

**I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K**  
**G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N**

Kurven zur Bestimmung von Plasmapara-  
metern durch Lichtstreuexperimente

(Graphs for the Determination of Plasma Para-  
meters by Light Scattering Experiments)

Wilhelm H. Kegel

IPP 6/34

März 1965

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

IPP 6/34

W.H. Kegel

Graphs for the Determination of  
Plasma Parameters by Light Scattering  
Experiments.  
March 1965 ( in German )

ABSTRACT:

A set of graphs were calculated, which give the spectral distribution of light scattered by a plasma. By comparing experimental spectra with these graphs, density and temperature of a plasma may be determined.

E i n l e i t u n g.

Temperatur und Dichte in einem Plasma lassen sich durch Lichtstreuexperimente [2], [3] bestimmen. Die in diesem Bericht zusammengestellten Kurven sollen dazu dienen, experimentelle Daten auszuwerten.

Die Theorie der Lichtstreuung ist in einem früheren Bericht [1] im Detail diskutiert worden, so daß sie für diesen Bericht als bekannt vorausgesetzt wird. Auch im Hinblick auf Literatur sei auf den Bericht [1] verwiesen.

B e m e r k u n g e n   z u   d e n   K u r v e n.

Die Kurven wurden entsprechend der Theorie von E.E. SALPETER [4] berechnet. Sie stellen Streuspektren (relative Intensitäten) für Lichtstreuung in einem homogenen Wasserstoffplasma im thermischen Gleichgewicht dar. Die Spektren wurden mit folgenden Daten berechnet:

Wellenlänge  $\lambda_0 = 6943 \text{ \AA}$  (Rubinlaserlicht), Streuwinkel  $\Theta_0 = 90^\circ$ , Temperatur  $T_0 = 100\,000^\circ\text{K}$ . Variiert wurde der Parameter

$$\alpha = \alpha_{e,i} = \frac{\lambda}{4\pi D_{e,i} \sin \frac{\Theta}{2}} \quad (1)$$

Dabei ist

$$D_e = \sqrt{kT_e/4\pi n e^2}, \quad D_i = \sqrt{kT_i/4\pi n Z e^2}$$

die Elektronen- bzw. Ionen-DEBYE-Länge,  $n$  die mittlere Elektronendichte und  $Z e$  die Ladung der Ionen.

Nach [1] Gl. (C 68) gilt für die relative Intensitätsverteilung des Streulichtes:

$$I(\Delta\omega) \sim \frac{n}{k} \frac{\overbrace{|1-G_i|^2 M_e(\frac{\Delta\omega}{k})}^I + \overbrace{Z|G_e|^2 M_i(\frac{\Delta\omega}{k})}^{II}}{|1-G_e-G_i|^2} \quad (2)$$

Dabei ist  $k = |\vec{k}_1 - \vec{k}_2|$  wobei  $\vec{k}_1$  der Wellenzahlvektor der einfallenden Welle und  $\vec{k}_2$  der der Streuwelle ist.<sup>+) Weiterhin ist</sup>

$$M_e(u) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\kappa T_e}} \exp\left\{-\frac{m u^2}{2\kappa T_e}\right\} \quad (3a)$$

$$M_i(u) = \sqrt{\frac{M}{2\pi\kappa T_i}} \exp\left\{-\frac{M u^2}{2\kappa T_i}\right\} \quad (3b)$$

und

$$G_e = -\alpha_e^2 \left\{ 1 - 2x \exp(-x^2) \int_0^x \exp(t^2) dt + i \sqrt{\pi} \exp(-x^2) \right\} \quad (4a)$$

$$G_i = -\alpha_i^2 \left\{ 1 - 2y \exp(-y^2) \int_0^y \exp(t^2) dt + i \sqrt{\pi} \exp(-y^2) \right\} \quad (4b)$$

mit

$$x = \frac{\Delta\omega}{k} \sqrt{\frac{m}{2\kappa T_e}} \quad ; \quad y = \frac{\Delta\omega}{k} \sqrt{\frac{M}{2\kappa T_i}} \quad (5a, b)$$

Aus den Gleichungen (2) bis (5) sieht man, daß die relative Spektralverteilung, wenn man sie über  $x$  statt über  $\Delta\omega$  aufträgt, nur von dem Parameter  $\alpha$  abhängt. Daher genügt es für die Auswertung experimenteller Spektren, eine ein-parametrische Schar von Kurven zu berechnen.

Die Größe  $x$  ist experimentell nicht direkt gegeben, sondern man mißt die Intensität  $I$  bei einem gegebenen  $\Delta\omega$  (bzw.  $\Delta\lambda$ ). Trägt man  $I$  über  $\log \Delta\omega$  (bzw.  $\log \Delta\lambda$ ) auf, so gehen Streuspektren mit gleichem  $\alpha$  aber verschiedenem  $T$  durch Horizontalverschiebung in einander über.

Aus dem eben diskutierten Grund wurde bei den hier zusammengestellten Kurven  $I$  über  $\log \Delta\lambda$  aufgetragen, obgleich eine lineare Skala eine etwas genauere Auswertung experimenteller Daten ermöglicht. Für die Ordinate wurde dagegen eine lineare Skala

<sup>+) Für die Linienmitte gilt</sup>

$$k = \frac{4\pi \sin \frac{\theta}{2}}{\lambda}$$



gewählt, damit auch kleinere Intensitätsunterschiede noch erkennbar sind. Aus diesem Grunde war es aber wiederum nicht möglich, die Zentrallinie und die Satellitenlinie (siehe [1] Abschnitt C 5) zusammen darzustellen. Die Zentrallinie wurde ausgelassen und die Spektren beginnen erst bei  $\Delta \lambda_0 = 5 \text{ \AA}$ , stellen also im wesentlichen nur den Teil I von Gl. (2) dar. Die Normierung wurde so vorgenommen, daß das für  $\alpha > 0,7$  auftretende Maximum gleich 1 gesetzt wurde. Für die Kurven mit  $\alpha \leq 0,7$  wurde die Intensität bei  $\Delta \lambda_0 = 5 \text{ \AA}$  gleich 1 gesetzt. Der entsprechende Abzissenwert ist für verschiedene Temperaturen verschieden (s.u.), da aber der Intensitätsverlauf in diesem Bereich ziemlich flach ist, hängt die Normierung nicht stark von der genauen Wahl dieses Abzissenwertes ab. (Evtl. muß ein experimentell gemessenes Spektrum mit  $\alpha \leq 0,7$  nach einer ersten Temperaturbestimmung (s.u.) noch einmal normiert werden).

#### Die Auswertung Experimenteller Streuspektren.

- a) Satellitenlinie: Die experimentellen Daten werden wie die theoretischen Kurven aufgetragen und normiert. Dann wird die theoretische Kurve bestimmt, die - bis auf eine Horizontalverschiebung - am besten mit den Meßwerten übereinstimmt. Damit ist der Wert von  $\alpha$  bestimmt. Die Temperatur und die Dichte ergeben sich jetzt aus der Verschiebung der beiden Abzissenskalen gegen einander.

Wir bezeichnen mit dem Index 0 die Parameter, die den theoretisch berechneten Kurven entsprechen, und mit dem Index 1 die Parameter, die zu der experimentellen Kurve gehören. Wir betrachten nun zwei sich entsprechende Punkte der beiden Kurven (gleiches  $x$  nach 5a), d.h., wenn man die beiden Kurven zur Deckung gebracht hat, zwei übereinander liegende Punkte. Dann ergibt sich aus (5a) für die Temperatur:

$$T_1 = T_0 \frac{(\Delta \lambda_1)^2}{(\Delta \lambda_0)^2} \frac{\sin^2 \theta_0 / 2}{\sin^2 \theta_1 / 2} \quad (6)$$

Mit den für die vorliegenden Kurven gewählten Parametern ist dann

$$T_1 = \frac{(\Delta \lambda_1)^2}{(\Delta \lambda_0)^2 \sin^2 \frac{\alpha_1}{2}} \cdot 0.5 \cdot 10^5 \text{ } ^\circ\text{K} \quad (7)$$

bzw:

$$\log T_1 = 2(\log \Delta \lambda_1 - \log \Delta \lambda_0) - \log(\sin^2 \frac{\alpha_1}{2}) + 4,70 \quad (8)$$

$$\log T_1 = 2 \Delta - \log(\sin^2 \frac{\alpha_1}{2}) + 4,70 \quad (8a)$$

wenn man mit  $\Delta$  die Verschiebung der beiden Abzissenskalen gegeneinander bezeichnet. Im Fall der Rechtwinkelstreuung ist

$$\log T_1 = 2 \Delta + 5,00 \quad (8b)$$

Aus  $T_1$  und  $\alpha$  ergibt sich nach (1) die Elektronendichte  $n_1$ . Um die Berechnung von  $n_1$  zu vereinfachen, ist in den Kurven außer  $\alpha$  noch der zugehörige Wert  $n_0$  angegeben. Für  $n_1$  gilt:

$$n_1 = n_0 \frac{T_1}{T_0} \frac{\sin^2 \frac{\alpha_1}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha_0}{2}} \quad (9)$$

und mit (6):

$$n_1 = n_0 \frac{(\Delta \lambda_1)^2}{(\Delta \lambda_0)^2} \quad (10)$$

bzw:

$$\log n_1 = \log n_0 + 2 \Delta \quad (10a)$$

- b) Zentrallinie. Die in diesem Bericht zusammengestellten Kurven sind nach der "exakten" Formel (2) primär für die Auswertung der Satellitenlinie berechnet worden. Aus der

von SALPETER [4] angegebenen und auch in [1] (Gl. I, 22) diskutierten Näherungsformel

$$I(\Delta\omega) \sim \overbrace{\frac{n}{k} \sqrt{\frac{m}{2\pi\kappa T_e}} \Gamma_{\alpha_e}(x)}^{\text{I}} + Z \overbrace{\left(\frac{\alpha_i^2}{1+\alpha_e^2}\right)^2 \frac{n}{k} \sqrt{\frac{M}{2\pi\kappa T_i}} \Gamma_{\beta}(y)}^{\text{II}} \quad (11)$$

mit  $x$  und  $y$  aus (5) und

$$\beta^2 = \frac{\alpha_i^2}{1+\alpha_e^2} \quad (12)$$

$$\Gamma_{\alpha}(x) = \frac{\exp(-x^2)}{[1+\alpha^2 - \alpha^2 g(x)]^2 + \pi \alpha^4 x^2 \exp(-2x^2)} \quad (13)$$

$$g(x) = 2x \exp(-x^2) \int_0^x \exp(t^2) dt \quad (14)$$

ersieht man, daß in dieser Näherung die Zentrallinie II derselben Kurvenschar angehört wie die Satellitenlinie I. D.h. die hier zusammengestellten Kurven können in erster Näherung auch zur Auswertung von Messungen der Zentrallinie verwendet werden. Es sei noch bemerkt, daß die Näherungsformel (11) unter der Annahme abgeleitet wurde, daß die Geschwindigkeit der Elektronen groß ist gegen die der Ionen.

Aus einem Vergleich der Meßwerte mit den berechneten Kurven wird - genau wie beim Auswerten der Satellitenlinie - zunächst der Parameter  $\beta$  (12) bestimmt, der dem Parameter  $\alpha$  bei der Satellitenlinie entspricht. Die Temperatur ergibt sich dann wieder aus der Verschiebung der beiden Abzissenskalen gegeneinander. Es ist, analog zu (7)

$$T_1 = \frac{M}{m} \frac{(\Delta\lambda_1)^2}{(\Delta\lambda_0)^2 \sin^2 \Theta_1/2} \cdot 0.5 \cdot 10^5 \text{ } ^\circ\text{K} \quad (15)$$

bzw.

$$\log T_1 = 2 \Delta - \log(\sin^2 \Theta_1/2) + \log(M/m) + 4,70 \quad (16)$$

Für ein Wasserstoffplasma ist

$$\log T_1 = 2\Delta - \log(\sin^2 \theta_{1/2}) + 7,96 \quad (16a)$$

Im thermischen Gleichgewicht ( $\alpha_i^2 = Z\alpha_e^2$ ) läßt sich aus der Größe  $\beta$  nach (12)  $\alpha_e$  berechnen:

$$\alpha_e^2 = \frac{\beta^2}{Z - \beta^2} \quad (17)$$

Aus  $\alpha_e$  und  $T$  ergibt sich dann wieder die Elektronendichte  $n_1$ . Man kann auch  $n_1$  wieder auf die in den Kurven angegebene Größe  $n_0$  beziehen. Dann ist:

$$n_1 = n_0 \frac{(\Delta\lambda_1)^2}{(\Delta\lambda_0)^2} \frac{M}{m} (1 + \alpha_e^2) \quad (18)$$

bzw.

$$\log n_1 = \log n_0 + 2\Delta + \log(M/m) + \log(1 + \alpha_e^2) \quad (19)$$

c) Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht.

Auch zur Auswertung von Meßdaten aus Streuexperimenten an Plasmen, die nicht im thermischen Gleichgewicht sind, lassen sich die hier angegebenen Kurven in erster Näherung verwenden, wenn man die Annahme machen darf, daß die Elektronen und Ionen je einer MAXWELL-Verteilung genügen und daß die Geschwindigkeit der Elektronen groß ist gegen die der Ionen.

Aus der Näherungsformel (11) sieht man, daß man aus Messungen der Satellitenlinie, die Elektronentemperatur und die Elektronendichte bestimmt. Das in den Kurven angegebene  $\alpha$  ist dann gleich  $\alpha_e$ . Aus Messungen der Zentrallinie kann man nur die Ionentemperatur und den Parameter  $\beta$  bestimmen. Zur Bestimmung der Dichte und der Elektronentemperatur, muß man eine weitere Messung ausführen, z.B. eine Absolutmessung der Intensität, woraus sich die Dichte ergibt. Hat man die Dichte aus einer weiteren Messung bestimmt, ergibt sich  $T_e$  aus (12).

Hat man ein Plasma mit anisotropem Druck, bei dem man aber noch annehmen kann, daß die Geschwindigkeitsverteilung in jeder Richtung eine MAXWELL-Verteilung ist, so entspricht die gemessene Temperatur, der Geschwindigkeitsverteilung in Richtung von  $\vec{k} = \vec{k}_i - \vec{k}_s$ , dem Differenzvektor von einfallender Welle und Streuwelle.

#### Einfluß der Wellenlänge

Die theoretischen Kurven wurden für  $\lambda_0 = 6943 \text{ \AA}$  berechnet, da die meisten Streuexperimente mit Rubinlasern ausgeführt werden. Verwendet man eine andere Wellenlänge  $\lambda_1$ , so muß man in den Formeln, die in den vorigen Abschnitten zusammengestellt wurden, die gemessene Größe  $\Delta \lambda_1$  ersetzen durch

$$\Delta' \lambda_1 = \Delta \lambda_1 \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \quad (20)$$

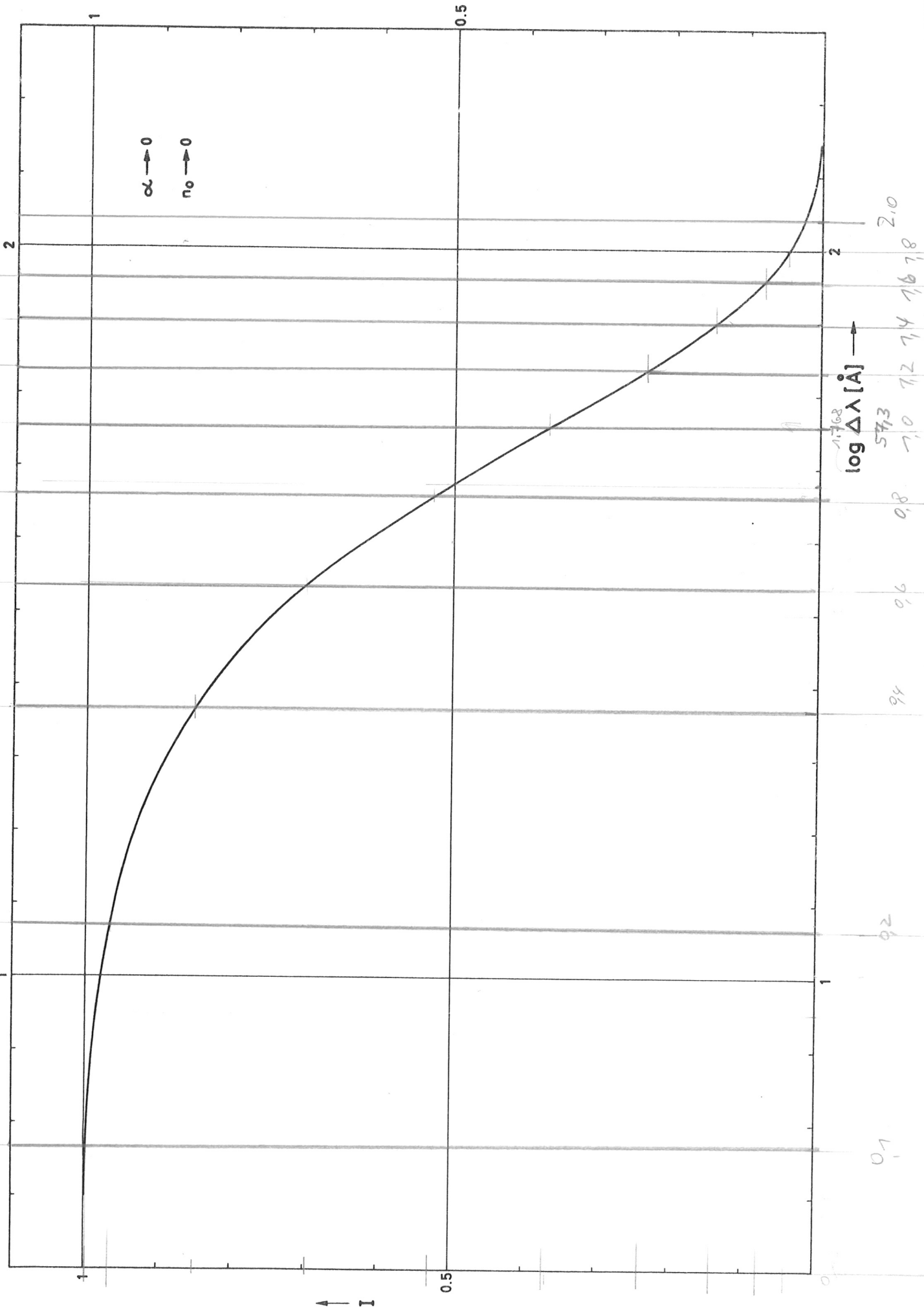
Entsprechend ist die gemessene Verschiebung  $\Delta$  der beiden Abzissenskalen zu ersetzen durch

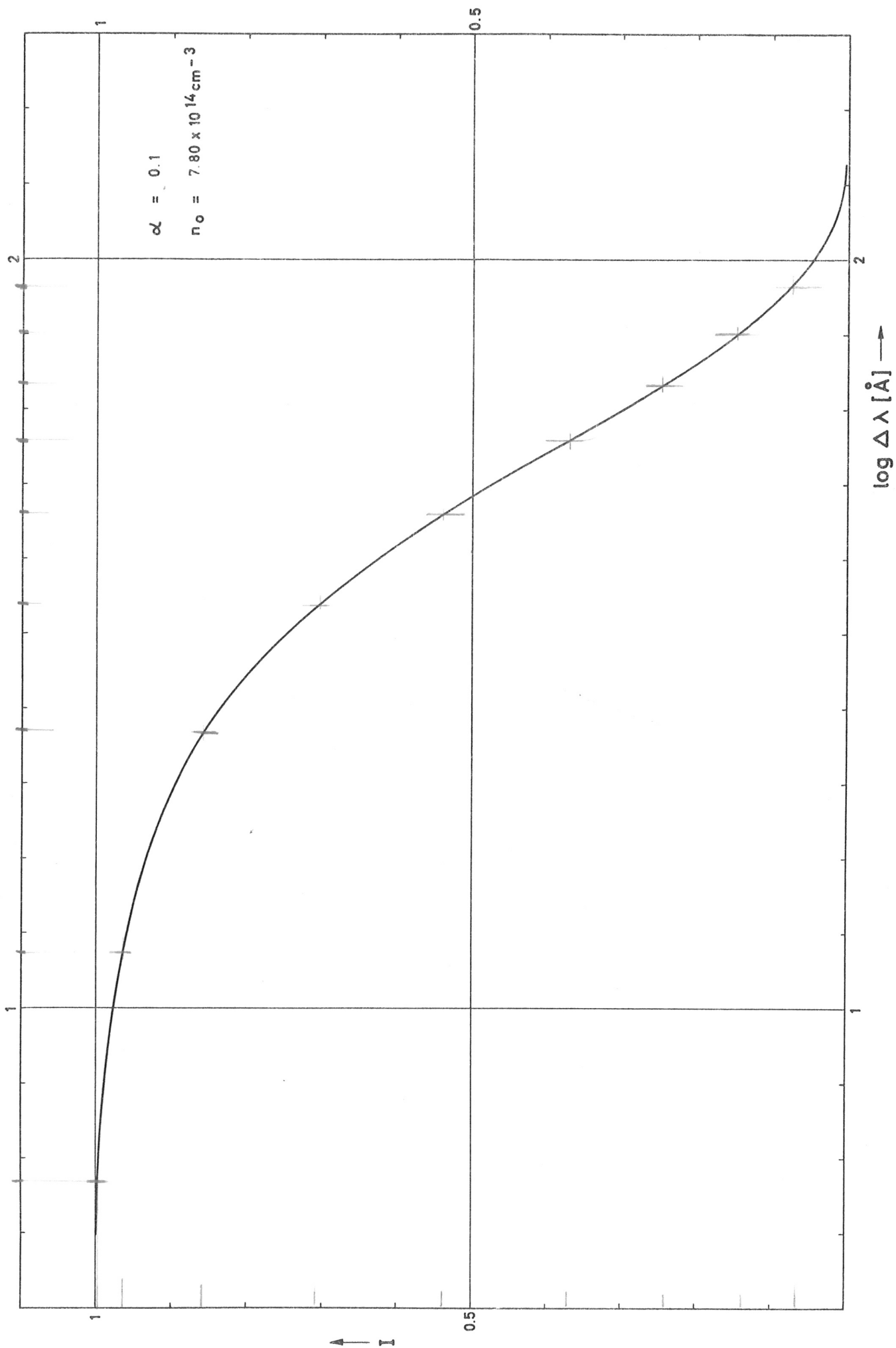
$$\Delta' = \Delta + \log \lambda_0 - \log \lambda_1 \quad (21).$$

Herrn Dr. H.-J. KUNZE und Herrn Dr. B. KRONAST danke ich für Hinweise zur praktischen Darstellung der numerischen Ergebnisse, die eine möglichst einfache Auswertung von Meßdaten ermöglichen soll.

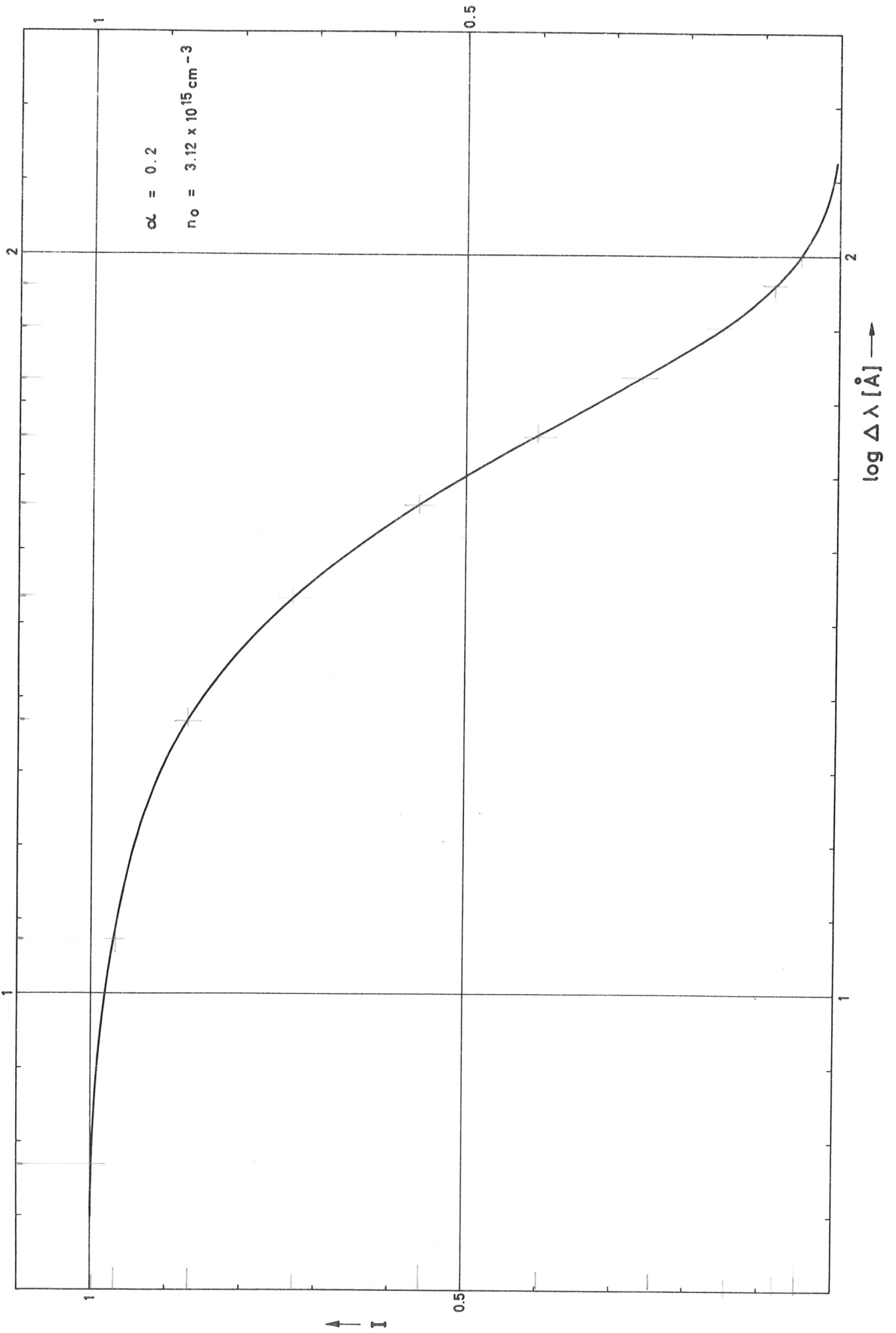
Literatur

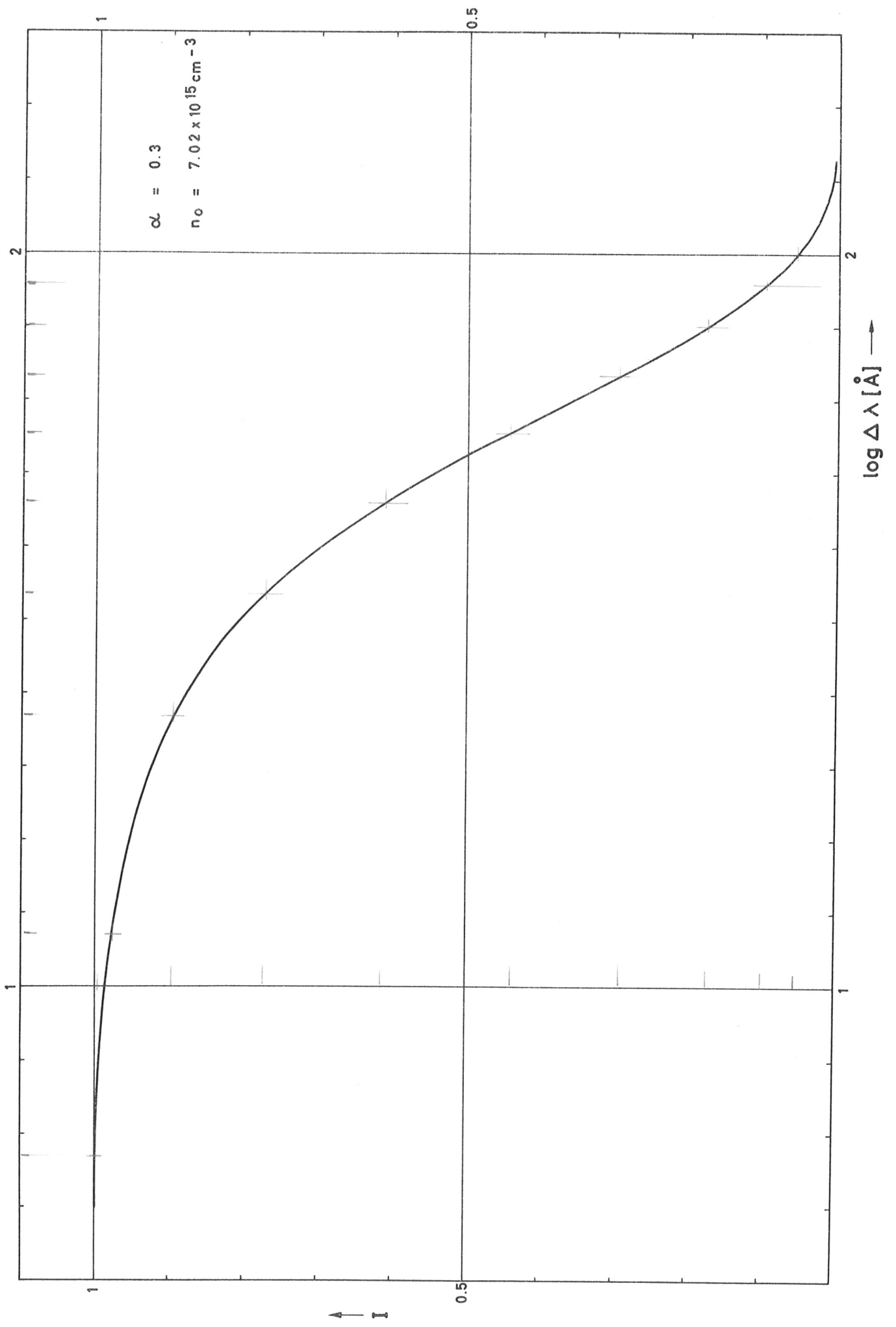
- [1] KEGEL, W.H.: Laborbericht IPP 6/21 (1964)
- [2] KUNZE, H.-J.: Laborbericht IPP 1/30 (1964)
- [3] KUNZE, H.-J., E. FÜNFER, B. KRONAST und W.H. KEGEL:  
Phys. Lett. 11, 42 (1964)
- [4] SALPETER, E.E.: Phys. Rev. 120, 1528 (1960)

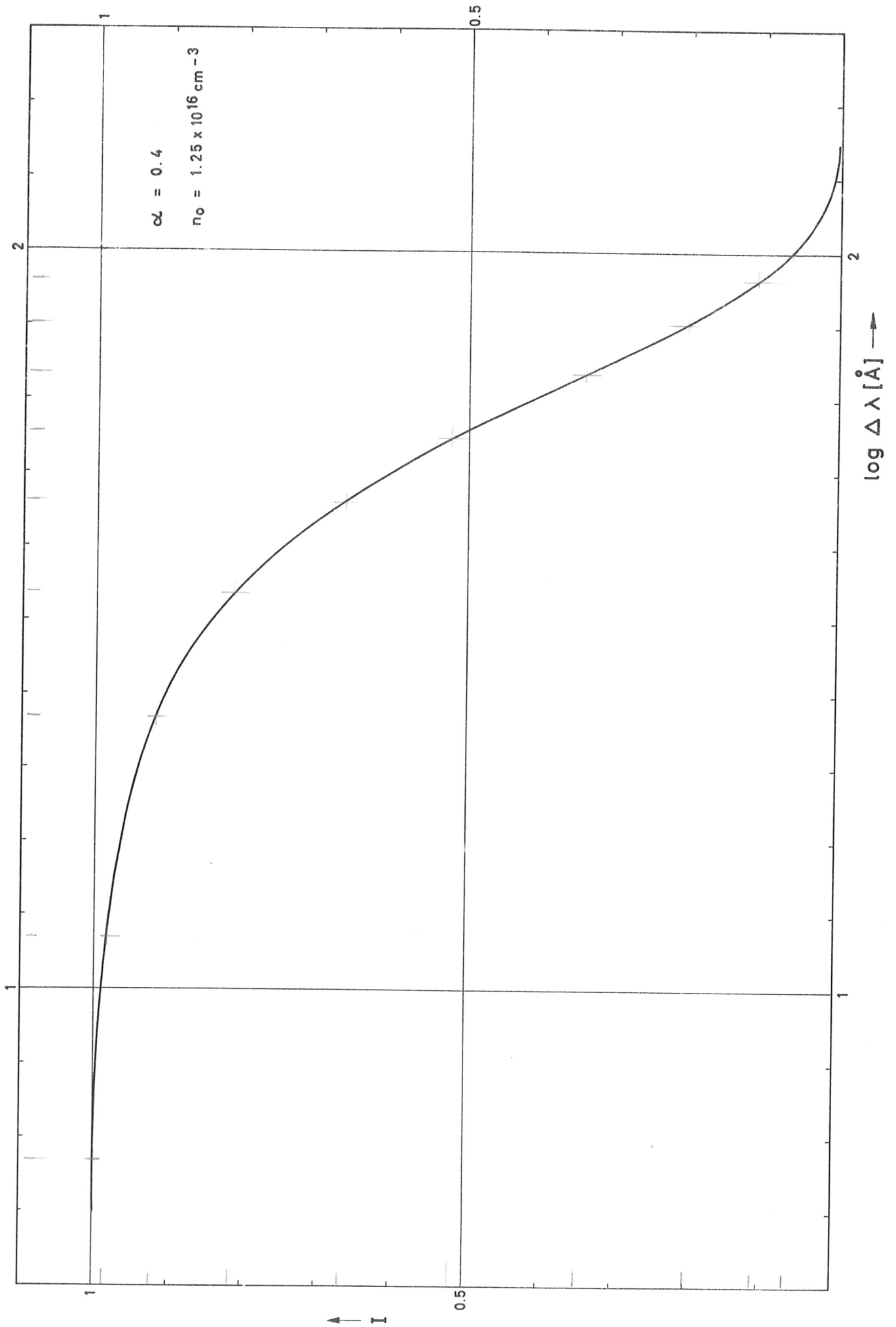


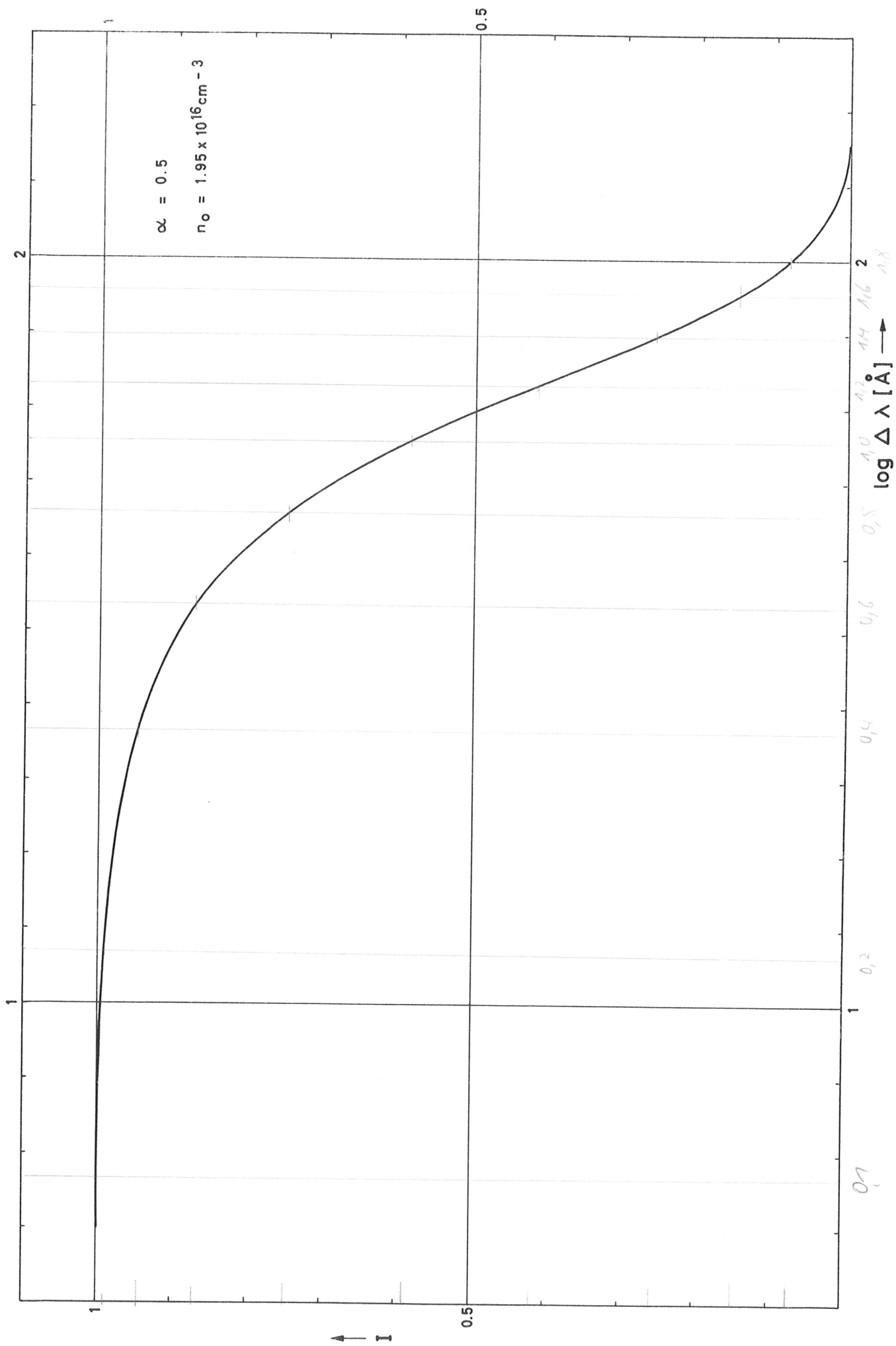


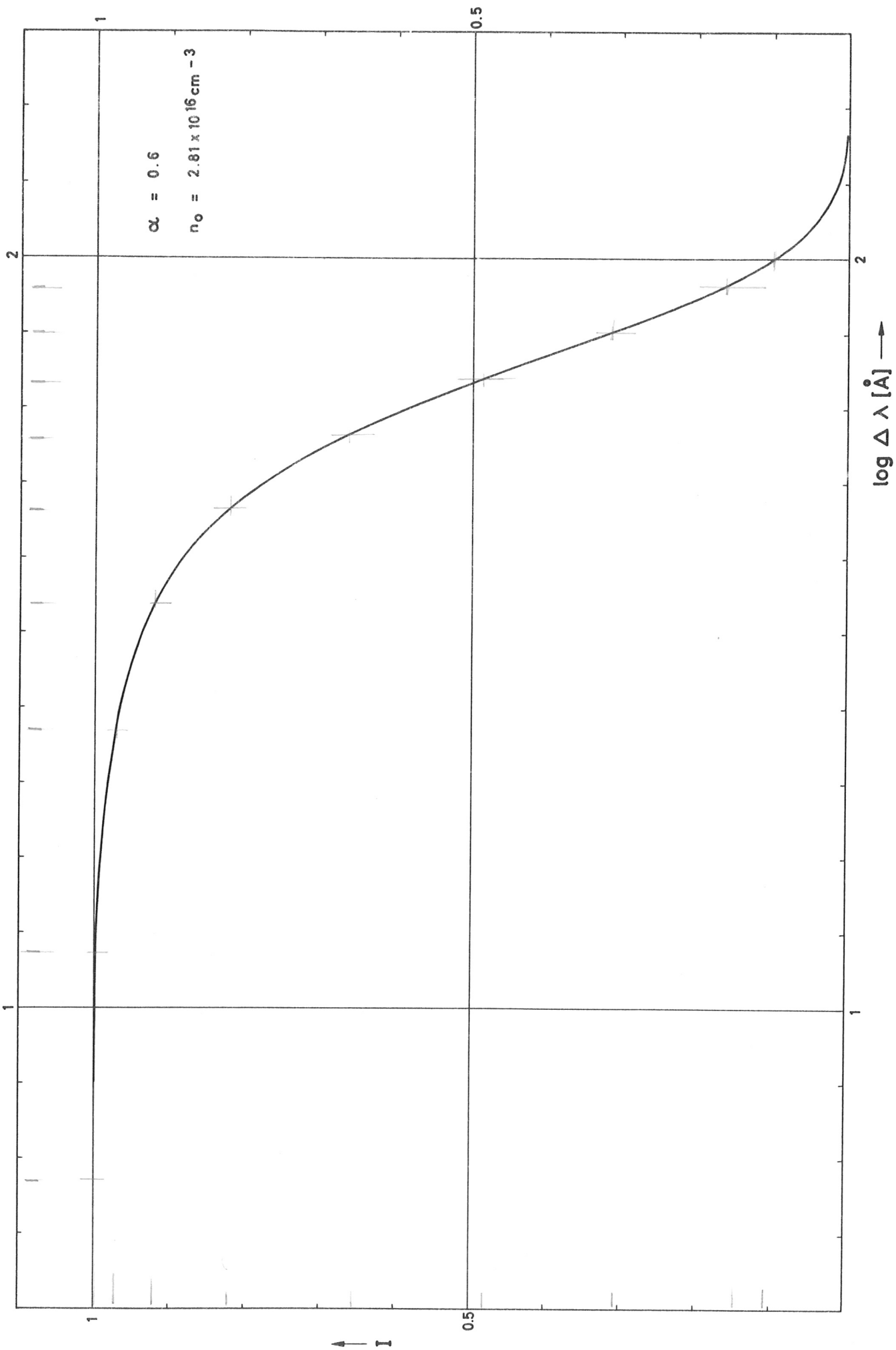


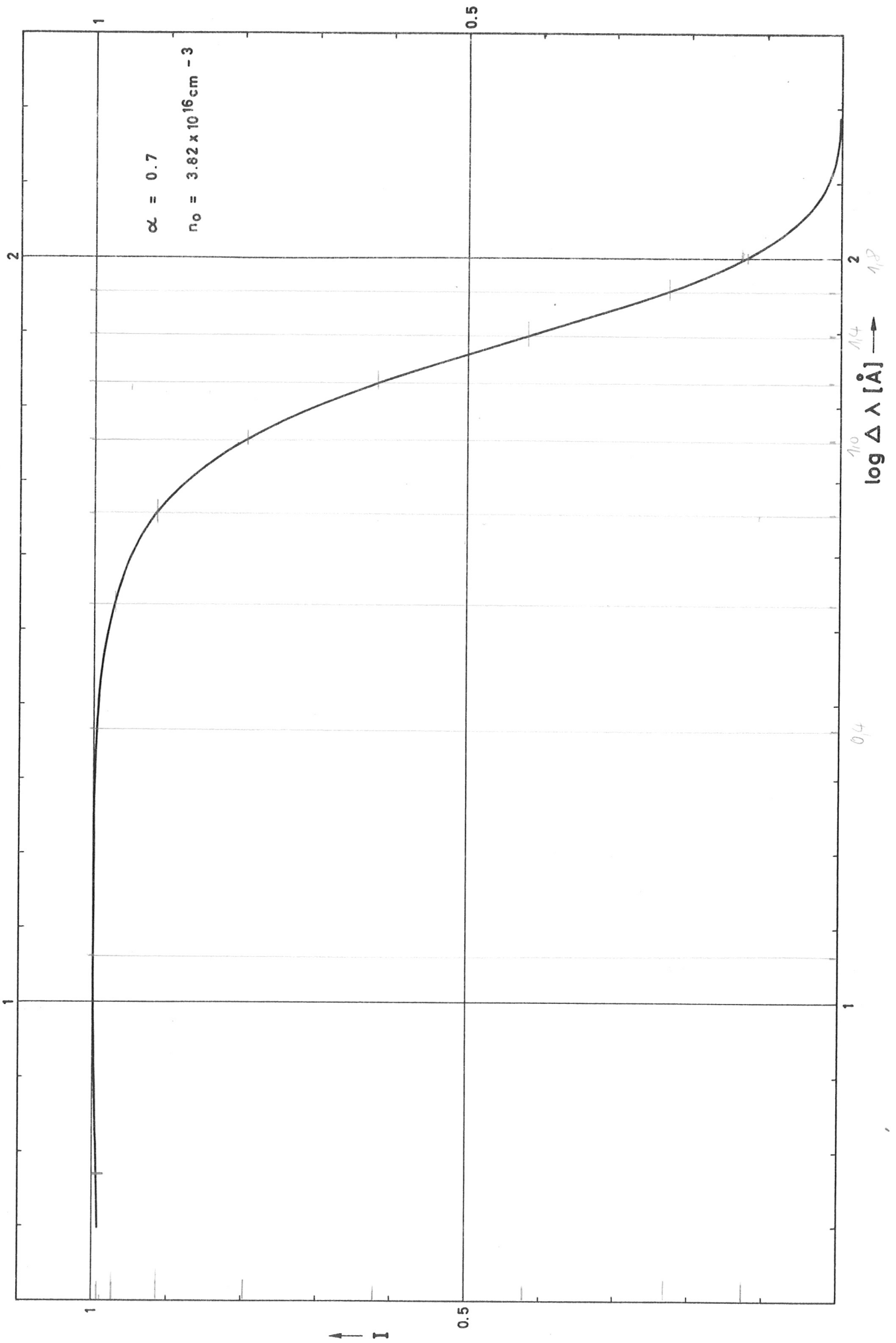


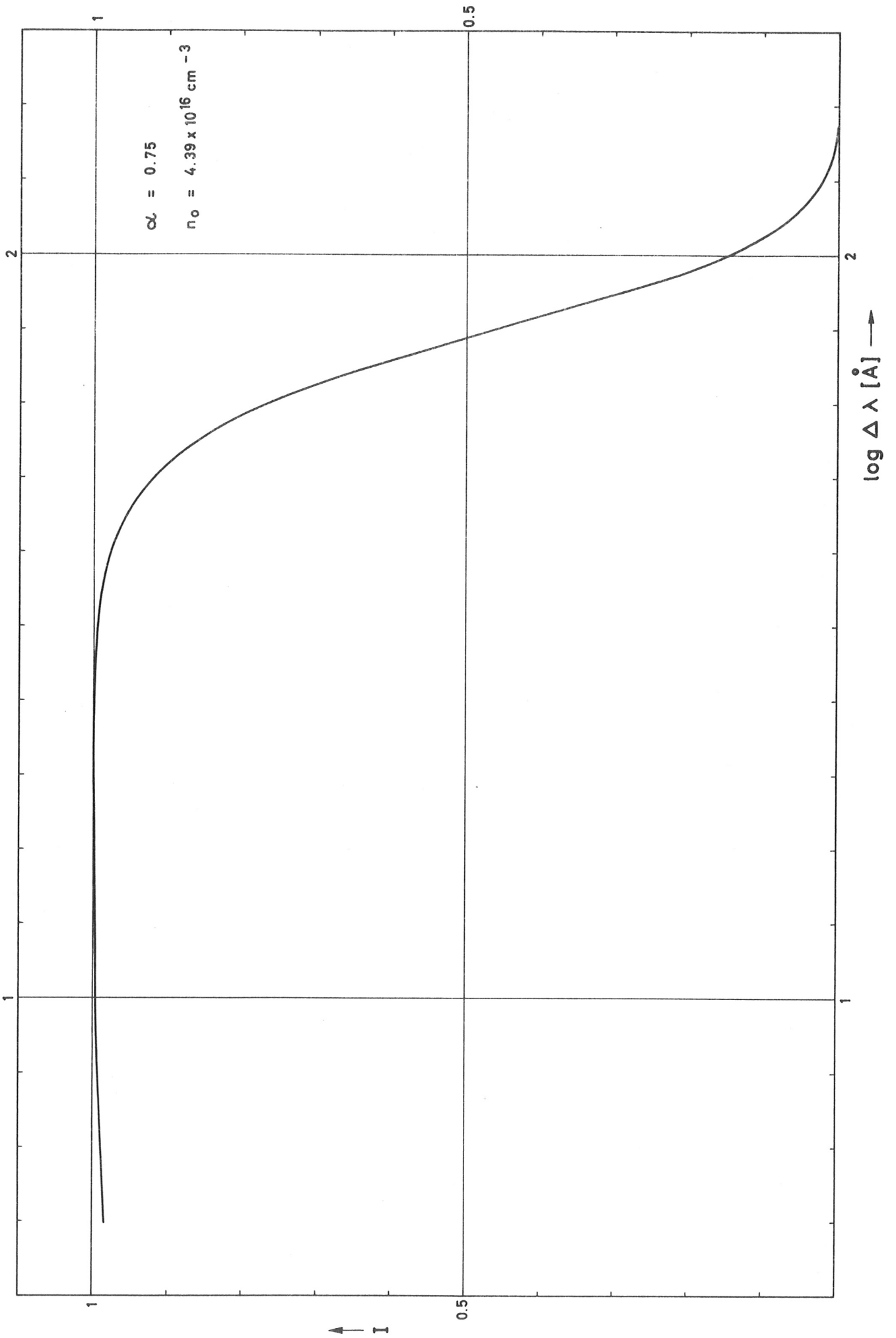


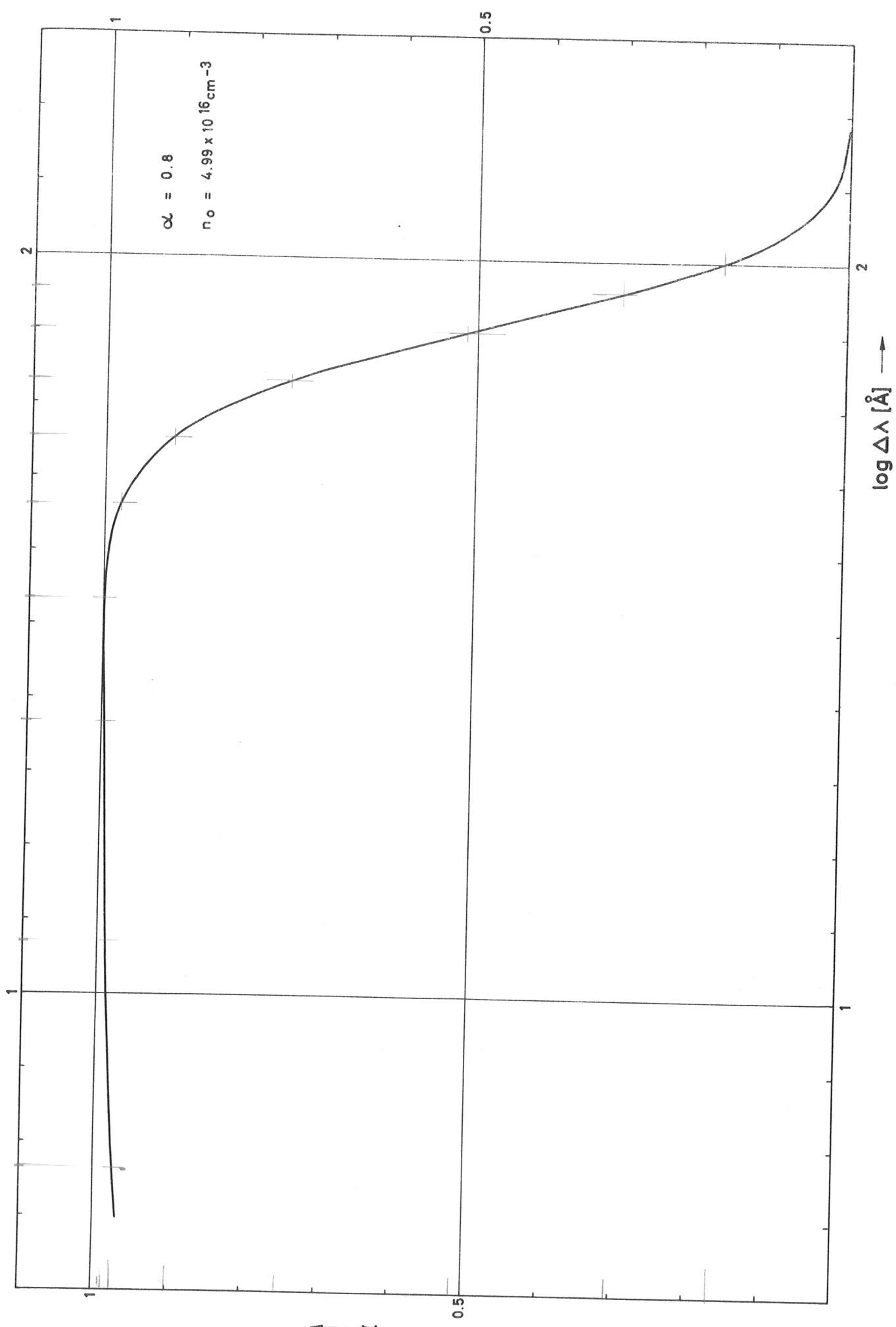




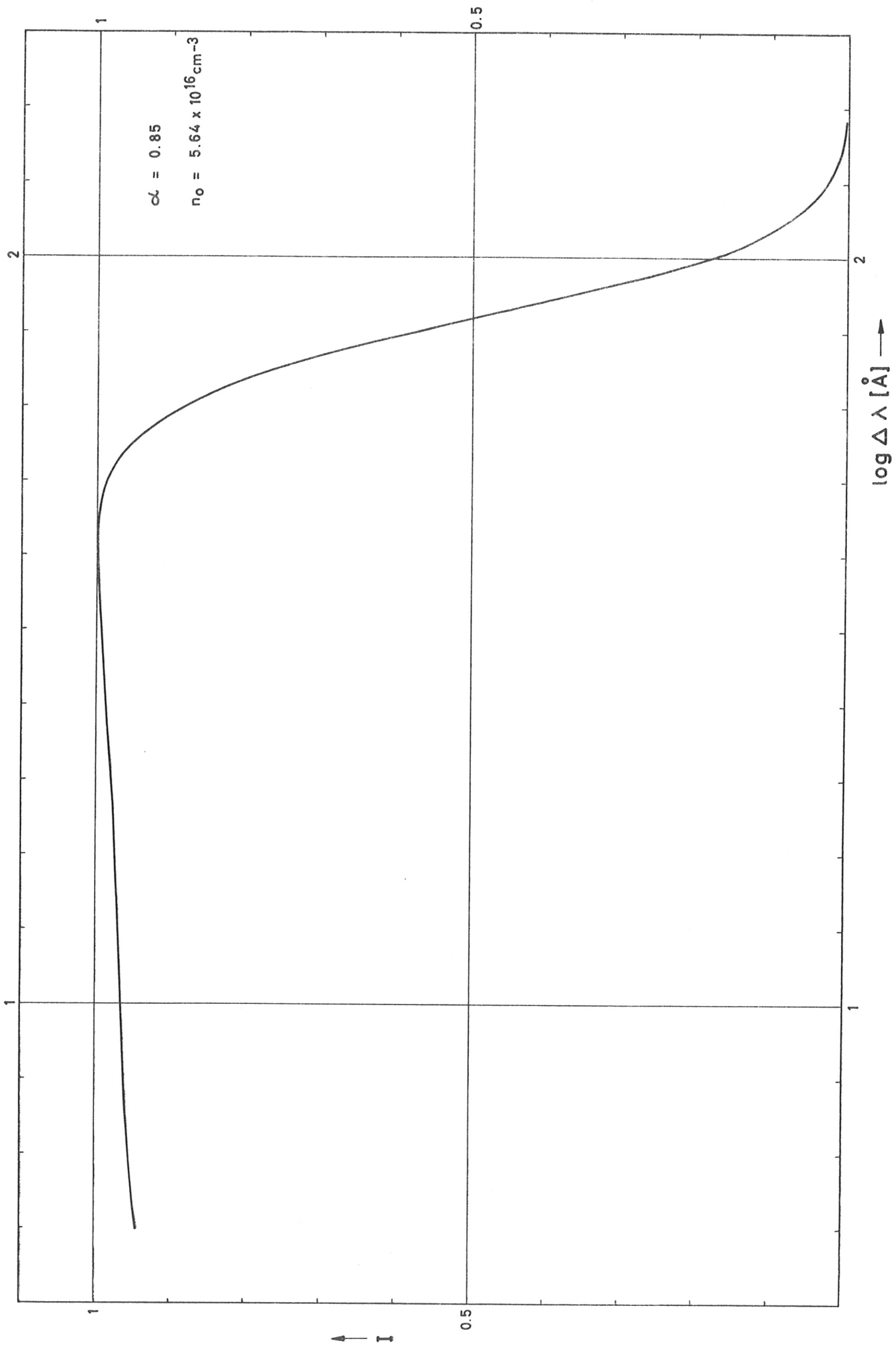


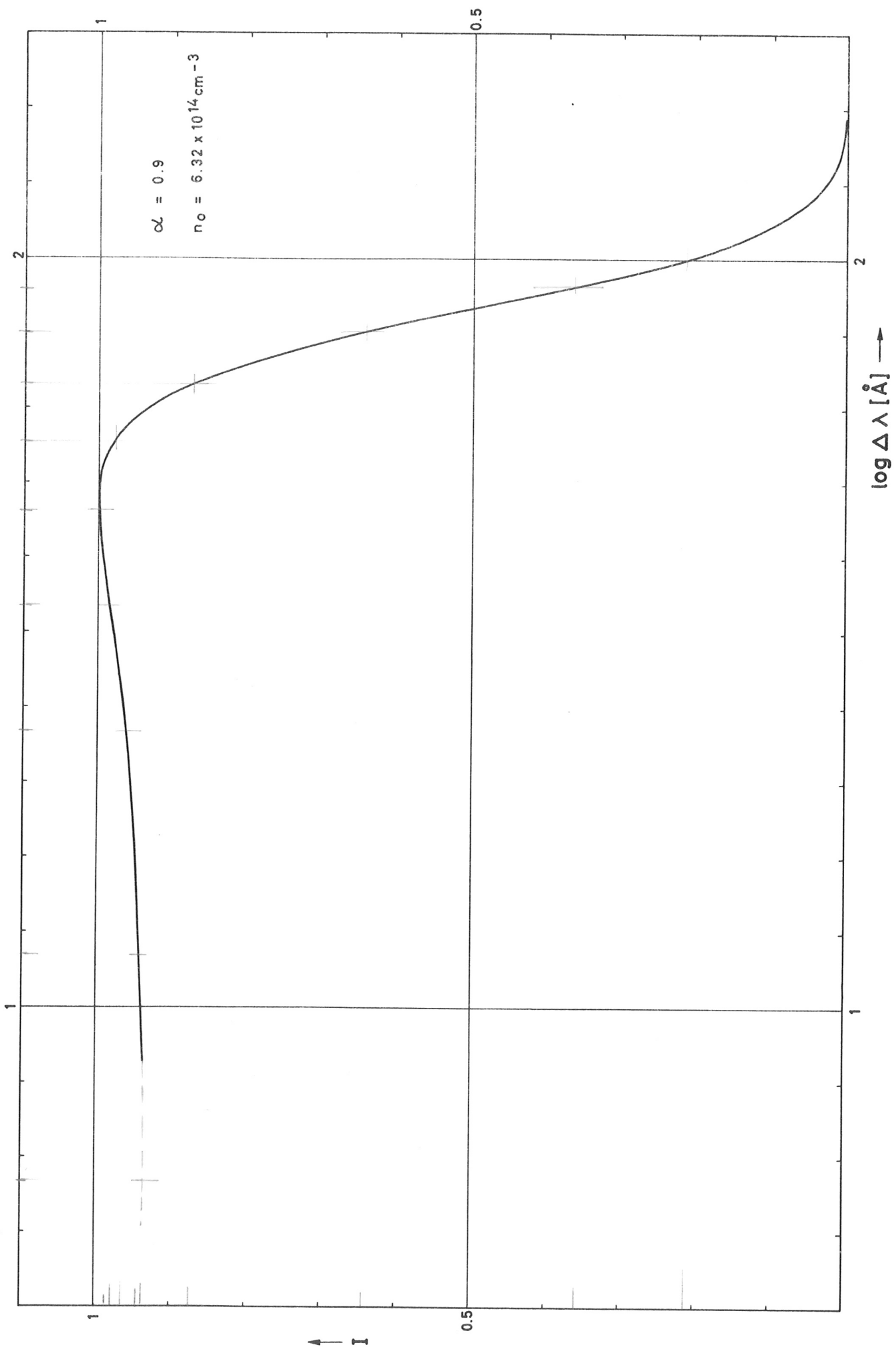


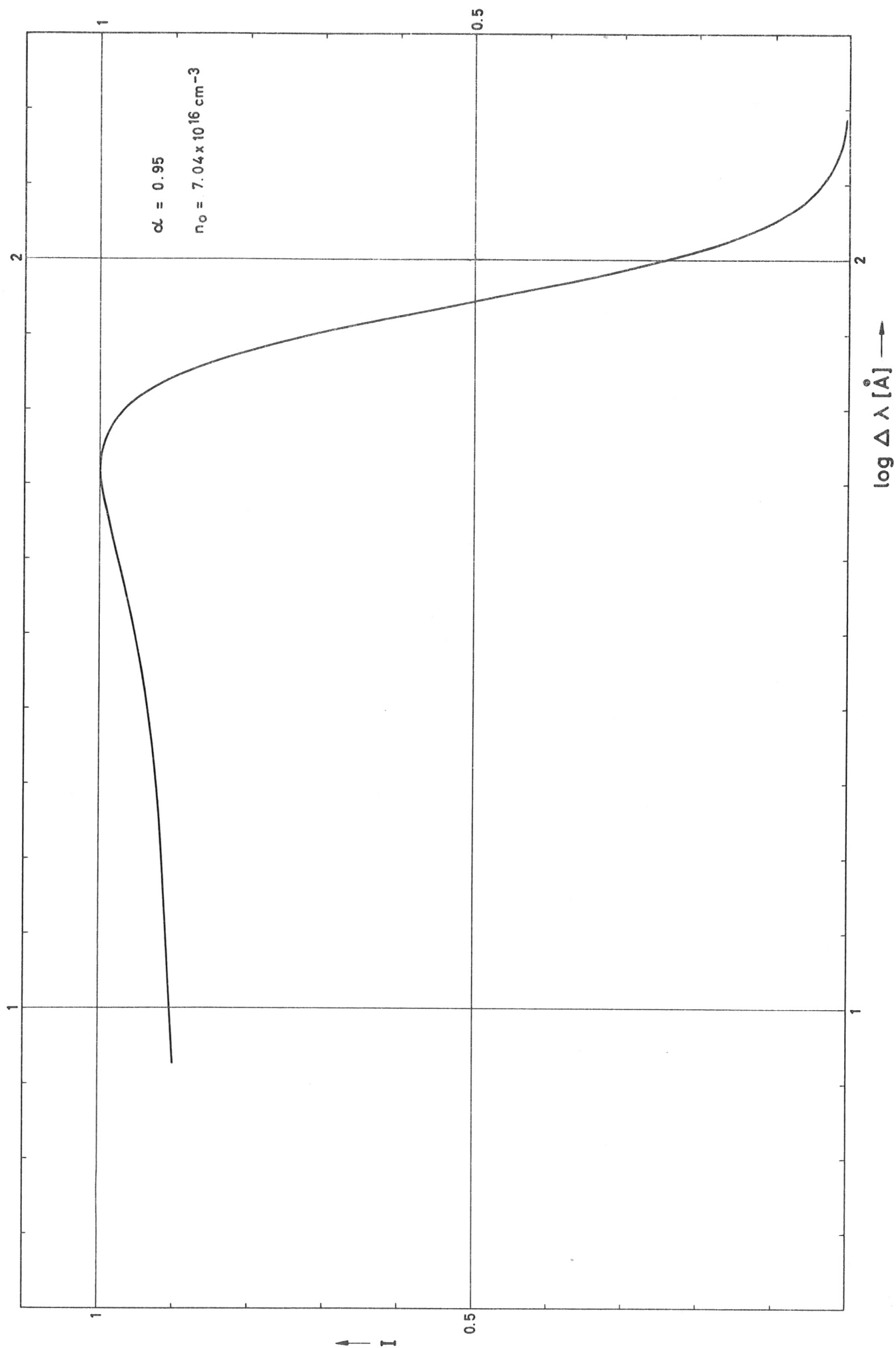


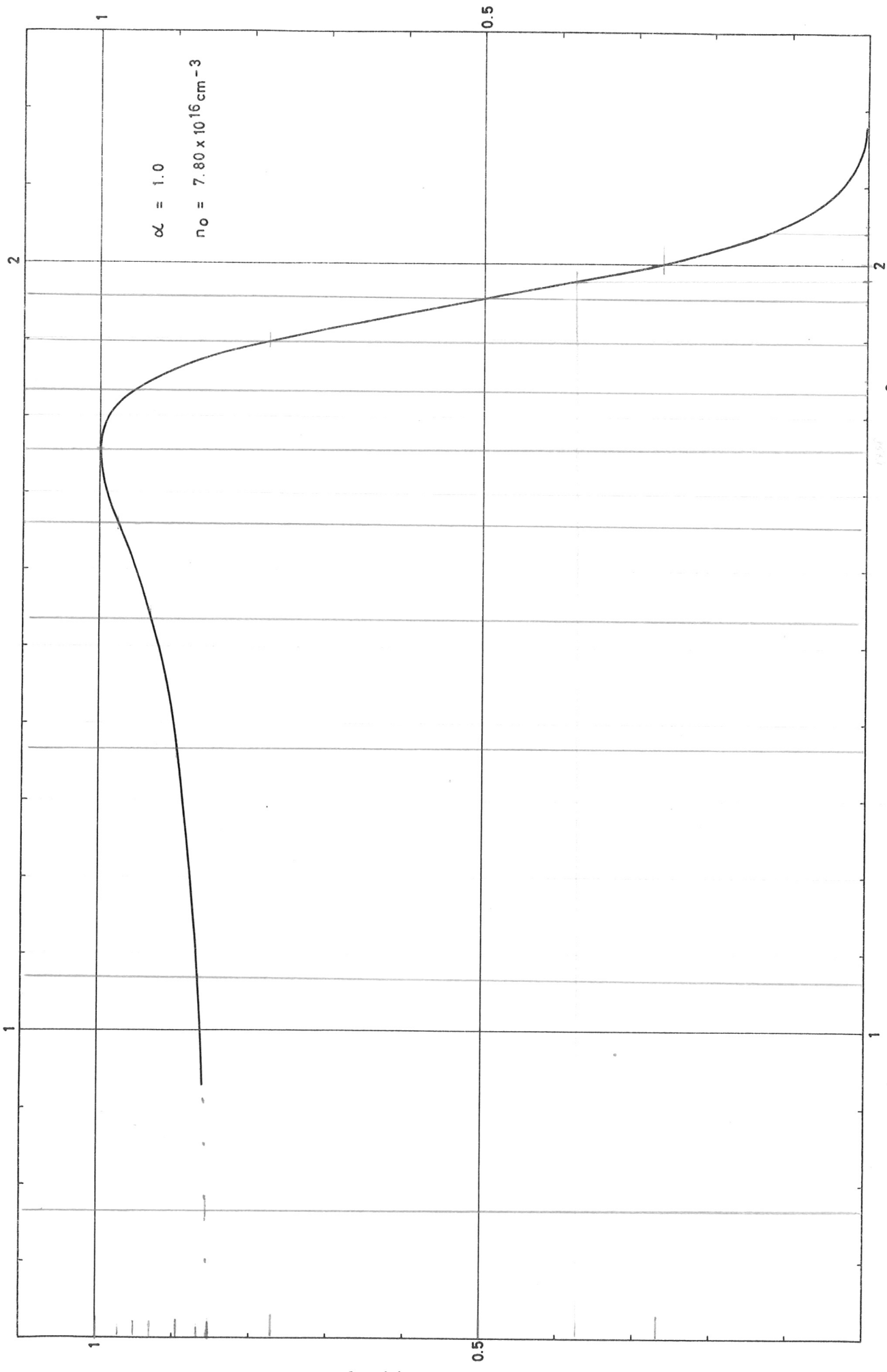












log Δλ [Å] →

10	14.4	15.0	20	25.2	31.6	39.8	50.1	63.1	77.5	100
71	9.9	7.25	1.77	1.91	2.05	2.13	2.21	2.28	2.34	2.45

