oder steigende*) Teilsequenz die Länge i hat, ist $n \cdot r_i$ der Mittelwert der Anzahl der Teilsequenzen mit Länge i. Die Werte, die uns der Zufallsgenerator geliefert hat, lassen sich mit den theoretisch berechneten Erwartungen vergleichen.

Für $n = 150\,000$ ergaben sich die Ergebnisse der Tabelle 7.

Der zweite Test (FORTRAN-Liste im Abschnitt 4.7.2) ist ein χ^2-Test über die Verteilung der Sequenzenlänge. Es werden n Sequenzen gebildet, dazu braucht man im Mittel $e \cdot n$ Zufallszahlen (man vgl. 3.6.1.b) "Praxis"), und man zählt, wie viele Sequenzen der Länge $0, 1, 2, \ldots, 5, \geq 6$ auftreten, was auf einen χ^2-Test mit 6 Freiheitsgraden führt. Der Test wird gleichzeitig für die steigenden und die fallenden Teilsequenzen durchgeführt. Die Ergebnisse findet man in der Tabelle 8.

*) Wegen der Symmetrie sind die zwei Werte gleich.

Zufallsgenerator und Initialisation	Länge	Anzahl der steigenden Sequenzen	Anzahl der fallenden Sequenzen	Entsprechende Erwartung
RDM BØA = 000 000 000 000	1	49 931	49 931	50 000.00
	2	18 948	18 656	18 750.00
	3	4 954	5 093	5 000.00
	4	1 028	1 050	1 042.00
	5	176	167	178.60
	6	31	28	26.04
	≥ 7	5	2	3.72
	Summe	75 073 +	74 927 =	150 000
ZUFAL BØA = 222 222 222 222	1	49 868	49 868	50 000.00
	2	18 813	18 908	18 750.00
	3	4 941	5 102	5 000.00
	4	988	1 072	1 042.00
	5	185	197	178.60
	6	24	23	26.04
	≥ 7	6	5	3.72
	Summe	74 825 +	75 175 =	150 000
RANDM A=B = 000 000 000 001	1	49 981	49 981	50 000.00
	2	18 779	18 717	18 750.00
	3	5 040	4 964	5 000.00
	4	1 056	1 064	1 042.00
	5	160	190	178.60
	6	37	21	26.04
	≥ 7	4	6	3.72
	Summe	75 057 +	74 943 =	150 000

Tabelle 7

Test über steigende und fallende Teilsequenzen - für RDM, ZUFAL u.RANDM

3.7 KOLMOGOROFFscher Test

3.7.1 KOLMOGOROFFscher Satz und Testverfahren

Man nehme an, daß eine Zufallsvariable X eine bekannte und stetige Verteilungsfunktion $F(x)$ habe. N voneinander unabhängige und unter gleichbleibenden Bedingungen durchgeführte Versuche haben dann die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ geliefert. Der KOLMOGOROFFsche Satz gibt aufgrund dieser empirischen Werte Aussagen darüber, ob die Funktion $F(x)$ als Verteilungsfunktion von X angenommen werden darf. Er liefert nämlich ein Maß für die Abweichung der Funktion $F(x)$ von der "empirischen" Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X, wobei die empirische Verteilungsfunktion auf folgende Weise definiert wird.

ufallsgenerator nd nitialisation	Länge	Anzahl der fallenden Sequenzen	Anzahl der steigenden Sequenzen	Erwartung
DM ØA=000 000 000 000	0	483	482	500.0
	1	355	331	333.3
	2	129	148	125.0
	3	30	34	33.3
	4	2	4	6.9
	5	1	1	1.2
	≥ 6	0	0	0.2
	Gesamt-anzahl	1 000	1 000	
	χ^2-Wert u. ü-Intervall	6.197 40% < ü < 50%	6.387 30% < ü < 40%	Freiheits-grade $f=6$
UFAL ØA=222 222 222 222	0	24 956	24 730	25 000.0
	1	16 565	16 780	16 666.7
	2	6 454	6 357	6 250.0
	3	1 609	1 683	1 666.7
	4	336	373	347.2
	5	71	68	59.5
	≥ 6	6	9	9.9
	Gesamt-anzahl	50 000	50 000	
	χ^2-Wert u. ü-Intervall	12.01 5% < ü < 10%	8.885 10% < ü < 20%	Freiheits-grade $f=6$
ANDM =B=000 000 000 001	0	25 043	24 934	25 000.0
	1	16 620	16 747	16 666.7
	2	6 260	6 226	6 250.0
	3	1 673	1 639	1 666.7
	4	348	376	347.2
	5	45	63	59.5
	≥ 6	11	15	9.9
	Gesamt-anzahl	50 000	50 000	
	χ^2-Wert u. ü-Intervall	3.908 60% < ü < 70%	6.301 30% < ü < 40%	Freiheits-grade $f=6$

Tabelle 8

Test über steigende und fallende Teilsequenzen - für RDM, ZUFAL u. RANDM

Die Werte $x_1, x_2, \dots x_n$ ordnet man der Größe nach, so daß man die Folge $x_1^* \leq x_2^* \leq \dots \leq x_n^*$ bekommt. Die empirische Verteilungsfunktion $F_n(x)$ ist gegeben durch

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq x_1^* \\ k/n & \text{"} \quad x_k^* < x \leq x_{k+1}^* \\ 1 & \text{"} \quad x > x_n^* . \end{cases}$$

Es sei dann $D_n = \sup_{-\infty < x < +\infty} |F_n(x) - F(x)|$ die maximale Abweichung zwischen den zwei Funktionen. Der Satz von KOLMOGOROFF lautet nun:
Wenn die Funktion $F(x)$ stetig ist, so gilt für $n \to \infty$ die Beziehung

$$P\{\sqrt{n}\, D_n < z\} \longrightarrow K(z),$$

wobei

$$K(z) = 0 \qquad \text{für} \quad z \leq 0,$$

$$K(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2 z^2} \qquad \text{für} \quad z > 0.$$

(Analoge Sätze über die relative Abweichung findet man in [15] Seite 506 ff).

Hat man nun die Null-Hypothese zu prüfen, daß die Zufallsvariable X die stetige Verteilungsfunktion $F(x)$ besitzt, dann kann man so vorgehen. Man führt n Versuche durch, bildet aus ihren Ergebnissen die empirische Verteilungsfunktion und berechnet den Wert $\sqrt{n}\, D_n = z_0$. Die Funktion $K(z)$ (die in [4] - S. 381 tabelliert ist) liefert uns für großes n die Überschreitungswahrscheinlichkeit

$$P\{\sqrt{n}\, D_n \geq z_0\} \approx 1 - K(z_0) = p_0 .$$

Wenn p_0 zu klein ist, dann betrachtet man die Abweichungen der empirischen Verteilungsfunktion von der angenommenen als zu groß und weist die Null-Hypothese zurück.

Hierauf kann man einen Test für einen Zufallsgenerator aufbauen. Als Null-Hypothese hat man in diesem Fall die Rechteckverteilung der erzeugten Zufallszahlen, d.h. $F(x) = 0$ in $x \leq 0$, x in $0 \leq x \leq 1$, 1 in $x \geq 1$. Eine einzige Durchführung dieses Tests kann natürlich nicht viel aussagen: Es ist deswegen ratsam, noch einen χ^2-Test darüber auszuführen. Dazu teilt man das Intervall (0,1) durch eine gewisse Anzahl von Punkten $y_0 = 0 < y_1 < \ldots < y_m = 1$ ein, und entsprechend werden die Werte $z_0, z_1, \ldots z_m$ ausgerechnet, für die $K(z_i) = y_i$ ist $(i = 0, \ldots, n)$. So wurden die Klassen für die Durchführung des χ^2-Tests bestimmt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Wert $\sqrt{n} \cdot D_n$ im Intervall (z_i, z_{i+1}) $(0 \leq i < m)$ liegt, ist offenbar $K(z_{i+1}) - K(z_i)$.

3.7.2 Sortierung von Zahlen

Um den KOLMOGOROFFschen Test durchführen zu können, müssen die beobachteten Werte der Zufallsvariable der Größe nach sortiert werden. Wir beschreiben zwei der vielen möglichen Methoden für die Sortierung von Zahlen. Die erste wurde uns von Herrn O. Eder (IPP Garching) mitgeteilt, die zweite und weitere Methoden findet man in [13] - S. 510 ff.

Die erste Methode ist nur dann anwendbar, wenn die Zahlen gespeichert sind. Sie ist sehr langsam, hat aber den Vorteil, nur einen zusätzlichen Speicherplatz zu benötigen und mit wenigen Befehlen darstellbar zu sein.

Gegeben sei also eine Folge $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von Zahlen, die nach aufsteigender Größe zu sortieren sind. Jede Zahl a_i wird mit der folgenden verglichen, bei $i = 1$ beginnend, bis man ein Paar a_k, a_{k+1} findet, für das $a_k > a_{k+1}$ gilt. Die zwei Zahlen werden umgespeichert:

$a_k \rightarrow k+1$, $a_{k+1} \rightarrow k$, und die Zahl a_{k+1}, die sich jetzt in Speicherzelle k befindet, mit der vorhergehenden verglichen. Ist $a_{k-1} \leq a_{k+1}$, so vergleicht man die Zahl in Speicherzelle $k+1$ mit den folgenden weiter. Sonst speichert man die Zahlen in den Zellen $k-1$ und k wieder um und vergleicht die Zahl in Zelle $k-1$ mit der vorhergehenden, und so weiter. Auf diese Weise sind alle Zahlen am Schluß der Größe nach sortiert.

Die Erzeugung und Sortierung von 10 000 Zufallszahlen erforderte mit dieser Methode 32'50" Rechenzeit. Dabei ist die zur Erzeugung gebrauchte Zeit vernachlässigbar.

Die zweite Methode erforderte hingegen nur 1'1" Rechenzeit, um dieselben 10 000 Zufallszahlen zu erzeugen und zu sortieren. Außerdem läßt sie sich auch dann anwenden, wenn die Zufallszahlen auf Band gespeichert sind (dazu braucht man natürlich ein zusätzliches Band). Muß man aber nach dieser Methode n schon gespeicherte Zahlen sortieren, so braucht man n weitere Speicherplätze. Die Programmierung ist auch umständlicher als bei der zuerst skizzierten Methode.

Diese zweite Methode beruht auf dem Begriff "merging" von zwei geordneten Listen. Darunter versteht man folgendes. Man habe z.B. die zwei Listen 1,4,7,8,9 und 2,5. Die erste Zahl der ersten Liste wird mit der ersten Zahl der zweiten verglichen: $1 < 2$, deswegen wird 1 die erste Zahl der neuen Liste. Dann vergleicht man 4 mit 2, $2 < 4$: 2 ist die zweite Zahl der neuen Liste. $4 < 5$, folglich wird 4 die dritte Zahl. $7 > 5$, 5 ist die fünfte Zahl. Jetzt ist die zweite Liste verbraucht, die weiteren Zahlen der ersten Liste können also an die neue Liste einfach angefügt werden. Die neue geordnete Liste ist also: 1,2,4,5,7,8,9. Hat man nun eine Reihe von Zahlen zu sortieren, dann teilt man sie zunächst in geordnete Unter-Listen ein. Diese werden paarweise durch "merging" ineinander geschoben und neue, größere Unter-Listen werden daraus gebildet. Das Verfahren wird so oft wiederholt, bis alle Zahlen geordnet sind.

Ein Beispiel dafür:

ursprüngliche Liste	nach dem 1. Lauf	nach dem 2. Lauf	endgültige Liste
3	3	0	0
7	4	1	1
8	7	2	2
4	8	3	3
9	9	4	3
0	0	6	4
2	1	7	6
1	2	8	7
6	6	9	8
3	3	3	9

Die Listen der beiden Programme sind im Abschnitt 4.8.2 zu finden.

3.7.3 Ergebnisse

Das K-Intervall (0,1) wurde in 9 Teile zerlegt (s. Tabelle 9), was auf einen χ^2-Test mit 9 Freiheitsgraden führt. Dabei stellte sich heraus, daß die Abweichungen von der Rechteckverteilung kleiner sind, als gemäß echtem Zufall zu erwarten wäre.

Einen feineren Test erhält man durch Zerlegung des ersten Intervalls in fünf Unterintervalle. Die Ergebnisse besagen aber dasselbe. Auch jetzt fallen zu viele Werte in das erste

Intervall. Das gilt sowohl für RDM als auch für ZUFAL. Deswegen erhebt sich die Frage, ob die erzeugten Zufallszahlen zu gleichmäßig verteilt sind, oder ob die Anzahl n der Versuche, für die die Rechnungen ausgeführt wurden, noch zu klein ist.

Die entsprechende FORTRAN-Liste ist im Abschnitt 4.8.1 enthalten.

y	$K(y)$
0.0	0.0
0.47	0.02002
0.51	0.04281
0.54	0.06750
0.56	0.08758
0.58	0.1104
0.65	0.2080
0.71	0.3055
0.77	0.4064
0.83	0.5038
0.90	0.6073
0.98	0.7079
1.08	0.8061
1.23	0.9030
∞	1.0000

Tabelle 9a

KOLMOGOROFFsche Funktion

Zufallsgenerator und Initialisation	Anzahl der Intervalle	n=Anzahl der Versuche für jede Bestimmung	Anzahl der Werte D_n	Verteilung der Werte in den einzelnen Intervallen 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	χ^2-Wert und $\ddot{u}$-Intervall
RDM BØA=000 000 000 000	10	1000	100	16					15	7	12	5	8	11	7	5	14	$f=9$ $\chi^2=14.09$ $10\% < \ddot{u} < 20\%$
	10	10 000	50	4					5	5	4	4	7	6	6	6	3	$f=9$ $\chi^2=2.850$ $2.5\% < \ddot{u} < 5\%$
	14	50	100	12	4	2	3	3	12	12	8	7	7	5	5	11	9	$f=13$ $\chi^2=60.49$ $\ddot{u} \approx 0.$
ZUFAL BØA=555 555 555 555	10	50	100	27					12	10	8	7	8	8	6	7	7	$f=9$ $\chi^2=28.74$ $0.05\% < \ddot{u} < 0.1\%$
	14	50	100	13	4	3	3	4	12	10	8	7	8	8	6	7	7	$f=13$ $\chi^2=69.27$ $\ddot{u} \approx 0.05\%$
ZUFAL BØA=333 333 333 333	10	1000	100	13					11	12	12	12	11	9	9	5	6	$f=9$ $\chi^2=5.812$ $70\% < \ddot{u} < 80\%$
RANDM A=B=000 000 000 001	10	1000	100	9					3	12	11	9	4	7	13	4	5	$f=9$ $\chi^2=17.19$ $2.5\% < \ddot{u} < 5\%$
RDM BØA=000 000 000 000 Test für exponentialverteilte Zufallszahlen, erzeugt nach VON NEUMANN	10	1000	100	11					10	9	10	11	11	14	8	11	5	$f=9$ $\chi^2=4.603$ $80\% < \ddot{u} < 90\%$
Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Wert D_n ins Intervall fällt				2.00 % 11.04%	2.28 %	2.47 %	2.01 %	2.28 %	9.76 %	9.75 %	10.09 %	9.74 %	10.35 %	10.06 %	9.82 %	9.69 %	9.70 %	Summe=100.00%

Tabelle 10

KOLMOGOROFFscher Test für RDM, ZUFAL und RANDM

3.8 Erzeugung von exponentialverteilten Zufallszahlen durch das VON NEUMANNsche Verfahren

3.8.1 VON NEUMANNsches Verfahren

Eine Zufallsvariable Y nennt man exponentialverteilt, wenn ihre Verteilungsfunktion folgende Gestalt hat:

$$F(y) = 1 - e^{-y} \quad \text{für} \quad y \geq 0,$$
$$F(y) = 0 \quad \text{für} \quad y < 0.$$

Zufallszahlen, die einer solchen Verteilung genügen, werden öfter gebraucht.

Hat man rechteckverteilte Zufallszahlen x, so sind die Zahlen $y = -\ln x$ exponentialverteilt. Exponentialverteilte Zufallszahlen kann man aber auch mit einer Siebmethode oder "rejection technique" erzeugen. Das folgende Verfahren geht auf VON NEUMANN zurück.

Man erzeugt $r_{i,1}$ $(i = 1, 2 \ldots)$ Zufallszahlen, bis man ein Paar $r_{k-1,1}$, $r_{k,1}$ findet, für das $r_{k,1} > r_{k-1,1}$ gilt. Wenn k ungerade ist, bildet man eine neue Serie von Zufallszahlen $r_{i,2}$ usw., bis man eine Serie $r_{i,m}$ findet, für die k gerade ist. Die erste exponentialverteilte Zufallszahl ist $z = r_{1,m} + m - 1$.

In [14] - S. 262 findet man einen Beweis dafür. Die Effizienz dieser Methode ist

$$\varepsilon = (e-1)\, e^{-2} \cong 0.2325,$$

d.h. zur Erzeugung einer exponentialverteilten Zufallszahl benötigt man im Mittel $1/\varepsilon$ rechteckverteilte Zufallszahlen.

3.8.2 Tests.

Das Verfahren wurde mit Hilfe des KOLMOGOROFFschen Satzes und des iterierten χ^2-Tests getestet. Der KOLMOGOROFFsche Test lieferte ungefähr die gleichen Ergebnisse, wie im Fall von rechteckverteilten Zufallszahlen (vgl. Tabelle 7): die Verteilungsfunktion scheint zu gut approximiert zu werden. Um den iterierten χ^2-Test anwenden zu können, sind die exponentialverteilten Zufallszahlen in rechteckverteilte gemäß $z = e^{-y}$ zurücktransformiert worden.

Die Ergebnisse findet man in Tabelle 11. Die Effizienz der Methode war, bei der Erzeugung von 10.000 Zufallszahlen $\bar{\varepsilon} = 0.2313$ (die theoretische ist $\varepsilon \cong 0.2325$). Die Erzeugung von 10.000 exponentialverteilten Zufallszahlen erforderte ungefähr 30". Die gleiche Anzahl von Zufallszahlen ist gemäß $y = -\ln x$ in ungefähr 25" erzeugt worden. Da diese Zahlen auch bessere statistische Eigenschaften zeigen, empfiehlt es sich, das direkte (und einfachere) Verfahren zu benutzen.

ufallsgenerator nd nitialisation	Anzahl der erzeugten Zufalls-zahlen $m * n$	Freiheits-grade beim einfachen χ^2- Test	Total - χ^2 und ü-Intervall	Iteriertes χ^2 und ü-Intervall
OM OA=000 000 000 000	100*1000	99	291.00 ü<0.05%	13.8 10% < ü < 20%
	100*312	30	27.13 60% < ü < 70%	6.6 60% < ü < 70%
OM OA=333 333 333 333	100*1000	99	201.00 ü<0.05%	7.8 50% < ü < 60%
	100*121	10	10.089 40% < ü < 50%	16.0 5% < ü < 10%

Tabelle 11

terierter χ^2-Test für exponentialverteilte Zufallszahlen - nach
ON NEUMANN erzeugt - (jeweils m Blöcke von je n Zufallszahlen).

3.9 Eindimensionale Irrfahrt eines Teilchens.

3.9.1 Die eindimensionale Irrfahrt.

Man betrachte ein Teilchen, das sich auf einer Achse (y - Achse) bewegt, und nehme an, es könne nur Einheitsschritte in die positive oder negative Richtung zu den Zeitpunkten $t = 1, 2, \dots, n, \dots$ machen. Es sei dann p die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Teilchen sich in die positive Richtung bewegt, und q die Wahrscheinlichkeit eines negativen Schrittes $(p + q = 1)$. Dieser Prozeß, der das einfachste Modell der Diffusion von Teilchen ist, wird als "eindimensionale Irrfahrt" bezeichnet. Falls $p = q = 0{,}5$ ist, ist die Irrfahrt symmetrisch, sonst unsymmetrisch.

Die Irrfahrt eines Teilchens, auch in mehreren Dimensionen, wird ausführlich in [3] - Kap. III, XIV behandelt. Hier beschränken wir uns auf einige interessante und vielleicht überraschende Aussagen.

Wir betrachten jetzt den Fall der symmetrischen Irrfahrt und nehmen an, das Teilchen befinde sich zur Zeit $t = 0$ an der Stelle $y = 0$. Man kommt leicht auf den Gedanken, zu untersuchen, wie lange sich das Teilchen während seiner Fahrt auf der positiven Halbachse befindet. Darüber gilt folgender Satz (erstes Arcussinusgesetz):

"Für vorgegebenes α $(0 < \alpha < 1)$ und $n \to \infty$ strebt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Bruchteil der auf der positiven Seite verbrachten Zeit $< \alpha$ ist, gegen

$$(*) \qquad \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha} \frac{dx}{\{x(1-x)\}^{1/2}} = \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\alpha^{1/2}\right) ."$$

Die Funktion $\{x\,(1-x)\}^{-1/2}$ strebt nach unendlich für $x \to 0$ und $x \to 1$. Das heißt, es ist wahrscheinlicher, daß das Teilchen die ganze Zeit auf derselben Halbachse bleibt, als daß es die halbe Zeit auf der positiven, die halbe auf der negativen verbringt, wie man naiverweise vielleicht erwartet. Die Erklärung dafür liegt darin, daß das Teilchen bei zunehmender Zeit den Nullpunkt immer seltener erreicht. Die Anzahl der "returns" zum Nullpunkt ist nicht der Zeit $2n$ proportional, sondern ihrer Quadratwurzel $(2n)^{1/2}$. Darüber gilt folgender Satz:

"Für alle $\alpha > 0$ strebt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Teilchen innerhalb der Zeit $2n$ weniger als $\alpha(2n)^{1/2}$ mal den Nullpunkt erreicht, für $n \to \infty$ gegen

$$(**) \qquad f(\alpha) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{\alpha} e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds = 2\,\Phi(\alpha) - 1,$$

wobei $\Phi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ ist".

3.9.2 Ergebnisse für ein Beispiel der symmetrischen Irrfahrt.

Unter Benutzung von RDM wurde der Weg eines Teilchens mit 130 000 Schritten gewürfelt. Es ergab sich folgendes:

Die Ordinate des Teilchens ist	>0	für insgesamt	53 337	Schritte,
"	$=0$	"	332	" ,
"	<0	"	76 331	" .

Sie liegt innerhalb der Grenzen -256 und 168. Nach (*) liegt die asymptotische Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Bruchteil der auf der positiven Seite verbrachten Zeit $\leq \frac{53\,337}{130\,000}$ ist, zwischen 40% und 50%. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Teilchen den Nullpunkt 332-mal oder öfter erreicht, ist $\cong 52\%$.

Die dazugehörige FORTRAN-Liste ist in § 4.9 enthalten.

3.9.3 Beispiel für die unsymmetrische Irrfahrt.

Dasselbe Experiment wurde für eine unsymmetrische Irrfahrt durchgeführt. Bei den Wahrscheinlichkeiten $p = 0.51$, $q = 0.49$ erhält man nach 10.000 Schritten folgende Ergebnisse:

Das Teilchen befindet sich	auf der positiven Seite	für 9957	Schritte,
"	im Nullpunkt	" 15	" ,
"	auf der negativen Seite	" 28	" .

Es bewegt sich innerhalb des Intervalls (-3,228) und beim 10 000. Schritt wird die Ordinate 190 erreicht, während die Erwartung der Ordinate beim 10 000. Schritt den Wert $10\,000 \cdot (p-q) = 200$ und die entsprechende Streuung den Wert $\sigma = 100$ hat.

3.9.4 Verteilung des zurückgelegten Weges eines Teilchens nach N Schritten.

n Teilchen führen eine symmetrische Irrfahrt mit derselben Anzahl von Schritten durch. Die Verteilung der Ordinaten, die die Teilchen zur Zeit N erreicht haben, muß für ein hinreichend großes n die Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Varianz $\sqrt{N}$ approximieren.

Ein Test wurde mit $n = 10\,000$ und $N = 1\,024$ durchgeführt. Auf die erhaltene Verteilung wurde der KOLMOGOROFFsche Test angewandt; als maximale Abweichung erhielt man $D_n = 0.1159 * 10^{-1}$.
Die Wahrscheinlichkeit

$$P\left\{\sqrt{10\,000} * D_n \geq 1.159\right\} \cong 0.14$$

liegt im zulässigen Bereich.

.10 Beurteilung der untersuchten Zufallsgeneratoren aufgrund der Testresultate.

Test	RDM	ZUFAL	RANDM
terierter χ^2-Test für die Häufigkeiten) Totales χ^2) Iteriertes χ^2	a) gut b) gut	a) annehmbar b) gut	a) gut b) gut
terierter χ^2-Test über die Verteilung es Maximums von n Zufallszahlen) Totales χ^2) Iteriertes χ^2	a) gut b) gut	a) gut b) gut	a) gut b) gut
oupon-collector's Test	gut	annehmbar	annehmbar
ückentest	gut	gut	gut
erientest	gut	kaum annehmbar	gut
est über steigende und fallende Teilequenzen) Zählung) χ^2-Test	a) gut b) gut	a) gut b) gut	a) gut b) gut
OLMOGOROFFscher Test (für eine große Anzahl von Versuchen)	annehmbar	gut	annehmbar
rzeugung von exponentialverteilten ufallszahlen nach VON NEUMANN) KOLMOGOROFFscher Test) Iterierter χ^2-Test für die Häufigkeiten	Bei kleineren Mengen von Zahlen gut, bei größeren schlecht	Test nicht durchgeführt	Test nicht durchgeführt
ndimensionale Irrfahrt	gut	"	"
eriodenlänge	2^{35}	variabel, hängt von Initialisation ab. Nicht sehr groß. s. § 2.2.2.	2^{33} für U, 2^{35} für V, also sehr groß

Für Programmierungsarbeiten und Durchführung von Rechnungen auf der Garchinger IBM 7090 danken wir unserer Programmierer-Gruppe.

Der eine der Verfasser (Gorenflo) möchte an dieser Stelle erwähnen, daß er während seiner Tätigkeit bei der Standard Elektrik Lorenz AG in Stuttgart (1961-1962) Gelegenheit hatte, das Gebiet der Monte-Carlo-Methoden gründlich kennenzulernen und einige der in diesem Bericht beschriebenen Verfahren zu erarbeiten. Er verdankt viel den stets anregenden Diskussionen mit dem leider allzu früh verstorbenen Herrn W. Bauer, damals Leiter der Abteilung Programm-Technik des Informatikwerks der SEL.

4. Programme

4.1 RDM

4.1.1 Beschreibung

Der Zufallsgenerator RDM besteht aus drei FAP-Unterprogrammen RDMIN (ØCT), RDM (DUMMY), RDMØUT (ØCT).

Durch RDMIN (ØCT) wird die Subroutine RDM (DUMMY) initialisiert. Dazu braucht man das FORTRAN-Statement CALL RDMIN (ØCT), wobei ØCT eine 12-ziffrige Oktalzahl ist. Die Subroutine benutzt 10 Plätze.

RDM (DUMMY) ruft man durch das FORTRAN Statement ZZ=RDM (DUMMY) auf. DUMMY ist eine "stumme" Variable, die man nicht zu definieren braucht. In ZZ befindet sich die erzeugte Zufallszahl in Gleitkomma-Form. Soll die Anfangszahl r_0 = 000 000 000 000 sein, dann braucht man keine Initialisation durch RDMIN. RDM benutzt 15 Plätze.

RDMØUT (ØCT) liefert die letzte erzeugte Zufallszahl als Oktalzahl. Sie wird durch das Statement CALL RDMØUT (ØCT) aufgerufen. In ØCT befindet sich die gewünschte Oktalzahl. Die Subroutine benötigt 10 Plätze.

4.1.2. ZUFALLSGENERATOR RDM.

```
*       FAP
GC0011 REM    11 04152
       COUNT    8
       ENTRY    RDMIN
 RDMIN CLA      $RDM
       ADD      CON
       STA      *+2
       CLA*     1,4
       STO
       TRA      2,4
   CON OCT      12
       END
```

```
*       FAP
       COUNT    15
       ENTRY    RDM
   RDM CLA      X
       ALS      7
       ADD      X
       ADD      C
       STO      X
       CLA      X
       ARS      8
       ORA      MASK
       FAD      MASK
       TRA      2,4
     X OCT      200000000000
     C OCT      311715164025
  MASK OCT      200000000000

       END
```

```
       COUNT    8
       ENTRY    RDMOUT
RDMOUT CLA      $RDM
       ADD      CON
       STA      *+1
       CLA
       STO*     1,4
       TRA      2,4
   CON OCT      12
       END
```

4.2 ZUFAL

4.2.1 Benutzung

Zur Initialisation benutzt man das Statement CALL ZUFAL 3 (ZUF, Z, ZUFE), wobei ZUF als 12-ziffrige Oktalzahl eingelesen wird. ZUFE ist die Oktalzahl, die erzeugt wird, und Z die Gleitkomma-Zufallszahl.

Um weitere Zufallszahlen herzustellen, verwendet man den Aufruf CALL ZUFAL 2 (Z, ZUFE), wobei Z und ZUFE dasselbe wie oben bedeuten. Das Unterprogramm benötigt 27 Speicherplätze.

4.2.2. ZUFALLSGENERATOR ZUFAL .

```
*      FAP
*                CALL ZUFAL3 (ZUF,X,ZUFE)
*                 ZUF OKTALE AUSGANGSZAHL     Z.B.  B     ZUF=063511357067
*                 X   ZUFALLSZAHL
*                 ZUFE OKTALER ENDWERT VOR DER KONVERTIERUNG
*                CALL ZUFAL2 (X,ZUFE)
*
*
       COUNT    25
       LBL      ZUF20000,L
       ENTRY    ZUFAL2
       ENTRY    ZUFAL3
ZUFAL3 CLA*     1,4
       STO      ZUF
       STO      ZUF+1
       TXI      *+1,4,-1
ZUFAL2 CLA      1,4               X
       STA      X
       CLA      2,4               ZUFE
       STA      ZUFE
       LDQ      ZUF
       MPY      ZUF+1
       LRS      14
       STQ      ZUF
       LRS      5
       XCA
       STO      ZUF+1
       ARS      9
       ORA      CHAR
       FAD      CHAR
     X STO      *
       CLA      ZUF+1
  ZUFE STO      *
       TRA      3,4
  CHAR OCT      201000000000
   ZUF BSS      2
       END
```

4.2.3. ZUFALLSGENERATOR RANDM

```
        ENTRY   RANDM
        ENTRY   RAN
RANDM   SXA     X1,1
        CLA*    1,4
        STO     U-1
        CLA*    2,4
        STO     V
        AXT     1,1
LOOP    CLA     U,1
        ALS     17
        ADD     U,1
        ADD     U,1
        ADD     U,1
        STO     U-1,1
        TXI     *+1,1,1
        TXL     LOOP,1,127
        STO     U1
X1      AXT     **,1
        TRA     3,4
RAN     SXA     X2,1
        CLA     1,4
        STA     X3
        CLA     V
        ALS     7
        ADD     V
        ADD     ONE
        STO     V
        ARS     28
        ANA     MASK
        ADD     ONE
        PAX     Ø,1
        CLA     U,1
        ARS     8
        ORA     ONE+1
        FAD     ONE+1
X3      STO     **
        CLA     U1
        ALS     17
        ADD     U1
        ADD     U1
        ADD     U1
        STO     U,1
        STO     U1
X2      AXT     **,1
        TRA     2,4
U       BES     128
V       PZE
U1      PZE
ONE     PZE     1
        OCT     200000000000
MASK    OCT     000000000177
        END
```

4.3. ITERIERTER CHI-QUADRAT-TEST FUER DIE HAEUFIGKEITEN.

```
C     ITERIERTER  CHI-QUADRAT-TEST  FUER RDM
C
C     DAS INTERVALL VON 0 BIS 1 WIRD IN K TEILE ZERLEGT.
C     TEIL-INTERVALL NR. I GEHT VON (I-1)/K EINSCHLIESSLICH BIS
C     I/K AUSSCHLIESSLICH.
C     M BLOECKE ZU JE N ZUFALLSZAHLEN ZZ WERDEN ERZEUGT.
C     FUER JEDEN BLOCK WIRD GEMAESS DER K-TEILUNG CHI-QUADRAT
C     =CHIQ BERECHNET.
C     DIE CHIQ-VERTEILUNG MIT K-1 FREIHEITSGRADEN WIRD, BEI K=0
C     BEGINNEND,IN 10 DEZIL-INTERVALLE GETEILT,FUER JEDES
C     DERSELBEN WIRD GEZAEHLT,WIE OFT CHIQ HINEINFAELLT.
C     HIERAUS WIRD CHIQUADRAT ITERIERT = CHIQIT BERECHNET.
C     FERNER WERDEN ERMITTELT
C                           CHIQMI = MIN(CHIQ)
C                           CHIQMA = MAX(CHIQ)
C     UND FUER DIE GESAMTMENGE ALLER M*N ZZ
C                           CHIQTO = CHIQUADRAT-TOTAL(ZU K-1
C     FREIHEITSGRADEN).
C     JE NACH WUNSCH KOENNEN DIE EINZELNEN WERTE CHIQ AUS-
C     GEDRUCKT WERDEN.
C     EBENSO DIE GESAMTZAHLEN JINTO ALLER ZZ,DIE IN
C     INTERVALL NR. I FALLEN.
C     M/10 UND N/K SOLLEN NICHT KLEINER SEIN ALS 10,AUF
C     KEINEN FALL KLEINER ALS 5.
C
      DIMENSION CHIQ(10000),DEZ(10)
      DIMENSION JINT(7000),JINTO(7000),JICH(10)
C     MAXIMAL ALSO  M=10000,K=7000
C
         DEZ(10) = 1.E38
C
      READ INPUT TAPE 12,101,LAUFM
      DO 25  LAUF = 1,LAUFM
      READ INPUT TAPE 12,100,(DEZ(I),I=1,9)
      READ INPUT TAPE 12,101,K,M,N,KOCH,JINKO
      READ INPUT TAPE 12,102,BOA
C
C     BOA    BOOLESCHE ANFANGSZAHL   FUER INITALISATION
C     KOCH   KONTROLLIERT DRUCK VON CHIQ
C     JINKO  KONTROLLIERT DRUCK VON JINTO
C
C     DRUCK,WENN KONTROLLWERT POSITIV
C     KEIN DRUCK,WENN KONTROLLWERT NEGATIV
C
         AM = M
         AN = N
         KM1 = K-1
         TOTAL = AM*AN
      CALL RDMIN(BOA)
      WRITE OUTPUT TAPE 3,200,K,KM1,M,N,TOTAL,BOA,KOCH,JINKO
      WRITE OUTPUT TAPE 3,210,(DEZ(I),I=1,9)
C
      DO 1  I=1,K
    1    JINTO(I) = 0
C
      DO 2 I=1,10
    2    JICH(I) = 0
C     JICH(I) ZAEHLT DIE CHIQ-WERTE,DIE IN DAS DEZIL-INTERVALL I FALLEN
C
         AK = K
      DO 3 JM = 1,M
C     JM ZAEHLT DIE BLOECKE
      DO 4 I=1,K
```

```
    4     JINT(I) = 0
C       JINT(I) ZAEHLT JE BLOCK,WIEVIEL ZZ IN INTERVALL I FALLEN
        DO 5 JN = 1,N
C       JN ZAEHLT JE BLOCK DIE ZZ


        ZZ=RDM(DUMMY)

          IZ = AK*ZZ+1.
    5     JINT(IZ) = JINT(IZ)+1
          SUM = 0.
        DO 6 I=1,K
        JINTO(I) = JINTO(I) + JINT(I)
    6   SUM = SUM + (FLOATF(JINT(I))-AN/AK)**2
          CHIQ(JM) = AK/AN*SUM
C
        DO 7 I=1,10
        IF(CHIQ(JM)-DEZ(I))8,7,7
    8     JICH(I)=JICH(I)+1
        GO TO 3
    7   CONTINUE
    3   CONTINUE
C
          SUM = 0.
        DO 9 I=1,10
    9     SUM = SUM+(FLOATF(JICH(I))-AM/10.)**2
        CHIQIT = 10./AM*SUM
C
          SUM = 0.
        DO 10 I=1,K
   10     SUM = SUM+(FLOATF(JINTO(I))-TOTAL/AK)**2
          CHIQTO=AK/TOTAL*SUM
C
C       MINIMA UND MAXIMA
          CHIQMI = CHIQ(1)
          CHIQMA = CHIQ(1)
          IMI = 1
          IMA = 1
        DO 11 I=2,M
C
        IF(CHIQMI-CHIQ(I))12,13,13
   13     CHIQMI = CHIQ(I)
          IMI = I
   12   IF(CHIQMA -CHIQ(I))14,14,11
   14     CHIQMA = CHIQ(I)
          IMA = I
   11   CONTINUE
C
          PROZ5 = 16.919
          PROZ1 = 21.666
          P1D10 = 27.877
C
        CALL RDMOUT(BOL)
        WRITE OUTPUT TAPE 3,201,BCA
        WRITE OUTPUT TAPE 3,202,CHIQIT,PROZ5,PROZ1,P1D10,
       1CHIQMI,IMI,CHIQMA,IMA,CHIQTO
C
        IF(KOCH) 15,16,16
   16     MIN = 1
          MAX = 10
        WRITE OUTPUT TAPE 3,205
   17   WRITE OUTPUT TAPE 3,206,MIN,MAX,(CHIQ(JM),JM=MIN,MAX)
          MIN = MIN+10
          MAX = MAX+10
          MAXMM = MAX-M
        IF(MAXMM) 17,17,23
   23     MAXDI = 10-MAXMM
```

```
      IF(MAXDI) 15,15,24
  24     MAX = MAX-10+MAXDI
      GO TO 17
  15  IF(JINKO) 18,19,19
  19  WRITE OUTPUT TAPE 3,207
         MIN = 1
         MAX = 10
  20  WRITE OUTPUT TAPE 3,208,MIN,MAX,(JINTO(I),I=MIN,MAX)
         MIN = MIN+10
         MAX = MAX+10
         MAXMK = MAX-K
      IF(MAXMK) 20,20,21
  21     MAXDI = 10-MAXMK
      IF(MAXDI) 18,18,22
  22     MAX = MAX-10+MAXDI
      GO TO 20
  18  WRITE OUTPUT TAPE 3,209,(JICH(I),I=1,10)
  25  CONTINUE
      CALL EXIT
C     FORMATE
 100  FORMAT(6F12.4)
 101  FORMAT(6I12)
 102  FORMAT(20I2)
C
 200  FORMAT(1H1,33HDAS EINHEITSINTERVALL WIRD IN K =I4,74H TEILE ZERLEG
     1T, (J-1)/K EINSCHLIESSLICH BIS J/K AUSSCHLIESSLICH, J=1 BIS K/
     21HJ, 83HCHIQIT HAT 9 FREIHEITSGRADE, ALLE ANDEREN MIT CHIQ BEGINNE
     3NDEN GROESSEN HABEN K-1 =I4,15H FREIHEITSGRADE/
     41HJ,13HES WERDEN M =I6,19H BLOECKE MIT JE N =I4,51H ZUFALLSZAHLEN
     5 ZZ UNTERSUCHT, IM GANZEN ALSO M*N =E18.8,3H ZZ/
     61HK, 28HINITIALISIERT WIRD MIT BOA =O12,
     7    39H DRUCKKONTROLLWERT FUER CHIQ IST KOCH =I4/41X,
     8         41H DRUCKKONTROLLWERT FUER JINTO IST JINKO =I4)
 201  FORMAT(1HK,17HR E S U L T A T E/18X,32HLETZTE ERZEUGTE ZUFALLSZAHL
     1 BOL=O12)
 202  FORMAT(18X,30HITERIERTES CHIQUADRAT CHIQIT =E13.5/54X,16H5-PROZENT
     1-WERT =F10.3/54X,16H1-PROZENT-WERT =F10.3/52X,18H0.1-PROZENT-WERT
     2=F10.3//18X,30HMINIMALES  CHIQUADRAT CHIQMI =E13.5,16H FUER BLOCK
     3NR. I6//18X,30HMAXIMALES  CHIQUADRAT CHIQMA =E13.5,16H FUER BLOCK
     4NR. I6//18X,30HTOTALES    CHIQUADRAT CHIQTO =E13.5)
 205  FORMAT(1H1,39HTABELLE DER EINZELNEN BLOCK-CHIQUADRATE//5X,2HJM,5X,
     119HDIE WERTE  CHIQ(JM)//)
 206  FORMAT(1H ,I5,1H-,I5,1P10E12.4)
 207  FORMAT(1H1,67HTABELLE DER TOTALANZAHLEN  JINTO(I),DER IN INTERVALL
     1 I FALLENDEN ZZ//5X,1HI,6X,18HDIE WERTE JINTO(I)//)
 208  FORMAT(1H ,I5,1H-,I5,10I12)
 209  FORMAT (1H2,65HTABELLE DER ANZAHL DER CHIQUADRATE DER EINZELNEN DE
     1ZIL-INTERVALLE///10I12)
 210  FORMAT (1HJ,25HDIE 10 DEZILWERTE SIND   /9F12.4,11H  UNENDLICH)
```

4.4. COUPON-COLLECTOR S TEST.

```
C
C
C
C     GUTSCHEIN-SAMMLER-TEST  (COUPON COLLECTOR S TEST)
C
C     MIT RDM   WERDEN GEMAESS IZU=Y*Z(Z EINE POSITIVE GANZE
C     ZAHL) GANZE ZUFALLSZAHLEN 0,1,2,.....,Z-1 ERZEUGT.
C     Y WIRD DURCH RDM   GEWONNEN.
C     M MAL (M KLEINER ALS 2**17) WIRD GEZAEHLT,WIE OFT(K MAL) MAN
C     WUERFELN MUSS,BIS JEDE DER ZAHLEN 0,1,2,.....,Z-1 MINDESTENS
C     1 MAL ERSCHIENEN IST.
C     IST Z.B. Z=10,UND IZU DER REIHE NACH 1,0,1,2,3,3,9,2,7,4,6,8,5/
C     0,2,2,7,6,9,5,4,3,1,8/.....,SO IST K=13,K=11 USW.
C     J(I) ZAEHLT,WIEVIELE DER K=I SIND,FUER I KLEINER ODER GLEICH
C     KGRENZ.
C     MIT JEX WIRD DIE ANZAHL ALLER K BEZEICHNET,DIE GROESSER ALS
C     KGRENZ SIND.
C     DIE J(I) UND JEX WERDEN AUSGEDRUCKT.
C     KGRENZ DARF NICHT GROESSER ALS 1000 SEIN
C
      DIMENSION J(1000),JI(1000),FOR(10),FORMAT(5),SOR(10)
C
       READ INPUT TAPE 12,98,BOA
   98 FORMAT(2012)
   18 READ INPUT TAPE 12,100,Z,M,  KGRENZ
         ZM1 = Z-1.
      WRITE OUTPUT TAPE 3,101,Z,M,ZM1,BOA
C
      CALL RDMIN(BOA)
         IZ = Z
D        SUM3 = 0.
         JEX = 0
      DO 20  L=1,KGRENZ
   20    J(L) = 0
      DO 6  II=1,M
      DO 13   L=1,IZ
   13    JI(L)= 0
         K    = 0
         NULL = 0
         MIN  = 1
    4 DO 1   I=1,IZ
         Y=RDM(DUMMY)
         IZU = Y*Z+1.
         JI(IZU) = JI(IZU)+1
         K = K+1
         NIL = NULL-IZU
      IF(NIL)    1,5,1
    1 CONTINUE
C
    5 DO 2  I=1,IZ
      IF(JI(I))  2,3,2
    3    NULL = I
      GO TO 4
    2 CONTINUE
C
      IF(K-KGRENZ)  8,8,7
    7    JEX = JEX+1
      GO TO 6
    8    J(K) = J(K)+1
D   6    SUM3=SUM3+FLOATF(K)
D        SUM1 = 0.
D        SUM2 = 0.
```

```
C
        IZM1 = ZM1
     DO14    I=1,IZM1
D       AI = I
D       SUM1 = SUM1+1./AI
D  14   SUM2 = SUM2+AI/(Z-AI)**2
C
D       SUM1 = SUM1+1./Z
D       AM = M
D       EXPECO = Z*SUM1
D       VARCO  = Z*SUM2
D       SIGCO  =  SQRTF(VARCO)
D       CONOR  = (SUM3-AM*EXPECO)/ SQRTF(AM*VARCO)
C
D       EANZ=FLOATF(M)*EXPECO
        ISUM=0
        ZU = 0.
     DO 19 I=IZ,KGRENZ
        ZU = ZU + FLOATF(J(I))*FLOATF(I)
   19   ISUM=J(I)+ISUM
        ISUM=ISUM+JEX
     CALL RDMOUT(BOL)
     WRITE OUTPUT TAPE 3,102,SUM3,EANZ,ZU,BOL
     WRITE OUTPUT TAPE 3,104,JEX,KGRENZ,EXPECO,VARCO,SICCO,CONOR
     WRITE OUTPUT TAPE 3,105
C    ZUSATZ FUER DEN OUTPUT.
        IZ1 = IZ
        IA = XMODF(IZ,10)
        IA1= IA+1
C
        FOR(1) = 6H,108X,
        FOR(2) = 1H,
        FOR(3) = 5H,12X,
        FOR(4) = 5H,24X,
        FOR(5) = 5H,36X,
        FOR(6) = 5H,48X,
        FOR(7) = 5H,60X,
        FOR(8) = 5H,72X,
        FOR(9) = 5H,84X,
        FOR(10)= 5H,96X,
C
        SOR(1) = 5H1I12)
        SOR(2) = 6H10I12)
        SOR(3) = 5H9I12)
        SOR(4) = 5H8I12)
        SOR(5) = 5H7I12)
        SOR(6) = 5H6I12)
        SOR(7) = 5H5I12)
        SOR(8) = 5H4I12)
        SOR(9) = 5H3I12)
        SOR(10)= 5H2I12)
C
        FORMAT(4) = FOR(IA1)
        FORMAT(5) = SOR(IA1)
        MIN = IZ
        MIN1 = MIN+1
     DO 16   I=MIN1,KGRENZ
     IF (J(I))  17,16,17
   17   KDRUCK = I
   16 CONTINUE
     IF(IA)   40,41,40
   41   FORMAT(1) = 4H(7X,
        FORMAT(2) = 2HI5
        FORMAT(3) = 1H,
     WRITE OUTPUT TAPE 3,FORMAT,MIN,J(IZ)
        MAX = IZ1
        FORMAT(1) = 6H(1X,I5
```

```
      FORMAT(2) = 4H,1H-
      FORMAT(3) = 3HI5,
   GO TO 44
40    IZ1 = IZ1+1
      IA2 = XMODF(IZ1,10)
   IF(IA2)   40,42,40
42    FORMAT(1) = 6H(1X,I5
      FORMAT(2) = 4H,1H-
      FORMAT(3) = 3HI5,
      MAX = IZ1
 9 WRITE OUTPUT TAPE 3,FORMAT,MIN,MAX,(J(I),I=MIN,MAX)
44    MIN = MAX+1
      MAX = MIN+9
C
      FORMAT(4) = FOR(2)
      FORMAT(5) = SOR(2)
C
      MAXMKG = MAX-KDRUCK
   IF(MAXMKG)  9,9,10
10    MAXDI = 10-MAXMKG
   IF(MAXDI)  11,11,12
12    MAX = MAX-10+MAXDI
   GO TO 9
11 WRITE OUTPUT TAPE 3,107,ISUM
   GO TO 18
107 FORMAT(1HL,70X,41HKONTROLLRECHNUNG.....SUMME ALLER J(I) =M=,I12)
100 FORMAT(F12.4,I12,    I12)
101 FORMAT(1H1,23HGUTSCHEINSAMMLER - TEST/1HJ,46HANZAHL DER MOEGLICHEN
   1 GANZEN ZUFALLSZAHLEN =Z=F4.0/1HJ,10HES WIRD M=I6,82H MAL GEZAEHLT
   2,WIE OFT (K MAL) MAN WUERFELN MUSS,BIS JEDE GANZE ZAHL VON 0 BIS Z
   3-1=F4.0/33H MINDESTENS EINMAL ERSCHIENEN IST/1HJ,19HINITIALISATION
   4BOA =O12)
102 FORMAT(1HL,60HGESAMTANZAHL DER ERZEUGTEN ZUFALLSZAHLEN IST SUMME A
   1LLER K =E18.8,
   15X,18HERWARTETE ANZAHL =E18.8/
   1 1H ,22X,38HKONTROLLE FUER SUMME DER ZZ AUS J(I) =E18.8,
   131H  JEX IST NICHT BERUECKSICHTIGT///
   1               1HJ,29HLETZTE ERZEUGTE ZUFALLSZAHL =O12)
105 FORMAT(1HL,12X,35HTABELLE DER J(I) = ANZAHLEN DER K=I/
   11HK,7X,1HI,14X,1H1,11X,1H2,11X,1H3,11X,1H4,11X,1H5,11X,1H6,11X,1H7
   2,11X,1H8,11X,1H9,11X,1H0,///)
106 FORMAT (1H ,I5,1H-,I5,10I12)
104 FORMAT(1HL,5HJEX =I8,34H ANZAHLEN DER K ,DIE GROESSER ALS I8,
   15H SIND/1HJ29HERWARTUNG FUER K IST EXPECO =E18.8/
   21HJ,29HVARIANZ    VON K IST VARCO  =E18.8/
   3 1HJ,29HSIGMA      VON K IST SIGCO  =E18.8/
   4 1HJ,78HNORMALER ERSATZWERT DER GANZEN ZAEHLUNG MIT MITTEL 0 UND V
   5ARIANZ 1 IST CONOR =E18.8)
    END
```

4.5. LUECKENTEST VON RDM FUER DIE ZIFFERN 1 BIS 9 .

```
C     DIE T WERTE VON 0 BIS T-1 WERDEN DURCH RDM GEMAESS J=RDM(DUMMY)*T
C     ERZEUGT,BIS JEDE N=MAL VORKOMMT.
C     AUS DEN ZAHLENFOLGEN WERDEN DANN DIE JEWEILIGEN WARTEZEITEN ITAU
C     (J) FESTGESTELLT.

C     IM MITTEL IST DIE WARTEZEIT GLEICH T. DESWEGEN BRAUCHT MAN
C     IM MITTEL N*T ZUFALLSZAHLEN,DAMIT EIN WERT N-MAL AUFTRITT.

C     N(J,K) ZAEHLT, WIE OFT DIE WARTEZEIT K BEI DEM WERT J (J=0,...T-1)
C     VORGEKOMMEN IST.
C     DIE WERDEN DANN ZUSAMMENGAFASST,WIE FOLGT.
C     N(J,16) ZAEHLT DIE WARTEZEITEN ITAU(J)=16,17,...20
C     N(J,17) ZAEHLT DIE WARTEZEITEN ITAU(J)=21,...25
C     N(J,18) ZAEHLT DIE WARTEZEITEN ITAU(J)=26,...30
C     N(J,19) ZAEHLT DIE WARTEZEITEN ITAU(J)=31,...40
C     N(J,20) ZAEHLT DIE WARTEZEITEN ITAU(J) GROESSER ALS 40.
C     DIE JEWEILIGEN WAHRSCHEINLICHKEITEN WERDEN GEMAESS
C     (1./T)*((T-1)/T)**(K-1) AUSGERECHNET UND DADURCH DIE T WERTE
C     DER FUNKTION CHIQUADRAT.
C     DIE ANZAHL DER FREIHEITSGRADE IST 19.


      DIMENSION JZ(10),ITAU(10),N(10,40),N20(10)   ,IBEAN(10)    ,
     1   PE(20),CHIQU(10)   ,ALPHA(10)


      READ INPUT TAPE 12,99,BOA
   99 FORMAT(  O12)
      WRITE OUTPUT TAPE 3,98,BOA
   98 FORMAT(1H1,17H ES WIRD MIT BOA=O12,14H INITIALISIERT/)
      CALL RDMIN(BOA)
      READ INPUT TAPE 12,100,T,NE ,LZ
         L1=0
   18 WRITE OUTPUT TAPE 3,150,T,NE   ,LZ
C     LZ GIBT DIE ZAHL AN ,WIE OFT DAS PROGRAMM WIEDERHOLT WERDEN SOLL

         L=0
         I=0

    3    D=RDM(DUMMY)
         J=D*T+1.
         I=I+1
C     I ZAEHLT DIE ZUFALLSZAHLEN

         JZ(J)=JZ(J)+1
C     JZ(J) GIBT DIE ANZAHL DER GLEICHEN ZUFALLSZAHLEN AN.

      DO 20 M=1,10
   20    ITAU(M)=ITAU(M)+1
C     ITAU(M) ZAEHLT DIE VORLAEUFIGEN WARTEZEITEN.

         IF(JZ(J)-NE)7,8,3

    7    K=ITAU(J)
      IF(K-41)1,2,2
    1    N(J,K)=N(J,K)   +1
      GO TO 5
    2    N20(J)=N20(J)+1
C     N(J,K) ZAEHLT WIE OFT DIE GLEICHEN WARTEZEITEN AUFTRETEN BEI
C     JEDER ZIFFER.
    5    ITAU(J)=0
         GO TO 3
```

```
    8     K=ITAU(J)
          IF(K-41)11,12,12
   11     N(J,K)=N(J,K)   +1
          GO TO 13
   12     N20(J)=N20(J)+1
   13     ITAU(J)=0
          IBEAN(J)=I
C      IBEAN(J)=BENOETIGTE ANZAHL

          L=L+1
       IF(L-10)3,6,6




    6  DO 21  J=1,10

       DO 22  K=17,20
          N(J,16)=N(J,16)+N(J,K)
   22     N(J,K)=0

       DO 23  K=21,25
   23     N(J,17)=N(J,17)+N(J,K)

       DO 24  K=26,30
   24     N(J,18)=N(J,18)+N(J,K)

       DO 25  K=31,40
   25     N(J,19)=N(J,19)+N(J,K)
          N(J,20)=N20(J)

   21  CONTINUE

C      DO 21-SCHLEIFE TRIFFT DIE EINTEILUNG DER WARTEZEITEN.
C      UNABHAENGIG VON DEN TATSAECHLICHEN WERTEN WIRD PE(K) BERECHNET,DIE
C      WAHRSCHEINLICHKEIT.


          L1=L1+1
       IF(L1-1)14,14,15



   14     T=10.
          EN=NE
          DT=1./T
          TM1DT=(T-1.)/T

       DO 26  K=1,15
          PE(K)=DT*(TM1DT)**(K-1)
   26     PE(K)=PE(K)*EN

       DO 27  K=16,20
   27     PE(16)=PE(16)+DT*(TM1DT)**(K-1)
          PE(16)=PE(16)*EN

       DO 28  K=21,25
   28     PE(17)=PE(17)+DT*(TM1DT)**(K-1)
          PE(17)=PE(17)*EN

       DO 29  K=26,30
   29     PE(18)=PE(18)+DT*(TM1DT)**(K-1)
          PE(18)=PE(18)*EN

       DO 30  K=31,40
   30     PE(19)=PE(19)+DT*(TM1DT)**(K-1)
          PE(19)=PE(19)*EN
```

```
      PE(20)=TM1DT**40
      PE(20)=PE(20)*EN

C     PE(K) WURDE NACH OBIGEM BERECHNET
C     DIE PE(K)'WERTE MUESSEN ERHALTEN BLEIBEN.

C     ALPHA'BERECHNUNG    UND (CHI)**2'BERECHNUNG    ..

C     ALPHA=(IBEAN(J)-EN*T)/SQRTF(EN*T*(T-1.))
C     ENT=EN*T
C     QUAWU=SQRTF(EN*T*(T-1.))
C     ENT UND QUAWU BLEIBT IMMER GLEICH UND WURDE ANGEGEBEN.

      ENT=10000.
      QUAWU=300.

   15 DO 31 J=1,10
      ALPHA(J)=(FLOATF(IBEAN(J))-ENT)/QUAWU
      DO 31 K=1,20
      AN=N(J,K)

   31 CHIQU(J)=CHIQU(J)+(AN-PE(K))**2/PE(K)

      WRITE OUTPUT TAPE 3,151,(K,K=1,20)

      DO 33 J=1,10
      J1=J-1
   33 WRITE OUTPUT TAPE 3,152,J1,(N(J,K),K=1,20)

      WRITE OUTPUT TAPE 3,153

      DO 34 J=1,10
      J1=J-1
   34 WRITE OUTPUT TAPE 3,154,J1,CHIQU(J),IBEAN(J) ,ALPHA(J)

      CALL RDMCOUT(BOL)
      WRITE OUTPUT TAPE 3,160,BOL
      WRITE OUTPUT TAPE 3,157,L1

C

      IF(L1-LZ)16,17,17
C     L1 ZAEHLT DIE LAEUFE.

   16 DO 35 J=1,10
      JZ(J)=0
      ITAU(J)=0
      N20(J)=0
      IBEAN(J)=0
      CHIQU(J)=0.

      DO 36 K=1,40
   36 N(J,K)=0
   35 CONTINUE

C     BEVOR EIN NEUER LAUF BEGINNT MUESSEN OBIGE SPEICHERPLAETZE NULL
C     GESETZT WERDEN.
```

```
      GO TO 18

 17 CALL EXIT



100     FORMAT(F8.0,2I6)
150 FORMAT(1H0,10X,8H DATEN..,6H     T=F4.0,6H     N=I8
   1    28H     ANZAHL DER LAEUFE (LZ) =  I4////)
151 FORMAT(20X,18H ANZAHL VON N(J,K)///
   1         5X,6H J / K,4X(20I5)/)
152 FORMAT(/5X,I2,8X(20I5))
153 FORMAT(1H2,20X,6HZIFFER,18X,8H(CHI)**2,20X      ,
   1    17HBENOETIGTE ANZAHL ,24X,8HALPHA(J)///)
154 FORMAT(22X,I2,17X,E15.8,23X,I6,25X,E15.8)
157 FORMAT(1H7,20X,9H ENDE DES, I4, 10H. LAUFES.    )
160 FORMAT(38H0   LETZTE ERZEUGTE ZUFALLSZAHL  BOL =O12/)
```

4.6. SERIENTEST.

```
C     SERIENTEST UEBER RDM
C     RDM LIEFERT GEMAESS J=RDM(DUMMY)*AK+1. DIE K WERTE 1,2,...K
C     MAN ERZEUGT 2*N ZAHLEN,DIE AUF ZWEI ARTEN IN PAARE EINGETEILT
C     WERDEN.
C     MAN BEKOMMT NAEMLICH EINMAL DIE PAARE
C     (J(1),J(2)),...(J(2*N-1),J(2*N))
C     UND DANN
C     (J(2),J(3)),(J(4),J(5)),...(J(2*N),J(1))
C     AN1(J,K) (J,K=1,2,...K) ZAEHLT, WIE OFT DAS PAAR (J,K) BEI DER
C     ERSTEN PAAREBILDUNG VORKOMMT.
C     AN2(J,K) BEDEUTET DASSELBE BEI DER ZWEITEN PAAREBILDUNG.
C     DADURCH BERECHNET MAN ZWEI WERTE DER FUNKTION CHIQUADRAT,DIE
C     K**2-1 FREIHEITSGRADE HAT.

C     ES WERDEN DIE SUBROUTINEN RDM,RDMIN,BENUTZT.
      DIMENSION AN1(100,100),AN2(100,100)
      DIMENSION J(2000)
         READ INPUT TAPE 12,103,BOA
      CALL RDMIN(BOA)

      WRITE OUTPUT TAPE 3,200

      READ INPUT TAPE 12,100,K,N
      WRITE OUTPUT TAPE 3,400,K,N
       WRITE OUTPUT TAPE 3,201,BOA

         AK=K

      DO 25 L=1,K
      DO 25 M=1,K
         AN1(L,M)=0.
   25    AN2(M,L)=0.

C     ANZAHL DER PAARE (L,M) BERECHNEN

         NA=2*N
      DO 10 IK=1,NA
         D = RDM(DUMMY)
   10    J(IK)=D*AK+1.,
      CALL RDMOUT(BCL)

         ANS1=0.
         ANS2=0.

      DO 40 IK=1,NA,2

         L=J(IK)
         LK=IK+1
```

```
      M=J(LK)
     AN1(L,M)=AN1(L,M)+1.
40 CONTINUE


      NMA=NA-1
   DO 50 IK=2,NMA,2

      M=J(IK)
      LK=IK+1
      L=J(LK)
50 AN2(M,L)=AN2(M,L)+1 .


      L=J(1)
      M=J(NA)
      AN2(M,L)=AN2(M,L)+1.




      B=0.
      A=0.
      AN=N

   DO 27 L=1,K
   DO 27 M=1,K
      ANS1=ANS1+AN1(L,M)
27    A=A+(AN1(L,M)-AN/(AK**2))**2


      DO 28 M=1,K
      DO 28 L=1,K
      ANS2=ANS2+AN2(M,L)
28    B=B+(AN2(M,L)-AN/(AK**2))**2



C     BERECHNUNG VON CHI


      CHIQA1=(A*AK**2)/AN


      CHIQA2=(B*AK**2)/AN


   WRITE OUTPUT TAPE 3,399,ANS1
   WRITE OUTPUT TAPE 3,398
      LE=0
      LI=0
   DO 8 IJ=1,10
      LI=LI+1
      LE=LE+1
      LA=LE
 8 WRITE OUTPUT TAPE 3,303,LI,((AN1(L,M),M=1,K),L=LA,LE)
   WRITE OUTPUT TAPE 3,299,CHIQA1
   WRITE OUTPUT TAPE 3,499,ANS2
   WRITE OUTPUT TAPE 3,398
      ME=0
      LI=0
   DO 7 IJ=1,10
```

```
      LI=LI+1
      ME=ME+1
      MA=ME
  7 WRITE OUTPUT TAPE 3,303,LI,((AN2(M,L),L=1,K),M=MA,ME)
    WRITE OUTPUT TAPE 3,298,CHIQA2
    WRITE OUTPUT TAEP 3,600,BCL



298 FORMAT(1HK,8H CHIQUA(1H2,2H)=E12.4///)
200 FORMAT(12H1 SERIENTEST,15X,12H I.KULLAK    ,15X,10H 15.JAN.65//)
499 FORMAT(31H ANZAHL DER PAARE AN2(LAM,MUE)=F7.0//)
299 FORMAT(1HK,8H CHIQUA(1H1,2H)=E12.4///)
303 FORMAT(1H0,I2,    (10F6.0))
398 FORMAT(7X,1H1,5X,1H2,5X,1H3,5X,1H4,5X,1H5,5X,1H6,5X,1H7,5X,1H8,
   15X,1H9,5X,2H10//)
100 FORMAT(2I8)
103 FORMAT( O12)
399  FORMAT(31H ANZAHL DER PAARE AN1(MUE,LAM)=F7.0//)
400 FORMAT(42H BERECHNUNG VON CHIQUA1 UND CHIQUA2 MIT K=I5,7H UND N=I5
   1///)
201 FORMAT(17H ES WIRD MIT BOA=O12,14H INITIALISIERT///)


    CALL EXIT


    END
```

4.7. TEST UEBER FALLENDE UND STEIGENDE TEILSEQUENZEN.

4.7.1. ZAEHLUNG.

```
C      TEST VON RDM
C      DURCH STEIGENDE UND FALLENDE TEILSEQUENZEN
C      VON ZUFALLSZAHLEN

C      ES WERDEN M+1 ZUFALLSZAHLEN ERZEUGT
C      IRS(LZ) ZAEHLT, WIE OFT DAS EREIGNIS R(I) =AUFTRETEN EINER
C      STEIGENDEN TEILSEQUENZ DER LAENGE I, VORKOMMT.SEIN MITTELWERT
C      ERAN(LZ) IST M*P(I), WOBEI P(I) GEMAESS P(I)=(I+1)/(I+2)FAK.
C      AUSGERECHNET WIRD.
C      DABEI WERDEN DIE TEILSEQUENZEN MIT LAENGE GROESSER ALS SECHS
C      ZUSAMMENGEFASST.
C      GLEICHZEITIG ZAEHLT IRF(IZ) DIE FALLENDEN TEILSEQUENZEN.
C
C      LAUFZ IST DIE ANZAHL DER LAEUFE
       T WURDE EINGEFUEHRT,WEIL AUS PROGRAMMTECHNISCHEN GRUENDEN N
       KLEINER GLEICH 32767 SEIN MUSS.
C      T*N IST DIE ANZAHL M DER ZUFALLSZAHLEN, DIE MAN ERZEUGEN WILL.

       DIMENSION Z(15001),ERAN(20),IRS(20),IRF(20)
       READ INPUT TAPE 12,99,BOA
    99 FORMAT( O12)
       WRITE OUTPUT TAPE 3,98,BOA
    98 FORMAT(1H1,17H ES WIRD MIT BOA=O12,14H INITIALISIERT/)
       CALL RDMIN(BOA)
       READ INPUT TAPE 12,100,T,N,LAUFZ
           EN=N
           TEN=T*EN
           ERAN(7)=0.5

C      WAHRSCHEINLICHKEITSBERECHNUNG
       N2=2
           DO90LZ=1,6

           N2=N2*(LZ+2)
           EN2=N2
           ERAN(LZ)=FLOATF(LZ+1)/EN2
           ERAN(7)=ERAN(7)+ERAN(LZ)
   90      ERAN(LZ)=TEN*ERAN(LZ)
           ERAN(7)=(1.0-ERAN(7))*TEN

           I=0

           NP1=N+1

    50 WRITE OUTPUT TAPE 3,150,T,N,LAUFZ
           LZ=0
       WRITE OUTPUT TAPE 3,151
           Z(1)=RDM/(DUMMY)
           DO15K=1,10

           DO10L=2,NP1
           Z(L)=RDM(DUMMY)
        IF(Z(L-1)-Z(L))23,23,24
    23     LZ=LZ+1
           IF(LZ-7)70,71,71
    70 IRS(LZ)=IRS(LZ)+1
           MZ=0
```

```
      GO TO 10

 71   IRS(7)=IRS(7)+1
      MZ=0
      GO TO 10
 24   MZ=MZ+1
      IF(MZ-7)72,73,73
 72 IRF(MZ)=IRF(MZ)+1
      LZ=0
      GO TO 10

 73   IRF(7)=IRF(7)+1
      LZ=0
 10 CONTINUE
      Z(1)=Z(15001)
 15   CONTINUE


C     AUSSCHRIFT
      WRITE OUTPUT TAPE 3,152,(LZ, IRS(LZ),IRF(LZ), ERAN(LZ),LZ=1,6)
        LZ=7
      WRITE OUTPUT TAPE 3,153,LZ, IRS(LZ),IRF(LZ), ERAN(LZ)


        ZZ=0
C      ZZ IST EINE KONTROLLE FUER DIE ANZAHL DER EREIGNISSE R(J)
        DO42LZ=1,7
        RS=IRS(LZ)
        RF=IRF(LZ)
 42     ZZ=ZZ+RS+RF

 45     WRITE OUTPUT TAPE 3,156, ZZ

        I=I+1
      WRITE OUTPUT TAPE 3,157,I


      DO 60 LZ=1,20
      IRF(LZ)=0
 60 IRS(LZ)=0

      IF(I-LAUFZ) 50,51,51
 51 CALL EXIT

100     FORMAT(F8.0,2I6)
150 FORMAT(1HL,10X,8H DATEN..,6H     T=F4.0,6H     N=I8
   1    23H     ANZAHL DER LAEUFE =           I4////)
151 FORMAT(15HL    LAENGE (LZ) ,18X,17HSTEIGENDE SEQUENZ,20X,
   1          17H FALLENDE SEQUENZ,17X,11H MITTELWERT   //)
152 FORMAT(6X,I5,28X,I7,30X,I7,20X,E12.4)
153 FORMAT(16HJGROESSER,GLEICH ,I2,21X,I7,30X,I7,20X,E12.4)
156 FORMAT(1HL,30H SUMME DER EREIGNISSE BETRAEGT    F12.0)
157 FORMAT(1H7,20X,9H ENDE DES, I4, 10H. LAUFES.    )
```

4.7.2. CHI-QUADRAT-TEST.

```
C UNTERSUCHUNG DES ZUFALLSGENERATORS RDM
C      CHIQUADRAT-TEST UEBER STEIGENDE UND FALLENDE TEILSEQUENZEN.
C      MAN BILDET N STEIGENDE TEILSEQUENZEN UND MAN ZAEHLT,WIE OFT JEDES
C      EREIGNIS R(I) ' AUFTRETEN EINER STEIGENDEN TEILSEQUENZ DER LAENGE
C      I  (I=0,1,2,...) ' VORKOMMT.DIE EREIGNISSE R(I) FUER I GROESSER
C      ODER GLEICH 6 WERDEN ZUSAMMENGEFASST,SODASS DIE ENTSPRECHENDE
C      FUNKTION CHIQUADRAT 6 FREIHEITSGRADE HAT.
C      DIE WAHRSCHEINLICHKEITEN P(I) DES EREIGNISSES R(I) WERDEN GEMAESS
C      P(I)=(I+1)/(I+2)FAK. BERECHNET.
C
C      DERSELBE TEST WIRD GLEICHZEITIG FUER DIE FALLENDEN SEQUENZEN
C      DURCHGEFUEHRT.
C
      READ INPUT TAPE 12,300,BOA
      CALL RDMIN (BCA)


      WRITE OUTPUT TAPE 3,99
      WRITE OUTPUT TAPE 3,301,BCA

      WRITE OUTPUT TAPE 3,91

      DIMENSION P(7),NAPOS(7),NANEG(7),NA(7),AM(7),APOS(7),ANEG(7)

      READ INPUT TAPE 12,100,N


        AN=N
        NFALL =0
        NSTEIG =0

      DO 1 L=1,7
        NAPOS(L)=0
        NANEG(L)=0
  1     NA(L)=0

       BI1=0.
       BI2=0.
       BI3=0.
       BI4=0.
       BNZZ=0.
        AMZZ=0.

        P(1)=1./2.
        P(2)=1./3.
        P(3)=1./8.
        P(4)=1./30.
        P(5)=1./144.
        P(6)=1./840.
        P(7)=1.-(P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6))

      DO 58 ID=1,7
 58     AM(ID)=AN*P(ID)

C     DURCH A UND B WERDEN DIE STEIGENDEN SEQUENZEN GEZAEHLT
C     DURCH A1 UND B1 DIE FALLENDEN

 22     A=RDM(DUMMY)
        A1=A
       BNZZ=BNZZ+1.


  8     B=RDM(DUMMY)
```

```
      B1=B
     BNZZ=BNZZ+1.
      I11=-1
      K=-1


   IF(B-A)11,11, 2

 2     A=B
14 IF(B1-A1)3,3,12
 3     A1=B1
    IF (I11)8,24,8
24     B1=A
       I11=I11+1
    GO TO 14


11    BI1=BNZZ-1.
       L=BI1-BI2
   IF(L-7)20,21,21
21     L=7

20     NAPOS(L)=NAPOS(L)+1
   BI2=BNZZ
       NSTEIG=NSTEIG+1
   IF(NSTEIG-N)19,44,54
19     I11=I11+1
       A=RDM(DUMMY)
      BNZZ=BNZZ+1.
   IF(I11)14,503,504
504    B1=A
   GO TO 14
503 IF(K)14 ,504,505
505    K=1
   GO TO 14


12    BI3=BNZZ-1.
       L=BI3-BI4
18 IF(L-7)30,31,31
31     L=7

30     NANEG(L)=NANEG(L)+1
      BI4=BNZZ
       NFALL=NFALL+1
   IF(NFALL-N)500,7,54
500    A1=RDM(DUMMY)
      BNZZ=BNZZ+1.
       K=0
       B=A1
   IF(B-A)11,11,501
501    A=B
   GO TO 8


44    BNZ1=BNZZ
33 WRITE OUTPUT TAPE 3,97
   WRITE OUTPUT TAPE 3,95,(L,NAPOS(L+1),AM(L+1),L=0,5)
   WRITE OUTPUT TAPE 3,302,   NAPOS(7),AM(7)
      MP=0
   DO 49 I=1,7
49    MP=MP+NAPOS(I)
   WRITE OUTPUT TAPE 3,94,MP
   WRITE OUTPUT TAPE 3,79,MP,BNZ1


   DO 6 LP=1,7
```

```
  6     APOS(LP)=NAPOS(LP)

        X1=0.
     DO 5 J=1,7
  5     X1=X1+(APOS(J)-AN*P(J))**2/(AN*P(J))
     WRITE OUTPUT TAPE 3,98 ,X1

 54  IF(NSTEIG-N)500,41,41
 41 IF(NFALL-N)19,40,40


  7    BNZ1=BNZZ
 43 WRITE OUTPUT TAPE 3,80
    WRITE OUTPUT TAPE 3,95,(L,NANEG(L+1),AM(L+1),L=0,5)
    WRITE OUTPUT TAPE 3,302,  NANEG(7),AM(7)
        NP=0
    DO 50 IN=1,7
 50     NP=NP+NANEG(IN)
    WRITE OUTPUT TAPE 3,94,NP
    WRITE OUTPUT TAPE 3,92,NP,BNZ1


 51 DO 59 LP=1,7
 59     ANEG(LP)=NANEG(LP)

        X2=0.
    DO 4 J=1,7
  4     X2=X2+(ANEG(J)-AN*P(J))**2/(AN*P(J))
    WRITE OUTPUT  TAPE 3,89,X2
    GO TO 54


C       AMZZ=ERWARTETE ANZAHL DER BENOETIGTEN ZUFALLSZAHLEN,UM N TEILSE'
C       QUENZEN ZU BILDEN
 40     AMZZ=2.718282*AN
     WRITE OUTPUT TAPE 3,78,N,AMZZ



 79 FORMAT(39H ANZAHL DER ERZEUGTEN ZUFALLSZAHLEN BEI,I7,28H  STEIGEND
   1EN TEILSEQUENZEN =F10.0//)
 92 FORMAT(39H ANZAHL DER ERZEUGTEN ZUFALLSZAHLEN BEI,I7,28H   FALLEND
   1EN TEILSEQUENZEN =F10.0//)
 78 FORMAT(1HL,39H ERWARTETE ANZAHL VON ZUFALLSZAHLEN BEI,I7,16H TEILS
   1EQUENZEN =F12.4)
 91 FORMAT(     49H DIE FUNCTIONEN CHIQUADRAT HABEN 6 FREIHEITSGRADE//)
 98 FORMAT(     8X,48H FUER STEIGENDE SEQUENZEN BETRAEGT CHIQUADRAT = E
   112.4/)
 89 FORMAT(     8X,47H FUER FALLENDE SEQUENZEN BETRAEGT CHIQUADRAT = E1
   12.4/)
 94 FORMAT(13H GESAMTANZAHL,8X,I6///)
 97 FORMAT(1HL,7H LAENGE,5X,27H ANZAHL DER STEIG.SEQUENZEN,9X,17H ERWA
   1RTETE ANZAHL//)
 80 FORMAT(1HL,7H LAENGE,5X,27H ANZAHL DER FALL. SEQUENZEN,9X,17H ERWA
   1RTETE ANZAHL//)
 99 FORMAT(1H1,58HCHIQUADRAT-TEST UEBER STEIGENDE UND FALLENDE TEILSEQ
   1UENZEN/)
 95 FORMAT( 2X,     I2  ,17X,    I6   ,25X,F12.4)
100 FORMAT(I6)
300 FORMAT( O12)
301 FORMAT(1HL,18H ES WIRD MIT  80A=O12,10H GERECHNET//)
302 FORMAT(18H GROESSER,GLEICH 6,3X,I6,25X,F12.4)


    CALL EXIT
    END
```

.8. KOLMOGOROFFSCHER TEST.

.8.1. TEST DURCH DEN KOLMOGOROFFSCHEN SATZ VOM ZUFALLSZAHLENGENERATOR RDM

```
  TEST DURCH DEN KOLMOGOROFFSCHEN SATZ VOM ZUFALLSZAHLENGENERATOR RDM

     NWERTE = ANZAHL DER VERSUCHE FUER JEDE BESTIMMUNG VON DMAX
     NLAUF1 = ANZAHL DER BESTIMMUNGEN VON DMAX
     NLAUF2 = ANZAHL DER BEISPIELE


      DIMENSION X(20000),Z(15),ZK(15),NN(15),DMAX(1000)
      COMMON X
     READ INPUT TAPE 12,201,(Z(I),ZK(I) , I=1,11)
 201  FORMAT(6E12.6)
     WRITE OUTPUT TAPE 3,304
     WRITE OUTPUT TAPE 3,306,(Z(I),ZK(I) , I=1,11)
     READ INPUT TAPE 12,110,BOA
     WRITE OUTPUT TAPE 3,111,BOA
     READ INPUT TAPE 12,100,NWERTE,NLAUF1,NLAUF2
      WRITE OUTPUT TAPE 3,307,NWERTE,NLAUF1
         WERTE = NWERTE
        XLAUF1 = NLAUF1
      CALL RDMIN(BOA)
      DO 30 LL = 1,NLAUF2
     DO 500 I=1,15
 500    NN(I)=0

      DO 23 L = 1,NLAUF1

        J1 = 1
     DO 1  J =J1,NWERTE
   1    X(J)=RDM(DUMMY)
     CALL SORT  (  NWERTE)
        DMAX(L) = 0.0
        E = 0.0
        WERTE = NWERTE
        DE = 1./WERTE
        J1 = 1
        I = 1
        ID1 = 1
  10    XX = X(I)
      GO TO (2,3),ID1
   2    ID1 = 2
     GO TO 4
   3    E = E+DE
     IF(X(I)-X(I+1))4,6,4
   6     IC2 = 1
     GO TO 11
   4    F=XX
        A = ABSF(E-F)
     IF(A-DMAX(L))8,8,9
   9    DMAX(L) = A
   8     ID2 = 2
  11    I = I+1
     IF(I-NWERTE-1)12,13,14
  12  GO TO (3,10),ID2
  13    E = 1.
        XX=2.*X(I-1)-X(I-2)
     GO TO 4
  14    T = DMAX(L)*SQRTF(WERTE)
        J1 = 1
     DO 20    J=J1,11
        JJ = J
      IF(T - Z(J))24,24,20
  20  CONTINUE
  24    JJ = J
```

```
23        NN(JJ)= NN(JJ)+ 1
          SUM = 0.
         J2 = 2
         NKONTR = NN(1)
      DO 22   J=J2,11
          DZK = ZK(J) - ZK(J-1)
         NKONTR = NKONTR + NN(J)
          AN =NN(J)
22        SUM = SUM + (AN -XLAUF1 * DZK)**2 / DZK
          CHIQ = SUM / XLAUF1
       CALL RDMOUT(BOL)
      WRITE OUTPUT TAPE 3,400,BOL
       WRITE OUTPUT TAPE 3,205,(DMAX(L),L = 1,NLAUF1)
       WRITE OUTPUT TAPE 3,202,(NN(J),J = 2,11),NKONTR
30     WRITE OUTPUT TAPE 3,203,CHIQ
      CALL EXIT
C
C        F O R M A T E
C
100   FORMAT(3I5)
110  FORMAT(2O12)
111  FORMAT(25H0    INITIALISATION  BOA =O12)
202   FORMAT(13H0    N - WERTE /10I8 /11H   NKONTR =I10/)
203   FORMAT(37H0    FUER  9 FREIHEITSGRADE IST CHIQ =E12.4/)
300  FORMAT(45H0     DIE ANZAHL DER EMPIRISCHEN WERTE IST W =,I5//)
301   FORMAT(8H      T =E12.4,4X,4HPE =E12.4,4X,4HPT =E12.4,4X,3HA =E12.
    1     4)
302  FORMAT(69H     DIE MAXIMALE ABWEICHUNG VON DER THEORETISCHEN FUNKTI
    1ON IST DMAX =E16.8)
303  FORMAT(37H     DER WERT Z = SQRTF(N)*DMAX IST Z=,E16.8)
304  FORMAT(71H1    TEST DURCH DEN KOLMOGOROFFSCHEN SATZ VOM ZUFALLSZAHL
    1ENGENERATOR RDM//)
305   FORMAT(1H1)
306   FORMAT(46H0    TABELLIERUNG DER KOLMOGOROFFSCHEN FUNKTION//
    1      24H          Y            K(Y)      /(2E12.4))
307   FORMAT(9H0    FUER I8,26H WERTE DER ZUFALLSVARIABLE/
    1       5H UND I8,31H BESTIMMUNGEN DER VARIABLE DMAX)
205   FORMAT(25H2    MAXIMALE ABWEICHUNGEN//(10E12.4))
400  FORMAT(38H0    LETZTE ERZEUGTE ZUFALLSZAHL  BOL =O12/)
     END
```

4.8.2. SORTIERUNG VON ZAHLEN.

```
      SUBROUTINE SORTED(A,N)

      DIMENSION A(10000)
         N=N-1
    1 DO 5 I=1,N
       IF(A(I)-A(I+1)) 5,5,2
    2    K=I
    3    B=A(K+1)
         A(K+1)=A(K)
         A(K)=B
         K=K-1
      IF(K) 5,5,4
    4 IF(A(K)-A(K+1))  5,5,3
    5 CONTINUE
      RETURN
      END


       SUBROUTINE SORT(A,N)

C      SORTIERUNG VON ZAHLEN DURCH MERGING
C      IN DER MATRIX A SIND N ZAHLEN GESPEICHERT
C      DIE MATRIX A MUSS DIE DIMENSION 2*N  HABEN.
C
       DIMENSION A(20000)
         KZ=1
    1    M=N
         K=N+1
         I1=1
       ASSIGN 13 TO ID1
    2    KZ=-KZ
      ASSIGN 5 TO ID2
      ASSIGN 4 TO ID3
    3    I=I1-1
   11    I=I+1
      IF(A(I)-A(I+1))12,12,120
  120 GO TO ID2,(5,6)
    5    I2=I
      IF(I-M+1)210,21,21
  210 ASSIGN 7 TO ID1
      ASSIGN 6 TO ID2
      GO TO 11
   21    I=I+1
      GO TO 15
   12 IF(I-M+1)11,110,110
  110 GO TO ID1,(13,7,8)
    4 IF(KZ)130,130,13
  130 DO 14 LL=1,N
         NLL = N + LL
   14    A(LL)=A(N LL)
   13 RETURN
    7    J2=I+1
      GO TO 25
    8    J=J2+1
   16    A(K)=A(J)
          K=K+1
         J=J+1
      IF(J-M)16,16,9
    6 ASSIGN 8 TO ID1
   15    J2=I
```

```
 25 ASSIGN 5 TO ID2
       I=I1
       J=I2+1
 17 IF(A(I)-A(J))180,180,18
180    A(K)=A(I)
       K=K+1
       I=I+1
    IF(I-I2)17,17,170
170    L=J
       LK=J2
 19    A(K)=A(L)
       K=K+1
       L=L+1
    IF(L-LK)19,19,190
190    I1=J2+1
    IF(I1-M)200,201,20
201     A(K) = A(I1)
     GO TO 9
200 ASSIGN 9 TO ID3
    GO TO 3
 18    A(K)=A(J)
       K=K+1
       J=J+1
    IF(J-J2)17,17,171
171    L=I
       LK=I2
    GO TO 19
 20 GO TO ID3,(4,9)
  9 IF(KZ)172,172,1
172    M=2*N
       K=1
       I1=N+1
    GO TO 2
101 FORMAT(I4)
102 FORMAT(I4/(6E12.4))
103 FORMAT(5E16.4)
104  FORMAT(/////)
     END
```

4.9. SYMMETRISCHE EINDIMENSIONALE IRRFAHRT

N = ANZAHL DER SCHRITTE

M IST SO ZU WAEHLEN , DASS N/M EINE GANZE ZAHL KLEINER ALS 32768 ERGIBT

```
      DIMENSION KS(20000)
      READ INPUT TAPE 12,98,BOA,N,M
      CALL RDM IN (BOA)
      WRITE OUTPUT TAPE 3,107,N,BOA,M
      WRITE OUTPUT TAPE 3,104

      L = 0
      JM = 0
      IM = 0
      J = 0
      I = 0
      KS(1) = 0
      NE = N/M
      NE = NE+1
      DO 11 II=1,M
      KII = (NE-1)*(II-1)
      DO 1 K=2,NE
      IR = 2.*RDM(DUMMY)
      IX = 1-2*IR
      KS(K) = KS(K-1)+IX
      IF (KS(K)) 4,3,2
 2    J = J+1
      GO TO 1
 4    I = I+1
      GO TO 1
 3    L = L+1
      KVI = K-1
      IF (KS (KVI))7,6,6
 6    KJ = K-J-1+KII
      KV = K-2+KII
      JM = JM+J
      KVI = KVI +KII
      WRITE OUTPUT TAPE 3,108,KVI,KJ,KV,J
      J = 0
      GO TO 1
 7    KI = K-I-1+KII
      KV = K-2+KII
      IM = IM+I
      KVI = KVI +KII
      WRITE OUTPUT TAPE 3,109,KI,KV,I,KVI
      I = 0
 1    CONTINUE
      KS(1) = KS(NE)
 11   CONTINUE
      IF (J-I) 9,8,10
 9    KI = N-I+1
      IM = IM+I
      WRITE OUTPUT TAPE 3,102,KI,N,I
      GO TO 8
 10   KJ = N-J+1
      JM = JM+J
      WRITE OUTPUT TAPE 3,101,KJ,N,J
 8    WRITE OUTPUT TAPE 3,106,JM,L,IM,KS(NE)

 98   FORMAT (O12,2I6)

 101  FORMAT (81X,3HK =,I6,5H BIS ,I6,5X,1H=,I6, 9H SCHRITTE)
 102  FORMAT (5X,3HK =,I6,5H BIS ,I6,5X,1H=,I6, 9H SCHRITTE)
 104  FORMAT (1H1,20X,16H  S ( K )  I S T,///5X,12HNEGATIV FUER ,42X,
    110HNULL  FUER,12X,12HPOSITIV FUER,///59X,3HK =,5X,1H0)
 106  FORMAT (///4X,29H S IST POSITIV FUER INSGESAMT,I6,9H SCHRITTE,///
```

```
1//4X,26H S IST NULL FUER INSGESAMT,I6,9H SCHRITTE,///4X,29H S IST NEGATIV
2NEGATIV FUER INSGESAMT,I6,9H SCHRITTE,///4X,25HDER LETZTE WERT VON S IST
3 S IST,I8)
107     FORMAT (1H4,10X,3HN =,I6,10X5HBCA =,O12,10X,3HM =,I6)
108     FORMAT(59X,3HK =,I6,13X,3HK =,I6,5H BIS ,I6,5X,1H=,I6, 9H SCHRI
1TTE)
109     FORMAT (5X,3HK =,I6,5H BIS ,I6,5X,1H=,I6, 9H SCHRITTE,13X,3HK =,I6)
1,I6)

        CALL EXIT
        END
```

5. Literaturverzeichnis

[1] W.G. COCHRAN - "The χ^2-Test of Goodness of Fit". Annals of Mathematical Statistics 23, 315-345 (1952).

[2] R.R. COVEYOU - "Serial Correlation in the Generation of Pseudo-Random Numbers". J.ACM, vol. 7, No. 1, 72-74 (1960).

[3] W. FELLER - "An Introduction to Probability Theory and its Applications". John Wiley & Sons. (1957).

[4] B.W. GNEDENKO - "Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung". Berlin, Akademie Verlag (1962).

[5] R.E. GREENWOOD - "Coupon Collector's Test for Random Digits". MTAC, 9, 1-5 (1955).

[6] A. HALD - "Statistical Tables and Formulas". John Wiley & Sons. (1960).

[7] J.M. HAMMERSLEY, D.C. HANDSCOMB - "Monte Carlo Methods". London, Methuen & Co., New York, John Wiley & Sons (1964).

[8] S.V. HOERNER - "Herstellung von Zufallszahlen auf Rechenautomaten". ZAMP VIII, 26-52 (1957).

[9] T.E. HULL, A.R. DOBELL - "Random Number Generators". SIAM, Vol. 4, No. 3, 230-259 (1962).

[10] M.G. KENDALL, B. BABINGTON SMITH - "Randomness and Random Sampling Numbers". J. Royal Statist. Soc. 101, 147-166 (1938).

[11] IBM - "Random Number Generation and Testing" (1959).

[12] M.D. MACLAREN, G. MARSAGLIA - "Uniform Random Number Generators". J.ACM, Vol. 12, No. 1, 83-89 (1965).

[13] R.S. LEDLEY - "Programming and Utilizing Digital Computers". Mc Graw Hill (1962).

[14] H.A. MEYER - "Symposium on Monte Carlo Methods". New York - London, John Wiley & Sons (1956).

[15] A. RÉNYI - "Wahrscheinlichkeitsrechnung". VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1962).

[16] A. ROTENBERG - "A New Pseudo-Random Number Generator". J.ACM, Vol. 7, No. 1, 75-77 (1960).

[17] I.J. GOOD - "The serial test for sampling numbers and other tests for randomness". Proc. camb. Phil. Soc. 49, 276-284 (1953).

[18] D.J. HUDSON - "Lectures on Elementary Statistics and Probability". Report CERN 63-29, Geneva (1963).

[19] R. GORENFLO - "Über Pseudozufallsgeneratoren und ihre statistischen Eigenschaften". Biometrische Zeitschrift, 7, 90-93 (1965).

[20] R. GORENFLO, M.G. PACCO, B.M.U. SCHERZER - "Monte-Carlo-Simulation der Strömung eines KNUDSEN-Gases unter Berücksichtigung der Verweilzeit". Bericht IPP 6/46, 2/41, Inst. f. Plasmaphysik, München-Garching (November 1965).

[21] R. GORENFLO - "Numerische Methoden zur Lösung einer ABELschen Integralgleichung". Bericht IPP 6/19, Inst. f. Plasmaphysik, München-Garching (Mai 1964).

[22] R. GORENFLO, Y. KOVETZ - "Solution of an ABEL type integral equation in the presence of noise". Bericht IPP 6/29, Inst. f. Plasmaphysik, München-Garching (November 1964).

[23] H. FISSER - "Some tests applied to pseudo-random numbers generated by V. Hoerner's rule". Numerische Mathematik 3, 247-249 (1961).