

Besetzung der diskreten Energieniveaus  
in einem stationären nichtthermischen  
Wasserstoffbogen

Population Densities of the Discrete  
Energy Levels in a Stationary Nonthermal  
Hydrogen Arc

S. Ramer

IPP 3/32

August 1965

**I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K**

**G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N**

# INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

## GARCHING BEI MÜNCHEN

Besetzung der diskreten Energieniveaus  
in einem stationären nichtthermischen  
Wasserstoffbogen

Population Densities of the Discrete  
Energy Levels in a Stationary Nonthermal  
Hydrogen Arc

S. Ramer

IPP 3/32

August 1965

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

ABSTRACT

The deviations from local thermal equilibrium are calculated for an inhomogeneous hydrogen plasma with given distributions of  $n_e$  and  $T_e$ .

The calculations are based on a cylindrically symmetric model with electron temperature  $T_e$  between  $\approx 5000^\circ$  and  $25000^\circ$ , and electron density  $n_e \leq 2.5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ .

Practically all processes of interest are taken into account. Since absorption is most important in the resonance lines, absorption terms are considered only for the lines Ly  $\alpha$  and Ly  $\beta$ . As these terms contain the radiation intensity, the simultaneous solution of the equation of radiative transfer and the equations for the rate of change of the occupation numbers of the energy levels is required. This was done using an iterative procedure.

It is shown that the ground level is nonthermal with a correction factor  $\geq 2$ . The excited levels are essentially thermal except for the outer zone, where the electron density becomes very low.

## INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
<b>I. <u>EINLEITUNG UND VORAUSSETZUNGEN</u></b>	
1. Problemstellung .....	1
2. Thermisches Gleichgewicht .....	1
a) Das vollständige thermische (thermodynamische) Gleichgewicht .....	1
b) Das lokale thermische Gleichgewicht .....	3
3. Bisherige Arbeiten zum Problem des lokalen thermischen Gleichgewichts .....	4
4. Das allgemeine Problem und seine Reduktion .....	5
<b>II. <u>DIE BESETZUNGSZAHLEN FÜR GEGEBENES STRAHLUNGSFELD</u></b>	
1. Die betrachteten Elementarprozesse .....	6
a) Anregung $p \rightarrow q$ durch Elektronenstöße .....	6
b) Stossionisation $p \rightarrow c$ .....	8
c) Stöße zweiter Art $q \rightarrow p$ und Dreierstossrekombination $c \rightarrow p$ .....	9
d) Strahlungsemission .....	9
e) Absorption (Linien) .....	10
2. Die vereinfachten Bilanzgleichungen .....	10
3. Ergebnisse .....	13
<b>III. <u>DIE ABHÄNGIGKEIT DES STRAHLUNGSFELDS VON DEN BESETZUNGSZAHLEN</u></b>	
1. Das behandelte Bogenmodell .....	17
2. Die Lösung der Strahlungstransportgleichung .....	17
a) Allgemeines .....	17
b) Die praktische Behandlung der Strahlungstransportgleichung .....	19
3. Ergebnisse .....	21
<b>IV. <u>DIE GLEICHZEITIGE BERECHNUNG VON BESETZUNGSZAHLEN UND STRAHLUNGSFELD</u></b>	23
<b>V. <u>DISKUSSION DER ERGEBNISSE</u></b>	24
<b>ANHANG</b>	
1. Das Strahlungsfeld: Definitionen .....	26
2. Ableitung der Gl. (22) .....	27
3. Begründung der Annahme $j_\nu = \chi_\nu' = \rho_\nu$ .....	28
<b>LITERATURVERZEICHNIS</b>	29

I. EINLEITUNG UND VORAUSSETZUNGEN

1. Problemstellung

In der Plasmaphysik ebenso wie in der Astrophysik stösst man häufig auf das Problem der Besetzung der einzelnen Energieniveaus einer bestimmten Atomsorte. So interessiert man sich für diese Besetzungszahlen z.B. im Zusammenhang mit folgenden Fragen:

- Auswertung spektroskopischer Messungen
- Ionisationsgrad
- Elektrische Leitfähigkeit
- Wärmeleitfähigkeit
- Energieverlust eines heissen Plasmas durch Linienstrahlung von Verunreinigungen
- Innere Energie

Eine besondere Schwierigkeit ist dabei die Berücksichtigung der (Resonanz-) Absorption, da in diese das Strahlungsfeld eingeht, das seinerseits wieder durch die Besetzungszahlen bestimmt wird.

Das entsprechende Gleichungssystem ist ein System von gekoppelten Integrodifferentialgleichungen. Um dieses System für ein spezielles Modell numerisch zu lösen, wird in der vorliegenden Arbeit folgender Weg eingeschlagen. Zunächst (in II) werden über das Strahlungsfeld Annahmen gemacht und die jeweils zugehörige Besetzung berechnet. In Teil III wird dann umgekehrt die Besetzung vorgegeben und das Strahlungsfeld berechnet. In IV wird schliesslich gezeigt, wie man durch Kombination von II und III zu einer selbstkonsistenten Lösung kommen kann.

2. Thermisches Gleichgewicht

Bevor das Problem der Berechnung von Besetzungszahlen genauer formuliert wird (in 4), soll noch einiges gesagt werden über den in diesem Zusammenhang wichtigen Begriff des "thermischen Gleichgewichts". Es sind hier zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Das vollständige thermische (thermodynamische) Gleichgewicht

Das vollständige thermische Gleichgewicht setzt ein homogenes und isothermes Medium voraus, das entweder unendlich ausgedehnt ist oder aber von Wänden umgeben ist, die dafür sorgen, dass keine Strahlungsverluste entstehen. In diesem (sehr idealisierten) Fall ergeben sich auf Grund statistischer Überlegungen folgende Verteilungsfunktionen:

α) Die Besetzung der diskreten Energieniveaus gehorcht einer BOLTZMANN-Verteilung

$$\frac{n(q)}{n(p)} = \frac{\tilde{\omega}_q}{\tilde{\omega}_p} \cdot e^{-\frac{E_{pq}}{kT}} \quad (1)$$

bzw.

$$\frac{n(q)}{n} = \frac{\tilde{\omega}_q}{Z} \cdot e^{-\frac{E_q}{kT}}$$

$n(p), n(q)$  = Besetzungszahlen [cm<sup>-3</sup>]  
 $\tilde{\omega}_p, \tilde{\omega}_q$  = statistische Gewichte  
 $E_{pq}$  = Energiedifferenz [erg]  
 $k$  = BOLTZMANN-Konstante = 1,38 · 10<sup>-16</sup> erg/Grad  
 $T$  = Temperatur [°K]

*In folgenden sollen Anregungsenergieen stets mit  $E_1, E_2, \dots$  und Ionisierungsenergien stets mit  $\chi$ , z.B.  $\chi_1$  bezeichnet werden.*

$$Z = \text{Zustandssumme} = \sum_i \omega_i \cdot e^{-\frac{E_i}{kT}}$$

$E_i = \text{Anregungsenergie des Niveaus } i \text{ [erg]}$

β) Die Geschwindigkeitsverteilung der einzelnen Teilchensorten ist eine MAXWELL-Verteilung

$$\varphi(v) = 4\pi v^2 \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{E}{kT}} \quad (2) *$$

$m = \text{Masse [g]}$   
 $v = \text{Geschwindigkeit [cm/sec]}$   
 $E = \frac{m}{2} v^2$

Die Temperatur T ist dabei für alle Teilchen dieselbe.

γ) Das Verhältnis zwischen den verschiedenen Ionisierungsstufen eines Elements ist geregelt durch die EGGERT-SAHA-Gleichung

$$\frac{n_{r+1} \cdot m_e}{n_r} = \frac{2}{h^3} \cdot (2\pi m_e kT)^{3/2} \cdot \frac{Z_{r+1}}{Z_r} \cdot e^{-\frac{\chi_r}{kT}} \quad (3)$$

- $n_r, n_{r+1}$  sind die Anzahldichten der r-ten, bzw. der r+1-ten Ionisierungsstufe [cm<sup>-3</sup>]
- $m_e$  = Elektronendichte [cm<sup>-3</sup>]
- $h$  = PLANCK'sches Wirkungsquantum =  $6,625 \cdot 10^{-27}$  erg·sec
- $m_e$  = Elektronenmasse =  $9,108 \cdot 10^{-28}$  g
- $Z_r, Z_{r+1}$  = Zustandssummen
- $\chi_r$  = Ionisierungsenergie des Grundniveaus [erg]

δ) Die Photonen haben eine PLANCK'sche Verteilung (Hohlraumstrahlung)

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (4)$$

$\nu = \text{Frequenz [sec}^{-1}\text{]}$   
 $c = \text{Lichtgeschwindigkeit [cm/sec]}$

Ausserdem gilt der KIRCHHOFF'sche Satz

$$E_\nu = \kappa_\nu \cdot B_\nu(T) \quad (5)$$

\* Im folgenden sollen Anregungsenergien stets mit E - z.B.  $E_i, E_p, \dots$  - und Ionisierungsenergien stets mit  $\chi$ , z.B.  $\chi_r$ , bezeichnet werden.

$\epsilon_{\nu}$  = Emissionskoeffizient  
 $k_{\nu}$  = Absorptionskoeffizient

(Die Beziehung ist unabhängig davon, ob die Koeffizienten auf das Volumen, auf die Masse oder auf die Anzahl bezogen sind (siehe Anhang) )

und das "Prinzip des detaillierten Gleichgewichts", das besagt, dass jeder Elementarprozess mit seinem Umkehrprozess im Gleichgewicht ist.

b) Das lokale thermische Gleichgewicht

Es ist klar, dass die unter a) genannten Bedingungen praktisch in keinem Fall realisiert sind. Die Systeme, für die man sich interessiert, z.B. eine Bogenentladung oder eine Sternatmosphäre, sind i.a. weder homogen noch isotherm. Auch wenn man nur so kleine Bereiche ins Auge fasst, dass man von Temperatur- und Dichteänderungen absehen kann, so wird trotzdem das Strahlungsfeld die Bedingung (4) nicht erfüllen, sondern nach unten -oder wenn die Umgebung heisser ist- auch nach oben von der PLANCK'schen Verteilung abweichen.

Es gibt Situationen, in denen eine solche Abweichung vom sog. "Hohlraumstrahlungsfeld" nicht kritisch ist, so dass die übrigen Verteilungen (1) - (3) sowie der KIRCHHOFF'sche Satz (5) und das "detaillierte Gleichgewicht" in erster Näherung erhalten bleiben und zwar mit der lokalen Temperatur  $T(\mathbf{r})$ . In diesem Fall spricht man dann von "lokalem thermischem Gleichgewicht".\*

Der erhebliche Vorteil, den die Annahme des LTE mit sich bringt, ist die Tatsache, dass dann (bei bekanntem Druck) sämtliche Teilchenzahlen, insbesondere die Besetzung der Energieniveaus, auf relativ einfache Weise aus der Temperatur berechnet werden können. Es ist nicht notwendig, mikroskopische Grössen wie Wirkungsquerschnitte, Übergangswahrscheinlichkeiten usw. zu kennen.

Dagegen ist eine Kritik der LTE-Annahme bzw. im Falle ihrer Unzulässigkeit ihre Ersetzung durch realistischere Verteilungsfunktionen nur möglich im Rahmen einer mikroskopischen Behandlung, die den Mechanismus untersucht, der für die Herstellung der Verteilungen verantwortlich ist.

Leider sind vor allem die dazu erforderlichen Wirkungsquerschnitte selbst für wasserstoffähnliche Atome bzw. Ionen noch sehr unsicher bekannt - eine Schwierigkeit, die die Möglichkeit und Zuverlässigkeit derartiger Untersuchungen immer noch stark einschränkt.

Es sei bemerkt, dass die Problematik bei der theoretischen Berechnung der Wirkungsquerschnitte darin liegt, dass die BORN'sche Näherung nur für Energien gilt, die gross gegen die Wechselwirkungsenergie sind

$$E \gg E_{pq}$$

während andererseits es für die Untersuchung der Abweichung vom LTE gerade auf Energien ankommt, die in der Nähe der Schwelle liegen

$$E \approx E_{pq}$$

Experimentelle Bestimmungen von Wirkungsquerschnitten lassen sich zwar für den Grundzustand verhältnismässig gut durchführen (crossed-beam-Methode), dagegen sind Messungen für angeregte Zustände bzw. für Ionen noch problematisch.

Ganz allgemein kann man sagen, dass es bei Abweichungen vom LTE auf das Verhältnis zwischen den miteinander konkurrierenden Strahlungs- und Stossprozessen ankommt. In Fällen, in denen die Stossprozesse eine dominierende Rolle spielen, wird sich also die unvollständige Reabsorption der Strahlung nicht wesentlich auswirken, und man kann lokales thermisches Gleichgewicht voraussetzen.

In den meisten Fällen ist es allerdings so, dass für die Übergänge zwischen den unteren Niveaus die Strahlungsprozesse keineswegs zu vernachlässigen sind.

\*Dafür soll im folgenden die gebräuchliche Abkürzung LTE (=local thermal equilibrium) gebraucht werden.

Trotzdem gibt es immer ein Niveau, oberhalb dessen man im wesentlichen nur noch Wechselwirkung durch Stösse hat. Die Zahl der Stossprozesse nimmt nämlich mit kleiner werdender Energiedifferenz zu, die der Strahlungsprozesse dagegen ab. Das hat zur Folge, dass hinreichend hoch angeregte Niveaus immer thermisch besetzt sind.\* Je höher die Dichte (insbesondere  $n_e$ ) wird, um so grösser wird die Gruppe dieser Niveaus mit BOLTZMANN-Verteilung und im Grenzfall  $n_e \rightarrow \infty$  ergibt sich schliesslich immer thermisches Gleichgewicht für sämtliche Niveaus.

### 3. Bisherige Arbeiten zum Problem des lokalen thermischen Gleichgewichts (LTE)

Die älteren Arbeiten beschränkten sich meistens auf die Betrachtung eines einzigen diskreten Niveaus, wobei angeregte Niveaus allenfalls durch Korrekturfaktoren berücksichtigt wurden. Dieses Vorgehen liefert zugleich direkt eine Ionisationsformel [1]. Auf diesem Wege wurden z.B. von ELWERT die Ionisationsgleichgewichte für die Sonnenkorona (Koronaformel) und für Gasnebel berechnet [2].

Kompliziertere Modelle sind die Koronaverteilung [3] und das Zweiniveau-Atom, z.B. [4], sowie die optisch dünne und die optisch dicke Näherung [5], [6], [7], [8]. Es soll im folgenden nur auf die Arbeiten [4] - [8] näher eingegangen werden.

Den Anstoss zu [5] gab die Beobachtung, dass die gemessenen Rekombinationskoeffizienten von zerfallenden Plasmen z.T. erheblich über den theoretischen Werten lagen. BATES, KINGSTON, Mc WHIRTER zeigten, dass der Grund für die Diskrepanzen die unzureichende Berücksichtigung der angeregten Niveaus war. In derselben Arbeit werden auch Werte für die Besetzung sämtlicher Niveaus in Abhängigkeit von Elektronendichte  $n_e$  und Elektronentemperatur  $T_e$  angegeben. Berücksichtigt sind sämtliche Strahlungsemissions- und sämtliche Elektronenstossprozesse, dagegen keinerlei Absorptionsprozesse ("optisch dünner Fall"). In dieser Arbeit (sie bezog sich auf Wasserstoff) wurden noch halbklassisch gewonnene Wirkungsquerschnitte verwendet, die sich später als beträchtlich zu gross erwiesen. Dementsprechend sind die Abweichungen vom LTE unterschätzt. Entsprechend, aber mit quantenmechanisch gewonnenen Wirkungsquerschnitten, wurden von Mc WHIRTER und HEARN wasserstoffähnliche Plasmen behandelt.

Es ergab sich [6], [8], [9], dass die Besetzungszahlen bzw. die Abweichung vom LTE in starkem Mass vom Grad der Reabsorption abhängt. Der Unterschied zwischen optisch dünnem und optisch dickem Modell beträgt für den Grundzustand u.U. mehrere Zehnerpotenzen (optisch dick bedeutet in diesem Zusammenhang vollständige Reabsorption).

Die Frage nach dem Grad der Reabsorption bleibt in diesem Rahmen allerdings offen. Um sie beantworten zu können, muss man die Strahlungstransportgleichung in die Überlegungen einbeziehen. Dies wurde getan von CUPERMAN, ENGELMAN, OXENIUS [4], [4a]. Die analytische Behandlung des entsprechenden Gleichungssystems führt auf eine komplizierte Integralgleichung, die für den betrachteten Fall der Kugelsymmetrie und unter stark vereinfachenden Annahmen (insbesondere wird ein homogenes und isothermes Plasma vorausgesetzt, in dem nur das Strahlungsfeld variiert) in eine FREDHOLM'sche Integralgleichung übergeht, die bekanntlich lösbar ist.

In der vorliegenden Arbeit soll es sich um die Ausdehnung dieser Rechnungen auf Zylindersymmetrie und auf ein inhomogenes und nicht isothermes Plasma handeln. Wie es scheint, ist der dort beschrittene analytische Weg hier nicht mehr gangbar. Es ist notwendig, eine numerische Rechnung durchzuführen und zwar für jeweils ein bestimmtes Bogenmodell (charakterisiert durch die Profile von Elektronendichte und -temperatur  $n_e(r)$ ,  $T_e(r)$ ).

Der Grundgedanke des Verfahrens ist -wie schon in 1. kurz skizziert- folgender: Da es nicht möglich ist, das Problem "auf einmal" zu lösen, wird es zunächst in zwei Teile zerlegt, die getrennt behandelt werden:

1. Abhängigkeit der Besetzung vom Strahlungsfeld
2. Untersuchung des Strahlungsfelds für gegebene Besetzung
3. Eine zunächst "vernünftig" angenommene Besetzung wird - durch eine Art Iteration - schrittweise solange verbessert, bis sich eine selbstkonsistente Besetzung und damit eine Lösung ergibt.

\* Das gilt strenggenommen nur unter der Voraussetzung, dass die Temperatur der schweren Teilchen  $T_S$  ungefähr gleich der der Elektronen  $T_e$  ist.



#### 4. Das allgemeine Problem und seine Reduktion

Im allgemeinsten Fall sieht die Bilanz für ein bestimmtes Niveau eines bestimmten Ions folgendermassen aus:

$$\frac{dn^r(p)}{dt} = \sum_{\alpha, q} \left\{ P^r(\alpha, p, q) - R^r(\alpha, p, q) \right\} - \Delta \int_p^r \quad (6)$$

Das Symbol  $\int$  bedeutet, wie üblich, Summation oder Integration, je nachdem, ob es sich um kontinuierliche oder diskrete Werte handelt.

$p$  und  $q$  sind die Nummern der betreffenden Niveaus (diskretes bzw. kontinuierliches Spektrum). Die Zählung beginnt mit 1 für das Grundniveau.

$\alpha$  charakterisiert jeweils ein Paar von zusammengehörigen Elementarprozessen (z.B. Stossanregung durch Elektronen - Stösse zweiter Art mit Elektronen oder Emission - Absorption).  $P(\alpha, p, q)$  ist dabei ein Prozess, der von  $p$  nach  $q$  führt.  $R(\alpha, p, q)$  der Umkehrprozess.

$\Delta \int_p$  ist ein Diffusionsterm.

Der Index  $r$  charakterisiert die betreffende Ionisierungsstufe ( $r = 0$ : neutrales Atom,  $r = 1$ : einfach ionisiertes Atom usw.).

Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass z.B. die Klammern für Übergänge durch Elektronenstoss Integrale über die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen, d.h. über die Besetzung der kontinuierlichen Niveaus, enthalten, da ja ein bestimmter Übergang durch Elektronen ganz verschiedener Energie verursacht werden kann. Es handelt sich also um Integrodifferentialgleichungen, die zudem noch das Strahlungsfeld enthalten.

Das System bestimmt sämtliche Besetzungszahlen; man würde daraus insbesondere die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen gewinnen. Seine Behandlung dürfte aber ziemlich hoffnungslos (allerdings in der Plasmaphysik auch nicht sehr interessant) sein.

Man ist deshalb gezwungen, einige Voraussetzungen zu machen:

1. Stationarität:  $\frac{d}{dt} = 0$

Hierzu sei noch bemerkt, dass man die linken Seiten der Gleichungen (6) für angeregte Niveaus in einem weiten Bereich von  $n_e, T_e$  auch dann noch durch Null ersetzen kann, wenn das Plasma entsteht oder zerfällt [5] (sog. "quasistationäre Näherung").

2. Quasineutralität

3. Vernachlässigung von Diffusionseffekten:  $\Delta \int_p = 0$  (siehe Kap. V)

4. Es wird angenommen, dass die freien Elektronen eine MAXWELL-Verteilung (2) haben. Das bedeutet, dass man einen Teil der Unbekannten als bekannt ansieht, wodurch sämtliche Gleichungen für das Kontinuum wegfallen.

5. Beschränkung auf den einfachsten Fall, das Wasserstoffplasma

6. Während man bei der Durchführung des allgemeinen Formalismus strenggenommen den Strahlungstransport in jeder Frequenz betrachten müsste, sollen hier nur die beiden wichtigsten Linien, nämlich  $Ly \alpha$  und  $Ly \beta$ , berücksichtigt werden. Die übrige Strahlung wird als optisch dünn angenommen, in dem Sinn, dass ihre Absorption zur Besetzung nichts beiträgt. Die Einbeziehung weiterer Linien, etwa  $Ly \gamma$ , würde aber im Prinzip keine Schwierigkeiten machen.

7. Von den Photoprozessen werden nur "wahre" Absorption und "wahre" Emission (mit induzierter Emission), also keine Streuprozesse, betrachtet (siehe Anhang). Das Weglassen der Streuung ist wegen der relativ hohen Teilchendichten sicher gerechtfertigt.

8. Wenn  $j_\nu, \psi_\nu, \varphi_\nu$  die auf Eins normierten Profile von spontaner Emission, induzierter Emission und Absorption sind, so soll gelten

$$j_\nu = \psi_\nu = \varphi_\nu \quad (7)$$

(eine ausführliche Begründung für diese Annahme wird im Anhang gegeben)

- 9. Es wird abgesehen von H<sub>2</sub>-Molekülen und -Molekülionen, sowie von H<sup>-</sup>.
- 10. Was die inelastischen Stossprozesse anbelangt, so braucht man hier bekanntlich nur Elektronenstösse zu berücksichtigen. Stösse zwischen schweren Teilchen spielen wegen der geringen Energieübertragung (Faktor 0,5 bei gleichen Massen ) für die Anregung und erst recht für die Ionisation keine Rolle.\* Damit ist es dann auch gerechtfertigt, die gestossenen Teilchen als ruhend anzusehen. Die Temperatur T<sub>S</sub> der schweren Teilchen spielt dann keine Rolle mehr - mit Ausnahme des DOPPLER-Profiles, wo angenommen wird, dass T<sub>e</sub> ≈ T<sub>S</sub> gilt.

Anders bei den elastischen Stössen. Hier sind Stösse mit schweren Teilchen, etwa H → H, wesentlich. Es ist zwar nicht notwendig, die genaue Zahl dieser Prozesse zu kennen, doch kommt es darauf an, dass sie häufig genug sind, um eine "statistische Besetzung", d.h. Verteilung der Atome auf die Subniveaus gemäss deren statistischem Gewicht herzustellen. Wäre diese Bedingung nicht erfüllt, so müsste man die Subniveaus 1s, 2s, 2p, ... getrennt behandeln.

- 11. Von verbotenen Übergängen 1s → 2s etc. wird abgesehen.
- 12. Schliesslich sollen noch vernachlässigt werden: Schwerpunktsgeschwindigkeit des Plasmas, Wand- bzw. Elektrodeneffekte sowie Effekte äusserer Felder.

Die Besetzung der Niveaus charakterisiert man üblicherweise nicht durch Angabe der Teilchenzahlen selbst, sondern durch reine Zahlen

$$f(p) = \frac{n(p)}{n_E(p)}$$

Dabei ist n<sub>E</sub>(p) die mit Hilfe der als bekannt angesehenen Elektronendichte n<sub>e</sub> und Elektronentemperatur T<sub>e</sub> nach SAHA-BOLTZMANN berechnete "thermische Besetzung":

$$n_E(p) = \left( \frac{h^2}{2\pi m_e k T_e} \right)^{3/2} \cdot n_e \cdot n_i \cdot \frac{\tilde{\omega}_p}{2Z} e^{-\frac{\chi_p}{k T_e}} \quad (8)$$

- n<sub>i</sub> = wirklich vorhandene Ionendichte [cm<sup>-3</sup>]
- $\tilde{\omega}_p$  = statistisches Gewicht des Niveaus p (= 2p<sup>2</sup> für Wasserstoff)
- Z = Zustandssumme des nächsthöheren Ions
- χ<sub>p</sub> = Ionisierungsenergie des p-ten Niveaus [erg]

## II. DIE BESETZUNGSZAHLEN FÜR GEGEBENES STRAHLUNGSFELD

In diesem Kapitel soll der erste Schritt der in Kap. I geschilderten selbstkonsistenten Rechnung getan werden, nämlich eine Orientierung darüber, welche Besetzung man für das betrachtete Bogenmodell unter verschiedenen "vernünftigen" Annahmen über das Strahlungsfeld zu erwarten hat.

Im folgenden sollen zunächst einmal die für die verschiedenen Elementarprozesse verwendeten Formeln zusammengestellt werden.

### 1. Die betrachteten Elementarprozesse

a) Anregung p → q durch Elektronenstösse:

\* Für Stossübergänge zwischen angeregten Niveaus können diese Stösse eine Rolle spielen. Dieser Einfluss wird aber höchstens dann kritisch, wenn die Temperaturen der Elektronen und der schweren Teilchen sehr verschieden sind [21].

Die Anzahl dieser Prozesse pro  $\text{cm}^3$  und sec sei

$$n_e \cdot n(p) \cdot K(p, q)$$

Wenn die Massen der Stosspartner  $m_1$  und  $m_2$  sind, so ergibt sich [11] für den Koeffizienten  $K(p, q)$  der Ausdruck

$$K(p, q) = \int_{V_{\min}}^{\infty} 4\pi Q(v) \cdot \left( \frac{m_1 m_2}{2\pi (m_1 + m_2) kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{v^2}{kT}} v^3 dv \quad (9)$$

$V$  = Relativgeschwindigkeit [cm/sec]

$Q(V)_{p \rightarrow q}$  = Wirkungsquerschnitt des Prozesses [cm<sup>2</sup>]

Dabei wurde die Annahme gemacht, dass beide Teilchensorten eine MAXWELL'sche Geschwindigkeitsverteilung (2) haben.

Für den hier betrachteten Fall (Stösse von Elektronen gegen Wasserstoffatome) ist  $m_1 \ll m_2$ . Damit vereinfacht sich (9) zu

$$K(p, q) = \int_{v_{\min}}^{\infty} v \cdot Q(v) \cdot \varphi(v) dv \quad (10)$$

$v$  = Geschwindigkeit des Elektrons [cm/sec]

$\varphi(v)$  = MAXWELL-Verteilung (2)

(Die Formel gilt -für den Fall ruhender Ziele- darüberhinaus für beliebige Geschwindigkeitsverteilung)

$v_{\min}$  = Minimalgeschwindigkeit ( $\frac{m_e}{2} v_{\min}^2 = E_{pq}$ )

Als Wirkungsquerschnitt  $Q(v)$  wurde gewählt [12]

$$Q(v)_{p \rightarrow q} = 4\pi a_0^2 \cdot \alpha_{pq} \cdot \left( \frac{\chi_1}{E_{pq}} \right)^2 \cdot f_{pq} \cdot \frac{U_{pq} - 1}{U_{pq}^2} \cdot \ln(1,25 \beta_{pq} U_{pq}) \quad (11)$$

$$\pi a_0^2 = 8,797 \cdot 10^{-17} \text{ cm}^2$$

$\chi_1$  = Ionisierungsenergie des Wasserstoffs im Grundzustand "1" =  $2,178 \cdot 10^{-11}$  erg

$E_{pq}$  = Energiedifferenz  $E_q - E_p$

$f_{pq}$  = Absorptionsoszillatorstärke

$U_{pq} = E/E_{pq}$  ( $E$  = Energie des stossenden Elektrons)

Die Faktoren  $\alpha_{pq}$ ,  $\beta_{pq}$  geben die Möglichkeit zur Anpassung an experimentell gewonnene Kurven. Sie wurden hier gleich Eins gesetzt.

Setzt man den Wirkungsquerschnitt (11) in (10) ein, so erhält man

$$K(p,q) = 9,0 \cdot 10^{-24} (kT_e)^{-3/2} \frac{f_{pq}}{u_{pq}} \cdot \int_{u_{pq}}^{\infty} e^{-u} \left(1 - \frac{u_{pq}}{u}\right) \ln \left(1,25 \beta_{pq} \frac{u}{u_{pq}}\right) du \quad (12)$$

$$u_{pq} = \frac{E_{pq}}{kT_e}$$

$$u = \frac{E}{kT_e}$$

b) Stossionisation  $p \rightarrow c$ :

Die Anzahl dieser Prozesse pro  $\text{cm}^3$  und sec sei  $n_e \cdot n(p) \cdot K(p,c)$ .

Als Wirkungsquerschnitt wurde verwendet [13]

$$Q_{p \rightarrow c}(v) = 2,66 \pi \alpha_0^2 \cdot \rho^4 \cdot \frac{U-1}{U^2} \cdot \ln(1,25 U) \quad (13)$$

$$U = \frac{E}{\chi_p}$$

$\chi_p$  = Ionisierungsenergie des Niveaus p

E = Energie des stossenden Elektrons

Durch Integration über die MAXWELL-Verteilung erhält man

$$K(p,c) = 5,32 \pi \alpha_0^2 \cdot \rho^4 \cdot u_p \sqrt{\frac{2kT_e}{\pi m_e}} \cdot \int_{u_p}^{\infty} e^{-u} \left(1 - \frac{u_p}{u}\right) \ln \left(1,25 \frac{u}{u_p}\right) du \quad (14)^*$$

$$u_p = \frac{\chi_p}{kT_e}$$

Für das in beiden Fällen auftretende Integral wurde von DRAWIN [12] eine Approximation angegeben, nämlich die Funktion

$$\psi(x) = \frac{e^{-x}}{1+x} \cdot \left[ \frac{1}{20+x} + \ln \left(1,25 \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) \right]$$

(  $x = u_{pq}$  bzw.  $u_p$  )

\* Es ist vielleicht interessant, dass man die Formeln (13), (14) aus den Formeln (11), (12) bekommt, wenn man das Kontinuum als ein Niveau "c" betrachtet mit der Oszillatorstärke  $f_{pc} = 0,665$  für alle Übergänge  $p \rightarrow c$ .

Es zeigte sich, dass sich diese Approximation durch Einführung eines Korrekturfaktors  $\gamma(x)$  noch wesentlich verbessern lässt. Es wurde gesetzt:

$$\gamma(x) = \begin{cases} 0,90 \text{ für } 2 \cdot 10^{-4} < x \leq 0,94 \cdot 10^{-2} \\ 0,86 \text{ für } 0,94 \cdot 10^{-2} < x \leq 0,02 \\ 0,82 \text{ für } 0,02 < x \leq 0,78 \\ 0,87 \text{ für } 0,78 < x \leq 1,22 \\ 0,93 \text{ für } 1,22 < x \leq 2,30 \\ 1,00 \text{ für } 2,30 < x \end{cases}$$

Obwohl sich die Funktionswerte  $\psi(x)$  für  $0,0002 < x < 80$  um 38 Zehnerpotenzen ändern, beträgt der Fehler der Approximation in diesem Bereich höchstens 5 %.

c) Stösse zweiter Art  $q \rightarrow p$  und Dreierstossrekombination  $c \rightarrow p$

Die Koeffizienten  $K(q,p)$  und  $K(c,p)$  werden wieder so definiert, dass die Zahl der Prozesse pro  $\text{cm}^3$  und sec gegeben wird durch

$$n_e \cdot n(q) \cdot K(q,p) \\ \text{bzw. } n_e \cdot n_i \cdot K(c,p)$$

( $K(c,p)$  enthält also noch einen Faktor  $n_e$ )

Die Verhältnisse  $\frac{K(q,p)}{K(p,q)}$  und  $\frac{K(c,p)}{K(p,c)}$  sind bestimmt durch atomare Grössen (Wirkungsquerschnitte) und durch die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen. Das bedeutet, dass die beiden Quotienten dieselben Werte haben wie bei vollständigem thermodynamischem Gleichgewicht, solange die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen eine MAXWELL-Verteilung ist. In diesem Fall gelten die Beziehungen:

$$\begin{aligned} n_E(q) \cdot K(q,p) &= n_E(p) \cdot K(p,q) \\ n_i \cdot K(c,p) &= n_E(p) \cdot K(p,c) \end{aligned} \tag{15}$$

$n_E(p)$ ,  $n_E(q)$  sind die durch (8) definierten thermischen Besetzungszahlen

d) Strahlungsemission

Für Übergänge zwischen diskreten Niveaus werden die EINSTEIN-MILNE-Koeffizienten verwendet. Die Zahl der Strahlungsübergänge vom höheren Niveau  $q$  zum tieferen Niveau  $p$  wird also gegeben durch

$$\begin{aligned} n(q) \cdot A(q,p) & \quad (\text{spontane Emission}) \\ \text{bzw. durch} & \\ n(q) \cdot B(q,p) \cdot \int_{\text{Linie}} \bar{I}_\nu \psi_\nu d\nu & \quad (\text{induzierte Emission}) \end{aligned}$$

wobei  $\bar{I}_\nu$  die über alle Richtungen gemittelte Strahlungsintensität und  $\psi_\nu$  das Profil der induzierten Emission ist ( $\int_{\text{Linie}} \psi_\nu d\nu = 1$ ).

Die Zahl der Übergänge zwischen dem Kontinuum und dem diskreten Niveau  $p$  (Strahlungsrekombination) wird geschrieben

$$n_e \cdot n_i \cdot \beta(p)$$

\* Das Rechenprogramm für die Strahlungsrekombination wurde mir freundlicherweise von Herrn Mr. WHITNER, Culham, zur Verfügung gestellt.

Für  $\beta$  gilt folgende Formel

$$\beta(p) = \frac{1}{c^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (m_e k T_e)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2p^2 \cdot e^{\frac{\chi_p}{k T_e}} \cdot \int_{\chi_p}^{\infty} (h\nu)^2 e^{-\frac{h\nu}{k T_e}} a_p(Z, h\nu) d(h\nu) \quad (16)$$

$\chi_p$  = Ionisierungsenergie des Niveaus p [erg]

$$a_p(Z, h\nu) = \frac{2^6 \alpha \pi a_0^2}{3 \sqrt{3}} \cdot \frac{p}{Z^2} \cdot (1 + p^2 \epsilon)^{-3} \cdot g_{II}(p, \epsilon) \quad (\text{Querschnitt für Photoionisation vom Niveau p aus})$$

$\alpha$  = Feinstrukturkonstante

Z = Kernladung (hier Z = 1)

$a_0$  = BOHR'scher Radius

$$h\nu = h R c Z^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \epsilon\right) \quad (\text{Definitionsgleichung für } \epsilon)$$

$$R = \text{RYDBERG-Zahl} = 1,0968 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-1}$$

$g_{II}$  ist der KRAMERS-GAUNT-Faktor, für den von BURGESS [15] eine asymptotische Entwicklung angegeben wurde. Von dieser wurden die ersten drei Terme genommen [14]. Der Fehler beträgt höchstens einige Prozent.\*

e) Absorption (Linien)

Die Zahl der Übergänge vom tieferen Niveau p zum höheren Niveau q ist

$$n(p) \cdot B(p, q) \cdot \int_{\text{Linie}} \bar{I}_\nu \varphi_\nu d\nu$$

wobei B(p, q) der EINSTEIN-MILNE-Koeffizient für Absorption und  $\varphi_\nu$  das Absorptionsprofil ist ( $\int \varphi_\nu d\nu = 1$ ).

Es ist manchmal zweckmässig, auch für das Strahlungsfeld eine Temperatur  $T_r$  einzuführen durch

$$\int_{\text{Linie}} \bar{I}_\nu \varphi_\nu d\nu = B_{\nu_0}(T_r) \cdot W_{pq} \quad (17)$$

wobei  $B_{\nu_0}$  der Wert der PLANCK-Funktion für die Linienmitte ist. Der Faktor  $W_{pq}$  berücksichtigt die Tatsache, dass die Intensität im Linienbereich nicht konstant ist.

## 2. Die vereinfachten Bilanzgleichungen

Die Gleichungen (6) gehen mit den in I.4 gemachten Voraussetzungen und nach Division durch die thermischen Besetzungszahlen  $n_E(p)$  über in

$$0 = n_e \cdot \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^{\infty} K(p, q) [\beta(p) - \beta(q)] + n_e \cdot K(p, c) \cdot [\beta(p) - 1] + \sum_{q < p} \beta(p) A(p, q) - \sum_{q > p} \beta(q) \frac{q^2}{p^2} e^{-u_{pq}} A(q, p) - \frac{1}{4,2} \cdot 10^{16} \cdot \frac{T_e^{3/2}}{p^2} \cdot \exp\left(-\frac{157890}{p^2 T_e}\right) \cdot \beta(p) + L_p \quad (18)$$

\*Das Rechenprogramm für die Strahlungsrekombination wurde mir freundlicherweise von Herrn Mc WHIRTER, Culham, zur Verfügung gestellt.



Es ergab sich, dass die Näherungen b) - c) gut übereinstimmen, während a) merklich abweichende, aber immer noch brauchbare Ergebnisse liefert. a) ist am schlechtesten in optisch dicken Fällen. An den folgenden drei Testfällen soll die Konvergenz der Werte veranschaulicht werden:

$$n_e = 1,6 \cdot 10^{13} \quad T_e = T_r^{Ly \alpha} = T_r^{Ly \beta} = 6000^\circ \quad W_{12} = 0,9 \quad W_{13} = 1$$

(bezügl. der Definitionen siehe Gl. (17).)

Näherung	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
a)	5,14	4,64	2,74
c)	6,06	5,47	3,23
d)	6,16	5,57	3,28

$$n_e = 1,75 \cdot 10^{16} \quad T_e = 25000^\circ \quad T_r^{Ly \alpha} = T_r^{Ly \beta} = 8000^\circ \quad W_{12} = 0,9 \quad W_{13} = 1$$

Näherung	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
a)	12,29	1,02	1,00
c)	12,38	1,02	1,00
d)	12,40	1,02	1,00

$$n_e = 1,75 \cdot 10^{16} \quad T_e = 25000^\circ \quad T_r^{Ly \alpha} = T_r^{Ly \beta} = 23000^\circ \quad W_{12} = 0,9 \quad W_{13} = 1$$

Näherung	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$
a)	1,81	1,03	1,00
c)	1,83	1,03	1,00
d)	1,84	1,03	1,00

Zu den Gleichungen (18) ist noch folgendes zu sagen: Denkt man sie sich wieder mit den  $n_E(p)$  multipliziert, so hat man Bestimmungsgleichungen für die Besetzungszahlen selbst, und zwar hat man in jeder Näherung ebensoviele Gleichungen wie Unbekannte  $n(1), n(2), \dots$

Andererseits lässt sich das Kontinuum bei bekannter Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen als ein einziges Niveau behandeln. Man könnte nun glauben, dass bei Hinzunahme der Bilanz dieses "Niveaus" die Zahl der Gleichungen genügt, um allein aus der Elektronentemperatur  $T_e$  alle weiteren Besetzungszahlen einschliesslich  $n_e$  zu berechnen.

Anschaulich ist bereits klar, dass das nicht möglich ist. Mathematisch löst sich der Widerspruch dadurch, dass die Gleichungen dann nicht mehr linear unabhängig sind. Die Bilanz des Kontinuums lässt sich natürlich durch Addition aller diskreten Bilanzen gewinnen.



Zur Charakterisierung eines Plasmas sind also in jedem Fall, gleichgültig ob es sich im thermischen Gleichgewicht befindet oder nicht, zwei Parameter erforderlich, z.B.  $T_e$  und der Druck  $p$  oder (wie hier)  $T_e$  und  $n_e$ . Zum Schluss sei noch darauf hingewiesen, dass man durch Unzugänglichmachen der Grundniveaus (d.h. Nullsetzen der entsprechenden Übergangskoeffizienten) ein grobes Modell eines Alkaliatoms bekommt (Anregungsenergie 1,9 eV, Ionisierungsenergie 3,4 eV). Das Rechenprogramm für den Teil II kann ohne Schwierigkeiten auch für solche Fälle benutzt werden. Bei bekannten Wirkungsquerschnitten und Übergangswahrscheinlichkeiten lässt sich darüber hinaus jedes beliebige Atom mit diesem Programm behandeln.

### 3. Ergebnisse

In diesem Abschnitt soll anhand einiger Tabellen gezeigt werden, wie die Besetzung der ersten drei Niveaus von den Plasmaparametern  $n_e$ ,  $T_e$  und vom Strahlungsfeld abhängt.

Jedes Feld dieser Tabellen enthält drei Angaben, nämlich die am Schluss von Kap. I definierten Zahlen  $f_1, f_2, f_3$ . So bedeutet 8335 - 1,96 - 0,88 (erstes Feld der Tab. 1) z.B., dass für  $n_e = 10^{14}$ ,  $T_e = 8000^\circ$  im optisch dünnen Fall das Grundniveau 8335-fach überbesetzt ist, das erste angeregte Niveau 1,96-fach. Das zweite angeregte Niveau ist dagegen unterbesetzt ( $f_3 = 0,88$ ). Die Angabe von  $f_4, f_5, \dots$  erübrigt sich, da diese Werte immer näher bei 1 liegen als  $f_3$ .

In den Tabellen 1 - 4 ist das Strahlungsfeld charakterisiert durch die Strahlungstemperatur  $T_r$  (siehe Gl. (17)) und zwar wurde für die ersten drei Tabellen der Übersichtlichkeit halber angenommen, dass  $T_r^{Ly\ \alpha} = T_r^{Ly\ \beta}$  ist. Tab. 4 zeigt für eine spezielle Situation ( $n_e = 10^{15}$ ,  $T_e = 15000^\circ$ ), welche Veränderungen sich ergeben, wenn man die beiden Temperaturen  $T_r^{Ly\ \alpha}$ ,  $T_r^{Ly\ \beta}$  unabhängig voneinander variiert. (Das Intensitätsprofil ist in diesen Tabellen -etwas willkürlich- berücksichtigt durch  $w_{12} = 0,8$ ,  $w_{13} = 0,9$  (vgl. Gl. (17))

An den Tabellen 1 - 3 könnte vielleicht Überraschen, dass man in der letzten Spalte, d.h. für  $T_e = T_r$ , noch nicht die thermische Besetzung hat. Die Erklärung liegt in der Kopplung der einzelnen Niveaus: Für die Besetzung eines Paares von Niveaus ist nicht nur das Strahlungsfeld der entsprechenden Linie, sondern im Prinzip das gesamte Strahlungsfeld aller Frequenzen massgebend.

In den Tabellen 5 - 13 ist davon ausgegangen, dass man zwar nichts weiss über Strahlungstemperaturen bzw. -intensitäten, dafür aber Kenntnis hat vom Grad der Reabsorption. So kann man z.B. sagen, dass in einem hinreichend ausgedehnten Plasma -  $k \cdot l \gg 1$  für eine bestimmte Linie- der Reabsorptionsgrad für die betreffende Linie praktisch Eins sein wird, d.h. dass man an jeder Stelle ebensoviele Absorptionen von Ly  $\alpha$ -Photonen hat wie Emissionen. Das bedeutet aber nicht, dass  $T_r = T_e$  ist (siehe oben). M.a.W.: Im optisch dicken Plasma braucht die Strahlungsintensität noch nicht gleich der Hohlraumstrahlung  $B_\nu$  zu sein.

Die Faktoren  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{13}$  geben den Anteil der Emission, der nicht durch Reabsorption kompensiert wird.  $\alpha = 1$  entspricht dem optisch dünnen,  $\alpha = 0$  dem optisch dicken Fall.

Die Tabellen 5, 6, 9 sind physikalisch nicht sinnvoll; sie wurden nur der Vollständigkeit halber hinzugefügt.

Tabelle 1: Die Zahlen  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  als Funktionen von  $T_r = T_r^{Ly \alpha} = T_r^{Ly \beta}$  ( $T_e = 8000^\circ K$ )

$n_e \backslash T_r$	$0^\circ$	$2000^\circ$	$4000^\circ$	$6000^\circ$	$8000^\circ$
$10^{14}$	8335-1,96-0,88	8335-1,96-0,88	8333-1,96-0,88	726-4,4-1,3	2,9-2,4-1,3
$10^{15}$	604-1,41-1,0	604-1,41-1,0	604-1,41-1,0	198-1,6-1,02	1,7-1,4-1,03
$10^{16}$	47-1,06-1,0	47-1,06-1,0	47-1,05-1,0	38-1,06-1,0	1,3-1,05-1,0
$10^{17}$	5,3-1,01-1,0	5,3-1,01-1,0	5,3-1,01-1,0	5,2-1,01-1,0	1,2-1,01-1,0

Tabelle 2: Die Zahlen  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  als Funktionen von  $T_r = T_r^{Ly \alpha} = T_r^{Ly \beta}$  ( $T_e = 16000^\circ K$ )

$n_e \backslash T_r$	$0^\circ$	$4000^\circ$	$8000^\circ$	$12000^\circ$	$16000^\circ$
$10^{14}$	4231-1,66-0,93	4231-1,66-0,93	3177-2,80-1,03	56,40-3,89-1,35	3,59-2,94-1,37
$10^{15}$	330-1,26-1,0	330-1,26-1,0	303-1,30-1,0	22,11-1,53-1,03	1,81-1,43-1,03
$10^{16}$	28,6-1,04-1,0	28,6-1,04-1,0	28,3-1,04-1,0	10,79-1,05-1,0	1,35-1,05-1,0
$10^{17}$	3,7-1,0 -1,0	3,7-1,0 -1,0	3,7-1,0 -1,0	3,15-1,0 -1,0	1,21-1,0 -1,0

Tabelle 3: Die Zahlen  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  als Funktionen von  $T_r = T_r^{Ly \alpha} = T_r^{Ly \beta}$  ( $T_e = 24000^\circ K$ )

$n_e \backslash T_r$	$0^\circ$	$6000^\circ$	$12000^\circ$	$18000^\circ$	$24000^\circ$
$10^{14}$	3162-1,72-0,97	3161-1,72-0,97	745-4,68-1,28	26,3-4,15-1,41	4,52-3,74-1,48
$10^{15}$	244-1,26-1,01	244-1,26-1,01	139-1,44-1,02	10,5-1,56-1,04	1,98-1,52-1,04
$10^{16}$	21,7-1,03-1,0	21,7-1,03-1,0	19,8-1,04-1,0	5,98-1,06-1,0	1,44-1,06-1,0
$10^{17}$	3,02-1,0-1,0	3,02-1,0-1,0	2,99-1,0-1,0	2,38-1,01-1,0	1,24-1,01-1,0

Tabelle 4: Die Zahlen  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  als Funktionen von  $T_r^{Ly \alpha}$  und  $T_r^{Ly \beta}$  ( $n_e = 10^{15}$ ,  $T_e = 15000^\circ K$ )

$T_r^{Ly \alpha} \backslash T_r^{Ly \beta}$	$3000^\circ$	$6000^\circ$	$9000^\circ$	$12000^\circ$	$15000^\circ$
$3000^\circ$	348,3-1,27-0,99	348,3-1,27-0,99	316,2-1,17-1,0	58-0,43-1,04	6,59-0,28-1,05
$6000^\circ$	347,9-1,27-1,0	347,9-1,27-1,0	315,9-1,18-1,0	58-0,43-1,04	6,59-0,28-1,05
$9000^\circ$	201-1,52-1,01	200,9-1,52-1,01	189,8-1,45-1,01	51,7-0,58-1,04	6,50-0,30-1,05
$12000^\circ$	16,9-1,83-1,03	16,9-1,83-1,03	16,8-1,82-1,03	13,59-1,5-1,03	4,81-0,71-1,04
$15000^\circ$	2,46-1,86-1,03	2,46-1,86-1,03	2,46-1,85-1,03	2,37-1,8-1,03	1,8-1,43-1,03

Tabelle 5: Die Zahlen  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  als Funktionen des Reabsorptionsgrads ( $\alpha_{21} = 1, \alpha_{31} = 1$ )

$m_e \backslash T_e$	8000°	16000°	24000°
$10^{14}$	8335-1,96-0,88	4231-1,66-0,93	3162-1,72-0,97
$10^{15}$	604-1,41-1,0	330-1,26-1,0	244-1,26-1,01
$10^{16}$	46,5-1,05-1,0	28,6-1,04-1,0	21,7-1,03-1,0

Tabelle 6: Die Zahlen  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  als Funktionen des Reabsorptionsgrades ( $\alpha_{21} = 1, \alpha_{31} = 0,5$ )

$m_e \backslash T_e$	8000°	16000°	24000°
$10^{14}$	7121-1,68-0,95	3752-1,49-0,99	2860-1,58-1,02
$10^{15}$	540-1,26-1,0	303-1,18-1,01	226-1,20-1,01
$10^{16}$	45,3-1,04-1,0	27,5-1,03-1,0	20,7-1,03-1,0

Tabelle 7: Die Zahlen  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  als Funktionen des Reabsorptionsgrades ( $\alpha_{21} = 1, \alpha_{31} = 0$ )

$m_e \backslash T_e$	8000°	16000°	24000°
$10^{14}$	5705-1,35-1,03	3215-1,30-1,05	2527-1,43-1,07
$10^{15}$	476-1,12-1,01	276-1,10-1,01	208-1,14-1,01
$10^{16}$	44,1-1,02-1,0	26,4-1,01-1,0	19,7-1,02-1,0

Tabelle 8: Die Zahlen  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  als Funktionen des Reabsorptionsgrades ( $\alpha_{21} = 0,5, \alpha_{31} = 1$ )

$m_e \backslash T_e$	8000°	16000°	24000°
$10^{14}$	7221-3,38-0,93	3665-2,84-0,98	2734-2,90-1,02
$10^{15}$	359-1,65-1,01	207-1,48-1,01	160-1,46-1,01
$10^{16}$	24,7-1,08-1,0	16,6-1,06-1,0	13,6-1,05-1,0

Tabelle 9: Die Zahlen  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  als Funktionen des Reabsorptionsgrades ( $\alpha_{21} = 0,5, \alpha_{31} = 0,5$ )

$n_e \backslash T_e$	8000°	16000°	24000°
$10^{14}$	6119-2,87-0,99	3227-2,53-1,03	2456-2,65-1,06
$10^{15}$	320-1,48-1,01	188-1,38-1,01	146-1,39-1,02
$10^{16}$	23,9-1,06-1,0	15,6-1,05-1,0	12,7-1,05-1,0

Tabelle 10: Die Zahlen  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  als Funktionen des Reabsorptionsgrades ( $\alpha_{21} = 0,5, \alpha_{31} = 0$ )

$n_e \backslash T_e$	8000°	16000°	24000°
$10^{14}$	4853-2,29-1,07	2741-2,19-1,08	2152-2,39-1,11
$10^{15}$	280-1,31-1,02	168-1,29-1,02	132-1,32-1,02
$10^{16}$	23,0-1,04-1,0	14,7-1,03-1,0	11,7-1,04-1,0

Tabelle 11: Die Zahlen  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  als Funktionen des Reabsorptionsgrades ( $\alpha_{21} = 0, \alpha_{31} = 1$ )

$n_e \backslash T_e$	8000°	16000°	24000°
$10^{14}$	126,0-12,5-1,24	347,6-9,75-1,23	463,9-9,14-1,25
$10^{15}$	11,8-1,99-1,03	32,1-1,79-1,03	43,3-1,74-1,03
$10^{16}$	2,06-1,10-1,0	4,08-1,08-1,0	5,20 -1,07-1,0

Tabelle 12: Die Zahlen  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  als Funktionen des Reabsorptionsgrades ( $\alpha_{21} = 0, \alpha_{31} = 0,5$ )

$n_e \backslash T_e$	8000°	16000°	24000°
$10^{14}$	79,60-10,1-1,26	249,7-8,46-1,26	359,5-8,21-1,28
$10^{15}$	7,88-1,79-1,03	23,8-1,67-1,03	35,5-1,66-1,03
$10^{16}$	1,68-1,08-1,0	3,26 -1,07-1,0	4,3-1,07-1,0

$$\frac{d\beta_1}{ds} = E_1 - \kappa_0 I_1 \quad (19)$$

Tabelle 13: Die Zahlen  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  als Funktionen des Reabsorptionsgrades ( $\alpha_{21} = 0, \alpha_{31} = 0$ )

$m_e \backslash T_e$	8000°	16000°	24000°
$10^{14}$	31,5-7,63-1,28	147,2-7,11-1,29	249,6-7,24-1,31
$10^{15}$	3,94-1,58-1,03	15,5-1,56-1,03	25,7-1,58-1,03
$10^{16}$	1,29-1,06-1,0	2,4-1,06-1,0	3,5-1,06-1,0

Bei gegebenen räumlichen Verteilungen  $n_e(r), T_e(r)$  und gegebenen Randbedingungen ist das Strahlungsfeld in jedem Punkt des Mediums festgelegt.  
 Im Fall des lokalen thermischen Gleichgewichts ist  $S_\nu$  eine reine Temperaturfunktion, nämlich die Planck-Funktion.

III. DIE ABHÄNGIGKEIT DES STRAHLUNGSFELDS VON DEN BESETZUNGSZAHLEN

Nachdem die Rechnungen des letzten Kapitels zu einem ungefähren Bild von der zu erwartenden Besetzung geführt haben, gilt es nun zu untersuchen, wie das Strahlungsfeld bzw. spezielle Eigenschaften des Strahlungsfelds (z.B. Isotropie) von der zugrundegelegten Besetzung abhängen.

1. Das behandelte Bogenmodell

Es wurde schon darauf hingewiesen, dass im inhomogenen und nicht isothermen Plasma die gleichzeitige Lösung von Bilanzgleichungen und Strahlungstransportgleichung auf analytischem Weg nicht mehr möglich ist. Es ist vielmehr notwendig, für jeden konkreten Fall eine numerische Rechnung durchzuführen. Die folgenden Rechnungen beziehen sich demgemäss -im Gegensatz zu den mehr allgemeinen Rechnungen des Kap. II- auf eine ganz bestimmte Konfiguration, nämlich auf eine zylindersymmetrische Bogenentladung mit gegebener Verteilung von Elektronendichte  $n_e(r)$  und -temperatur  $T_e(r)$ .

Für den Radius des Bogens wurde in Anlehnung an die Experimente im IPP Garching der Wert 1 cm gewählt. Allerdings wurde aus praktischen Gründen auf die Einbeziehung der Randzone mit  $r \geq 0,90$  verzichtet. Ihre Besetzung interessiert nicht (es ist praktisch alles im Grundzustand). Dem entspricht dann ein effektiver Radius von  $\approx 0,90$  cm mit einer Randtemperatur von  $\approx 6000^\circ K$ .

Als Achsentemperatur wurde  $T_e = 25000^\circ$  gewählt im Hinblick auf eine spätere Berechnung der Besetzung von sog. "Thermometergasen" (Bei Verwendung z.B. von C IV sollte man wegen  $Z_{eff} \approx 4$  analoge Verhältnisse haben bei etwa  $400\ 000^\circ$ ). Eine höhere Achsentemperatur wäre nicht interessant, da dann ein mehr oder weniger grosser Teil des Bogens vollionisiert wäre.

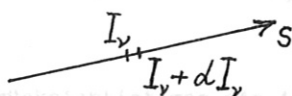
Da keine gemessenen Profile  $n_e(r)$  und  $T_e(r)$  vorlagen, wurde etwas willkürlich auf Profile zurückgegriffen, die (unter Berücksichtigung der Druckerhöhung bei  $B_z = 20$  kG [17]) von HEIDRICH für einen thermischen Bogen berechnet wurden [18]. Im übrigen bereitet es keinerlei Schwierigkeiten, die Rechnung für andere Verteilungen von  $n_e, T_e$  zu wiederholen. Die verwendeten Profile sind in den Abb. 1, 2 dargestellt.

2. Die Lösung der Strahlungstransportgleichung

a) Allgemeines:

Die Strahlungstransportgleichung in allgemeinsten Form lautet bekanntlich

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \epsilon_\nu - \kappa_\nu I_\nu \tag{19}$$



$I_\nu =$  (spezifische) Strahlungsintensität  $\left[ \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \cdot \text{sterad}} \right]$

$\epsilon_\nu =$  Emissionskoeffizient  $\left[ \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3 \cdot \text{sterad}} \right]$

als "negative Absorption" zu rechnen.

$$\begin{aligned} \kappa_\nu &= \text{Absorptionskoeffizient} \quad [\text{cm}^{-1}] \\ \nu &= \text{Frequenz} \quad [\text{s}^{-1}] \end{aligned} \quad (23a)$$

oder auch mit der "Ergiebigkeit"  $S_\nu = \frac{\mathcal{E}_\nu}{\kappa_\nu}$

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \kappa_\nu (S_\nu - I_\nu) \quad (20)$$

Bei gegebenen räumlichen Verteilungen  $\kappa_\nu(r)$ ,  $S_\nu(r)$  und gegebenen Randbedingungen ist das Strahlungsfeld in jedem Punkt des Mediums festgelegt.

Im Fall des lokalen thermischen Gleichgewichts ist  $S_\nu$  eine reine Temperaturfunktion, nämlich die PLANCK-Funktion

$$S_\nu = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (21)$$

(Genauer gesagt ergibt sich diese einfache Form, wenn man die induzierte Emission als negative Absorption behandelt).

Bei Vernachlässigung von Streuung und unter der Voraussetzung der Gleichheit der Profile von spontaner bzw. induzierter Emission und Absorption ist (21) im nichtthermischen Fall folgendermassen abzuändern (siehe Anhang)

$$S_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{\frac{g(p)}{g(q)} e^{\frac{h\nu}{kT_0}} - 1} \quad (22)$$

(Es soll nur Linienstrahlung betrachtet werden, bei p,q handelt es sich also um diskrete Niveaus)

Die Besetzungsparameter  $g(q)$ ,  $g(p)$  ergeben sich als Lösungen der Bilanzgleichungen (18), die ihrerseits wieder das Strahlungsfeld, nämlich die Grösse  $\int_{\text{Linie}} \bar{I}_\nu \varphi_\nu d\nu$  enthalten.

( $\bar{I}_\nu$  = mittlere Intensität =  $\frac{1}{4\pi} \cdot \int I_\nu d\omega$ )

Dieses System ((22), (18)) ist, wie schon erwähnt, für ein inhomogenes, nicht isothermes Plasma, wie es hier betrachtet werden soll, direkt nicht lösbar.

Es soll daher zunächst angenommen werden, die Funktionen  $\kappa_\nu(r)$ ,  $S_\nu(r)$  bzw.  $\mathcal{E}_\nu(r)$  seien bekannt. Dann macht die Berechnung des Strahlungsfelds jedenfalls im Prinzip keine Schwierigkeiten.

Die Ausdrücke für den Absorptionskoeffizienten und den Emissionskoeffizienten sind bekanntlich

$$\kappa_\nu = B_{pq} \cdot n_E(p) \cdot g(p) \cdot \frac{h\nu_0}{4\pi} \cdot \varphi_\nu \quad (23)$$

$$\mathcal{E}_\nu = A_{qp} \cdot n_E(q) \cdot g(q) \cdot \frac{h\nu_0}{4\pi} \cdot \varphi_\nu \quad (24)$$

Berücksichtigt man die induzierte Emission, so ist es am besten, diese als "negative Absorption" zu behandeln und mit einem "reduzierten Absorptionskoeffizienten"  $\kappa'_\nu$  zu rechnen:

$$K'_\nu = K_\nu \cdot \left( 1 - \frac{\beta(q)}{\beta(p)} e^{-\frac{E_{pq}}{kT}} \right) \quad (23a)$$

$\nu_0$  ist die Zentralfrequenz der betreffenden Linie ( $h\nu_0 = E_{pq}$ ).

$B_{pq}$ ,  $A_{qp}$  sind die EINSTEIN-MILNE-Koeffizienten,  $n_E(p)$  und  $n_E(q)$  die thermischen Besetzungszahlen,  $\varphi_\nu$  ist das Profil der Emission bzw. Absorption ( $\int \varphi_\nu d\nu = 1$ ).

Da die thermischen Besetzungszahlen als Funktionen des Radius bekannt sind (wegen der Vorgabe von  $n_e(r)$  und  $T_e(r)$ ), und da auch die Funktion  $\varphi_\nu(r)$  durch die Profile von Elektronendichte und -temperatur festgelegt ist, kann man nach Vorgabe irgendeiner Besetzung  $\beta_1(r)$ ,  $\beta_2(r)$ , ... die Strahlungsintensität in jedem Punkt des Bogens berechnen. (Die Indizes beziehen sich auf die Niveaus; 1 = Grundzustand etc.)

Die wesentliche Schwierigkeit bei der praktischen Durchführung einer solchen Rechnung liegt in der Reduktion der Rechenzeit. Zur Berechnung von  $K'_\nu(r)$ ,  $\epsilon_\nu(r)$  wäre es zunächst notwendig, das Profil  $\varphi_\nu(r)$  durch eine Faltung von DOPPLER- und STARK-Profil an hinreichend vielen Aufpunkten zu gewinnen.

Die Berechnung der mittleren Strahlungsintensität  $\bar{I}_\nu$  für einen bestimmten Wert von  $r$  erfordert die Integration der Strahlungstransportgleichung für eine nicht zu kleine Zahl von Richtungen durch diesen Punkt (hier 32 Richtungen).

Die Funktion  $\bar{I}_\nu(r)$  hat einen ähnlichen Verlauf wie die PLANCK-Funktion  $B_\nu$ , d.h. ihre Werte variieren für das vorliegende Modell ( $6000^\circ \leq T_e \leq 25000^\circ$ ) um viele Zehnerpotenzen. Die Anzahl der Aufpunkte, an denen man die Intensität berechnet, darf also nicht zu gering sein.

Schliesslich hätte man noch für jede in Betracht gezogene Linie das Integral

$$\int_{\text{Linie}} \bar{I}_\nu(r) \varphi_\nu(r) d\nu$$

zu bilden, da diese Grösse in den Reabsorptionstermen  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  von (18) auftritt.

Ersichtlich ist diese Aufgabe auch ohne übertriebene Genauigkeitsansprüche selbst für eine leistungsfähige Rechenanlage wie die IBM 7090 zu aufwendig, zumal wenn man bedenkt, dass derartige Rechnungen für alle möglichen Ausgangsbesetzungen durchgeführt werden müssen. In b) soll gezeigt werden, dass es durch geeignete Vereinfachungen möglich ist, die Rechenzeit für die Berechnung des Strahlungsfelds (einschliesslich der Berechnung einer verbesserten Besetzung -s.IV) auf ca. 30 min herabzudrücken, ohne einen grösseren Fehler als etwa 10 % zu begehen. Dadurch ist es dann kein Problem mehr, eine irgendwie angenommene Besetzung auf Konsistenz hin zu testen und evtl. iterativ zu verbessern.

b) Die praktische Behandlung der Strahlungstransportgleichung:

Das Profil der Emission (Absorption)  $\varphi_\nu(r)$ : Unter den gegebenen Bedingungen sind zwei Mechanismen der Linienverbreiterung zu berücksichtigen, der DOPPLER-Effekt

$$\varphi_\nu^{D_0} = \frac{e^{-\left(\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_D}\right)^2}}{\sqrt{\pi} \cdot \Delta\nu_D} \quad (25)$$

$$\Delta\nu_D = \frac{\nu_0}{c} \cdot \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

$m$  = Masse des Atoms

$\Delta\nu$  = Abstand von der Linienmitte

$\nu_0$  = Zentralfrequenz der betrachteten Linie

und der STARK-Effekt (Druckverbreiterung), der zu einem Profil  $\varphi_{\nu}^{Dr}$  Anlass gibt [19]. Das resultierende Profil ergibt sich durch Faltung

$$\varphi_{\nu} = \varphi(\Delta\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{Dr}(\Delta\nu') \cdot \varphi^{Do}(\Delta\nu - \Delta\nu') d(\Delta\nu') \quad (26)$$

(alle Profile sind normiert)

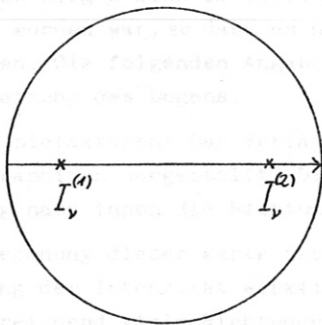
Es hängt ab von Elektronentemperatur  $T_e$  und Elektronendichte  $n_e$ . Beschränkt man sich aber auf die Behandlung eines bestimmten gegebenen Bogenmodells, d.h. hat man einen festen Zusammenhang zwischen  $T_e$  und  $n_e$ , so kann man  $\varphi_{\nu}$  als reine Temperaturfunktion auffassen und evtl. durch einen einfachen analytischen Ausdruck approximieren. Eine solche Approximation wurde für den vorliegenden Bogen angegeben von HEIDRICH [18], nämlich

$$\varphi^A(\Delta\nu) = \begin{cases} \varphi^{Do}(\Delta\nu) & T \leq 10^4 \text{ } ^\circ\text{K} \\ \frac{1}{2a} \cdot e^{-\frac{|\Delta\nu|}{a}} & T > 10^4 \text{ } ^\circ\text{K} \end{cases} \quad (27)$$

$$\text{Ly } \alpha : a = (\Delta\nu_D)_{\text{Ly } \alpha}$$

$$\text{Ly } \beta : a = \frac{3}{\ln 2} \cdot (\Delta\nu_D)_{\text{Ly } \beta}$$

Eine zweite wesentliche Vereinfachung ist folgende: Die Symmetrie des Problems legt die Annahme nahe, dass bereits eine einzige Integration der Strahlungstransportgleichung für eine ausgezeichnete Richtung ein grobes Bild des Strahlungsfelds im gesamten Bogen liefert (s. Skizze).



Die Integration liefert für jeden Punkt die Intensität in zwei Richtungen,  $I_{\nu}^{(1)}$  radial nach innen und  $I_{\nu}^{(2)}$  radial nach aussen.

Zunächst wurde die wirkliche mittlere Intensität durch das arithmetische Mittel aus diesen beiden Werten ersetzt:

$$\bar{I}_{\nu} = \frac{1}{4\pi} \cdot \int I_{\nu} d\omega \approx \frac{I_{\nu}^{(1)} + I_{\nu}^{(2)}}{2}$$

Es zeigte sich, daß der entsprechende Fehler sehr klein ist, dass aber diese Art des Vorgehens für die Maschine ungünstig ist.

Aus diesem Grunde wurde auf die Einbeziehung des zweiten Wertes  $I_{\nu}^{(2)}$  verzichtet und stattdessen der erste Wert  $I_{\nu}^{(1)}$  mit einem Korrekturfaktor versehen:

$$\bar{I}_{\nu} = F \cdot I_{\nu}^{(1)} \quad (28)$$

F soll im folgenden als Anisotropiefaktor bezeichnet werden.

Da die Werte von F unter den vorliegenden Bedingungen sämtlich zwischen 1 und 2,1 liegen, genügt es, sie an einigen wenigen Stellen zu berechnen und dazwischen linear zu interpolieren.

Entscheidend ist dabei, dass diese Faktoren ziemlich unempfindlich gegenüber Änderungen in der Besetzung sind. Man kann also, solange man Besetzungen testet, die sich von der ursprünglich an-



genommenen nicht allzu stark unterscheiden, das entsprechende Strahlungsfeld mit Hilfe der einmal gewonnenen Faktoren durch eine einzige Integration, d.h. in wenigen Minuten, berechnen.

Durch diese Approximation wurde wohl die grösste Einsparung an Rechenzeit erzielt, nämlich etwa ein Faktor 200 (wenn man annimmt, dass sonst 25 Aufpunkte mit je 8 Integrationen nötig wären).

Ähnlich ist die Situation bei der Berechnung des Integrals

$$\int_{\text{Linie}} \bar{I}_v \varphi_v dv$$

Eigentlich sollte man auf die oben geschilderte Weise  $\bar{I}_v$  für die Linienmitte und für eine Anzahl Frequenzen in den Linienflügeln berechnen, nach jeder Integration der Strahlungstransportgleichung die Werte speichern und anschliessend für jeden Punkt aus zusammengehörigen Werten das Integral bilden.

Es lag zunächst nahe, diesen ganzen Aufwand mit Hilfe einer häufig gemachten Annahme zu umgehen, nämlich der Annahme, dass die Intensität im Linienbereich konstant ist. (Diese Annahme wird z.B. gemacht, wenn man, wie üblich, die Zahl der Absorptionen einfach  $n(p) \cdot B_{pq} \cdot \bar{I}_v$  schreibt anstelle von  $n(p) \cdot B_{pq} \cdot \int \bar{I}_v \varphi_v dv$ . - Die Erscheinung der Selbstumkehr ist kein Gegenargument, da man Selbstumkehr immer nur bei  $I_v$  für bestimmte Richtungen hat, nicht aber für  $\bar{I}_v$ .)

Eine exakte Rechnung ergab jedoch für den ungünstigsten Fall, nämlich  $L_y \beta$  und  $r = 0$  (Achse)

$$\int_{\text{Linie}} \bar{I}_v \varphi_v dv = 0,58 \cdot \bar{I}_v$$

Es wurde angenommen, dass der Korrekturfaktor für  $r = 0,75$  cm bereits den Wert 1 erreicht. Dazwischen wurde linear interpoliert.

Bei  $L_y \alpha$  ist die obige Annahme etwas besser erfüllt. Hier wurde für die Achse der Profilkoeffizient mit 0,7 angenommen.

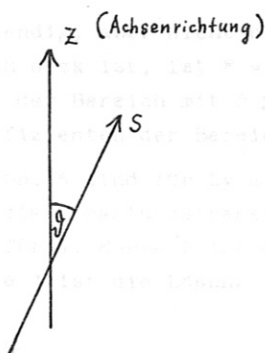
### 3. Ergebnisse

Die in 2. angegebenen numerischen Werte für den Einfluss des Intensitätsprofils, sowie die hier folgenden Angaben über die Anisotropie des Strahlungsfelds beziehen sich strenggenommen alle auf eine bestimmte Besetzung, die zunächst aufgrund der Resultate von II als plausibel angenommen wurde. Es zeigte sich im Verlauf der späteren Rechnungen, dass die Besetzung bereits recht gut gewählt worden war, so dass es nicht notwendig war, Anisotropiefaktoren etc. noch einmal neu zu berechnen. Die folgenden Angaben gelten also praktisch auch für die in IV angegebene tatsächliche Besetzung des Bogens.

Anisotropiefaktoren: Der Verlauf dieser auf S. 20 eingeführten Korrekturfaktoren ist in den Abb. 3 und 4 graphisch dargestellt. Die Faktoren sind, wie zu erwarten, immer grösser als Eins, da die Richtung nach innen die Richtung minimaler Intensität ist:  $\bar{I}_v > I_v^{(1)}$

Die Berechnung dieser Werte besteht im wesentlichen darin, dass für eine Anzahl von Aufpunkten die Mittelung der Intensität wirklich durchgeführt wird, indem man die Strahlungstransportgleichung für hinreichend viele Richtungen durch diesen Punkt integriert. Die so gewonnenen Zahlen lassen sich nach dem oben Gesagten für alle folgenden Iterationen verwenden.

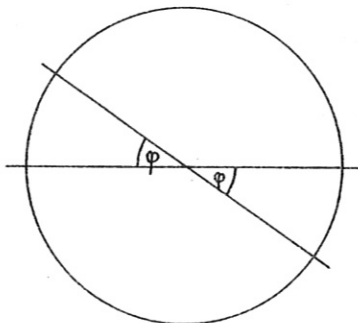
Die Integration über den vollen Raumwinkel wurde auf der Achse mit Hilfe der SIMPSON'schen Formel ausgeführt (für 7 Richtungen).



$$\begin{aligned} \bar{I}_v &= \frac{1}{4\pi} \int I_v d\omega = \int_0^{\pi/2} I_v \sin \vartheta d\vartheta \\ &\cong \frac{\pi}{36} \left( 4I_v \left( \vartheta = \frac{\pi}{12} \right) \sin \frac{\pi}{12} + 2I_v \left( \vartheta = 2 \frac{\pi}{12} \right) \sin \frac{2\pi}{12} + 4I_v \left( \vartheta = 3 \frac{\pi}{12} \right) \sin \frac{3\pi}{12} \right. \\ &\quad \left. + 2I_v \left( \vartheta = 4 \frac{\pi}{12} \right) \sin \frac{4\pi}{12} + 4I_v \left( \vartheta = 5 \frac{\pi}{12} \right) \sin \frac{5\pi}{12} + I_v \left( \vartheta = \frac{\pi}{2} \right) \right) \end{aligned} \quad (29)$$

Für  $r \neq 0$  wurde  $\int I_{\nu} d\omega$  wie in [18] mit Hilfe der GAUSS'schen Quadraturformel berechnet. Die Strahlungstransportgleichung wurde zu diesem Zweck in jedem Punkt achtmal integriert, was aufgrund der Bogensymmetrie die Intensität für 32 verschiedene Richtungen liefert. Bezüglich Einzelheiten sei auf [18] verwiesen.

Das Strahlungsfeld selbst ist keineswegs so isotrop, wie man aufgrund der Anisotropiefaktoren vermuten würde. Zur Veranschaulichung sind in Tab. 14 die auf der Achse berechneten Intensitäten angegeben. Die Tatsache, dass trotz beträchtlicher Unterschiede in den Intensitäten die Korrekturfaktoren so nahe bei 1 liegen, erklärt sich folgendermassen (s. (29)): Wegen des Gewichtsfaktors  $\sin \vartheta$  tragen die stark aus dem Rahmen fallenden achsennahen Richtungen zur Mittelung praktisch nichts bei. Ähnlich ist die Situation für die Punkte mit  $r \neq 0$ .



In Tab. 15 sind für die bei der Mittelung verwendeten Richtungen die Intensitäten  $I_{\nu}(\varphi, \theta)$  angegeben. Die Bedeutung von  $\varphi$  ist aus der Skizze ersichtlich.  $\theta$  ist der Winkel, den die betreffende Richtung mit der Zeichenebene bildet.

Tabelle 14: Das Strahlungsfeld auf der Achse (Intensitäten in  $10^{-4}$  erg/cm<sup>2</sup> · sterad)

$\vartheta$	$(I_{\nu})_{Ly \alpha}$	$(I_{\nu} \sin \vartheta)_{Ly \alpha}$	$(I_{\nu})_{Ly \beta}$	$(I_{\nu} \sin \vartheta)_{Ly \beta}$
0	3,92	0	2,70	0
$\frac{\pi}{12}$	3,35	0,87	0,80	0,21
$\frac{2\pi}{12}$	2,99	1,50	0,58	0,29
$\frac{3\pi}{12}$	2,79	1,98	0,48	0,34
$\frac{4\pi}{12}$	2,69	2,33	0,42	0,37
$\frac{5\pi}{12}$	2,63	2,54	0,40	0,38
$\frac{6\pi}{12}$	2,61	2,61	0,40	0,40

Schliesslich kann man sich noch dafür interessieren, in welchen Bereichen der Bogen optisch dick ist (für  $Ly \alpha$  bzw.  $Ly \beta$ ). Es sei daran erinnert, dass in diesem Zusammenhang "optisch dick" bedeutet, dass der Reabsorptionsgrad für die betreffende Linie gleich 1 ist. Das bedeutet keineswegs, dass die Besetzung thermisch ist oder dass man Hohlraumstrahlung hat.

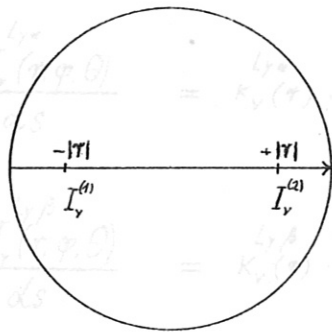
Notwendig, aber nicht hinreichend (s. oben) dafür, dass ein Plasma für eine bestimmte Linie optisch dick ist, ist  $F = 1$  ( $F$  = Anisotropiefaktor, s. S.20). Es ergibt sich, dass für  $Ly \alpha$  ungefähr der Bereich mit  $r > 0,40$  cm optisch dick ist. Für  $Ly \beta$  ist wegen des kleineren Absorptionskoeffizienten der Bereich kleiner, nämlich etwa  $r > 0,75$  cm (vgl. die Abb. 3 u. 4).

In Abb. 5 sind für  $Ly \alpha$  die Verhältnisse längs desjenigen ausgezeichneten Strahls dargestellt, für den die Strahlungstransportgleichung integriert wurde. Kurve 1 gibt die PLANCK'sche Strahlung  $B_{\nu}(T(r))$ , Kurve 2 ist die Lösung der Strahlungstransportgleichung für thermische Besetzung und Kurve 3 ist die Lösung für die "plausible Ausgangsbesetzung" (s. S.21).

**Tabelle 15:** Das Strahlungsfeld für  $r=0,12\text{cm}$  (Intensitäten in  $10^{-4} \text{ erg/cm}^2 \cdot \text{sterad}$ )

$\varphi$	$\cos \theta$	$(I_\nu)_{\text{Ly } \alpha}$	$(I_\nu)_{\text{Ly } \beta}$
1,04	0,94	2,55	0,43
	0,51	2,69	0,62
0,22	0,94	2,87	0,40
	0,51	3,06	0,62
2,10	0,94	2,15	0,40
	0,51	2,25	0,56
2,92	0,94	2,09	0,38
	0,51	2,17	0,52
		$\bar{I}_\nu = 2,44$	$\bar{I}_\nu = 0,47$

Abkürzungen sei noch daran erinnert, dass das hier geschilderte Vorgehen äquivalent ist (vgl. [4]) der Auf Lösung eines Systems von Integro-differentialgleichungen, das in unserem Fall (Berücksichtigung der Resonanzabsorption von Ly  $\alpha$  und Ly  $\beta$ ) folgende Form hat:



Der negative  $r$ -Wert entspricht jeweils der Intensität radial nach innen  $I_\nu^{(1)}$ , der positive entspricht der Intensität radial nach aussen  $I_\nu^{(2)}$ .

Es mag überraschen, dass die Kurve 2 zum Teil oberhalb von Kurve 1 verläuft. Dies ist nur möglich bei einem Plasma, in das von aussen her Strahlung eindringt bzw. bei einem nicht isothermen Plasma, bei dem die Strahlung der heißen Gebiete dazu führt, dass an den kälteren Punkten  $I_\nu > B_\nu$  ist.

Da die Intensitäten im Gegensatz zu den Anisotropiefaktoren in stärkerem Mass von der zugrundegelegten Besetzung abhängen (den Grad der Abhängigkeit ersieht man aus dem

Vergleich der Kurven 2 und 3), liefert Kurve 3 noch nicht das tatsächliche Strahlungsfeld. Eine entsprechende Rechnung für die Endbesetzung (s. IV) wurde aber, da es hier mehr auf qualitative Aussagen ankommt, nicht mehr durchgeführt.

**IV. DIE GLEICHZEITIGE BERECHNUNG VON BESETZUNGSZAHLEN UND STRAHLUNGSFELD**

Nachdem in II der Einfluss des Strahlungsfelds auf die Besetzung der diskreten Energieniveaus (im wesentlichen der untersten drei) untersucht worden ist und in III die Umkehrung davon, nämlich die Abhängigkeit der Integrale  $\int \bar{I}_\nu \varphi_\nu d\nu$  von den Annahmen über die Besetzung, ist es nun möglich, durch Kombination der Rechenprogramme eine beliebig angenommene Besetzung auf Konsistenz hin zu testen bzw. iterativ zu verbessern.

Ein wichtiger Punkt ist dabei die Wahl einer möglichst guten Ausgangsposition. Eine erste Orientierung über die Besetzung erhält man, indem man für ausgewählte Punkte des Bogens (die Verteilungen von Elektronendichte und -temperatur müssen bekannt sein) jeweils Rechnungen nach II durchführt für alle möglichen in Frage kommenden Strahlungstemperaturen bzw. Reabsorptionsgrade. Auf diese Weise wurde die am Anfang von III,3 erwähnte "plausible Ausgangsbesetzung" gewonnen; d.h. es wurden drei Funktionen  $\rho_1^0(r), \rho_2^0(r), \rho_3^0(r)$  ermittelt und mit ihrer Hilfe Anisotropiefaktoren etc. berechnet. Das kombinierte Programm (II + III) liefert dann neue Funktionen  $\rho_1^1(r), \rho_2^1(r), \rho_3^1(r)$ .

Falls sich starke Änderungen ergeben, müssen die Anisotropiefaktoren und evtl. auch die Faktoren, die das Profil der Intensität berücksichtigen, noch einmal berechnet werden. Bei geschickter Abnahme der Absorptionskoeffizienten zur Mitte hin, Der Strahlungsaustausch ist dort nicht in-

ter Wahl der Ausgangsbesetzung ist das jedoch nicht nötig, da die Faktoren relativ unempfindlich gegenüber Änderungen in der Besetzung sind.

Während also der erste Teil der bei jedem Iterationsschritt erforderlichen Strahlungsfeldberechnung, nämlich die Integration der Strahlungstransportgleichung für eine spezielle Richtung, im wesentlichen exakt ist, wurde im zweiten Teil die Richtungsabhängigkeit wegen der konstant gehaltenen Anisotropiefaktoren nur näherungsweise berücksichtigt.

Hierbei erwies sich ein iteratives Vorgehen im engeren Sinn, bei dem die gewonnenen Funktionen als neue Ausgangsposition gewählt werden, als nicht ratsam, da es sich um die gemeinsame Konvergenz von drei Funktionen handelt. Stattdessen wurden die Resultate eines Iterationsschritts nur zur Orientierung benutzt, wie die ursprünglichen Funktionen abzuändern sind.

Die Rechenzeit pro "Iteration" beträgt etwa 30 min, was hauptsächlich auf das Konto der Auflösung der Bilanzgleichungen (18) geht. Dagegen ist der Zeitbedarf für die Berechnung des Strahlungsfelds dank der auf S.19f beschriebenen Vereinfachungen minimal.

Die Abb. 6, 7, 8 zeigen für die letzte Iterationsstufe die Ausgangsbesetzung (Kurven) und die aufgrund des zugehörigen Strahlungsfelds sich ergebende neue Besetzung (Kreuze). Auf weitere Iterationen zur Verbesserung der Konsistenz wurde verzichtet.

Abschliessend sei noch daran erinnert, dass das hier geschilderte Vorgehen äquivalent ist (vgl. [4]) der Auflösung eines Systems von Integrodifferentialgleichungen, das in unserem Fall (Berücksichtigung der Resonanzabsorption von Ly  $\alpha$  und Ly  $\beta$ ) folgende Form hat:

$$\frac{dI_{\nu}^{Ly\alpha}(r, \varphi, \theta)}{ds} = \kappa_{\nu}^{Ly\alpha}(r) \cdot \left( S_{\nu}^{Ly\alpha}(r, \int_{Ly\alpha} \bar{I}_{\nu} \varphi_{\nu} d\nu, \int_{Ly\beta} \bar{I}_{\nu} \varphi_{\nu} d\nu) - I_{\nu}^{Ly\alpha}(r, \varphi, \theta) \right)$$

$$\frac{dI_{\nu}^{Ly\beta}(r, \varphi, \theta)}{ds} = \kappa_{\nu}^{Ly\beta}(r) \cdot \left( S_{\nu}^{Ly\beta}(r, \int_{Ly\alpha} \bar{I}_{\nu} \varphi_{\nu} d\nu, \int_{Ly\beta} \bar{I}_{\nu} \varphi_{\nu} d\nu) - I_{\nu}^{Ly\beta}(r, \varphi, \theta) \right) \quad (30)$$

mit

$$S_{\nu} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\frac{\rho(p)}{\rho(q)} e^{\frac{h\nu}{kT_e}} - 1}$$

wobei sich die  $\rho$  durch Auflösen der die Integrale  $\int_{Ly\alpha} \bar{I}_{\nu} \varphi_{\nu} d\nu$   $\int_{Ly\beta} \bar{I}_{\nu} \varphi_{\nu} d\nu$  enthaltenden Bilanzgleichungen (18) ergeben.

## V. DISKUSSION DER ERGEBNISSE

Aus Abb. 6 ist ersichtlich, dass die Besetzung des Grundniveaus bei dem behandelten Bogenmodell nicht thermisch ist. Das bedeutet insbesondere, dass der Ionisationsgrad um Faktoren kleiner ist, als er sich für die vorgegebenen Werte von  $n_e$  und  $T_e$  aus der SAHA-Gleichung (3) ergibt.

Der Grund für die grossen Abweichungen vom LTE am Rand ist die Abnahme der Elektronendichte. Die Besetzung ist charakteristisch für ein optisch dickes Plasma: Starke Kopplung zwischen Grundniveau und erstem angeregtem Niveau und als Folge davon  $\rho_1 \approx \rho_2$ . Auch das nächsthöhere Niveau "3" ist infolge Resonanzabsorption (Ly  $\beta$ ) noch stark an das Grundniveau "1" gekoppelt und deswegen noch nicht thermisch besetzt.

Anders ist die Situation für die Bogenachse. Hier ist die Ursache für die Abweichungen die starke Abnahme der Absorptionskoeffizienten zur Mitte hin. Der Strahlungsaustausch ist dort nicht in-

tensiv genug, um eine Gleichheit von kinetischer Temperatur  $T_e$  und Strahlungstemperaturen  $T_r^{Ly \alpha}$  bzw.  $T_r^{Ly \beta}$  herzustellen, d.h. die in dieser Zone emittierte Strahlung ist "kälter" als das dort befindliche Plasma. Ausserdem ist es sicher so, dass der Hauptteil der Strahlungsdichte von der Emission umgebender kälterer Schichten herrührt. Die von dort kommende Strahlung hat höchstens die Temperatur der emittierenden Schicht und kann daher ebensowenig thermisches Gleichgewicht herstellen. Die Besetzung ( $\rho_1 = 7,3; \rho_2 = 1,05; \rho_3 = 1$ ) ist typisch für ein optisch dünnes Plasma: Das Grundniveau ist relativ stark überbesetzt, die angeregten Niveaus dagegen sind unempfindlich gegenüber dem Strahlungsfeld und deswegen thermisch.

Natürlich stellen die Kurven der Abb. 6, 7, 8 nur eine Näherungslösung dar, die mit zahlreichen Unsicherheiten behaftet ist. An erster Stelle ist hier zu nennen die Unsicherheit in den Wirkungsquerschnitten, die so gross ist, dass z.B. die Berücksichtigung von verbotenen Übergängen kaum sinnvoll erscheint. Demgegenüber treten andere Fehlerquellen zurück, etwa die Vernachlässigung der  $Ly \gamma$  - Absorption oder der Verzicht auf weitere Iterationen zur Herstellung einer besseren Konsistenz.

Eine quantitative Aussage über die möglichen Fehler ist schwierig. Jedoch kann folgendes gesagt werden. Bezüglich der angeregten Niveaus wird eine genauere Rechnung dasselbe Ergebnis liefern, nämlich thermische Besetzung in den wesentlichen Bereichen des Bogens. Nur in der (nicht sehr interessanten) Randzone können sich noch Änderungen ergeben. Anders beim Grundniveau: Die Kurve  $\rho_1(r)$  hängt sicherlich stark von den verwendeten Wirkungsquerschnitten ab. Hier sind Änderungen von 50% (und evtl. mehr) durchaus möglich. Der qualitative Verlauf wird aber immer der der Abb. 6 sein.

Zum Schluss dieser Fehlerbetrachtung soll noch etwas ausführlicher eine weitere mögliche Fehlerquelle diskutiert werden, nämlich die Störung der Bilanzgleichungen durch Diffusion. In (18) wurde ja die Voraussetzung gemacht, dass die Besetzung lokal dieselbe ist wie in einem homogenen Plasma mit derselben Elektronendichte und -temperatur, d.h. dass die Gradienten dieser Grössen sich nicht auswirken. Diese Voraussetzung ist speziell für den Grundzustand kritisch zu prüfen, da dessen Relaxationszeit verhältnismässig gross ist. Die angeregten Zustände dagegen kommen i.a. mit den freien Elektronen bzw. Ionen sehr schnell ins Gleichgewicht (vgl. [5] "quasistationäre Näherung").

Betrachtet man nur Stösse gegen Wasserstoffatome, so liegt für  $n_0 \leq 10^{13} \text{ cm}^{-3}$  ( $n_0$  = Neutralgasdichte) nach DRAWIN [20] die freie Weglänge  $\Lambda$  in der Grössenordnung cm. Das kann wegen der oben erwähnten grossen Relaxationszeit bedeuten, dass Teilchen aus anderen Schichten das betreffende Volumenelement durchfliegen, ohne mit den dort befindlichen Elektronen ins Gleichgewicht zu kommen. Bei dem Bogenmodell, das dieser Arbeit zugrundeliegt, ist dagegen i.a.  $n_0 \geq 10^{14}$ . Das bedeutet, dass  $\Lambda$  in der Grössenordnung 0,01 cm liegt. Über diese Strecke ändern sich -selbst in radialer Richtung- die Plasmaparameter nicht wesentlich, so dass also der Effekt kaum eine Rolle spielen dürfte.

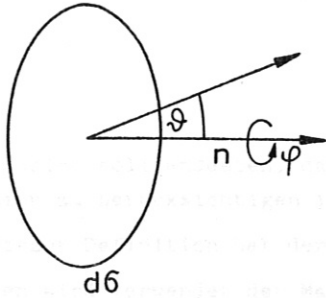
Zur praktischen Anwendbarkeit des Verfahrens bleibt zu sagen, dass es sicher nicht auf Zylindersymmetrie beschränkt ist. Insbesondere wird eine analoge Untersuchung von kugelsymmetrischen Plasmen wegen der Abhängigkeit der Intensität von nur einer Winkelvariablen sogar einfacher durchzuführen sein.

Ebensowenig stellt die Beschränkung auf Wasserstoff oder die Zugrundelegung der in den Abb. 1, 2 dargestellten Verteilungen  $n_e(r), T_e(r)$  eine wesentliche Einschränkung dar. Während die Behandlung anderer Plasmen vor allem eine Frage der Kenntnis von Wirkungsquerschnitten etc. ist, können die Funktionen  $n_e(r), T_e(r)$  jederzeit durch andere, etwa durch gemessene Funktionen, ersetzt werden. Dazu sind nur Änderungen bei den Daten erforderlich, nicht aber im Rechenprogramm selbst.

ANHANG

1. Das Strahlungsfeld: Definitionen

a) Die (spezifische) Strahlungsintensität  $I_\nu$ :



Man betrachtet ein Flächenelement  $dS$  mit der Normalen  $n$  und eine bestimmte Richtung  $(\theta, \varphi)$ . Für die Energie, die im Frequenzintervall  $(\nu, \nu + d\nu)$  in dieser Richtung durch  $dS$  hindurchtritt, schreibt man

$$dE_\nu = I_\nu \cos \theta \, d\nu \, dS \, d\omega \, dt$$

$t$  = Zeit

$$d\omega = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

$I_\nu$  hängt ab von Frequenz, Ort, Richtung und eventuell von der Zeit:

$$I_\nu \equiv I_\nu(r, \theta, \varphi, t)$$

Ist  $I_\nu$  für einen bestimmten Punkt  $r$  unabhängig von der Richtung, so nennt man das Strahlungsfeld in diesem Punkt isotrop.

Ist  $I_\nu$  unabhängig vom Ort und von der Richtung, so heisst das Strahlungsfeld homogen und isotrop.

Von einem kugelsymmetrischen Strahlungsfeld spricht man, wenn gilt

$$I_\nu \equiv I_\nu(r, \theta, t)$$

wobei  $r$  der Abstand vom Symmetriezentrum und  $\theta$  der Winkel gegen den Radiusvektor ist.

Ersichtlich besteht ein Unterschied zwischen der Symmetrie des Mediums und der Symmetrie des Strahlungsfelds. In einem kugelsymmetrischen Medium kann das Strahlungsfeld kugelsymmetrisch sein. Dasses nicht so sein muss, zeigt das Beispiel einer auffallenden ebenen Welle.

Bei einem zylindersymmetrischen Medium ist die Situation nicht analog. Selbst wenn keine Strahlung von aussen auffällt, kann man <sup>nur</sup> sagen, dass es für die räumliche Abhängigkeit nur auf den Abstand von der Achse ankommt. Dagegen hängt die Strahlungsintensität nach wie vor von zwei Winkeln ab. Der Begriff "zylindersymmetrisches Strahlungsfeld" ist aus diesem Grund nicht gebräuchlich. (Dagegen gibt es den Begriff des "axialsymmetrischen Strahlungsfelds". Er bezieht sich auf den Fall einer "ebenen Atmosphäre")

Als integrierte Intensität bezeichnet man die Grösse

$$I = \int_0^\infty I_\nu \, d\nu$$

Die mittlere Intensität in einem Punkt ist definiert als

$$\bar{I}_\nu = \frac{1}{4\pi} \int_\omega I_\nu(\theta, \varphi) \, d\omega$$

wobei  $d\omega$  wieder das Raumwinkelement ist.

Sie hängt mit der spektralen Energiedichte  $u_\nu$  folgendermassen zusammen

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} \cdot \bar{I}_\nu$$

$c$  = Lichtgeschwindigkeit im Medium

Zu einer vollständigen Beschreibung des Strahlungsfelds gehört eigentlich noch die Angabe des Polarisationszustands. Darauf soll jedoch nicht eingegangen werden.

b) Der Absorptionskoeffizient:

Ein Lichtstrahl wird auf seinem Weg durch die Wechselwirkung mit der Materie in seiner Intensität geschwächt und zwar erstens durch Streuung, zweitens durch "wahre Absorption".

Man definiert den (volumenbezogenen) totalen Absorptionskoeffizienten  $\kappa_\nu$  durch die Gleichung

$$d'I_\nu = -\kappa_\nu I_\nu ds$$

ds = Wegelement

(der Strich soll andeuten, dass für die tatsächliche Änderung  $dI_\nu$  der Intensität noch die Emission zu berücksichtigen ist).

Bei dieser Definition hat der Absorptionskoeffizient die Dimension  $\text{cm}^{-1} = \frac{\text{cm}^2}{\text{cm}^3}$ .

Daneben wird verwendet der Massenabsorptionskoeffizient  $\kappa_\nu^m$  (Dimension  $\frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$ )

$$\kappa_\nu^m = \frac{\kappa_\nu}{\rho}$$

$\rho$  = Dichte [  $\text{g}/\text{cm}^3$  ]

und der atomare Absorptionskoeffizient  $\kappa_\nu^{at}$  (Dimension  $\text{cm}^2$ )

$$\kappa_\nu^{at} = \frac{\kappa_\nu}{n}$$

$n$  = Zahldichte der absorbierenden Atome [  $\text{cm}^{-3}$  ]

Den Streuanteil des totalen Absorptionskoeffizienten  $\kappa_\nu$  schreibt man  $\kappa_\nu \cdot \tilde{\omega}_0$ , wobei  $\tilde{\omega}_0$  ( $0 \leq \tilde{\omega}_0 \leq 1$ ) als Albedo bezeichnet wird. Der Anteil der "wahren Absorption" ist dann  $\kappa_\nu (1 - \tilde{\omega}_0)$ .

c) Der Emissionskoeffizient:

Der auf das Volumen bezogene totale Emissionskoeffizient  $\mathcal{E}_\nu$  wird folgendermassen definiert. Man schreibt die von einem Volumenelement  $dV$  im Frequenzbereich  $\nu \dots \nu + d\nu$  emittierte Strahlungsenergie

$$dE_\nu = \mathcal{E}_\nu dV d\omega d\nu dt$$

( $d\omega, dt$  = Differentiale von Raumwinkel bzw. Zeit)

Dabei setzt sich die Emission i.a. wieder aus zwei Anteilen, nämlich Streuemission und "wahre Emission" zusammen.

Bei der letzteren unterscheidet man weiter zwischen der spontanen Emission, die nicht explizit vom Strahlungsfeld abhängt und der induzierten Emission, die proportional zur Intensität  $I_\nu$  für die betreffende Richtung ist

$$\mathcal{E}_\nu = \mathcal{E}_\nu^{sp} + I_\nu \cdot \mathcal{E}_\nu^{ind}$$

Der Ausdruck für die spontane Emission in einer Linie ist auf S. 18, Gl. (24), angegeben. Die Formel für den Koeffizienten der induzierten Emission ergibt sich daraus, indem man  $A_{qp}$  durch  $B_{qp}$  ersetzt. (Anstelle von  $\mathcal{E}_\nu^{sp}$  wurde wieder  $\mathcal{E}_\nu$  geschrieben)

2. Ableitung der Gl. (22)

Die EINSTEIN-MILNE-Koeffizienten  $A_{qp}, B_{qp}, B_{pq}$  hängen bekanntlich folgendermassen zusammen

$$\begin{aligned} B_{qp} \tilde{\omega}_q &= B_{pq} \tilde{\omega}_p \\ A_{qp} &= B_{qp} \cdot \frac{2h\nu^3}{c^2} \end{aligned}$$

( $\tilde{\omega}_p, \tilde{\omega}_q$  sind die statistischen Gewichte der Niveaus p,q)

Betrachtet man die induzierte Emission als negative Absorption, so ergibt sich mit Gl. (23), (24) für die Ergiebigkeit  $S_\nu$

$$\begin{aligned} S_\nu &= \frac{\epsilon_\nu^{sp}}{K_\nu - \epsilon_\nu^{ind}} = \frac{A_{qp} n_E(q) f(q) \frac{h\nu_0}{4\pi} \varphi_\nu}{B_{pq} n_E(p) f(p) \frac{h\nu_0}{4\pi} \varphi_\nu - B_{qp} n_E(q) f(q) \frac{h\nu_0}{4\pi} \varphi_\nu} \\ &= \frac{A_{qp} n_E(q) f(q)}{B_{pq} n_E(p) f(p) - B_{qp} n_E(q) f(q)} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{B_{qp} n_E(q) f(q)}{B_{pq} n_E(p) f(p) - B_{qp} n_E(q) f(q)} \\ &= \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{\frac{\tilde{\omega}_q}{\tilde{\omega}_p} \frac{n_E(p) f(p)}{n_E(q) f(q)} - 1} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{\frac{\tilde{\omega}_q}{\tilde{\omega}_p} \frac{\tilde{\omega}_p}{\tilde{\omega}_q} \frac{f(p)}{f(q)} e^{\frac{h\nu}{kT_e}} - 1} \end{aligned}$$

### 3. Begründung der Annahme $j_\nu = \psi_\nu = \varphi_\nu$

Die Annahme, dass die normierten Profile von spontaner Emission, induzierter Emission und Absorption gleich sind, ist (vgl. [4]) in zwei Grenzfällen gut erfüllt: a) die Stossanregung überwiegt die Strahlungsanregung oder b) die Strahlungsintensität  $I_\nu$  ist konstant über den Frequenzbereich der drei Profile.

Für ein schwach anisotropes Strahlungsfeld lässt sich darüberhinaus zeigen, dass für reine DOPPLER-Verbreiterung die beiden Profile  $j_\nu$  und  $\varphi_\nu$  in guter Näherung gleich sind (in einem Frequenzbereich von mehreren DOPPLER-Halbwertsbreiten) auch dann, wenn die Breite von  $I_\nu$  vergleichbar mit der DOPPLER-Breite ist. Ähnliches kann über  $\psi_\nu$  und  $\varphi_\nu$  gesagt werden.

Eine zusätzliche Verbreiterung durch STARK-Effekt wirkt sich dabei in günstigem Sinne aus.

Für den betrachteten Bogen ist zur Rechtfertigung der obigen Annahme folgendes zu sagen: Im äusseren Teil ( $r > 0,40$  cm für  $Ly \alpha$  bzw.  $r > 0,75$  cm für  $Ly \beta$ ) ist das Plasma optisch dick und der Grenzfall b) ist erfüllt. Nach innen zu wird das Intensitätsprofil schmaler, doch ergeben die Rechnungen von III, dass auch hier diese Annahme zulässig ist. Dazu kommt, dass der STARK-Effekt in den inneren Zonen mehr und mehr an Einfluss gewinnt. Auf der Achse, wo der Bogen optisch dünn ist, ist schliesslich der Grenzfall a) realisiert.

Im Übrigen sei noch bemerkt, dass die Annahme  $j_\nu = \psi_\nu = \varphi_\nu$  schon dadurch weniger kritisch ist, dass es im Zusammenhang mit Fragen der Besetzung ja nur auf den Linienkern, nicht aber auf die Flügel ankommt.



LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Finkelnburg, W., Maecker, H. : Hdb. d. Physik, Bd. XXII (1956)
- [2] Elwert, G. : Z. Naturf. 7a, 432 (1952)
- [2a] Elwert, G. : Z. Naturf. 7a, 703 (1952)
- [3] Schwob, I.L. : EUR-CEA-FC-244 (1964)
- [4] Cuperman, S., Engelman, F. u.  
Oxenius, I. : Phys. Fluids 6, 108 (1963)
- [4a] Cuperman, S., Engelman, F. u.  
Oxenius, I. : Phys. Fluids 7, 428 (1964)
- [5] Bates, D.R., Kingston, A.E. u.  
Mc Whirter, R.W.P. : Proc. Roy. Soc. A, 267, 297, (1962)
- [6] Bates, D.R., Kingston, A.E. u.  
Mc Whirter, R.W.P. : Proc. Roy. Soc. A, 270, 155, (1962)
- [7] Mc Whirter, R.W.P., Hearn, A.G. : Culham Report CLM-P 23 (1963),  
Proc.Phys.Soc. 82, 641 (1963)
- [8] Bates, D.R., Kingston, A.E. : Planet. Space Sci. 11,1 (1963)
- [9] Drawin, H.W. : EUR-CEA-FC-302 (1965)
- [10] Chandrasekhar, S. : Radiative Transfer
- [11] Fowler, R.H. : Statistical Mechanics, Cambridge Univ. Press,  
1936
- [12] Drawin, H.W. : EUR-CEA-FC-236 (1963)
- [13] Drawin, H.W. : Z. Phys. 164, 513 (1961)
- [14] Seaton, M.I. : Mon. Not. Astr. Soc. 119, 81 (1959)
- [15] Burgess, A. : Mon. Not. Astr. Soc. 118, 477 (1958)
- [16] Drawin, H.W. : EUR-CEA-FC-252 (1964)
- [17] Wienecke, R. : Laborber. IPP 3/3 (1962)
- [18] Heidrich, U. : Laborber. IPP 3/13 (1963)
- [19] Griem, H.R., Kolb, A.C. u.  
Shen, K.Y. : NRL Report 5455 (1960)
- [20] Drawin, H.W. : EUR-CEA-FC-298 (1965)
- [21] Kolesnikov, W.N. : Trudy Fizicheskogo Instituta Lebedeva,  
Bd. 30 (1964)

Herrn Prof. Dr. A. Schlüter und Herrn Prof. Dr. R. Wienecke danke ich für die Anregung des Themas sowie für ihr Interesse und ihre Unterstützung bei der Durchführung der Arbeit. Mein Dank gilt darüber hinaus allen, die zum Gelingen beitrugen, insbesondere Herrn Dr. S. Witkowski und Herrn Dipl.-Phys. W. Feneberg für zahlreiche Diskussionen sowie Frl. E. Waldherr und Frl. I. Heidecker für die Anfertigung der Zeichnungen bzw. die Niederschrift der Arbeit.

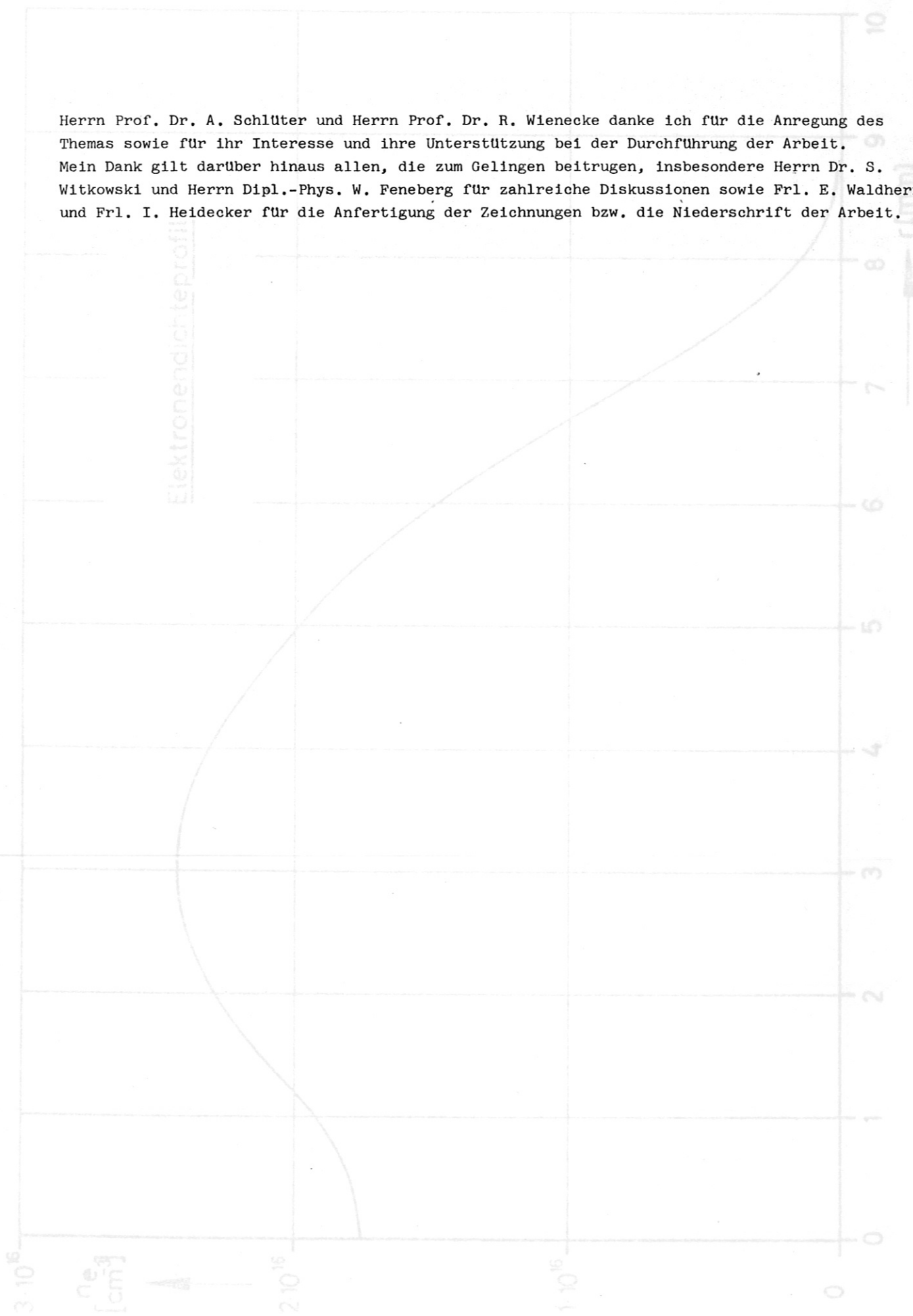


Abb. 1

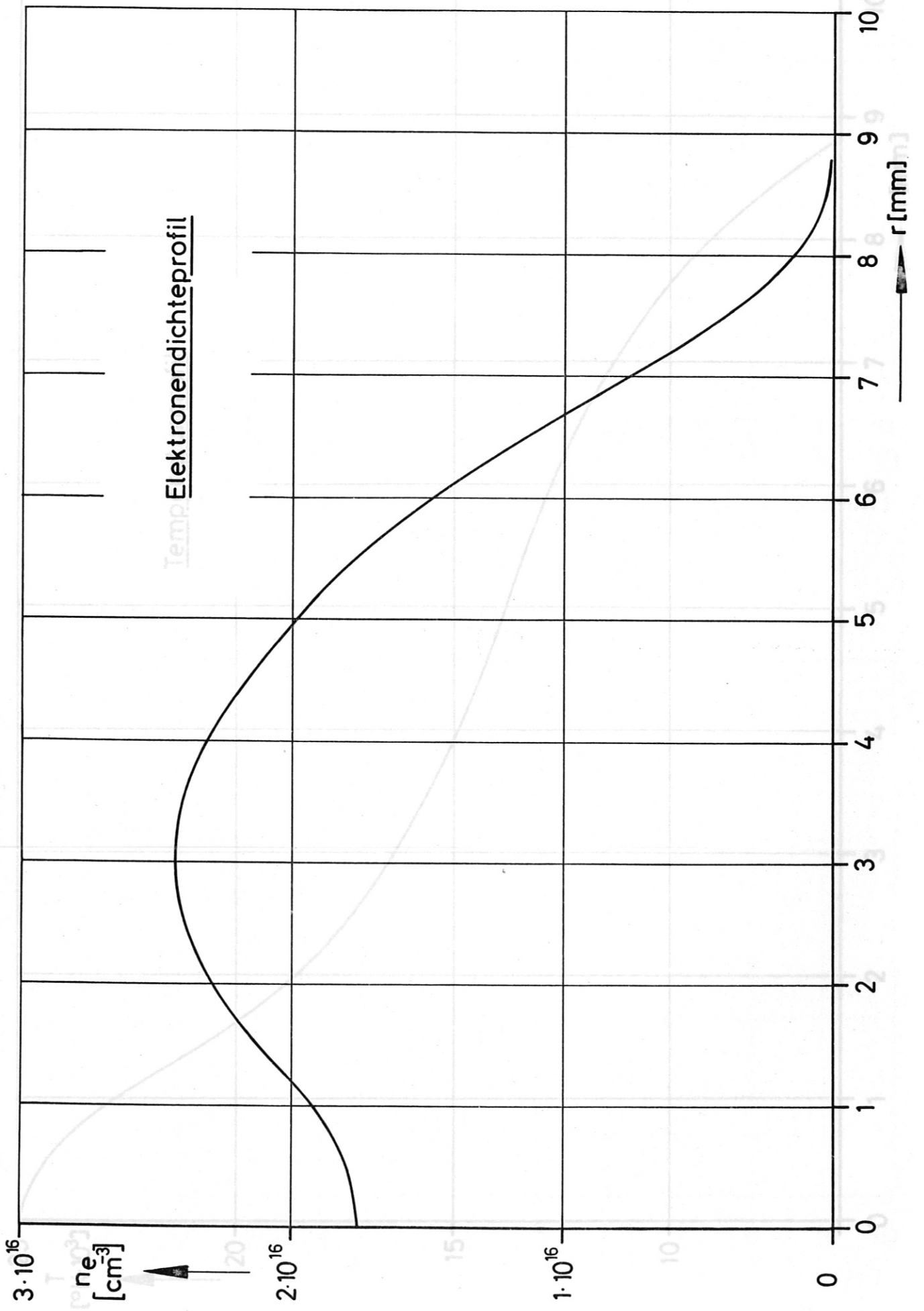


Abb. 1.2

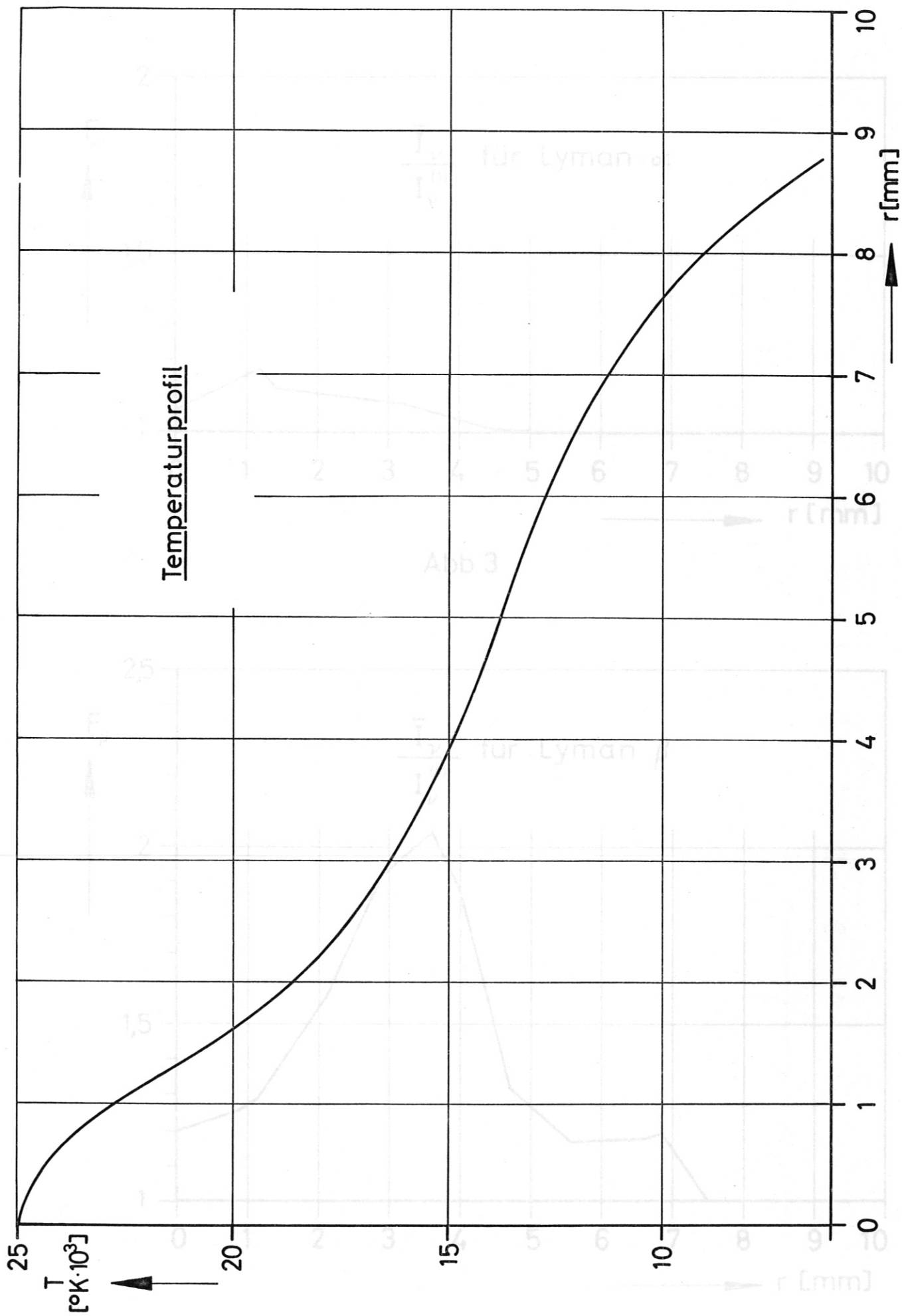


Abb. 2

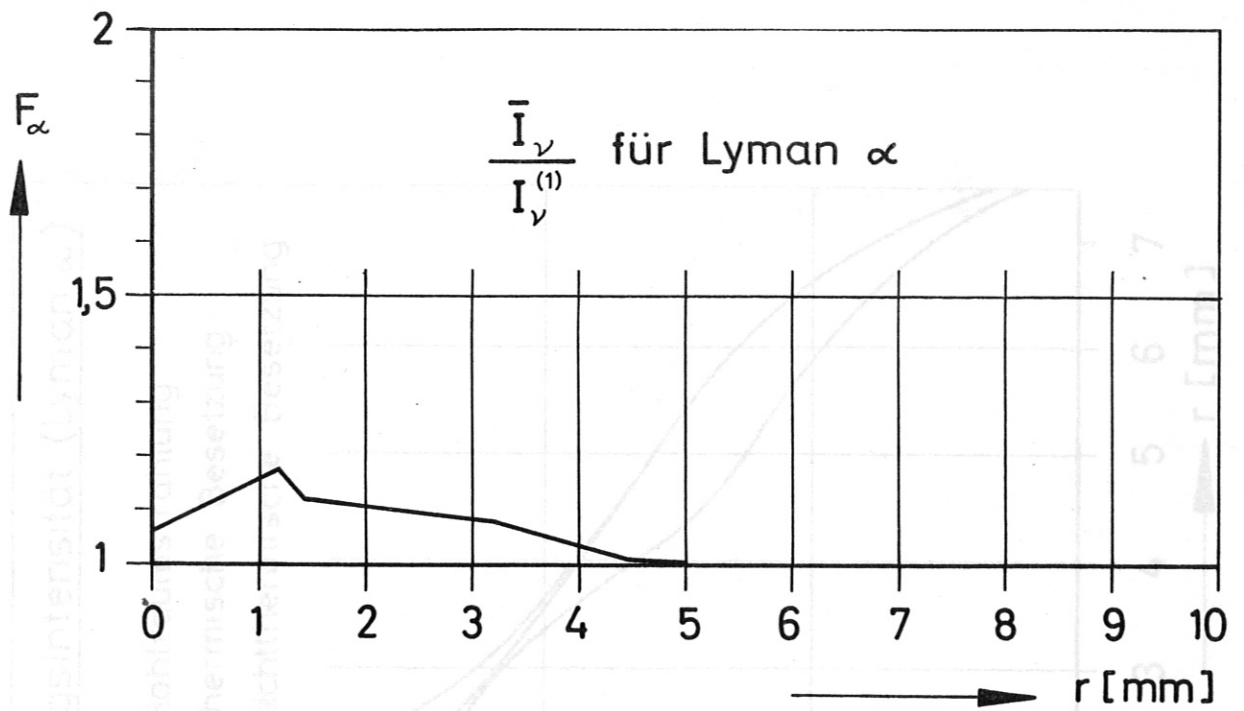


Abb. 3

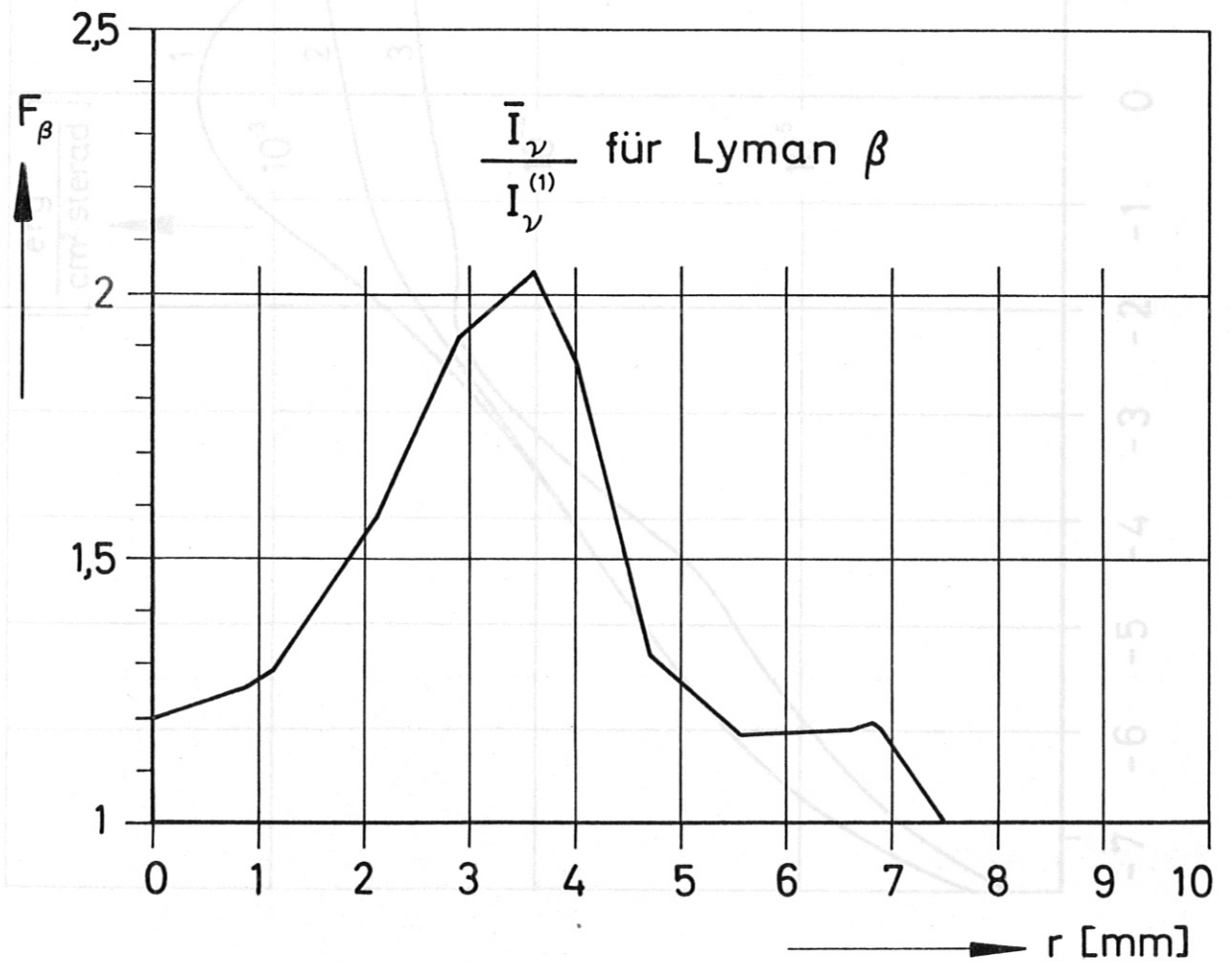


Abb. 4

Abb. 5

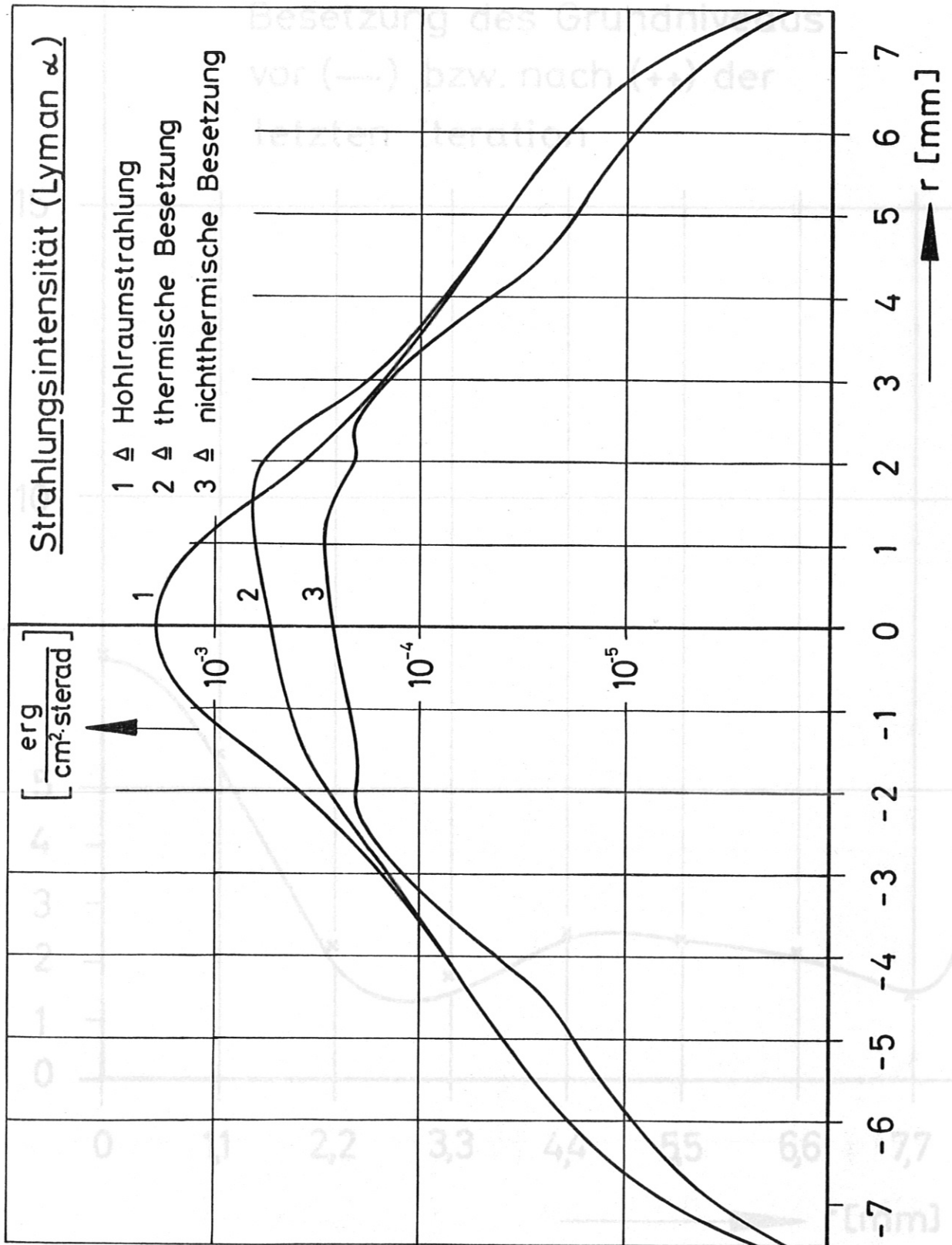


Abb. 5

Abb. 6

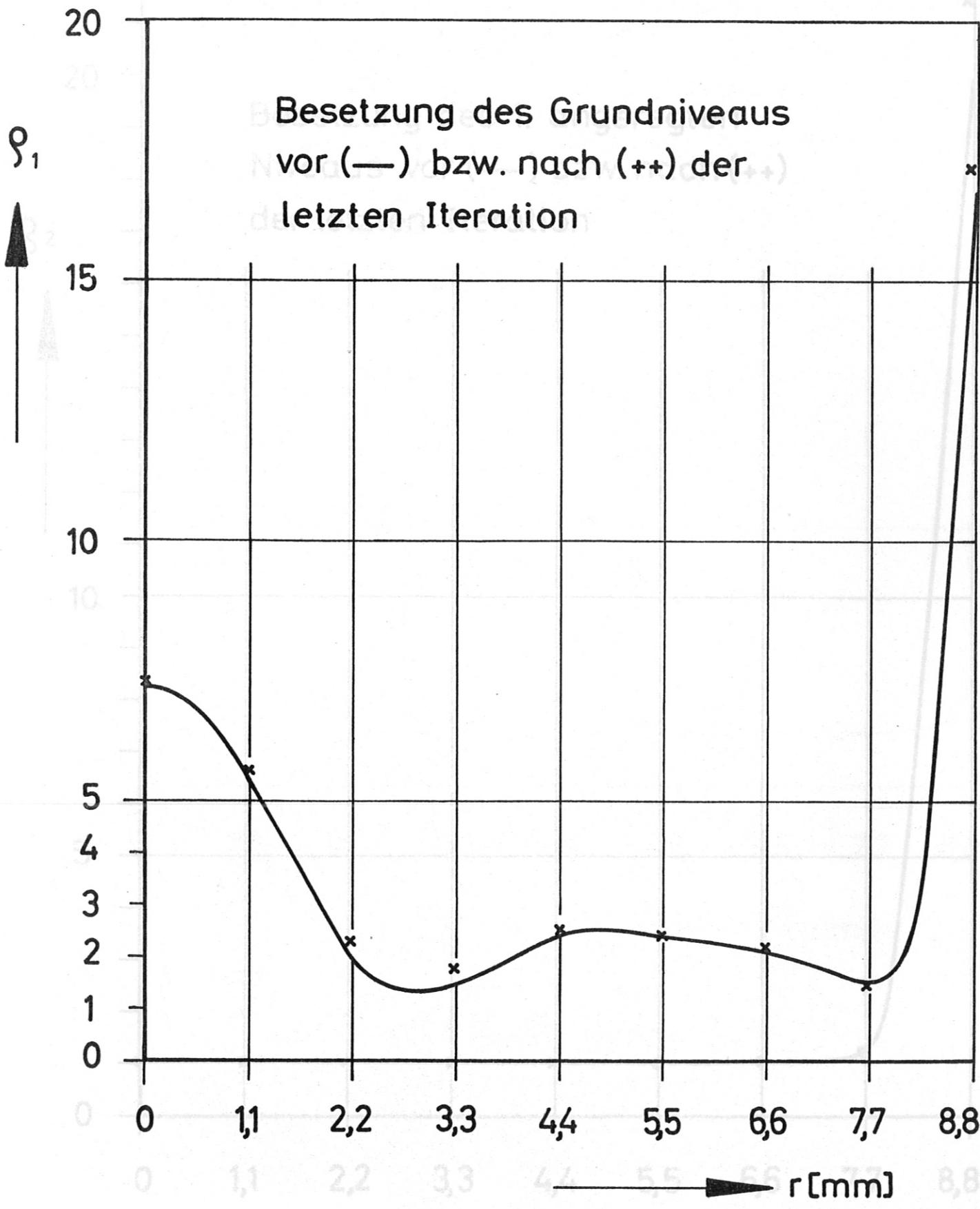


Abb. 6

Abb. 7

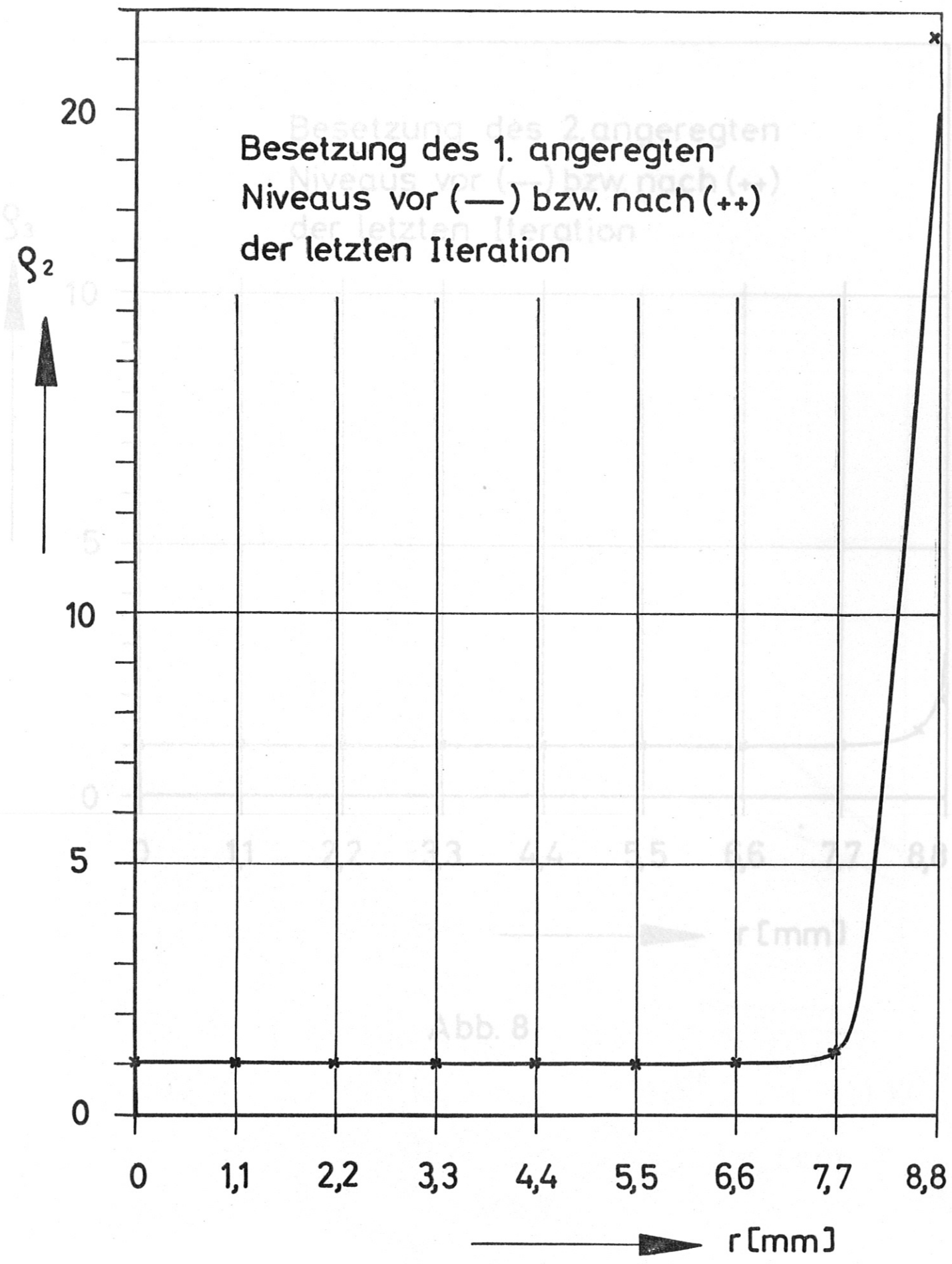


Abb. 7



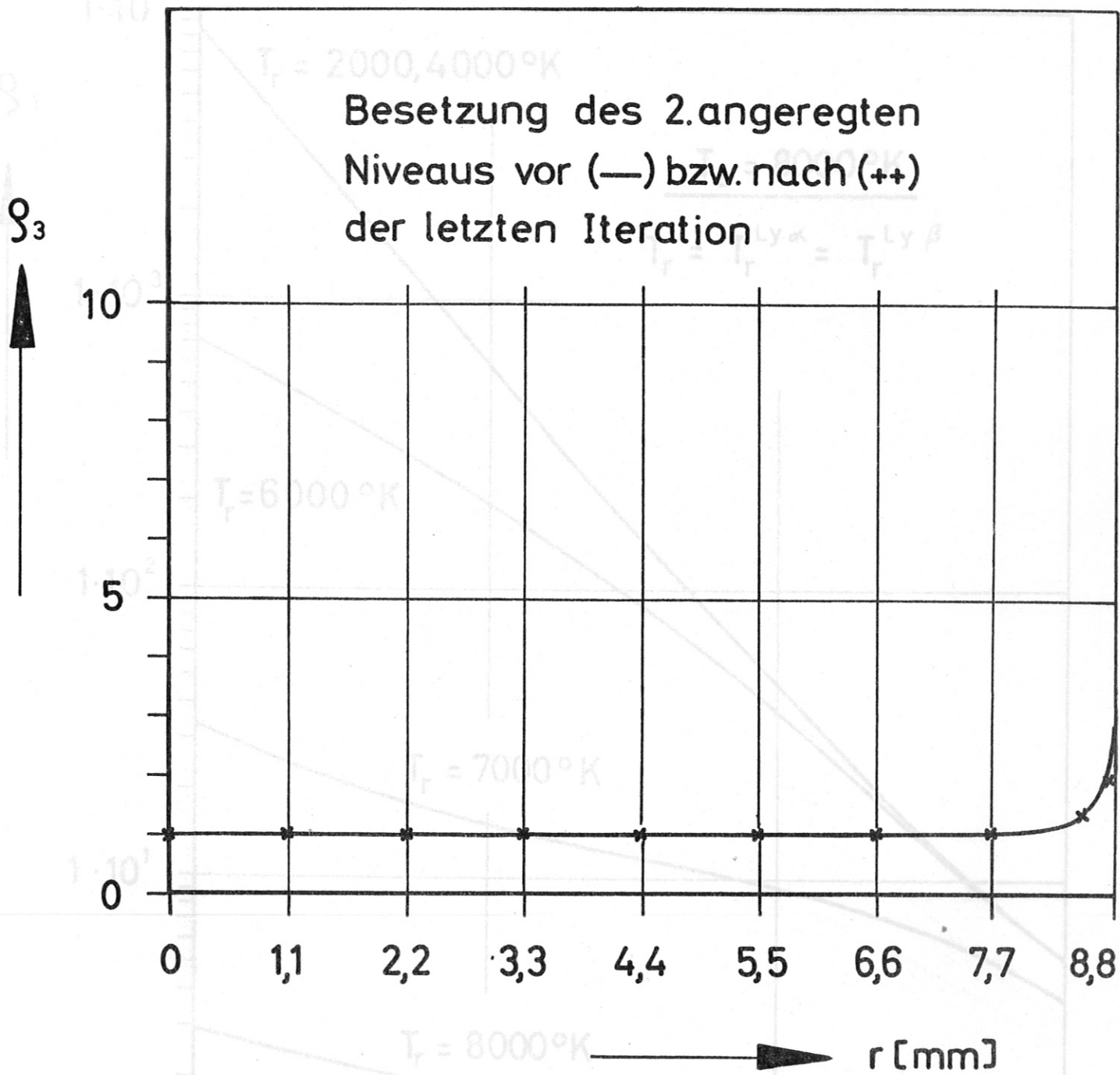


Abb. 8

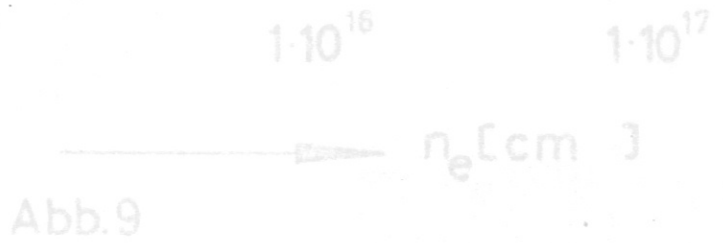


Abb. 9

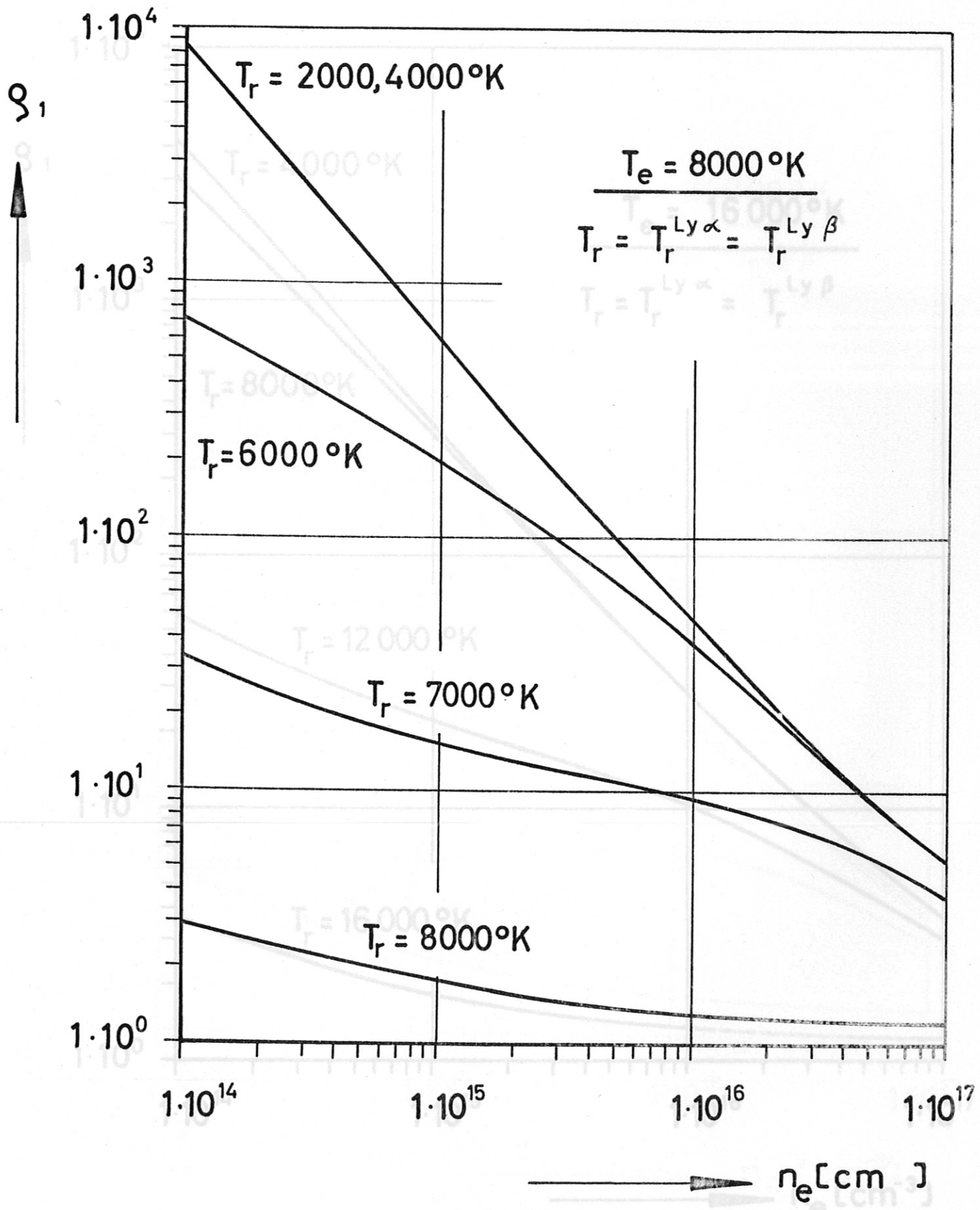


Abb.9

Abb.10

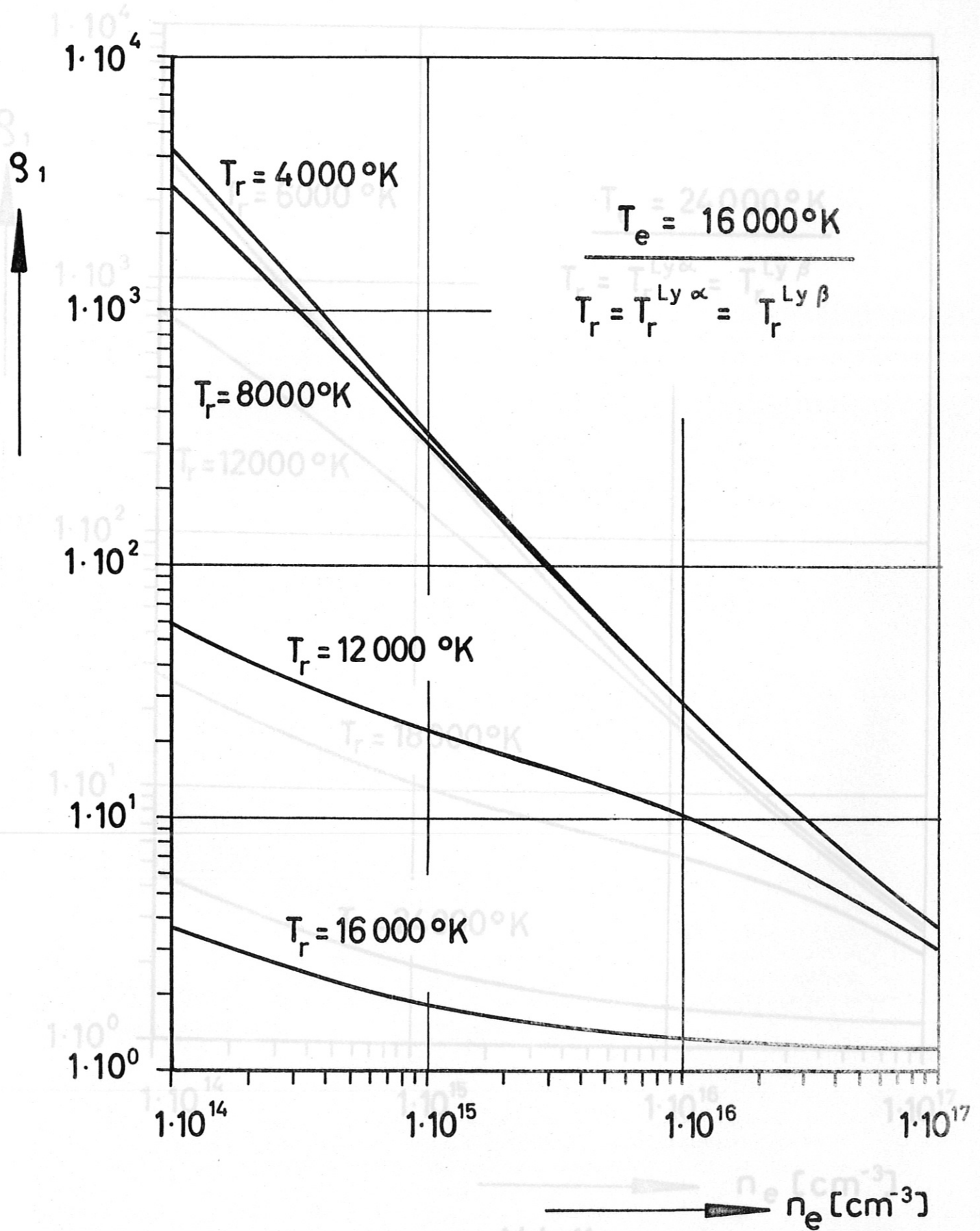


Abb.11

Abb.10

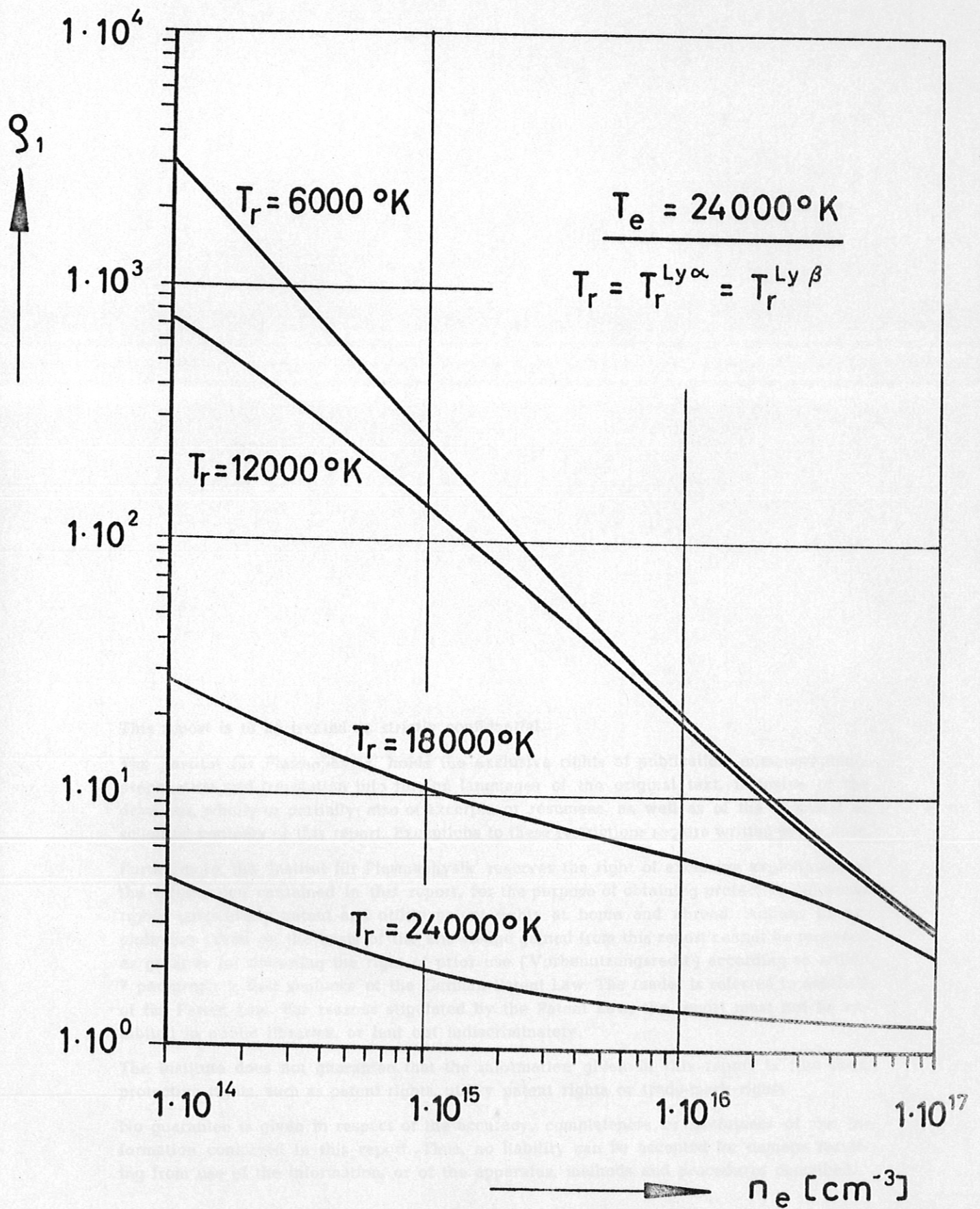


Abb.11