

Elektromagnetische Erzeugung von Stoß-
wellen und Wechselwirkung von Stoß-
wellen mit elektromagnetischen Feldern

(Electromagnetic Production of Shock
Waves and Interaction of Shock Waves
with Electromagnetic Fields)

Eckhard Rebhan

IPP 3/28

August 1965

I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K

G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

IPP 3/28

GARCHING BEI MÜNCHEN

Elektromagnetische Erzeugung von Stoßwellen und Wechselwirkung von Stoßwellen mit elektromagnetischen Feldern

ABSTRACT:

(Electromagnetic Production of Shock Waves and Interaction of Shock Waves with Electromagnetic Fields)

Eckhard Rebhan

IPP 3/28

August 1965

In dependence on the total force P and the total energy input W per second, the asymptotic solutions are investigated toward which the state of flow converges as interaction assumes a steady state.

The Mach numbers M obtained when shock waves are produced electromagnetically are proportional to $P^{1/2}$ and $W^{2/3}$ for strong shocks. If the power is supplied by a battery with fixed data, M as a function of the applied magnetic field \vec{B} has a maximum.

Influencing a given shock wave electromagnetically causes reflection of shock or rarefaction waves and changes the intensity of the primary shock wave. With heat input only ($P = 0, W \geq 0$), the latter is accelerated; with momentum input only ($P \leq 0, W = 0$), it is slowed down.

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

ABSTRACT:

When a force is suddenly exerted within a confined region of a flow channel on a resting or flowing gas, a shock wave and a rarefaction wave are set up in opposite directions. This situation arises, with heat being generated in addition, when crossed electric and magnetic fields \vec{E} and \vec{B} are suddenly applied to an electrically conductive gas at rest, or when a shock wave the region behind which is ionized passes through such a field configuration. This affords the possibility of producing shock waves or influencing a given shock wave electromagnetically.

In dependence on the total force P and the total energy input W per second, the asymptotic solutions are investigated toward which the state of flow converges as interaction assumes a steady state.

The Mach numbers M obtained when shock waves are produced electromagnetically are proportional to $P^{1/2}$ and $W^{2/3}$ for strong shocks. If the power is supplied by a battery with fixed data, M as a function of the applied magnetic field \vec{B} has a maximum.

Influencing a given shock wave electromagnetically causes reflection of shock or rarefaction waves and changes the intensity of the primary shock wave. With heat input only ($P = 0, W \geq 0$), the latter is accelerated; with momentum input only ($P \leq 0, W = 0$), it is slowed down. If its Mach number is sufficiently great before and after interaction, similar solutions are obtained for $P \sim W^{2/3}$.

Inhaltsverzeichnis

EINLEITUNG

Das gasdynamische Verhalten von Plasmen in Magnetfeldern ist eines der wichtigen Probleme in der Plasmaphysik. Da sich hinter starken Stoßwellen eine Plasmaströmung befindet, lassen sich verschiedene Aspekte dieses Problems an der Wechselwirkung von Stoßwellen mit elektromagnetischen Feldern untersuchen.

Einleitung

1. Vorbemerkungen über Verdünnungs- und Stoßwellen	3
2. Instationäre Wechselwirkung mit äußeren Feldern	6
3. Stationäre Strömung im Wechselwirkungsgebiet	11
4. Elektromagnetische Erzeugung von Stoßwellen	
A Grundsätzliches	15
B Einzelfragen	26
5. Wechselwirkung von Stoßwellen mit elektromagnetischen Feldern	
A Grundsätzliches	35
B Sonderfälle	47
Anhang I - III	58
Literaturverzeichnis	65

Abschnitt 1 bringt als Grundlage einige wichtige Ergebnisse aus der allgemeinen Gasdynamik.

In Abschnitt 2 werden durch eine qualitative Betrachtung Vorstellungen über das Strömungsverhalten entwickelt, das sich asymptotisch nach dem Einschalten räumlich begrenzter Wärme- und Krafteinwirkungen auf ein ursprünglich ruhendes Gas bzw. auf die Strömung hinter einer Stoßwelle einstellt. Diese Vorstellungen bilden den Lösungsansatz für die exakte Behandlung in Abschnitt 4 und 5.

EINLEITUNG

Das gasdynamische Verhalten von Plasmen in Magnetfeldern ist eines der wichtigen Probleme in der Plasmaphysik. Da sich hinter starken Stosswellen eine Plasmaströmung befindet, lassen sich verschiedene Aspekte dieses Problems an der Wechselwirkung von Stosswellen mit elektromagnetischen Feldern untersuchen. Hierbei führt die theoretische Behandlung auf ziemlich mathematische Schwierigkeiten, da die Einzelheiten der Wechselwirkung zwischen Plasmaströmung und Feldern durch ein System gekoppelter, nichtlinearer partieller Differentialgleichungen beschrieben werden.

Eine ähnliche Situation besteht auch bei Wechselwirkungen der sogenannten "elementaren" Wellen in der gewöhnlichen Gasdynamik. Courant und Friedrichs haben diese weitgehend geklärt, indem sie den asymptotischen Strömungszustand nach Abschluss aller Wechselwirkungen untersucht haben ([1], Kap. III D). Bei ihrer Methode reduziert sich das mathematische Problem auf die Diskussion algebraischer Gleichungen.

In der vorliegenden Arbeit konnte diese Methode auf einige Wechselwirkungsprobleme erweitert werden, die sich im Zusammenhang mit der elektromagnetischen Erzeugung von Stosswellen und mit dem Eindringen von Stosswellen in elektromagnetische Felder ergeben. Zwar kommt es dabei nicht zu einem Abschluss der Wechselwirkung, da diese jedoch mit der Zeit stationär wird, lässt sie sich asymptotisch bei ausschliesslicher Berücksichtigung integraler Effekte in den Rahmen einer algebraischen Diskussion eingliedern.

Abschn. 1 bringt als Grundlage einige wichtige Ergebnisse aus der allgemeinen Gasdynamik.

In Abschn. 2 werden durch eine qualitative Betrachtung Vorstellungen über das Strömungsverhalten entwickelt, das sich asymptotisch nach dem Einschalten räumlich begrenzter Wärme- und Krafteinwirkungen auf ein ursprünglich ruhendes Gas bzw. auf die Strömung hinter einer Stosswelle einstellt. Diese Vorstellungen bilden den Lösungsansatz für die exakte Behandlung in Abschn. 4 und 5.

Der Gegenstand von Abschn. 3 ist die asymptotisch stationäre Plasmaströmung durch die Zone der Wechselwirkung. Dabei wird untersucht, welchen Bedingungen die integralen Größen "Gesamtkraft P" und "Leistungszufuhr W" genügen müssen.

Durch Diskussion der für den asymptotischen Strömungszustand gültigen algebraischen Gleichungen werden dann in Abschn. 4 die elektromagnetische Erzeugung von Stosswellen und in Abschn. 5 die Wechselwirkung von Stosswellen mit elektromagnetischen Feldern im Einzelnen untersucht. Dabei führt das Problem der Vollständigkeit der Lösungen noch zu einer Erweiterung der ursprünglichen Ansätze. Beide Abschnitte bringen in einem auf die praktische Anwendung zugeschnittenen Teil B analytische Näherungsergebnisse.

Zum Problem des Eindringens von Stosswellen in ein Magnetfeld wurden auf Grund ähnlicher Vorstellungen von J.H.de Leeuw [2] theoretische und experimentelle Untersuchungen gemacht, die mit einem in Abschn. 5B behandelten Spezialfall (Kurzschlussfall $W = 0, P \leq 0$) verwandt sind.

Wellen dehnen sich also ständig aus. In einem geeigneten Koordinatensystem können Kopf und Ende der Welle nach entgegengesetzten Richtungen auseinander laufen, obwohl sie sich relativ zur Gasströmung in gleichen Sinn bewegen.

Zwischen Vorland (Index V) und Hinterland (H) der Welle, in denen der Druck p, die Dichte ρ und die Geschwindigkeit v räumlich konstante Werte besitzen, gelten nach Riemann die folgenden Gleichungen:

$$p_H = p_V \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \left| \frac{v_H - v_V}{c_V} \right| \right)^{2\gamma/(\gamma-1)} \quad (1)$$

$$\rho_H = \rho_V \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \left| \frac{v_H - v_V}{c_V} \right| \right)^{2/(\gamma-1)} \quad (2)$$

$|v_H - v_V|$ ist die Geschwindigkeitserhöhung des Gases (bei ruhendem Vorland $= v_H$) und bildet ein Mass für die Stärke der Verdünnungswelle.

Kompressions- u. Stosswellen

Wird der Kolben nicht heraus, sondern in das Rohr hineingeschoben, so entsteht eine Kompressionswelle. Durch sie wird

1. VORBEMERKUNGEN ÜBER VERDÜNNUNGS- UND STOSSWELLEN

Als Grundlage sollen kurz die wichtigsten Eigenschaften von ebenen Verdünnungs- und Stosswellen, den sogenannten "elementaren Wellen", zusammengestellt werden. Für genauere Einzelheiten sei auf die Literatur verwiesen, z.B. [1] und [3].

Verdünnungswellen

Senkt man am Ende eines gasgefüllten Rohres plötzlich den Druck ab, indem man z.B. einen beweglichen Kolben herauszieht, so entsteht eine Verdünnungswelle. Diese läuft in das Gas hinein und beschleunigt es - ihrer Ausbreitungsrichtung entgegen - zum Kolben hin. Dabei wird das Gas verdünnt, abgekühlt und auf den Absaugdruck entspannt. Die beiden Wellengrenzungen, zwischen denen diese Vorgänge stattfinden, laufen relativ zum Gas mit der lokalen Schallgeschwindigkeit. Da diese mit der Temperatur über die Verdünnungswelle weg absinkt, ist die hintere Grenze langsamer als die vordere, Verdünnungswellen dehnen sich also ständig aus. In einem geeigneten Koordinatensystem können Kopf und Ende der Welle nach entgegengesetzten Richtungen auseinander laufen, obwohl sie sich relativ zur Gasströmung im gleichen Sinn bewegen. Zwischen Vorland (Index V) und Hinterland (H) der Welle, in denen der Druck p , die Dichte ρ und die Geschwindigkeit v räumlich konstante Werte besitzen, gelten nach Riemann die folgenden Gleichungen:

$$p_H = p_V \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \left| \frac{v_H - v_V}{c_V} \right| \right)^{2\gamma/(\gamma-1)} \quad (1)$$

$$\rho_H = \rho_V \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \left| \frac{v_H - v_V}{c_V} \right| \right)^{2/(\gamma-1)} \quad (2)$$

$|v_H - v_V|$ ist die Geschwindigkeitserhöhung des Gases (bei ruhendem Vorland = v_H) und bildet ein Mass für die Stärke der Verdünnungswelle.

Kompressions- u. Stosswellen

Wird der Kolben nicht heraus, sondern in das Rohr hineingeschoben, so entsteht eine Kompressionswelle. Durch sie wird

das Gas komprimiert und umgekehrt wie oben in Ausbreitungsrichtung beschleunigt. Wieder laufen beide Wellengrenzen mit der lokalen Schallgeschwindigkeit. Da durch die Kompression die Schallgeschwindigkeit erhöht wird, ist jetzt die hintere Grenze die schnellere und holt nach einiger Zeit den Kopf der Welle ein. Die ganze Kompression erfolgt dann in einer Stossfront von der Ausdehnung weniger freier Weglängen, Kompressionswellen steilen sich stets zu Stosswellen auf.

In Stosswellen spielen wegen der hohen Gradienten der Zustandsgrößen dissipative Prozesse eine massgebliche Rolle, daher genügen sie anderen Gesetzmässigkeiten als Kompressionswellen und dringen insbesondere in ihr Vorland mit Überschallgeschwindigkeit ein. Eine Kontinuumstheorie beschreibt Stosswellen als Sprungflächen mit Unstetigkeiten in p , ρ und v . In einem mit der Stossfront bewegten Koordinatensystem gelten zwischen Vor- und Hinterland die Rankine-Hugoniot'schen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \rho_H v_H &= \rho_V v_V \\ \rho_H v_H^2 + p_H &= \rho_V v_V^2 + p_V \\ \frac{\gamma}{\gamma-1} p_H v_H + \rho_H v_H \frac{v_H^2}{2} &= \frac{\gamma}{\gamma-1} p_V v_V + \rho_V v_V \frac{v_V^2}{2} \end{aligned} \right\} \text{Wechselwirkungen} \quad (3)$$

Dies sind der Reihe nach die Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie.

Qualitativ gilt wie bei Kompressionswellen: das Gas wird beim Durchgang der Stosswelle in deren Laufrichtung beschleunigt und dabei verdichtet, komprimiert und aufgeheizt, bei starken Stosswellen bis über die Ionisationsgrenze. Mit der Temperatur ist auch die Schallgeschwindigkeit des Hinterlandes erhöht, und die Stossfront bewegt sich gegen dieses nur mit Unterschallgeschwindigkeit.

Die Einströmgeschwindigkeit v_V des Gases im Ruhsystem der Stossfront ist gleich deren Eindringgeschwindigkeit in das Vorland. Dividiert durch die dort gemessene Schallgeschwindigkeit c_V ergibt das die Machzahl $M = |v_V/c_V|$ der Stosswelle und liefert ein Mass für deren Stärke. Nach dem oben ge-

sagten ist stets $M \geq 1$.

Für spätere Zwecke wird noch die Auflösung des Systems (3) nach den Variablen des Hinterlands angegeben:

$$p_H = p_V \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M^2 - 1) \right] \quad (4)$$

$$|u_H - u_V| = \frac{2c_V}{\gamma+1} (M - 1/M) \quad (5)$$

$$\rho_H = \rho_V \frac{(\gamma+1) M^2}{2 + (\gamma-1) M^2} \quad (6)$$

Dabei ist zur Herleitung $c^2 = \gamma p / \rho$ und die Definition von M benutzt.

Während Verdünnungs- und Kompressionswellen die Entropie des Gases nicht verändern, gilt über Stosswellen $s_H \geq s_V$ (Gleichheit nur für unendlich schwachen Stoss, $M = 1$), wo s die auf die Masse bezogene spezifische Entropie ist.

Wechselwirkungen

Die "elementaren" Wellen sind nichtlineare Strömungsvorgänge, d.h. es gilt für sie kein Superpositionsprinzip. Stattdessen kommt es bei ihrem Aufeinandertreffen zu im Einzelnen recht komplizierten Wechselwirkungen.

Sind daran Stosswellen beteiligt, so entstehen sogenannte Kontaktdiskontinuitäten. Dies sind mit der Strömung schwimmende Flächen, an denen bei Gleichheit von p und v Gebiete mit verschiedenem ρ und T aneinandergrenzen. Streng genommen hat man es dabei mit Übergangszonen variabler Temperatur und Dichte zu tun, deren Teile beim Durchgang einer Stosswelle zeitlich veränderlicher Stärke verschieden stark aufgeheizt worden sind. Auch eine scharfe Kontaktdiskontinuität würde durch Diffusion und Wärmeleitung im Laufe der Zeit geglättet und in eine solche Übergangszone verwandelt werden. In der Gasdynamik hat sich jedoch das Konzept scharfer Kontaktfronten als eine brauchbare und sehr nützliche Näherung erwiesen.

Sind irgendwelche der untersuchten Wellen zusammengestossen

und ist die darauf folgende Wechselwirkung zum Abschluss gekommen, so resultiert ein relativ einfaches Strömungsbild: aus dem Gebiet der Wechselwirkung laufen relativ zur Strömung zwei Wellen nach entgegengesetzten Richtungen auseinander, dazwischen schwimmt mit der Strömung eine Kontaktfront. Art und Stärke dieser Wellen sowie die Stärke der Kontaktfront sind dabei durch die Strömungsverhältnisse vor der Wechselwirkung bestimmt.

Ausschlaggebend für dieses einfache Ergebnis sind die folgenden Tatsachen:

Zwei hintereinander laufende Verdünnungswellen halten immer gleichen Abstand und lassen sich stets zu einer einzigen, stärkeren Verdünnungswelle mit einer homogenen Strömungszone in der Mitte zusammenfassen. Laufen dagegen in gleicher Richtung zwei Stosswellen oder eine Stoss- und eine Verdünnungswelle, so wird immer die vordere von der hinteren Welle eingeholt, es kommt immer zu einer Wechselwirkung. Daher sind Wechselwirkungsprozesse erst abgeschlossen, wenn in beiden Rohrrichtungen nur noch je eine Welle läuft. Da evtl. beteiligte Kompressionswellen sich stets zu Stosswellen aufsteilen, besteht der asymptotische Strömungszustand im Auseinanderlaufen von Stoss- und Verdünnungswellen.

2. INSTATIONÄRE WECHSELWIRKUNG MIT ÄUSSEREN FELDERN

Wenn die Temperatur des Hinterlandes einer starken Stosswelle über der Ionisierungsgrenze liegt, können in diesem elektrische Ströme fließen, und es besteht die Möglichkeit, mit elektromagnetischen Feldern auf die Stosswelle selbst einzuwirken. Insbesondere wird man so etwas wie Reflexion erwarten, wenn eine Stosswelle in ein senkrecht zu ihrer Bewegungsrichtung angelegtes Magnetfeld hineinläuft.

Beginn der Wechselwirkung

Solche durch einen plötzlichen äusseren Eingriff ausgelösten instationären Vorgänge lassen sich besser übersehen, wenn man

sie zunächst an einem etwas einfacheren Problem untersucht. Hierzu wird in einem Strömungsrohr ein homogenes, ruhendes Gas betrachtet, auf das innerhalb eines begrenzten Gebiets plötzlich ein parallel zur Rohrachse gerichtetes Kraftfeld einwirkt. Ähnlich, wie wenn inmitten des Rohres ein Kolben verschoben würde, entsteht dadurch auf das Gas ein Schub nach der einen und ein Sog auf die andere Seite. Der Sog lässt eine Verdünnungswelle entstehen, die in einer Richtung davonläuft, in der dazu entgegengesetzten Richtung des Schubs läuft eine Kompressionswelle, die sich zur Stosswelle aufsteilt. Hinter dieser schwimmt mit der Strömung eine Kontaktfront, die das in der Stosswelle aufgeheizte Gas nach hinten abgrenzt.

Ganz ähnlich verlaufen die Dinge auch bei dem zuerst angeführten Problem. Im Hinterland der Stosswelle entstehen nach ihrem Eindringen in das äussere Feld eine Verdünnungs- und eine Kompressionswelle, die relativ zur Strömung nach entgegengesetzten Seiten auseinanderlaufen, nur ist jetzt noch das Strömungsfeld der primären Stosswelle - nichtlinear - zu überlagern. Je nach Richtung des Kraftfeldes läuft entweder die Verdünnungs- oder die Kompressionswelle hinter der Stosswelle her und tritt mit ihr, noch während sie sich ausbildet, in Wechselwirkung. Dadurch geschieht zweierlei: einmal wird die Primärwelle beeinflusst, d.h. geschwächt oder verstärkt, zum anderen wird an dieser die sie beeinflussende Sekundärwelle teilweise reflektiert und kommt auch noch mit der stromaufwärts laufenden - zweiten Sekundärwelle zur Wechselwirkung (diesbezügl. sei an die Bemerkung über das Nachlaufen von Stoss- und Verdünnungswellen auf S. 6 erinnert). Da an den geschilderten Prozessen Stosswellen beteiligt sind, entsteht auch wieder eine Kontaktdiskontinuität, dies verstanden in dem früher erläuterten Sinn.

Die hier entwickelten Vorstellungen über die anfängliche Entwicklung des Strömungsbildes werden z.T. durch Rechnungen bestätigt, die von J. Roscieszewski und A.K. Oppenheim mit einem für schwache Wechselwirkung gültigen linearisierten Charakteristikenverfahren auf einer elektronischen Rechenmaschine

durchgeführt wurden. Wechselwirkungen mit einer sekundären Stosswelle konnten dabei nicht untersucht werden, da das Auftreten zu starker sekundärer Wellen eine linearisierte Theorie ungültig werden lässt [4].

Quasistationärer Endzustand

In beiden betrachteten Fällen wird nach Entfernung aller Wellen aus dem Gebiet der Krafteinwirkung die Strömung in diesem allmählich stationär, wobei allerdings vorauszusetzen ist, dass zugleich auch die Krafteinwirkung stationär wird.

Im Falle der Anordnung mit ursprünglich ruhendem Gas läuft dabei auf jeder Seite nur eine Welle davon, stromaufwärts eine Verdünnungswelle, stromabwärts eine Stosswelle (Fig. 3), und beide Wellen ändern mit der Zeit ihre Stärke immer weniger.

Bei der Krafteinwirkung auf das Hinterland einer gegebenen Stosswelle hat man es zunächst mit drei Wellen zu tun, der primären Stosswelle und den beiden Sekundärwellen. Da aber nach Abschn. 1 auf die Dauer nur je eine Welle in jeder Rohrrichtung laufen kann, bekommt man nach Abschluss aller Wechselwirkungen der Wellen untereinander auch hier das asymptotische Strömungsbild zweier auseinanderlaufender Wellen konstanter Stärke mit einer stationären Strömung in der Wechselwirkungszone. Die primäre Stosswelle bestimmt die Richtung der Gasströmung und läuft in dieser stromabwärts. Die eine aus den Sekundärwellen schliesslich resultierende "reflektierte" Welle läuft stromaufwärts (Fig. 9 und Fig. 12) und ist entweder eine Stoss- oder eine Verdünnungswelle.

Stromabwärts von der Zone der Krafteinwirkung schwimmt immer mit der Strömung eine Kontaktfront.

Formulierung zweier Probleme

Neben der Krafteinkopplung, die sich natürlich auch auf die Energie der Strömung auswirkt, soll im Folgenden zusätzlich die Möglichkeit einbezogen werden, dass der Strö-

mung in der Wechselwirkungszone Wärme zugeführt wird. Dann liefern die obigen Betrachtungen den Lösungsansatz zu den beiden folgenden, festumrissenen Problemen:

Problem 1: Gegeben ein Rohr mit ruhendem Gas. Innerhalb eines abgegrenzten Gebiets wird plötzlich ein Kraftfeld eingeschaltet und Wärme zugeführt derart, dass eindimensionale stationäre Strömungen möglich sind. Ist der oben geschilderte, quasistationäre Endzustand eine Lösung der gasdynamischen Gleichungen? Wie berechnet sich die Stärke der erzeugten Stoss- und Verdünnungswelle in Abhängigkeit von den äusseren Einwirkungen und wie stark ist die Kontaktfront?

Problem 2: Eine Stosswelle läuft durch ein abgegrenztes Gebiet, in dem ein ebenes Kraftfeld auf ihr Hinterland einwirkt und wo diesem Wärme zugeführt wird, und zwar so, dass eindimensionale stationäre Strömungen möglich sind. Ist der geschilderte quasistationäre Endzustand eine Lösung? Wie berechnen sich Art und Stärke der beiden resultierenden Wellen, wie die Stärke der Kontaktfront?

Es sei schon hier darauf hingewiesen, dass der durch qualitative Betrachtungen gewonnene Lösungsansatz zu diesen Problemen bei deren genauerer Behandlung erweitert werden muss.

Bezug zu Experimenten

Das erste Problem war zunächst nur eine Vorstufe zum besseren Verständnis des zweiten. Aber es hat auch für sich genommen einiges Interesse, da seine Lösung die elektromagnetische Stosswellenerzeugung in einer den T-Rohr-Experimenten verwandten Anordnung beschreiben kann.

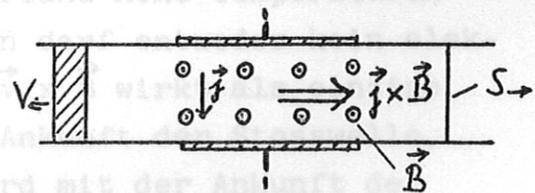


Fig. 1

An ein Rohr mit quadratischem Querschnitt wird senkrecht zur Achse ein statisches Magnetfeld B angelegt. Seitlich davon befinden sich zwei Elektroden, die an eine Spannungsquelle angeschlossen werden können (Fig. 1). Nach dem Anlegen der Spannung fließen bei hinreichender Leitfähigkeit des Gases zwi-

schen den Elektroden Ströme. Ist die Leitfähigkeit gering, so soll durch hohe elektrische Feldstärken eine Gasentladung eingeleitet werden. Mit dem Einschalten der Ströme entsteht in Rohrrichtung die Kraft $\vec{j} \times \vec{B}$, hinzu kommt die Ohm'sche Heizung j^2/σ .

Bei dem zweiten Problem ist an die folgende Anordnung gedacht: Die primäre Stosswelle läuft in eine Zone mit gekreuzten elektrischen und magnetischen Feldern ($\vec{E} \perp \vec{B}$, beide \perp Rohrachse, s. Fig. 2).

Das Gas vor der Stosswelle sei nicht leitfähig, sodass vor deren Ankunft die Felder keine Wirkung haben. Nach ihrer Ankunft fließen bei einer durch hohe Machzahlen erreichbaren hinreichenden Leitfähigkeit ihres Hinterlandes elektrische Ströme \vec{j} , die durch das elektrische Feld \vec{E} und die elektromotorische Kraft $\vec{v} \times \vec{B}$ angetrieben werden. Gleichzeitig entsteht die Lorentzkraft $\vec{j} \times \vec{B}$, die je nach Orientierung der Felder in oder gegen die Strömungsrichtung weist. Durch die Ohm'sche Heizung j^2/σ wird Wärme auf die Strömung übertragen.

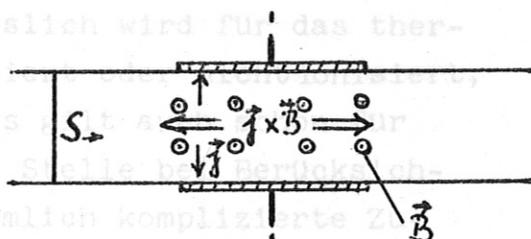


Fig. 2

Will man dieses Experiment auch mit schwachen Stosswellen durchführen, so muss schon deren Vorland hohe Temperaturen haben und daher leitfähig sein. Dann darf entweder kein elektrisches Feld angelegt werden, und $\vec{v} \times \vec{B}$ wirkt als einzige stromantreibende Ursache erst nach Ankunft der Stosswelle, oder aber die Einschaltung von \vec{E} wird mit der Ankunft der Stosswelle synchronisiert.

Grundgleichungen

Idealisierungen

Zu Beginn der Wechselwirkung können das Kraftfeld
Um von diesen Experimenten zu den oben formulierten Problemen zurückzugelangen, bedarf es natürlich einer Reihe von Idealisierungen. \vec{j} fließt nicht genau senkrecht auf die Elektroden, da sich durch den Hall-term im Ohm'schen Gesetz noch andere Komponenten als die in Richtung von $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$ ergeben. Aus diesem Grunde ist die Eindimensionalität des Kraftfeldes

$\vec{j} \times \vec{B}$ nicht ganz verwirklicht. Denselben Einfluss haben Abweichungen der Felder \vec{E} und \vec{B} von den gewünschten Richtungseigenschaften. An einen mehr oder weniger homogenen Feldbereich zwischen den Elektroden schliessen sich beiderseits inhomogene Randzonen an. Mit dem Fliesen von Strömen \vec{j} ist eine Veränderung des angelegten Magnetfeldes verbunden, die ebenfalls eine Störung der eindimensionalen Geometrie hervorrufen kann [5,7] . (8)

Wärmeleitung und Reibung werden vernachlässigt. Die mit der Benutzung von Kontaktdiskontinuitäten verbundene Näherung wurde schon früher genannt. Schliesslich wird für das thermische Verhalten des Gases, ob ionisiert oder nichtionisiert, die ideale Gasgleichung benutzt. Das gilt auch schon für die Gleichungen (1) - (6), an deren Stelle bei Berücksichtigung von Ionisationsprozessen ziemlich komplizierte Zusammenhänge treten würden. (9)

3. STATIONÄRE STRÖMUNG IM WECHSELWIRKUNGSGEBIET (10)

Die instationären Bestandteile des Lösungsansatzes zu den oben formulierten zwei Problemen - Stoss- und Verdünnungswellen - wurden schon im ersten Abschnitt behandelt und mathematisch beschrieben. Dieser Abschnitt ist dem stationären Strömungszustand gewidmet, der sich asymptotisch im Gebiet der Kraft und Wärmeeinwirkung einstellt, und zwar insbesondere den dafür gültigen integralen Zusammenhängen. Genaueres über den differentiellen Strömungsverlauf findet sich in [6,7] . (11)

Die Beding. Grundgleichungen (12)

Zu Beginn der Wechselwirkung können das Kraftfeld k und die lokale Energiezufuhr w (= Wärmezufuhr + Arbeit von k), elektromagnetisch also $\vec{j} \times \vec{B}$ und $\vec{j} \cdot \vec{E}$, sowohl vom Ort als auch von der Zeit abhängen, und zwar auch dann, wenn \vec{E} und \vec{B} nach dem Einschalten zeitlich konstant gehalten werden. Dies hat die Ursache, dass \vec{j} über das Ohm'sche Gesetz mit dem Strömungsverhalten gekoppelt ist und erst mit diesem stationären (13)

när wird. In dem asymptotisch stationären Endzustand der Strömung werden jedoch mit k und w alle übrigen Grössen zeitunabhängig. Mit der x Achse in Rohrrichtung lauten dann die Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie

$$\frac{d \rho v}{dx} = 0 \quad (7)$$

$$\rho v \frac{dv}{dx} + \frac{dp}{dx} = k(x) \quad (8)$$

$$\rho v \frac{d}{dx} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) = w(x) \quad (9)$$

Variabilitätsbereich von P und W

k und w sind beides spezifische Grössen und zählen pro Volumen. Sie bzw. \vec{E} und \vec{B} sind Parameter des Problems. Da k und w nur von x abhängen, lassen sich alle drei Gleichungen über das ganze Wechselwirkungsgebiet integrieren, und es gilt zwischen dessen Grenzen 1 und 2

$$\rho_2 v_2 = \rho_1 v_1 \quad (10)$$

$$\rho_2 v_2^2 + p_2 = \rho_1 v_1^2 + p_1 + P \quad (11)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} p_2 v_2 + \rho_2 v_2 \frac{v_2^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} p_1 v_1 + \rho_1 v_1 \frac{v_1^2}{2} + W \quad (12)$$

mit als weitere Bedingung

$$P = \int_1^2 k(x) dx \quad (13)$$

$$W = \int_1^2 w(x) dx \quad (14)$$

Eliminiert man unter Benutzung von $\rho/\rho_1 = c$ und von (7) p' aus (8) und (9), so erhält man

Die Bedeutung von P und W

Im Allgem. sind die Funktionen $k(x)$ und $w(x)$ nicht explizit gegeben sondern durch Differentialgleichungen, die mit (7)-(9) gekoppelt sind. Daher müsste man im Prinzip ein System von Differentialgleichungen lösen, um P und W aus (13) und (14) berechnen zu können. Diese Schwierigkeit lässt sich umgehen, indem man P und W als neue Parameter auffasst. (13) und (14) haben dann einfach die Bedeutung von Transformations-

(16), daß v die Schallgeschwindigkeit nicht durchschreiten
 gleichungen zwischen den ursprünglichen Parametern - letzt-
 lich also E und B - und den neuen. Es ist nur zu beachten,
 dass P und W nicht unabhängig voneinander beliebig gewählt
 werden dürfen (s.u.).

Die neuen Parameter haben ganz anschauliche physikalische
 Bedeutungen. W ist die durch den Strömungsquerschnitt Q di-
 vidierte Gesamtenergie, die sekundlich im ganzen Wechsel-
 wirkungsgebiet ab- oder zugeführt wird. PQ ist die gesamte,
 von aussen auf die Strömung einwirkende Kraft.

Variabilitätsbereich von P und W

Die Strömung kann auf Grund der äusseren Einwirkungen von
 einem fest gegebenen Zustand 1 (p_1, ρ_1, v_1) nicht in jeden
 beliebigen Zustand 2 versetzt werden. Welche Bedingungen
 ein Zustand 2 erfüllen muss, um von 1 aus erreicht werden
 zu können, soll jetzt untersucht werden. Wenn das bekannt
 ist, ist auf Grund der Gleichungen (10) - (12) auch der Va-
 riabilitätsbereich von P und W gegeben.

Zunächst muss sicher $p_2 \geq 0$, $v_2 \geq 0$ und $\rho_2 \geq 0$ erfüllt sein.
 Da der Strömung Wärme nur zugeführt wird (Ohm'sche Aufhei-
 zung $j^2/\sigma > 0$), Energieentzug aber in Form von Arbeit vor
 sich geht, kann ihre Entropie nicht abnehmen, und man er-
 hält als weitere Bedingung

$$s_2 \geq s_1 \quad (15)$$

Gleichheit gilt, wenn die Wärmezufuhr verschwindet.

Eliminiert man unter Benutzung von $\gamma p/\rho = c^2$ und von (7) p'
 aus (8) und (9), so erhält man

$$v' = \frac{(\gamma-1)w - \gamma \epsilon v}{\rho(c^2 - v^2)} \quad (16)$$

wo u die spezifische innere Energie bezeichnet. Beide Anteile
 v' wird mit $v = c$ singulär, wenn nicht gleichzeitig der Zähler
 von (16) verschwindet. Sieht man von diesem Ausnahmefall
 ab, der das Zusammentreffen ganz spezieller Bedingungen bezgl.
 der Strömung und der Felder voraussetzt, so besagt Gleichung

4. ELEKTROMAGNETISCHE STOSSWELLENERZEUGUNG

(16), daß v die Schallgeschwindigkeit nicht durchschreiten kann, jedenfalls nicht als Folge der äußeren Einwirkungen k und w . Das liefert die Bedingung

$$\operatorname{sign} \left(\frac{v_2}{c_2} - 1 \right) = \operatorname{sign} \left(\frac{v_1}{c_1} - 1 \right), \quad (17)$$

d.h. v_2 liegt unter bzw. über der Schallgeschwindigkeit, wenn dasselbe für v_1 gilt. Anders ist die Lage, wenn sich in der Wechselwirkungszone eine stehende Stoßwelle befindet. Die Strömung wechselt dann unstetig von Überschall- auf Unterschallgeschwindigkeit, und die Bedingung (17) gilt mit entsprechend abgeänderter Indizierung nur für die beiden Teilbereiche vor und hinter der Stoßwelle.

Ist $v_1 = c_1$, so kann sich eine Über- oder eine Unterschallströmung anschließen, je nachdem, ob die Steigung $v' = +\infty$ oder $-\infty$ ist.

Zerlegung von W in Arbeit und Wärme

Für alle zulässigen Übergänge $1 \rightarrow 2$ sind nach (11) und (12) P und W eindeutig festgelegt. Jeder dieser Übergänge kann jedoch auf sehr unterschiedlichen Wegen erfolgen, da ja dieselbe Gesamtkraft und dieselbe Gesamtenergieeinkopplung mit ganz verschiedenen Feldern $k(x)$ und $w(x)$ erzielt werden kann. Bei gleichem P und W unterscheiden sich diese verschiedenen Wege in der Zusammensetzung von W aus Arbeit und Wärme.

Der Arbeitsanteil von W ist $W_A = \int_1^2 k v dx$, was mit (7) und (8)

$$W_A = \frac{\rho_1 v_1}{2} (v_2^2 - v_1^2) + \int_1^2 v dp$$

ergibt. Der Wärmeanteil $W_w = \int_1^2 \rho v T ds$ ergibt mit (7) und $T ds =$

$$= du + p d\frac{1}{\rho}$$

$$W_w = \rho_1 v_1 (u_2 - u_1) + \int_1^2 p dv,$$

wo u die spezifische innere Energie bezeichnet. Beide Anteile enthalten einen wegabhängigen Term, und erst ihre Summe wird wegen

$$\int_1^2 v dp + \int_1^2 p dv = p_2 v_2 - p_1 v_1$$

vom Wege unabhängig.

4. ELEKTROMAGNETISCHE STOSSWELLENERZEUGUNG

A. GRUNDSÄTZLICHES

Zur Behandlung der beiden in Abschn. 2 aufgestellten Probleme sind die Grundlagen jetzt bereitgestellt. Das auf die elektromagnetische Stosswellenerzeugung bezogene erste Problem ist der Gegenstand dieses Abschnitts. Es handelt sich jetzt also um die Stoss- und um die Verdünnungswelle, die bei der plötzlichen Einwirkung von Kraft und Wärme auf ein homogenes ruhendes Gas entstehen und nach entgegengesetzten Richtungen auseinander laufen.

Diskussion des Lösungsansatzes

Mit der Orientierung des Kraftfeldes hat man noch die Lauf- richtung der beiden Wellen in der Hand. Darüber soll so ent- schieden werden, dass die Stosswelle ($S \rightarrow$) nach rechts und die Verdünnungswelle ($V \leftarrow$) nach links läuft, sodass das Gas in den von der Wellenbewegung schon erfassten Gebieten eine Geschwindigkeit $v > 0$ bekommt. Damit ergibt sich die folgen- de Situation (Fig. 3): $S \rightarrow$ läuft mit konstanter Stärke nach rechts in ruhendes Gas, dessen Zustand noch der unveränderte Anfangs- zustand 0 ist, den es vor Be- ginn der Wechselwirkung hatte. Hinter $S \rightarrow$ liegt eine Zone ho- mogener Strömung mit konstan- ten Werten von p_3 , ρ_3 und v_3 .

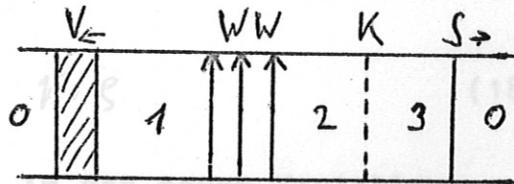


Fig. 3

Über die mit der Geschwindigkeit v_3 schwimmende Kontaktfront K springen T und ρ , p und v behalten ihre Werte p_3 und v_3 bis heran an die Wechselwirkungszone WW. In dieser ist die Strömung räumlich inhomogen, aber stationär. Links von ihr hat man wieder homogene Strömungsverhältnisse, schliesslich wird das von der Strömung erfasste Gebiet abgeschlossen von der Verdünnungswelle $V \leftarrow$, die sich mit konstanter Stärke immer weiter von WW entfernt und dabei das noch unveränderte Gas vom Zustand 0 nach rechts saugt und in den Zustand 1 versetzt.

Das gesamte Strömungsfeld setzt sich also aus verschiedenen

Teilströmungen zusammen, deren Verhalten bekannt ist. Die Lösung des Problems besteht darin, diese Teilströmungen durch geeignete Aneinanderkopplung mit dem Anfangszustand des Gases und den äusseren Einwirkungen P und W in Einklang zu bringen.

Normierung der Grundgleichungen

Die Parameter des Problems sind P, W und der durch p_0 und ρ_0 gegebene Anfangszustand des Gases. p_0 und ρ_0 lassen sich durch Übergang zu dimensionslosen Grundgleichungen eliminieren. Zu diesem Zweck werden alle Drucke in Vielfachen von p_0 , alle Dichten in Vielfachen von ρ_0 und alle Geschwindigkeiten in Vielfachen von $c_0 = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ gemessen. Für die neuen dimensionslosen Variablen p/p_0 , v/c_0 , ρ/ρ_0 sollen jedoch die alten Bezeichnungen beibehalten werden, d.h. es werden die folgenden Ersetzungen vorgenommen.

$$p/p_0 \rightarrow p, \quad v/c_0 \rightarrow v, \quad \rho/\rho_0 \rightarrow \rho.$$

Auch die Schallgeschwindigkeit c wird mit c_0 normiert, $\frac{c^2}{c_0^2} = \frac{\gamma p / p_0}{\gamma \rho / \rho_0}$ geht über in

$$c^2 = p / \rho \tag{18}$$

Der Anfangszustand des Gases wird in den neuen Variablen

$$p_0 = 1, \quad \rho_0 = 1, \quad v_0 = 0$$

Beim Umschreiben der Grundgleichungen werden gleich die Indizes und Richtungsverhältnisse von Fig. 3 berücksichtigt. Mit $v_0 = 0$ erhält man dann statt (1) und (2) (Index $V \rightarrow 0$, Index $H \rightarrow 1$, $|(v_1 - v_0)/c_0| = v_1/c_0 \rightarrow v_1$)

$$p_1 = \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} v_1\right)^{2\gamma/(\gamma-1)} \tag{19}$$

$$\rho_1 = \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} v_1\right)^{2/(\gamma-1)} \tag{20}$$

Um Lösungen zu finden, sollen jetzt die in den einzelnen als Gleichungen für die Verdünnungswelle $V \leftarrow$. Die Stosswellengleichungen (4) - (6) gehen über in

diagramm verfolgt werden. Bei der Lösung ergibt sich hierfür ein $p - v -$ Diagramm (Fig. 4) da in einem solchen nach Gleichung (28) und (29) die Zustände 2 und 3 zusammenfallen. Der Zustand 3 hat die Koordinaten $p_3 = 1$, $v_3 = 0$. Alle Zustände 1, in die das Gas durch das Passieren einer Verdünnungswelle versetzt werden kann liegen auf der durch (19) gegebenen Kurve V_1 . Von die-

$$p_3 = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M^2 - 1) \quad (21)$$

$$v_3 = \frac{2}{\gamma+1} (M - 1/M) \quad (22)$$

$$\beta_3 = \frac{(\gamma+1) M^2}{2 + (\gamma-1) M^2} \quad (23)$$

Die Gleichungen für die stationäre Strömung in der Zone WW werden umgeschrieben, indem man (10) durch $\beta_0 c_0$, (11) durch $\beta_0 c_0^2 = \gamma p_0$ und (12) durch $\beta_0 c_0^3 = \gamma p_0 c_0$ dividiert. Mit den Ersetzungen

$$\frac{P}{\gamma p_0} \rightarrow \underline{P}, \quad \frac{W}{\beta_0 c_0^3} \rightarrow \underline{W} \quad (24)$$

und den oben angeführten Ersetzungen für p/p_0 etc. erhält man

$$\beta_2 v_2 = \frac{\beta_1 v_1}{\gamma+1} \quad (25)$$

$$\beta_2 v_2^2 + \frac{1}{\gamma} p_2 = \beta_1 v_1^2 + \frac{1}{\gamma} p_1 + \underline{P} \quad (26)$$

$$\frac{1}{\gamma-1} p_2 v_2 + \beta_2 v_2 \frac{v_2^2}{2} = \frac{1}{\gamma-1} p_1 v_1 + \beta_1 v_1 \frac{v_1^2}{2} + \underline{W} \quad (27)$$

Die Kontaktdiskontinuität K wird beschrieben durch die Gleichungen

$$p_2 = p_3 \quad (28)$$

$$v_2 = v_3 \quad (29)$$

Ihre Stärke kann durch das Verhältnis β_2/β_3 angegeben werden und gehört zu den Unbekannten des Problems.

Alle Zustände 3, die das Gas hinter einer Stosswelle p - v Diagramm

Um Lösungen zu finden, sollen jetzt die in den einzelnen Strömungszonen erfolgenden und durch Gleichung (19) - (29) beschriebenen Zustandsänderungen des Gases in einem Zustands-

diagramm verfolgt werden. Besonders eignet sich hierfür ein $p - v$ - Diagramm (Fig. 4), da in einem solchen nach Gleichung (28) und (29) die Zustände 2 und 3 zusammenfallen. Der Zustand 0 hat in ihm die Koordinaten $p_0 = 1$, $v_0 = 0$. Alle Zustände 1, in die das Gas durch das Passieren einer Verdünnungswelle überhaupt versetzt werden kann, liegen auf der durch (19) beschriebenen Kurve V_{\leftarrow} . Von dieser ist das gestrichelte Stück rechts von $v = \frac{2}{\gamma + 1}$ für die jetzigen Zwecke

auszuschliessen, und zwar aus dem folgenden Grund: damit die Strömung in der Zone WW stationär sein kann, müssen an ihrem linken Rand zeitlich konstante Einströmungsbedingungen herrschen. Dies ist aber nur der Fall, wenn die Rückfront

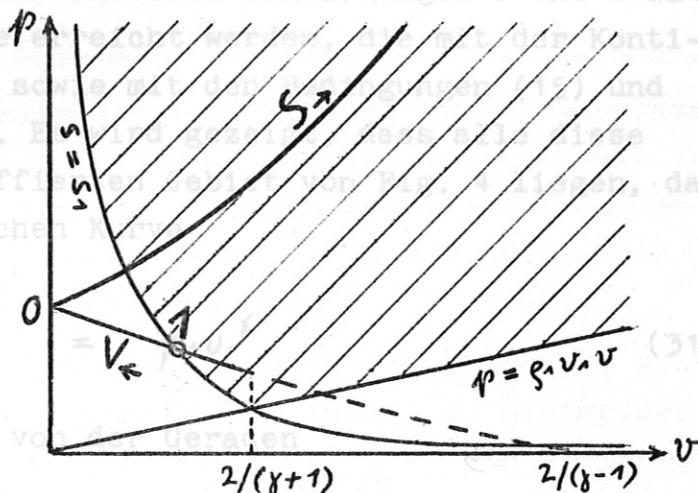


Fig. 4

(=rechte Begrenzung) der Verdünnungswelle nach links läuft oder allenfalls in der Strömung stehen bleibt, wenn also die Verdünnungswelle eine gewisse Maximalstärke nicht überschreitet. Nun strömt das Gas am Ort der Rückfront mit v_1 nach rechts, jene bewegt sich mit c_1 gegen die Strömung und würde von dieser nach rechts mitgenommen, sobald $v_1 > c_1$ wäre. Daher muss $v_1 \leq c_1$ gelten, was mit (18) - (20) auf $v_1 \leq 1 - \frac{\gamma-1}{2} v_1$ führt bzw. auf die oben genannte Bedingung $v_1 \leq \frac{2}{\gamma+1}$. Der dadurch gegebene Punkt maximaler Verdünnungsstärke über $v = \frac{2}{\gamma+1}$ liegt vor dem Schnittpunkt $v = \frac{2}{\gamma-1}$ der Kurve (19) mit der v -Achse. Mit V_{\leftarrow} soll weiterhin nur noch dasjenige Stück der Kurve (19) bezeichnet werden, das vor $\frac{2}{\gamma+1}$ liegt.

Alle Zustände 3, die das Gas hinter einer Stosswelle S_{\leftarrow} annehmen kann, liegen auf der Kurve S_{\leftarrow} , deren analytische Darstellung man unter Fortlassung des Index 3 durch Elimination von M aus (21) und (22) bekommt:

$$p = 1 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{4} v^2 + \gamma v \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma+1}{4} v\right)^2} \quad (30)$$

Sie beginnt im Punkt 0 und läuft parabelförmig nach oben.

Alle Zustände 1, die die Strömung am Anfang der Zone WW annehmen kann, gehen über Verdünnungswellen aus 0 hervor und liegen daher auf V_{\leftarrow} . Irgendein solcher Zustand 1 werde herausgegriffen und festgehalten. Hinter WW können von diesem aus auf Grund der äusseren Einwirkungen P und W alle diejenigen Zustände erreicht werden, die mit der Kontinuitätsgleichung (25) sowie mit den Bedingungen (15) und (17) verträglich sind. Es wird gezeigt, dass alle diese Zustände in dem schraffierten Gebiet von Fig. 4 liegen, das von der hyperbelähnlichen Kurve

$$p v^\gamma = p_1 v_1^\gamma \quad (31)$$

durch den Punkt 1 und von der Geraden

$$p = \rho_1 v_1 v \quad (32)$$

durch den Nullpunkt eingeschlossen wird.

(31) ist äquivalent mit $s = s_1$ und entsteht aus der üblichen Darstellung $p/\rho^\gamma = p_1/\rho_1^\gamma$, die auch in den normierten Variablen gilt, durch Multiplikation mit $(\rho v)^\gamma = (\rho_1 v_1)^\gamma$.

Für alle Punkte oberhalb von (31) ist (15) erfüllt.

Aus Gleichung (25) folgt mit (18)

$$p_2 = \rho_1 v_1 v_2 \cdot \frac{c_2^2}{v_2^2} \begin{cases} > \rho_1 v_1 v_2 & \text{für } v_2 < c_2 \\ < \rho_1 v_1 v_2 & \text{für } v_2 > c_2 \end{cases}$$

d.h. alle von 1 aus erreichbaren Unterschallzustände liegen oberhalb und alle Überschallzustände unterhalb der Geraden (32). Mit der Bedingung (17) verträglich sind daher nur diejenigen Zustände 2, die auf der gleichen Seite von (32) liegen wie der Zustand 1.

Dieser liegt in Fig. 4 oberhalb von (32), da für $v_1 < 2/(\gamma+1)$ gilt: $v_1 < c_1$. Im Falle $v_1 = c_1 = 2/(\gamma+1)$ liegt 1 selbst auf

$$p = p_1 + \gamma \rho_1 v_1^2 + \gamma P - \gamma \rho_1 v_1 v \quad (33)$$

der Geraden (32) (Bew. durch Einsetzen), und diese bildet dann keine Grenze für die Zustände 2, die allerdings weiterhin über (31) liegen müssen.

Es kann noch gezeigt werden, dass von allen Geraden (32) die zu $v_1 = \frac{2}{\gamma+1}$ gehörige am steilsten ist. Differenziert man nämlich $\rho_1 v_1$ unter Benutzung von Gleichung (20) nach v_1 , so ist das Ergebnis positiv für $v_1 < 2/(\gamma+1)$ und Null für $v_1 = 2/(\gamma+1)$, $\rho_1 v_1$ wird dort am grössten.

Existenz von Lösungen und Problem der Vollständigkeit

Die Existenz von Lösungen lässt sich jetzt leicht beweisen. Wählt man irgendeinen Punkt 1 auf V_{\leftarrow} und dazu innerhalb des schraffierten Gebiets von Fig. 4 einen Punkt 2 auf S_{\rightarrow} , so ist eine Lösung gefunden. Zum Beweis wird die Gültigkeit der Gleichungen (19) - (29) überprüft.

(19) ist mit der Wahl von 1 auf V_{\leftarrow} erfüllt, p_1 und v_1 sind dadurch festgelegt. (20) liefert die Dichte ρ_1 hinter der Verdünnungswelle. Mit der Lage von 2 sind p_2 und v_2 festgelegt, (25) definiert daher die Dichte ρ_2 hinter der Wechselwirkungszone, (26) und (27) definieren die zur Lösung gehörenden Parameterwerte P und W. 2 wurde so gewählt, dass (15) und (17) erfüllt sind, dass P und W also innerhalb ihres Variabilitätsbereiches liegen. (28) und (29) werden dadurch erfüllt, dass 3 mit 2 zusammenfällt, und da dann auch 3 auf S_{\rightarrow} liegt, gelten die Gleichungen (21) und (22). Der zu p_3 und v_3 gehörige Wert M liefert, in (23) eingesetzt, die Dichte ρ_3 hinter der Stossfront. ρ_2 und ρ_3 brauchen nicht übereinzustimmen, sondern geben durch ihren Quotienten die Stärke der Kontaktfront an.

Eine wichtige Frage ist nun die nach der Vollständigkeit der gefundenen Lösungen, d.h. die Frage, ob sich für alle vernünftigen äusseren Bedingungen eine Lösung der obigen Art angeben lässt. Auf ihre Beantwortung zielen die folgenden Untersuchungen.

Es sei der Zustand 1 auf V_{\leftarrow} , ausserdem P fest vorgegeben. Alle Punkte 2, die (25) und (26) erfüllen, liegen dann auf der Geraden

$$p = p_1 + \gamma \rho_1 v_1^2 + \gamma P - \gamma \rho_1 v_1 v \quad , \quad (33)$$

die mit der Neigung $-\gamma \varrho_1 v_1$ nach rechts abfällt. Um zu dem vorgegebenen P eine Lösung zu bekommen, muss 2 in den Schnittpunkt von (33) mit S_{\rightarrow} gelegt werden. Aus dessen Koordinaten und aus (27) erhält man dann das zur Lösung gehörige W . Je grösser P , umso höher liegt die Gerade (33) und umso weiter rechts ihr Schnittpunkt mit S_{\rightarrow} . Lässt man bei festem P den Punkt 1 auf V_{\leftarrow} variieren, so wird in Anhang I folgendes bewiesen: es rutscht 2 auf S_{\rightarrow} von rechts nach links, wenn 1 auf V_{\leftarrow} von 0 aus nach rechts rutscht. Dabei nimmt W monoton ab.

Zu jedem P bekommt man so eine Reihe von Lösungen, die sich in W unterscheiden. Fällt 1 mit 0 zusammen, so ist W am grössten. Bei variablem P erhält man für diese Situation in Fig. 5 die Kurve W_{\max} .

Nun geht mit $1 \rightarrow 0$ der Massenfluss $\varrho_1 v_1$ in der Wechselwirkungszone gegen Null, d.h. die gesamte Energieeinkopplung erfolgt schliesslich auf eine verschwindend kleine Masse, die spezifische Energieübertragung $W/\varrho_1 v_1$ (= zugeführte Energie/durchgeströmte

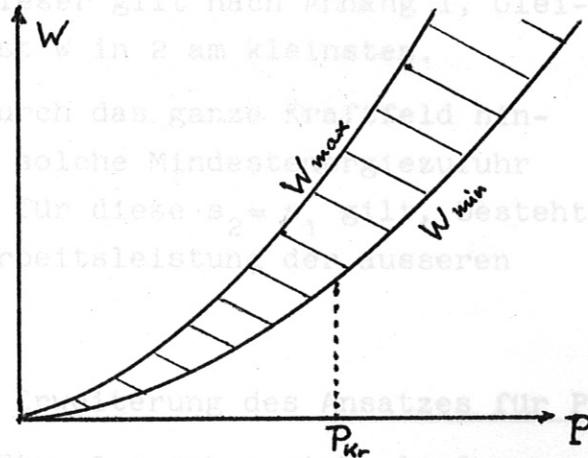


Fig. 5

Masse) geht gegen Unendlich. Daher liegen alle vernünftigen Werte von W unterhalb der Kurve W_{\max} von Fig. 5.

Dort gibt es zu jedem P nur für ein bestimmtes W -Intervall Lösungen, ganz ähnlich grenzt dann eine Kurve W_{\min} das Existenzgebiet nach unten ab. Bei deren Diskussion bringt die Bedingung (15) eine gewisse Komplikation mit sich. Zunächst folgt aus der in Anhang I bewiesenen Beziehung $\left. \frac{dW}{dv_1} \right|_P < 0$, dass v_1 für $W = W_{\min}$ möglichst gross ist. Nun kann v_1 bei gegebenem P aber nicht jeden beliebigen Wert unterhalb von $v_1 = \frac{2}{(\gamma + 1)}$ annehmen, denn wegen $\left. \frac{dv_2}{dv_1} \right|_P < 0$ rückt der Punkt 2 mit wachsendem v_1 auf S_{\rightarrow} nach links gegen die mit dem Punkt 1 wandernde Grenzkurve $s = s_1$, und 1 muss stehen bleiben, sobald $s_2 = s_1$ wird. Da andererseits 2 bei fester Lage von 1 mit

wachsendem P nach rechts rückt, ist das zu $W = W_{min}$ gehörige v_1 umso grösser, je grösser P ist. Ab einem gewissen P_{kr} liegt es bei $v_1 = \frac{2}{\gamma+1}$ am Ende der Kurve V_{\leftarrow} , wobei dann $s_2 = s_1$ für $P = P_{kr}$ und $s_2 > s_1$ für $P > P_{kr}$ gilt.

Für fest gegebenes $P \leq P_{kr}$ kann jetzt gezeigt werden, dass W_{min} tatsächlich die kleinste Energieeinkopplung darstellt, die in einer stationären Strömung mit dem zu W_{min} gehörigen Anfangszustand 1 bei Einwirkung dieses P überhaupt möglich ist. 1 liegt nach dem Obigen so, dass der zur Lösung führende Zustand 2 im Schnittpunkt von $s = s_1$ mit S_{\rightarrow} liegt. Alle Zustände, die ohne Rücksicht auf das Zustandekommen einer Lösung von diesem 1 aus überhaupt mit P erreichbar sind, liegen auf der durch 2 gehenden Geraden (33), und zwar wegen (15) rechts von 2. Auf dieser gilt nach Anhang I, Gleichung (6*) : $\frac{dW}{dv} > 0$, daher ist W in 2 am kleinsten.

Weil sich jedes Gaselement durch das ganze Kraftfeld hindurch bewegen muss, ist eine solche Mindestenergiezufuhr übrigens zu erwarten, und da für diese $s_2 = s_1$ gilt, besteht sie nach Abschn. 3 nur aus Arbeitsleistung der äusseren Kräfte.

Erweiterung des Ansatzes für $P > P_{kr}$

Die Kurven W_{min} und W_{max} in Fig. 5 ergaben sich als Grenzen des Existenzgebiets von Lösungen. In diesem sind für $P \leq P_{kr}$ alle sinnvollen Bedingungen (Parameter P, W) enthalten. Ist jedoch $P > P_{kr}$, so lassen sich Bedingungen angeben, unter denen der bisherige Ansatz nicht mehr zum Ziel führt.

Nach dem Vorhergehenden wird mit $P > P_{kr}$ für alle Lösungen $s_2 > s_1$, auch dann, wenn 1 ganz rechts bei $v_1 = \frac{2}{\gamma+1}$ liegt. Die in einem Übergang $1 \rightarrow 2$ zugeführte Wärme ist $\int_1^2 T ds$ und hängt noch vom Wege ab, auf dem der Übergang erfolgt. Da aber jeder zu einem Punkt von S_{\rightarrow} führende Weg in dem schraffierten Gebiet von Fig. 4 verlaufen muss (alle Punkte des Weges müssen auf derselben Seite der Geraden $p = \xi_1 v_1 v$ liegen wie 1 und 2, Ausnahme bei stehendem Stoss s.u.), kann T nicht Null werden ($T \sim p/\xi = pv/\xi_1 v_1$), sodass mit $ds \geq 0$ und $s_2 - s_1 > 0$ auch $\int_1^2 T ds > 0$ wird. Für $P > P_{kr}$ sind also alle bisher gefundene

an $p = \rho_1 v_1^2$ hervorgeht. (Näheres s. Abschn. 5A und Anhang III) Da $1'^*$ für alle zulässigen $1'$ i.A. unterhalb von S_2 liegt (Ausnahme für γ nahe 1, s.u.), kommt eine Lösung erst dadurch zustande, dass durch weitere äussere Einwirkungen von $1'^*$ aus ein Zustand 2 auf S_2 erreicht wird, und das heisst, dass bei den Lösungen mit stehender Stossfront diese inmit- ten der Zone WW stehen muss.

Vollständigkeit des erweiterten Ansatzes

Die Erweiterung des Ansatzes wurde dadurch notwendig, dass sich für $P > P_{kr}$ und geringe oder verschwindende Wärmezufuhr keine Lösungen mehr angeben liessen. Bei den neuhinzuge- fundenen Lösungen ist die Entropiezunahme $s_2 - s_1$ teilweise oder ganz auf den Stossübergang $1' \rightarrow 1'^*$ zurückzuführen, so- daß für die Wärmezufuhr nur noch der Anteil $s_2 - s_1' + s_1' - s_1$ massgeblich ist. Liegt jetzt $1'$ auf $s = s_1$ und 2 auf $s = s_1'^*$, so hat man die früher vermisste Lösung vor sich, bei der über- haupt keine Wärme zugeführt wird. Liegen $1'$ und 2 mehr oder weniger weit über den genannten Isentropen, so bekommt man Lösungen mit mehr oder weniger Wärmezufuhr. Rücken 1 , $1'$ und $1'^*$ in einen Punkt zusammen, so kommt man auf die früheren stössfreien Lösungen zurück. Der Vollständigkeit halber wird noch eine zweite Möglichkeit für einen wärmezufuhrfreien Übergang $1 \rightarrow 2$ mit $s_2 > s_1$ genannt, der allerdings einen sehr speziellen Feldverlauf voraussetzt: ausgehend vom Zustand 1 wird das Gas zunächst bis $T = 0$ adiabatisch expandiert - da- bei gilt $s = s_1$. Anschliessend kann seine Entropie mit ver- schwindender Wärmezufuhr auf s_2 angehoben werden, worauf es längs $s = s_2$ bis an die Gerade $p = \rho_1 v_1^2$ heran adiabatisch komprimiert wird. Diese wird in einem unendlich schwachen Stoss überwunden, schliesslich wird durch weitere adiabati- sche Kompression der Zustand 2 erreicht.

Es interessiert noch, wo die Lösungen mit stehenden Stossfron- ten in dem P-W-Diagramm der Fig. 5 einzuordnen sind. Dazu muss z.B. P durch Summation aus den beiden Teilübergängen $1 \rightarrow 1'$ und $1'^* \rightarrow 2$ berechnet werden. Analog zu (26) gilt

$$P = \rho_2 v_2^2 + \frac{1}{\gamma} p_2 - \left(\rho_1'^* v_1'^*{}^2 + \frac{1}{\gamma} p_1'^* \right) + \rho_1' v_1'^2 + \frac{1}{\gamma} p_1' - \left(\rho_1 v_1^2 + \frac{1}{\gamma} p_1 \right).$$

Auf Grund der für den Übergang $1' \rightarrow 1^*$ gültigen Beziehungen (3) - umgeschrieben auf dimensionslose Variablen - heben sich die beiden Mittelterme heraus, und man erhält dieselben Werte P und analog dieselben Werte W , wie sie sich für die stossfreien Lösungen mit $v_1 = 2/(\gamma + 1)$ ergeben hatten. Daher erfolgt die Einordnung auf den unteren Rand des schon früher erhaltenen Existenzgebiets rechts von P_{kr} .

Zur Entstehung der stehenden Stösse

Nachdem sich Strömungen mit einer zusätzlichen stehenden Stossfront als Lösungen erwiesen haben, möchte man die Ursachen zur Entstehung dieser Stossfront in ähnlicher Weise verstehen, wie das bei den beiden laufenden Wellen $S \rightarrow$ und $V \leftarrow$ möglich war. Dies soll jetzt für den Fall verschwindender Wärmezufuhr versucht werden, wobei sich einige unabweisbare, wenn auch plausible Annahmen nicht umgehen lassen.

Für $P \leq P_{kr}$ ist bei den Lösungen ohne Wärmezufuhr v_1 so gross wie möglich, d.h. die Verdünnungswelle $V \leftarrow$ so stark wie möglich, und mit $P = P_{kr}$ und $v_1 = 2/(\gamma + 1)$ wird die stärkste Verdünnungswelle erreicht, die mit einer stationären Strömung im Wechselwirkungsgebiet überhaupt verträglich ist. Hieran schliesst sich eine erste Hypothese: wird P über P_{kr} hinausgesteigert, so soll zunächst eine noch stärkere Verdünnungswelle ausgebildet werden. Diese Hypothese hat zur Folge, dass das Gas in die Wechselwirkungszone jetzt mit Überschallgeschwindigkeit einströmt. Mit der Zeit geht die Einströmgeschwindigkeit jedoch gegen die Schallgeschwindigkeit und wird konstant, da am Einströmort x_1 allmählich alle Überschallzustände vorbeiwandern. Man erkennt dies am besten daran, dass die die Überschallzustände transportierenden Charakteristiken einer Verdünnungswelle schliesslich alle von den Geraden $x = \text{const}$ geschnitten werden (Fig. 7). Mit der Entwicklung zeitkonstanter Einströmbedingungen kann sich dann in der Wechselwirkungszone eine stationäre Strömung ausbilden,

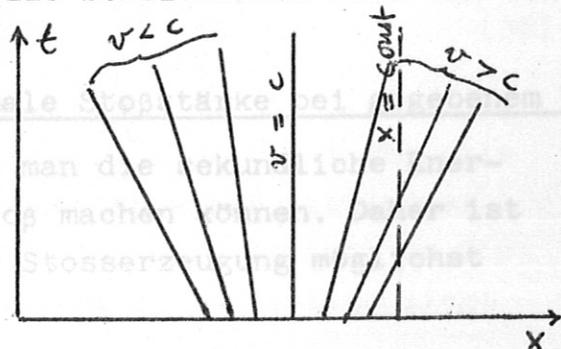


Fig. 7

und zwar muss auch dies eine Überschallströmung sein, da v_1 , wenn auch schliesslich unendlich wenig, so doch über der Schallgeschwindigkeit c_1 liegt.

Der Durchgang durch P_{kr} bewirkt also den Übergang von Unter- zu Überschallströmungen, und das bringt eine einschneidende Änderung des Strömungsverhaltens mit sich. Während in stationären Unterschallströmungen ohne Wärmezufuhr durch Einwirkung von $P > 0$ des Gasdruck angehoben wird ($p_2 > p_1$), wird er in Überschallströmungen weiter abgesenkt ($p_1 < p_2$, Beweis in Anhang II). Insbesondere gilt dies für $P > P_{kr}$.

Nimmt man jetzt an, dass diese Tendenz der Überschallströmung auch schon besteht, bevor sie stationär geworden ist, und das ist eine zweite Hypothese, so muss man auf die Ausbildung eines Druckgefälles zwischen dem Hinterland der Stosswelle $S \rightarrow$ und der Zone WW schliessen ($p_3 > p_1 > p_2$). Dieses Druckgefälle lässt eine Kompressionswelle entstehen (Abschn.1), die sich zur Stosswelle aufstellt und nach links in die Wechselwirkungszone hineinläuft. Wie die Lösbarkeit des entsprechenden Ansatzes beweist, findet sie dort die Bedingungen zu einem stationären Aufenthalt.

Man wird fragen, ob diese zweite Stosswelle unbedingt in der Wechselwirkungszone stehen muss, denn sie könnte im Prinzip auch von der Strömung hinter $S \rightarrow$ hergespült werden. Da sie dann relativ zur Strömung in der umgekehrten Richtung laufen würde, käme sie mit $S \rightarrow$ nie zur Wechselwirkung. Ein diesbezüglicher Ansatz ist jedoch nur für sehr nahe bei 1 liegende Werte von γ lösbar und soll hier nicht weiter untersucht werden.

B. EINZELFRAGEN

Maximale Stoßstärke bei gegebenem W

Bei praktischen Anwendungen wird man die sekundliche Energieeinkopplung nicht beliebig groß machen können. Daher ist zu überlegen, wie sie bezgl. der Stosserzeugung möglichst

effektiv genutzt werden kann, d.h. es interessiert die maximale Stoßstärke, die sich mit gegebenem W erzielen lässt.

Die Menge aller zu einem bestimmten W gehörigen Lösungen ergibt sich, wenn 1 die Kurve V_{\leftarrow} durchläuft und zu jeder Lage von 1 der zugehörige Punkt 2 auf S_{\rightarrow} bestimmt wird. Gesucht ist dann diejenige Lösung, bei der v_2 am grössten ist. Hierzu wird ganz ähnlich vorgegangen wie im Anhang I, wo das Verhalten der zu konstantem P gehörigen Lösungen untersucht wurde.

Der Zusammenhang zwischen 1 und 2 ist nach (25) und (27)

$$\frac{1}{\gamma-1} p_2 v_2 + \rho_1 v_1 \frac{v_2^2}{2} = \frac{1}{\gamma-1} p_1 v_1 + \rho_1 v_1 \frac{v_1^2}{2} + W \quad (34)$$

p_1 und ρ_1 genügen den Gleichungen (19) und (20), p_2 ist eine Funktion von v_2 mit $\frac{dp_2}{dv_2} > 0$ (Gl. (30) mit Index 2). Differenziert man zur Bestimmung der maximalen Stoßstärke (34) unter Konstanthaltung von W nach v_1 , so erhält man nach einigen Umformungen

$$A \frac{dv_2}{dv_1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} v_1\right)^{\frac{3-\gamma}{\gamma-1}} \left(1 - \frac{\gamma+1}{2} v_1\right) \left(\frac{2}{\gamma-1} - 4v_1 + \frac{3\gamma-1}{2} v_1^2 - v_2^2\right) \quad (35)$$

mit

$$A = \frac{v_2}{\gamma-1} \frac{dp_2}{dv_2} + \frac{p_2}{\gamma-1} + \rho_1 v_1 v_2$$

Wegen $v_2 \geq 0$, $dp_2/dv_2 > 0$, $\rho_1 v_1 v_2 \geq 0$ und $p_2/(\gamma-1) \geq 1/(\gamma-1) > 0$

gilt $A > 0$, und sowohl das Vorzeichen wie die Nullstellen von $\frac{dv_2}{dv_1}$ sind durch die rechte Seite der Gleichung (35) bestimmt. Dort ist die erste Klammer wegen $v_1 \leq \frac{2}{\gamma+1}$ stets positiv, dasselbe gilt bis auf eine Nullstelle bei $v_1 = \frac{2}{\gamma+1}$ für die zweite, während die dritte für

$$v_2 = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} - 4v_1 + \frac{3\gamma-1}{2} v_1^2} \quad (36)$$

verschwindet. v_2 bekommt also bei Variation von 1 für alle diejenigen W ein Extremum, bei denen an einer Stelle des Intervalls $0 \leq v_1 \leq \frac{2}{\gamma+1}$ Gleichung (36) erfüllt ist. An dieser Stelle liegt dann auch das Extremum. Zusätzlich liegt

für sämtliche W ein Extremum an der Stelle $v_1 = \frac{2}{\gamma+1}$.

Um die Art der zuerst genannten Extrema zu bestimmen, wird $\frac{dv_2}{dv_1} = 0$ und (36) in die Ableitung von Gleichung (35) eingesetzt. Das Ergebnis ist

$$A \frac{d^2 v_2}{dv_1^2} = \frac{3\gamma-1}{2} \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} v_1\right)^{\frac{3-\gamma}{\gamma-1}} \left(1 - \frac{\gamma+1}{2} v_1\right) \left(v_1 - \frac{4}{3\gamma-1}\right),$$

für $v_1 < \frac{2}{\gamma+1}$ ist $\frac{d^2 v_2}{dv_1^2} < 0$, daher handelt es sich um Maxima.

Alle Werte W , für die ein solches Maximum existiert, erhält man durch Einsetzen von (36) in (34) als Funktion von demjenigen v_1 , bei dem v_2 maximal wird. Die hierdurch definierte Funktion $\tilde{W}(v_1)$ ist monoton fallend. Zum Beweis wird die oben durchgeführte Differentiation von (34) wiederholt, diesmal jedoch mit variablem $W = \tilde{W}(v_1)$ und unter Berücksichtigung von (36). Zunächst erhält man statt (35)

$$A \frac{dv_2}{dv_1} = \frac{d\tilde{W}}{dv_1}.$$

Setzt man darin nach (36)

$$\frac{dv_2}{dv_1} = \frac{(3\gamma-1)v_1 - 4}{2v_2}$$

ein, so folgt

$$\frac{d\tilde{W}}{dv_1} = \frac{(3\gamma-1)A}{2v_2} \left(v_1 - \frac{4}{3\gamma-1}\right),$$

und für alle $v_1 < \frac{2}{\gamma+1} < \frac{4}{3\gamma-1}$ folgt wie behauptet $\frac{d\tilde{W}}{dv_1} < 0$.

Als bisheriges Ergebnis lässt sich festhalten: für alle W aus dem Intervall $\left[\tilde{W}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right), \tilde{W}(0)\right]$ hat die Stoßstärke an einer Stelle v_1 zwischen 0 und $\frac{2}{\gamma+1}$ ein Maximum. Da im offenen Intervall $(0, 2/(\gamma+1))$ kein weiterer Extremwert liegt, ist das Maximum auch Supremum.

Im Folgenden sei $v_1 = 0$ vorausgesetzt. Ist dann $W = \tilde{W}(0)$, so gilt nach (36) $v_2 = \sqrt{2/(\gamma-1)}$. Da nach (34) $p_2 v_2$ und daher auch v_2 mit W zunimmt, gilt für alle $W > \tilde{W}(0)$ die Beziehung $v_2 > \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}$ und daher nach (35)

$$A \frac{dv_2}{dv_1} \Big|_{v_1=0} < 0,$$

d.h. für alle $W > \tilde{W}(0)$ nimmt die Stoßstärke bei $v_1 = 0$ ab.

Da für $W > \tilde{W}(0)$ aber vor $v_1 = 2/(\gamma + 1)$ kein Extremum liegen kann, tut sie das auch für alle übrigen $v_1 < \frac{2}{\gamma + 1}$ und ist daher am grössten bei $v_1 = 0$.

Umgekehrt ist die Stoßstärke für alle $W < \tilde{W}(0)$ bei $v_1 = 0$ im Zunehmen begriffen, und da insbesondere für $W < \tilde{W}(\frac{2}{\gamma + 1}) < \tilde{W}(0)$ vor $v_1 = \frac{2}{\gamma + 1}$ wieder kein Extremum liegen kann, ist sie jetzt am grössten für das grösstmögliche v_1 . Dieses maximale v_1 liegt für sehr kleine W wegen der Bedingung (15) nahe bei $v_1 = 0$ und wächst monoton mit W , erreicht aber $v_1 = \frac{2}{\gamma + 1}$ schon mit einem $W < \tilde{W}(\frac{2}{\gamma + 1})$, da für $W = \tilde{W}(\frac{2}{\gamma + 1})$ mit $v_1 = \frac{2}{\gamma + 1}$ und dem aus (26) folgende $v_2 = \frac{2}{\gamma + 1} \cdot \sqrt{\frac{3-\gamma}{\gamma-1}}$ wegen $v_2 > v_1$ die Bedingung (15) längst erfüllt ist.

Die oben benutzten Grenzen $\tilde{W}(\frac{2}{\gamma + 1})$ und $\tilde{W}(0)$ liessen sich natürlich aus (34) und (36) berechnen, es ist jedoch nützlicher, stattdessen die mit ihnen erreichbaren maximalen Stoßstärken anzugeben. Diese folgen aus den maximalen Geschwindigkeiten $v_2 = \frac{2}{\gamma + 1} \cdot \sqrt{\frac{3-\gamma}{\gamma-1}}$ und $v_2 = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}$ mit (29) aus Gleichung (22) und werden für $\gamma = 5/3$: $M \approx 1,9$ und $M \approx 2,7$.

Es soll noch untersucht werden, welche Bedeutung die Lage des Punktes 1 hat. Kleines v_1 heisst schwache, grosses v_1 starke Verdünnungswelle. Nach Anhang I ist W bei konstantem P umso kleiner, je grösser v_1 ist, andererseits wächst bei konstantem v_1 P mit W . Daher wird P bei konstantem W umso grösser, je grösser v_1 ist.

Zusammenfassend kann das folgende Ergebnis formuliert werden: Für kleine W ergibt sich der stärkste Stoss mit der grössten Krafteinwirkung und bei möglichst starker Verdünnungswelle. Dies gilt, bis als maximale Stoßstärke (bei $\gamma = 5/3$) $M \approx 1,9$ erreicht wird, dann verschieben sich die optimalen Verhältnisse zu geringerer Krafteinwirkung und schwächerer Verdünnungswelle. Liegt die maximale Machzahl über $M \approx 2,7$ (bei $\gamma = 5/3$), so wird sie mit der geringsten Krafteinwirkung und möglichst schwacher Verdünnungswelle erzielt.

Näherung für starken Stoss

Für den Fall hinreichend grosser Energie- und Krafteinkopplung lassen sich die Lösungen von Problem 1 näherungsweise

analytisch berechnen.

Analog bekommt man statt (40)
Ausgangspunkt sei die Voraussetzung $M \geq \sqrt{10}$ für starken Stoss [1]. Unter ihr darf man statt (21) und (22) die Gleichungen

wenn die ursprüngliche Voraussetzung $M \geq \sqrt{10}$ und die aus der Vernachlässigung des ersten und dritten Terms von (37) folgenden Bedingungen

$$p_3 = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M^2 \quad (37)$$

$$v_3 = \frac{2}{\gamma+1} M \quad (38)$$

benutzen, wobei man im ungünstigsten Fall ($M = \sqrt{10}$) einen Fehler von ca. 10% begeht. Mit (37), (38), (28), (29) und (25) erhält man aus (26) und (27)

erfüllt sind. Im Falle $\gamma = 5/3$ gilt wieder $\sqrt{10} > M^{**} > M^*$, und die ursprüngliche Voraussetzung $M \geq \sqrt{10}$ lässt sich mithilfe von (39) und (40) automatisch erfüllen.

$$\frac{2}{\gamma+1} M^2 + \frac{2\beta_1 v_1}{\gamma+1} M - \left(\beta_1 v_1^2 + \frac{1}{\gamma} p_1 \right) = P \quad (39)$$

Die ursprüngliche Voraussetzung $M \geq \sqrt{10}$ lässt sich mithilfe von (39) und (40) automatisch erfüllen.

$$\frac{4\gamma}{(\gamma-1)(\gamma+1)^2} M^3 + \frac{2\beta_1 v_1}{(\gamma+1)^2} M^2 - \left(\frac{1}{\gamma-1} p_1 v_1 + \beta_1 v_1 \frac{v_1^2}{2} \right) = W \quad (40)$$

Bei hinreichend grossem M können links in beiden Gleichungen der zweite und dritte Term gegen den ersten vernachlässigt werden. Dabei sollen die vernachlässigten Terme im ungünstigsten Fall nicht mehr als 10% des ersten betragen, und um die dafür zuständigen Bedingungen zu gewinnen, werden in beiden Gleichungen die mit 1 indizierten Grössen durch ihr Maximum abgeschätzt. (Dies geschieht in der üblichen Weise durch Nullsetzen der Ableitungen nach v_1). Wegen $\beta_1 v_1 \leq \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}$ kann dann der zweite Term in (39) für

$$M \geq 10 \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} = M^*$$

vernachlässigt werden, wegen $\beta_1 v_1^2 + \frac{1}{\gamma} p_1 \leq \frac{\gamma+1}{\gamma} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}$ der dritte für

$$M \geq \sqrt{10} \frac{\gamma+1}{\gamma} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} = M^{**}$$

Im Falle $\gamma = 5/3$ ist $\sqrt{10} > M^{**} > M^*$, daher können unter der ursprünglichen Voraussetzung $M \geq \sqrt{10}$ beide Terme vernachlässigt werden, und aus (39) wird

Gleichung (43) bringt einige wichtige Konsequenzen für die praktische Anwendung mit näheren Untersuchungen auf Dimensionsgrössen zurückgegangen, die hier durch Überstreichen von den normierten Grössen unterschieden werden sollen.

$$M = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2} P} \quad (41)$$

Analog bekommt man statt (40)

$$M = \sqrt[3]{\frac{(\gamma-1)(\gamma+1)^2}{4\gamma}} W, \quad (42)$$

wenn die ursprüngliche Voraussetzung $M \geq \sqrt{10}$ und die aus der Vernachlässigung des zweiten und dritten Terms von (40) folgenden Bedingungen

$$M \geq 10 \frac{\gamma-1}{2\gamma} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} = M^+$$

und

$$M \geq \frac{\gamma+1}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{10}{\gamma} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{(3\gamma-1)/(\gamma-1)}} = M^{++} \quad (45)$$

erfüllt sind. Im Falle $\gamma = 5/3$ gilt wieder $\sqrt{10} > M^{++} > M^+$, und beide Bedingungen sind mit $M \geq \sqrt{10}$ automatisch erfüllt.

Die ursprüngliche Voraussetzung $M \geq \sqrt{10}$ lässt sich mithilfe von (41) und (42) in Voraussetzungen bezgl. P und W umformulieren. Für $\gamma = 5/3$ lauten diese $P \geq 7,5$ und $W \geq 44$.

P und W werden bei Gültigkeit von (41) und (42) voneinander abhängig, zwischen ihnen gilt die Beziehung

$$P = \sqrt[3]{\frac{(\gamma+1)(\gamma-1)^2}{2\gamma^2}} \cdot W^{2/3} \quad (43)$$

Aus dieser ergibt sich die folgende Ergänzung zu dem oben behandelten Problem der maximalen Stoßstärke: Ist ein hinreichend grosses W fest gegeben, so lässt sich P nur innerhalb eines sehr engen Intervalls variieren, das durch den Fehler der Näherung (43) bedingt ist. Dabei bewegt sich auch die Stoßstärke nur innerhalb sehr enger Grenzen um den Wert (41), und nur die Verdünnungswelle V_* durchläuft alle zulässigen Stärken. Damit wird also für grosse W das Problem der optimalen Machzahl uninteressant.

Anwendungen

Gleichung (43) bringt einige wichtige Konsequenzen für die praktische Anwendung mit sich. Zur näheren Untersuchung wird auf Dimensionsgrößen zurückgegangen, die hier durch Überstreichen von den normierten Größen unterschieden werden sollen.

Mit $\bar{P} = \gamma \bar{p}_0 P$, $\bar{W} = \bar{\zeta}_0 \bar{c}_0^3 W$ und $\bar{c}_0^2 = \gamma \bar{p}_0 / \bar{\zeta}_0$ lautet (43)

$$\bar{P} = \sqrt[3]{\frac{(\gamma+1)(\gamma-1)^2}{2\gamma^2} \bar{\zeta}_0} \cdot \bar{W}^{2/3} \quad (44)$$

Im Kraftfeld $\bar{k} = j\bar{B}$ lässt sich \bar{P} durch \bar{B} und den Gesamtstrom $\bar{J} = \bar{h} \int_1^2 \bar{j}(x) dx$ ausdrücken (\bar{h} = Elektrodenhöhe), wenn ein konstantes Magnetfeld angelegt und das Feld der Ströme vernachlässigt wird. \bar{B} kann dann nämlich in (13) vor das Integral gezogen werden, und es gilt

$$\bar{P} = \frac{\bar{B} \bar{J}}{\bar{h}} \quad (45)$$

Ähnlich folgt mit $\bar{w} = j\bar{E}$ aus (14)

$$\bar{W} = \frac{\bar{E} \bar{J}}{\bar{h}} = \frac{\bar{U} \bar{J}}{\bar{a} \bar{h}} \quad (46)$$

(\bar{a} = Elektrodenabstand, $\bar{U} = \bar{E} \bar{a}$ = Elektrodenspannung).

Liegt im Aussenkreis eine Batterie mit der Leerlaufspannung \bar{U}_B und dem Innenwiderstand \bar{R}_B , so besteht zwischen \bar{U} und \bar{J} der Zusammenhang

$$\bar{U}_B - \bar{U} = \bar{R}_B \bar{J} \quad (48)$$

und aus (46) wird

$$\bar{W} = \frac{\bar{U}_B \bar{J} - \bar{R}_B \bar{J}^2}{\bar{a} \bar{h}} \quad (47)$$

Setzt man jetzt (45) und (47) in (44) ein, so bekommt man bei gegebenem \bar{B} eine Gleichung für den Gesamtstrom. Ihre Lösung ist durch den Schnittpunkt der beiden Kurven

Dieses etwas überraschende Verhalten der Stosstärke hängt damit zusammen, dass \bar{B} über den Strömungsverlauf auch den Gesamtwiderstand des Kreises beeinflusst. Ist dieser gegeben, so wird mit der grössten Leistungsübertragung die höchste Stosstärke erreicht (Fig. 8). $f(\bar{J})$ ist eine Gerade mit der Steigung $\frac{\bar{B}}{\bar{h}}$.

$$f(\bar{J}) = \frac{\bar{B} \bar{J}}{\bar{h}}$$

$$g(\bar{J}) = \sqrt[3]{\frac{(\gamma+1)(\gamma-1)^2}{2\gamma^2} \bar{\zeta}_0} \left(\frac{\bar{U}_B \bar{J} - \bar{R}_B \bar{J}^2}{\bar{a} \bar{h}} \right)^{2/3}$$

bestimmt (Fig. 8). $f(\bar{J})$ ist eine Gerade mit der Steigung $\frac{\bar{B}}{\bar{h}}$.

$g(\bar{J})$ hat die beiden Nullstellen $\bar{J} = 0$ und $\bar{J} = \bar{U}_B / \bar{R}_B$, dazwischen liegt bei $\bar{J} = \bar{U}_B / 2\bar{R}_B$ ein Maximum. Da (44) nur für hinreichend grosse \bar{W} gültig ist, sind von der folgenden Betrachtung die Umgebungen der beiden Nullstellen auszuschliessen.

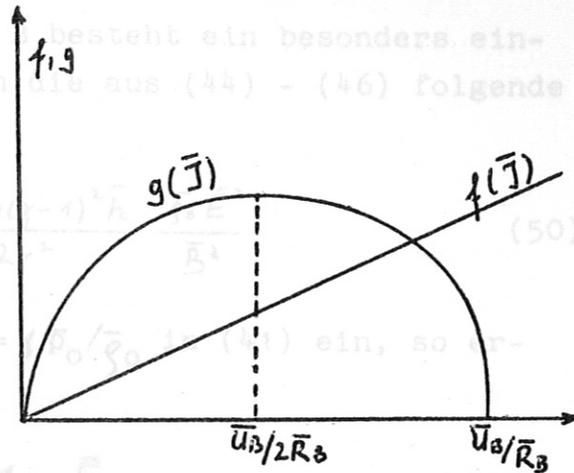


Fig. 8

Lässt man nun, ausgehend von kleinen Werten, \bar{B} immer grösser werden, so rutscht mit wachsender Geradensteigung der untersuchte Schnittpunkt von rechts nach links. Dabei ändert sich die Stosstärke M proportional zu \sqrt{f} , da nach (47) $f \sim \bar{W}^{2/3}$ und nach (42) $M \sim \bar{W}^{1/3}$ ist. Man bekommt so das folgende Ergebnis:

Die Stosstärke lässt sich durch Steigerung des Magnetfeldes nicht beliebig vergrössern, vielmehr wird sie nach Durchgang durch ein Maximum mit wachsendem \bar{B} immer kleiner. Das Maximum wird für $\bar{J} = \bar{U}_B / 2\bar{R}_B$ erreicht und ist mit (42), $W = \bar{W} / \bar{\rho}_0 \bar{c}_0^3$ und (47)

$$M_{max} = \sqrt[3]{\frac{(\gamma+1)^2 (\gamma-1)}{4\gamma} \frac{\bar{U}_B^2}{\bar{\rho}_0 \bar{c}_0 \bar{R}_B}} \quad (48)$$

Die dazu benötigte optimale Feldstärke beträgt nach (44), (45) und (47)

$$\bar{B}_{opt} = \sqrt[3]{\frac{(\gamma+1)(\gamma-1)^2 \bar{h}}{4\gamma^2 \bar{a}^2} \bar{\rho}_0 \bar{R}_B \bar{U}_B} \quad (49)$$

Dieses etwas überraschende Verhalten der Stosstärke hängt damit zusammen, dass \bar{B} über den Strömungsverlauf auch den Gesamtwiderstand der Wechselwirkungszone beeinflusst. Ist dieser gleich dem Innenwiderstand der Batterie, so wird mit der grössten Leistungsübertragung die höchste Stosstärke erzielt, und das ist eben nur für einen ganz bestimmten Wert von \bar{B} der Fall.

Zwischen den Grössen M , \bar{E} und \bar{B} besteht ein besonders einfacher Zusammenhang. Setzt man die aus (44) - (46) folgende Beziehung

$$\bar{j} = \frac{(\gamma+1)(\gamma-1)^2 \bar{h}}{2\gamma^2} \frac{\bar{g}_0 \bar{E}^2}{\bar{B}^2} \quad (50)$$

über (45), $P = \bar{P} / \gamma \bar{p}_0$ und $\bar{c}_0^2 = \gamma \bar{p}_0 / \bar{g}_0$ in (41) ein, so ergibt sich

$$M = \frac{\gamma^2 - 1}{2\gamma} \frac{\bar{E}}{\bar{c}_0 \bar{B}} \quad (51)$$

5. WECHSELWIRKUNG VON STOSSWELLEN ELEKTROMAGNETISCHEN FELDERN

Es ist bemerkenswert, dass M nur von der Intensität der Felder, nicht aber von ihrer Ausdehnung in \bar{x} -Richtung abhängt. Würde man bei gegebener Batterie und gegebener Feldstärke \bar{B} die Länge der Wechselwirkungszone z.B. verdoppeln, so blieben M und \bar{j} unverändert. Damit ist jedoch nicht behauptet, dass solche Eingriffe keinen Einfluss auf die Strömung haben, denn über die Verdünnungswelle wurde ja noch nichts gesagt. Da sich bei einer Verlängerung der Wechselwirkungszone der Strom \bar{j} auf eine grössere Fläche verteilen muss, sinkt die Stromdichte \bar{j} , und bei gleichen Feldstärken \bar{E} und \bar{B} muss daher die Leitfähigkeit niedriger sein. Dies wird durch eine stärkere Verdünnungswelle besorgt, die mit einer stärkeren Abkühlung des Gases dessen Leitfähigkeit herabsetzt. Ganz ähnlich ist übrigens auch zu erklären, dass in (51) \bar{j} nicht explizit enthalten ist.

Zur Interpretation der Näherungsergebnisse

$M \gtrsim \sqrt{10}$ war die Voraussetzung zu den obigen Näherungsrechnungen. Wenn diese Voraussetzung erfüllt ist, gilt z.B. Gleichung (51) und damit

$$\frac{\gamma^2 - 1}{2\gamma} \frac{\bar{E}}{\bar{c}_0 \bar{B}} \gtrsim \sqrt{10}$$

Sind bei einem Experiment \bar{E} , \bar{c}_0 und \bar{B} so vorgegeben, dass diese Ungleichung erfüllt ist, so folgt daraus aber nicht umgekehrt die Gültigkeit von (51). Sollte (51) jedoch nicht gel-

ten, so muss das Experiment notwendig zu einem $M \lesssim \sqrt{10}$ führen. Es besteht also die folgende Alternative: entweder es wird $M \gtrsim \sqrt{10}$ und dann gilt (51), oder aber es wird $M \lesssim \sqrt{10}$.

Alle übrigen Näherungsergebnisse sind analog zu interpretieren. In diesem Sinn ist die bei Gleichung (48) abgeleitete maximale Stopstärke als eine obere Grenze aufzufassen, die erreicht werden kann, aber nicht erreicht werden muss.

5. WECHSELWIRKUNG VON STOSSWELLEN MIT ELEKTROMAGNETISCHEN FELDERN

Dieser Abschnitt behandelt das zweite der in Abschnitt 2 formulierten Probleme, also den asymptotischen Strömungszustand nach dem Durchgang einer Stosswelle durch eine Wechselwirkungszone. Die Behandlungsmethode ist im Prinzip dieselbe wie für das erste Problem, daher können im Folgenden unter Hinweis auf Abschn. 4 manche Punkte etwas kürzer gefasst werden.

A. GRUNDSATZLICHES

Definitionen

Bei einer Welle W muss man unterscheiden zwischen ihrer Laufrichtung relativ zur Strömung und ihrer Laufrichtung relativ zum Laborsystem. Die erstere wird wie bisher durch einen Pfeil am Fusse des sie symbolisierenden Buchstabens gekennzeichnet: W_{\leftarrow} oder W_{\rightarrow} . Pfeile über dem Buchstaben sollen die Laufrichtung im Labor angeben: \overleftarrow{W} oder \overrightarrow{W} . Bei stehenden Wellen wird ein senkrechter Pfeil benutzt: $\uparrow W$. Verdünnungswellen bekommen zwei obere Pfeile, da ihre beiden Begrenzungen im Labor nach verschiedenen Richtungen auseinander laufen können. So bedeutet z.B. $\uparrow W_{\leftarrow}$ eine Verdünnungswelle, die relativ zur Strömung nach links läuft, deren linke Begrenzung in der Strömung steht und deren rechte Begrenzung stromabwärts gespült wird. Sollen über die Laufrichtung im Labor keine festen Angaben

gemacht werden, so werden die oberen Pfeile weggelassen. S_{\leftarrow} , S_{\rightarrow} und V_{\leftarrow} werden ausserdem als Kurvenbezeichnungen in p - v - Diagrammen benutzt. WW steht als Abkürzung für Wechselwirkungszone.

Fallunterscheidungen

Die primäre Stosswelle soll wie in Fig. 2 nach rechts laufen, in Richtung der positiven x-Achse. Ihr Vorland ruht und befindet sich im Zustand 0.

Vor Beginn der Wechselwirkung wird die primäre Stosswelle mit $S_{O\rightarrow}$ und ihre Machzahl mit M_O bezeichnet. Ihr Hinterland befindet sich im Zustand 1, und zwar auch nach dem Einsetzen der Wechselwirkung noch überall da, wo sich die Wechselwirkung noch nicht durch die Sekundärwelle als Störung bemerkbar gemacht hat.

In dem zu untersuchenden asymptotischen Strömungszustand läuft die Primärwelle mit veränderter Stärke rechts von der Zone WW. Sie wird dort als durchgehende Welle $\vec{S}_{D\rightarrow}$ mit der Machzahl M_D bezeichnet. Hinter ihr schwimmt eine Kontaktfront K.

Die gegen die Strömung laufende resultierende Sekundärwelle wird als reflektierte Welle R_{\leftarrow} bezeichnet. Beide Möglichkeiten $R_{\leftarrow} = S_{\leftarrow}$ und $R_{\leftarrow} = V_{\leftarrow}$ sind zu untersuchen, wobei die Machzahl von Wellen S_{\leftarrow} mit M_R bezeichnet wird.

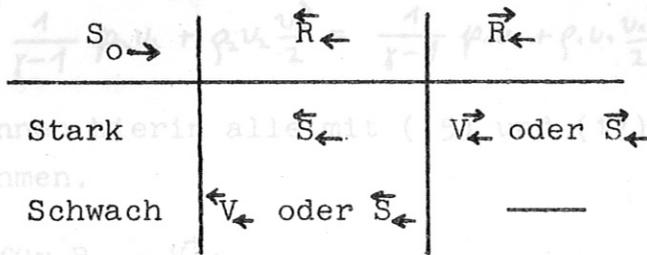
R_{\leftarrow} kann durch eine hinreichend schnelle Strömung von WW aus nach rechts davongetragen werden ($R_{\leftarrow} = \vec{R}_{\leftarrow}$), wobei dann links bis an WW heran der Strömungszustand 1 herrscht. Da R_{\leftarrow} relativ zur Strömung mindestens mit Schallgeschwindigkeit läuft, kann dieser Fall jedoch nur eintreten, wenn rechts von WW und damit wegen (17) auch links von WW eine Überschallströmung vorliegt. Damit aber links von WW (Zustand 1) $v_1/c_1 > 1$ gilt, muss $S_{O\rightarrow}$ eine gewisse Mindeststärke haben. Diese lässt sich aus (4) - (6) ermitteln und ergibt einen etwas umständlichen Ausdruck. Für starken Stoss $S_{O\rightarrow}$ ($M_O \gtrsim 3$ bei $\gamma = 5/3$) kann $1/M_O$ gegen M_O vernachlässigt werden, und aus (4) - (6) folgt mit $v = 0$, $H = 1$, $v_O = 0$ und $c^2 = \gamma p / \rho$

$$\frac{v_1}{c_1} = \sqrt{\frac{2}{\gamma(\gamma-1)}} \quad (52)$$

Hiernach ist mit $\gamma < 2$ für starken Stoss $S_{0 \rightarrow}$ der Fall $v_1/c_1 > 1$ gegeben.

Natürlich gibt es bei starker Primärwelle $S_{0 \rightarrow}$ auch noch die andere Möglichkeit, dass R_{\leftarrow} von WW aus nach links läuft ($R_{\leftarrow} = \vec{R}_{\leftarrow}$). Da R_{\leftarrow} in diesem Fall jedoch gegen die Überschallströmung 1 ankommen muss, kann es sich dabei nur um eine Stosswelle \vec{S}_{\leftarrow} hinreichender Stärke handeln.

Zusammengefasst bestehen die folgenden Möglichkeiten:



Die nächste Aufgabe besteht darin, festzustellen, ob und unter welchen Bedingungen diese verschiedenen Fälle Lösungen sind. Dabei wird sich ähnlich wie beim ersten Problem noch eine gewisse Erweiterung der Möglichkeiten ergeben.

$S_{0 \rightarrow}$ stark, $R_{\leftarrow} = \vec{V}_{\leftarrow}$ oder \vec{S}_{\leftarrow}

Fig. 9 zeigt für den jetzt betrachteten Fall die Aufeinanderfolge der verschiedenen Strömungszonen mit der für sie gewählten Indizierung.

Die zugehörigen Gleichungen sind unter Zugrundelegung der bei Gleichung (18) eingeführten Normierung für den

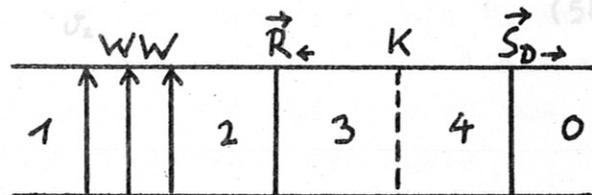


Fig. 9

Zustand 1:

$$p_1 = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_0^2 - 1) \quad (53)$$

(59) - (61) folgen aus (1) und (2) mit $\gamma = 2$, $H = 3$ und (54)

$$v_1 = \frac{2}{\gamma+1} \left(M_0 - \frac{1}{M_0} \right) \quad (54)$$

$$\rho_1 = \frac{(\gamma+1) M_0^2}{2 + (\gamma-1) M_0^2} \quad (55)$$

(53) - (55) beschreiben das Hinterland von $S_{0 \rightarrow}$ und werden analog zu (21) - (23) aus (4) - (6) gewonnen. (62)

Zustand 2:

Zustand 4: Über die Kontaktfront K gilt

$$\rho_2 v_2 = \rho_1 v_1 \quad (25)$$

$$\rho_2 v_2^2 + \frac{1}{\gamma} p_2 = \rho_1 v_1^2 + \frac{1}{\gamma} p_1 + P \quad (26)$$

$$\frac{1}{\gamma-1} \rho_2 v_2 + \rho_2 v_2 \frac{v_2^2}{2} = \frac{1}{\gamma-1} \rho_1 v_1 + \rho_1 v_1 \frac{v_1^2}{2} + W \quad (27)$$

Außerdem ist das Hinterland von $S_{D \rightarrow}$ daher gilt analog P und W können hierin alle mit (15) und (17) verträglichen Werte annehmen.

Zustand 3 für $R_{\leftarrow} = \vec{V}_{\leftarrow}$:

$$\rho_3 = \rho_2 \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{v_1 - v_2}{c_2} \right) \right]^{2\gamma/(\gamma-1)} \quad (56)$$

$$\rho_3 = \rho_2 \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{v_3 - v_2}{c_2} \right) \right]^{2/(\gamma-1)} \quad (57)$$

Alle Zustände, die die Strömung hinter einer in ruhendes (56) und (57) folgen aus (1) und (2) mit $\gamma = 2$ und $H = 3$. Durch die Normierung entsteht keine Veränderung. Da sich über \vec{V}_{\leftarrow} die Strömungsgeschwindigkeit erhöht, tritt zu (56) und (57) die Bedingung

Die Lage von 1 ist $v_3 \geq v_2$ mit der Prähörstärkte M_0 als Parameter des Problems von vornherein gegeben. Alle von 1 aus erreichbaren Zustände 2 liegen wegen (15) und (17) in dem

$$v_3 \geq v_2 \quad (58)$$

Zustand 3 für $R_{\leftarrow} = \vec{S}_{\leftarrow}$:

$$\rho_3 = \rho_2 \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_R^2 - 1) \right] \quad (59)$$

die mit $s = s_1$ identisch ist und unterhalb der mit θ bezeichneten Geraden

$$v_3 = v_2 - \frac{2c_2}{\gamma+1} (M_R - 1/M_R) \quad (60)$$

$$\rho_3 = \rho_2 \frac{(\gamma+1) M_R^2}{2 + (\gamma-1) M_R^2} \quad (61)$$

Die Begründung steht hinsichtlich (32). 1 ist als

(59) - (61) folgen aus (4) - (6) mit $v = 2$, $H = 3$ und $|v_3 - v_2| = v_3 - v_2$. Im Laborsystem hat \vec{S}_\leftarrow die Geschwindigkeit $v_2 - M_R \cdot c_2$, und da diese nicht negativ werden darf, gilt

die Zustände 3 und 4 in Fig. 10 zusammenfallen, und da 4 wieder auf S_3 liegen muss, ist

$$M_R \leq v_2 / c_2 \quad (62)$$

Zustand 4: Über die Kontaktfront K gilt

wenn der auf 1 \rightarrow 2 folgende Übergang 2 \rightarrow 4 einem Punkt auf S_3 führt.

$$p_4 = p_3 \quad (63)$$

$$v_4 = v_3 \quad (64)$$

Bei gegebenem Vorland 2 Ausserdem ist 4 das Hinterland von $\vec{S}_{D \rightarrow}$, daher gilt analog zu (53) - (55)

reichbaren Zustände nach Fig. 10 (56) auf einer Kurve $v = 1$ (s. Fig. 10), die (56) auf einer Kurve $v = 1$ (s. Fig. 10), die

$$p_4 = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_D^2 - 1) \quad (65)$$

2 ausgehend monoton nach rechts abfällt. Daher kann der Zustand 3 hinter 2 liegen, wenn 2 oberhalb $v = 1$ liegt, und man bekommt Lösungen mit Reflexion einer Verdünnungswelle \vec{S}_\leftarrow in dem dreieckförmigen Gebiet mit den Ecken A, B, C liegen.

$$v_4 = \frac{2}{\gamma+1} (M_D^2 - 1/M_D^2) \quad (66)$$

$$\xi_4 = \frac{(\gamma+1) M_D^2}{2 + (\gamma-1) M_D^2} \quad (67)$$

Alle Zustände, die die Strömung hinter einer in ruhendes Gas vom Zustand 0 hineinlaufenden Stosswelle \vec{S}_\rightarrow überhaupt annehmen kann, liegen auf der von Fig. 4 her bekannten Kurve S_\rightarrow (Fig. 10). Insbesondere liegen darauf also die Zustände 1 und 4.

Die Lage von 1 ist mit der Primärstoßstärke M_0 als Parameter des Problems von vornherein gegeben. Alle von 1 aus erreichbaren Zustände 2 liegen wegen (15) und (17) in dem schraffierten Gebiet von Fig. 10 oberhalb der Kurve

$$p v^x = p_1 u^x,$$

die mit $s = s_1$ identisch ist, und unterhalb der mit G bezeichneten Geraden $p = \xi_1 v_1 v$ auf einer Kurve S_\leftarrow , die von 2 aus monoton nach links oben steigt. (59) wächst p_3 mit M_R , während v nach (60) dabei abnimmt. Diese bricht in einem

Die Begründung steht hinter Gleichung (32). 1 ist als Hin-

Punkt 2^* ab, der nach (62) durch $v_2 - M_R c_2 = 0$ gegeben ist. (Der von 2 nach 2^* führende Stoss ist ein stehender: $S_{\leftarrow} = \overset{\uparrow}{S}_{\leftarrow}$). Lösungen mit einer Stosswelle $\overset{\uparrow}{S}_{\leftarrow}$ bekommt man also für alle diejenigen Punkte 2 des schraffierten Gebietes von Fig. 10, die so unterhalb von S_{\rightarrow} liegen, dass die zugehörige Kurve S_{\leftarrow} bis an S_{\rightarrow} heranreicht.

Um die hierdurch bestimmte Punktmenge abzugrenzen, wird in Anhang III folgende Behauptung bewiesen: der Endpunkt 2^* der zu einem Punkt 2 gehörigen Kurve S_{\leftarrow} liegt auf der durch 2 gehenden Geraden der Steigung $-\gamma \xi_1 v_1$, und zwar symmetrisch zu 2 bzgl. des Schnittpunkts dieser Geraden mit G. 2^* wird im Folgenden "Spiegelpunkt" von 2 genannt und umgekehrt. (Solche Spiegellagen haben z.B. die Punkte $2'$ und $2''$ in Fig. 10, 11a und 11b). Wird auf diese Weise das rechts von A' gelegene Stück der Kurve S_{\rightarrow} punktweise an G gespiegelt, so liegt die gesuchte Punktmenge in dem dreieckförmigen Gebiet mit den Ecken 1, A' und A'' zwischen den Grenzen $s = s_1$, S_{\rightarrow} und der Spiegelkurve S_{\rightarrow}^* . Dieses Gebiet ist nämlich gerade so konstruiert, dass für alle seine Punkte 2 die zugehörige Kurve S_{\leftarrow} bis über S_{\rightarrow} hinausreicht und daher S_{\rightarrow} schneidet. Für Punkte 2 auf S_{\rightarrow}^* wird die Lösung: $S_{\leftarrow} = \overset{\uparrow}{S}_{\leftarrow}$.

Dass S_{\rightarrow}^* mit $s = s_1$ den Schnittpunkt A'' hat, erkennt man am Verhalten dieser Kurven bei grossen v . S_{\rightarrow} hat als Asymptote eine vertikale Gerade g , deren Spiegelung g^* die Asymptote von S_{\rightarrow}^* ist. Würde die Spiegelung "in Richtung" $-\xi_1 v_1$ erfolgen, so wäre g^* horizontal. Da sie tatsächlich steiler "in Richtung" $-\gamma \xi_1 v_1$ erfolgt, ist g^* eine fallende Gerade, und mit g^* schneidet S_{\rightarrow}^* die Koordinatenachse $p = 0$, insbesondere also die darüber liegende Kurve $s = s_1$.

Die Anordnung der Strömungszonen ist Fig. 12 zu entnehmen.

Es gelten die folgenden $O \rightarrow$ S_{\rightarrow} stark, Erweiterung auf $\overset{\uparrow}{S}_{\leftarrow}$ in WW

Für die Punkte der Grenzlinie S_{\rightarrow}^* ergab sich oben die Lösung $R_{\leftarrow} = \overset{\uparrow}{S}_{\leftarrow}$. Man kommt auch für rechts von S_{\rightarrow}^* gelegene Punkte des schraffierten Gebiets zu einer Lösung, wenn man wie früher bei Problem 1 Stosswellen $\overset{\uparrow}{S}_{\leftarrow}$ ansetzt, die in der Wechselwirkungszone WW stehen. Der Übergang $1 \rightarrow 2$ vollzieht sich dann in mehreren Schritten. Vom Zustand 1 aus wird das

$$v_2 = v_1 - \frac{2c_1}{\gamma+1} \left(\frac{1}{M_R} - 1/M_R \right)$$

Gas zunächst in dem vor \hat{S}_{\leftarrow} gelegenen Teil von WW in einen Zustand $2'$ versetzt, der in Fig. 10 rechts von S_{\rightarrow}^* liegt. Anschliessend erfolgt beim Durchqueren von \hat{S}_{\leftarrow} der Übergang $2' \rightarrow 2'^*$ zum "Spiegelpunkt" von $2'$. Eine Lösung ergibt sich dann dadurch, dass der hinter \hat{S}_{\leftarrow} erfolgende Übergang $2'^* \rightarrow 2$ unter Einhaltung der Bedingung $s_2 \geq s_2'^*$ zu einem Punkt auf S_{\rightarrow} führt.

Lösungen dieser Art bekommt man auch für die schon behandelten Punkte aus dem "Dreieck" A, A', A''. Von einem darin gelegenen Punkt $2'$ führt der Übergang $2' \rightarrow 2'^*$ über die Kurven G und S_{\rightarrow} , und für den anschliessenden Übergang $2'^* \rightarrow 2$ gibt es zwei Möglichkeiten, die zu einer Lösung führen.

Bei der einen liegt 2 direkt auf S_{\rightarrow} (Fig. 11a), bei der anderen liegt 2 auf der Geraden G (Fig. 11b). In dem zuletzt genannten Fall ergab sich schon weiter oben - dort allerdings ohne \hat{S}_{\leftarrow} in WW - rechts von WW der unmittelbare Anschluss einer Verdünnungswelle \hat{V}_{\leftarrow} , sodass man jetzt also den Fall zweier reflektierter Wellen \hat{S}_{\leftarrow} und \hat{V}_{\leftarrow} vor sich hat. Wie es zu diesem kommt, wird später noch besprochen.

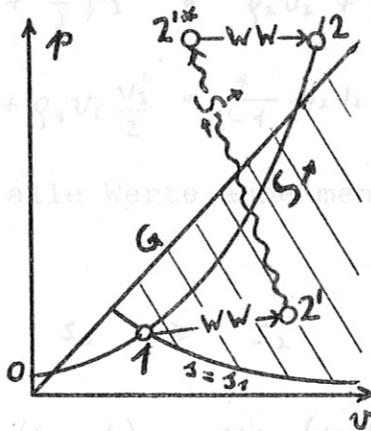


Fig. 11a

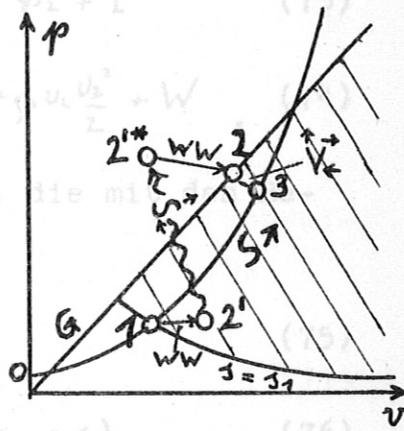


Fig. 11b

Die Anordnung der Strömungszonen ist Fig. 12 zu entnehmen. Es gelten die folgenden Gleichungen:

für Zustand 1: (53) - (55)

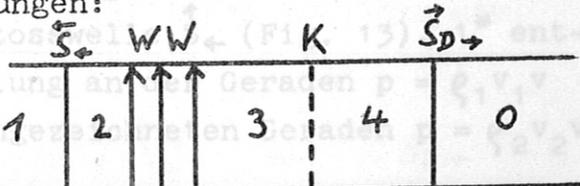


Fig. 12

Zustand 2:

$$p_2 = p_1 \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_R^2 - 1) \right] \quad (68)$$

$$v_2 = v_1 - \frac{2c_1}{\gamma+1} (M_R - 1/M_R) \quad (69)$$

$$\varrho_2 = \varrho_1 \frac{(\gamma+1) M_R^2}{2 + (\gamma-1) M_R^2} \quad (70)$$

(68) - (70) bekommt man in Analogie zu (59) - (61). Die Geschwindigkeit $v_1 - M_R c_1$ von \vec{S}_\leftarrow ist nach links gerichtet und darf nicht negativ werden, daher gilt

$$M_R \geq v_1/c_1 \quad (71)$$

Zustand 3:

$$\varrho_3 v_3 = \varrho_2 v_2 \quad (72)$$

$$\varrho_3 v_3^2 + \frac{1}{\gamma} p_3 = \varrho_2 v_2^2 + \frac{1}{\gamma} p_2 + P \quad (73)$$

$$\frac{1}{\gamma-1} p_3 v_3 + \varrho_3 v_3 \frac{v_3^2}{2} = \frac{1}{\gamma-1} p_2 v_2 + \varrho_2 v_2 \frac{v_2^2}{2} + W \quad (74)$$

P und W können hierin alle Werte annehmen, die mit den Bedingungen

$$s_3 \geq s_2 \quad (75)$$

$$\text{sign}(v_3/c_3 - 1) = \text{sign}(v_2/c_2 - 1) \quad (76)$$

verträglich sind.

Zustand 4: (63) - (67)

Zustand 1 und 4 liegen wieder auf der Kurve S_\rightarrow , dabei ist 1 fest vorgegeben. Alle möglichen Zustände 2 hinter der reflektierten Stosswelle \vec{S}_\leftarrow liegen nach (68) und (69) auf einer monoton nach links ansteigenden Kurve S_\leftarrow . Diese beginnt nach (71) bei dem durch $v_1 - M_R c_1 = 0$ gegebenen Zustand 1* des Hinterlandes einer stehenden Stosswelle \vec{S}_\leftarrow (Fig. 13). 1* entsteht dabei aus 1 durch Spiegelung an der Geraden $p = \varrho_1 v_1 v$ und nicht an der in Fig. 13 eingezeichneten Geraden $p = \varrho_2 v_2 v$.

Für den Fall $2 = 1^*$ ist die Lösung schon bekannt, sie befindet sich unter den bei Fig. 11a und 11b diskutierten Lösungen, wenn dort 2' mit 1 zusammenfällt. Jene vermitteln also stetig den Übergang von den bei Fig. 10 behandelten Lösungen mit $R_\leftarrow = \vec{V}_\leftarrow$

das Gas vom Zustand 3 in

oder S_{\leftarrow} zu den Lösungen mit $R_{\leftarrow} = \bar{S}_{\leftarrow}$. Dieser Anschluss der verschiedenen Lösungstypen tritt bei der Behandlung einiger Sonderfälle in Abschn. 5B noch klarer hervor.

Liegt jetzt 2 oberhalb von 1^* ($M_R > v_1/c_1$), so können in dem anschließenden Übergang $2 \rightarrow 3$ unter Berücksichtigung von (75) und (76) alle diejenigen Punkte er-

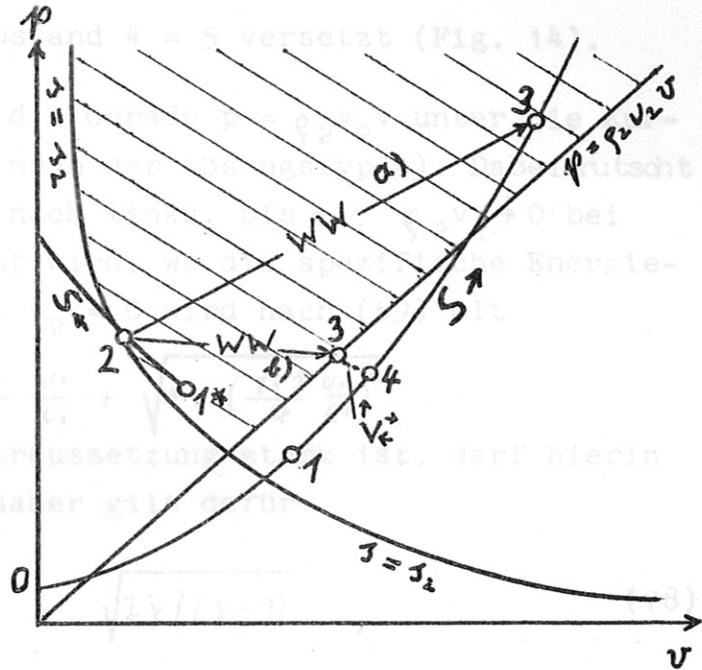


Fig. 13

reicht werden, die auf der den Punkt 2 enthaltenden Seite der Geraden $p = \beta_2 v_2 v$ und oberhalb von $s = s_2$ liegen (Schraffiertes Gebiet von Fig. 13). Nun gilt nach (69) und (70)

$$\beta_2 v_2 = \beta_1 v_1 \left[1 + \left(1 - M_R / \frac{v_1}{c_1} \right) \frac{2(M_R^2 - 1)}{2 + (\gamma - 1) M_R^2} \right], \quad (77)$$

und für $M_R > v_1/c_1$ wird $\beta_2 v_2 < \beta_1 v_1$. 2 liegt oberhalb von 1^* , 1^* liegt oberhalb der "Spiegelgeraden" $p = \beta_1 v_1 v$ und diese wegen $\beta_2 v_2 < \beta_1 v_1$ oberhalb von $p = \beta_2 v_2 v$, d.h. alle Punkte 2 von S_{\leftarrow} liegen wie in Fig. 13 über der zugehörigen Geraden $p = \beta_2 v_2 v$. Weiter folgt durch Differentiation von (77), dass $\beta_2 v_2$ mit wachsendem M_R monoton gegen Null geht. Die Gerade $p = \beta_2 v_2 v$ wird dabei immer flacher und hat daher nur dann Schnittpunkte mit S_{\rightarrow} , wenn 2 hinreichend nahe bei 1^* liegt.

Solange dies der Fall ist, gibt es zwei Typen von Lösungen. Entweder 3 liegt direkt auf S_{\rightarrow} (Übergang a) in Fig. 13), oder 3 liegt auf der Geraden $p = \beta_2 v_2 v$ (Übergang b)). Im letzten

Fall schliesst sich hinter WW wieder eine Verdünnungswelle \vec{V}_{\leftarrow} an, die das Gas vom Zustand 3 in

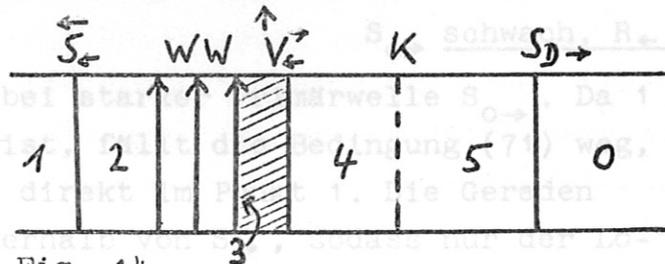


Fig. 14

einen auf S_{\rightarrow} liegenden Zustand $4 = 5$ versetzt (Fig. 14).

Sinkt mit wachsendem M_R die Gerade $p = \rho_2 v_2 v$ unter die Kurve S_{\rightarrow} , so verbleibt nur noch der Lösungstyp a). Dabei rutscht der Punkt 2 immer weiter nach links, bis mit $\rho_2 v_2 \rightarrow 0$ bei $v_2 = 0$ die Grenze erreicht wird, wo die spezifische Energiezufuhr $W/\rho_2 v_2 \rightarrow \infty$ geht. $v_2 = 0$ wird nach (69) mit

$$M_R = \frac{\gamma+1}{4} \frac{v_1}{c_1} + \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma+1}{4} \frac{v_1}{c_1}\right)^2}$$

erreicht. Da $S_{0\rightarrow}$ nach Voraussetzung stark ist, darf hierin (52) eingesetzt werden, daher gilt dafür

$$M_R = \sqrt{2\gamma/(\gamma-1)}, \quad (78)$$

und zusammen mit (52) und (71) erhält man als Bereich von M_R

$$\sqrt{2\gamma/(\gamma-1)} \leq M_R \leq \sqrt{2\gamma/(\gamma-1)}$$

Die obere Grenze ist gerade das γ -fache der unteren. Speziell für $\gamma = 5/3$ wird daraus

$$1,34 \leq M_R \leq 2,24$$

Die durch (79) beschriebenen Zustände 2 liegen auf einer Kurve. Abschliessend noch eine Bemerkung dazu, wie die in Fig. 14 dargestellte Situation mit zwei reflektierten Wellen \bar{S}_{\leftarrow} und \bar{V}_{\leftarrow} zustandekommt. Nach Abschn. 2 entstehen mit dem Einsetzen der Wechselwirkung ja zunächst zwei Sekundärwellen, deren eine nach Reflexion an $S_{0\rightarrow}$ hinter der anderen herläuft und sich mit dieser zu einer einzigen resultierenden Welle vereinigt. Offenbar ist die an $S_{0\rightarrow}$ reflektierte Welle hier eine Verdünnungswelle, die an der Wechselwirkungszone hängen bleibt und dadurch an der Vereinigung mit der nach links davon laufenden Sekundärstosswelle gehindert wird.

von zwei reflektierten Wellen, nämlich \bar{V}_{\leftarrow} und \bar{S}_{\leftarrow} . Bei starker Wechselwirkung besteht auch quantitativ kein Unterschied zu $S_{0\rightarrow}$ schwach, $R_{\leftarrow} = \bar{S}_{\leftarrow}$

Hier gilt fast alles wie bei starker Primärwelle $S_{0\rightarrow}$. Da 1 eine Unterschallströmung ist, fällt die Bedingung (71) weg, und die Kurve S_{\leftarrow} beginnt direkt im Punkt 1. Die Geraden $p = \rho_2 v_2 v$ liegen alle unterhalb von S_{\rightarrow} , sodass nur der Lö-

sungstyp a) von Fig. 13 in Frage kommt.

$$S_{O \rightarrow} \text{ schwach, } R_{\leftarrow} = \overleftarrow{V_{\leftarrow}}$$

Für die Einteilung der Strömungszonen gilt die Fig. 12, in der nur das Symbol $\overleftarrow{S_{\leftarrow}}$ durch $\overleftarrow{V_{\leftarrow}}$ ersetzt werden muss. Dementsprechend gelten für die Zustände 1, 3 und 4 dieselben Gleichungen wie dort, einzig die Gleichungen (68) - (70) für den Zustand 2 sind durch

$$p_2 = p_1 \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{v_2 - v_1}{c_1} \right) \right]^{2\gamma/(\gamma-1)} \quad (79)$$

$$\rho_2 = \rho_1 \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{v_2 - v_1}{c_1} \right) \right]^{2/(\gamma-1)} \quad (80)$$

zu ersetzen. (79) und (80) werden analog zu (56) und (57) aus (1) und (2) gewonnen. Damit die mit der Geschwindigkeit c_2 laufende Rückfront von $\overleftarrow{V_{\leftarrow}}$ nicht nach rechts in die Zone WW hinweingetragen wird, muss zu (79) und (80) die Bedingung $v_2 \leq c_2$ hinzugefügt werden. Mit (18), (79) und (80) geht diese über in

$$v_2 \leq v_1 + \frac{2}{\gamma+1} (c_1 - v_1)$$

Die durch (79) beschriebenen Zustände 2 liegen auf einer Kurve V_{\leftarrow} , die von 1 aus monoton nach rechts abfällt und im Punkt $v_2 = v_1 + 2(c_1 - v_1) / (\gamma + 1)$ abbricht. Man hat praktisch die gleiche Situation wie bei Problem 1 in Fig. 4, nur ist jetzt der Schnittpunkt der beiden Kurven V_{\leftarrow} und S_{\rightarrow} ein Stück nach rechts verschoben, und dementsprechend das Ende der Kurve V_{\leftarrow} . Die Diskussion verläuft hier genau wie dort, für alle Einzelheiten wird daher auf Abschn. 4A verwiesen. Es wird nur an die Möglichkeit erinnert, dass bei hinreichend grossem P stehende Stosswellen auftreten können. Das bedeutet für den jetzt betrachteten Fall wieder das Vorhandensein von zwei reflektierten Wellen, nämlich $\overleftarrow{V_{\leftarrow}}$ und $\overleftarrow{S_{\leftarrow}}$. Bei starker Wechselwirkung besteht auch quantitativ kein Unterschied zu dem Problem 1. Da die Stosswelle $S_{O \rightarrow}$ hier als schwach angenommen wird, bedeutet sie bei starker Wechselwirkung eine vernachlässigbare Störung des bei Problem 1 als homogen vorausgesetzten Anfangszustandes der Strömung. Analytisch drückt sich das so aus, dass

Nur kurz gestreift werden soll hier eine Situation, die eng

eine kleine relative Verschiebung der Kurven V_{\leftarrow} und S_{\rightarrow} bei einem Übergang $1 \rightarrow 2$ zwischen weit entfernten Punkten auf diesen vernachlässigt werden kann.

Zur Vollständigkeit der Lösungen

Wie bei Problem 1 erkannt wurde, bewegt sich der Rahmen aller Lösungen zwischen den beiden Extremfällen, dass in der Zone WW keine Wärme zugeführt wird und dass bei Arbeit plus Wärmezufuhr die pro Masseneinheit zugeführte Gesamtenergie gegen Unendlich geht. Auch jetzt gibt es zwischen diesen beiden Extremfällen alle Möglichkeiten.

Bei den Lösungen mit unendlicher spezifischer Energiefuhr geht $W/\rho v \rightarrow \infty$, d.h. in das Vorland 1 hinein wird eine so starke Stosswelle \bar{S}_{\leftarrow} reflektiert, dass dahinter $\rho_2 v_2 \rightarrow 0$ geht.

Bei den Lösungen ohne Wärmezufuhr ist die Strömung durch die Zone WW bis auf einen eventuellen Stossübergang isentrop. Dabei ergeben sich stossfreie Lösungen, wenn in Fig. 10 der Punkt 2 zwischen A und A'' auf $s = s_1$ liegt, bzw. in Fig. 13 der Punkt 3 auf $s = s_2$. Lösungen mit stehendem Stoss erhält man, wenn in Fig. 11a bzw. Fig. 11b der Punkt 2' auf $s = s_1$ und der Punkt 2'' auf $s = s_2$ liegt.

Der Übergang zwischen den beiden Extremfällen vollzieht sich bei gegebenem P, indem zunächst in Fig. 13 der Punkt 2 auf S_{\leftarrow} von $v_2 = 0$ bis 1^* verschoben wird und jeweils 3 in den 2 nächstliegenden Schnittpunkt der Kurve (73) mit den beiden Kurven S_{\rightarrow} und $p = \rho_2 v_2 v$ gelegt wird. Wenn dabei die Grenze $s_3 = s_2$ nicht erreicht wird, geht es weiter in Fig. 10. Dort liegt 2 bei gegebenem P auf der Kurve (26), und man kommt zu der wärmezufuhrfreien Lösung entweder, indem man den Punkt 2 bis nach $s = s_1$ rücken lässt, sofern er sich dabei in dem Dreieck A, A', A'' bewegt. Oder aber, man legt ihn in den Schnittpunkt der Kurve (26) mit S_{\rightarrow} bzw. G (Fig. 11a, b) und lässt 2' und 2'' gegen die Kurven $s = s_1$ bzw. $s = s_2$ rücken.

B SONDERFALLE

Wechselwirkung mit Strömungsumkehr

Nur kurz gestreift werden soll hier eine Situation, die eng

verwandt ist mit dem Problem 1. Bei einer Umorientierung des Kraftfeldes laufen bei diesem alle Vorgänge in der umgekehrten Richtung. Wenn diese Vorgänge bei starken äusseren Einwirkungen durch das Eindringen einer hinreichend schwachen Stosswelle $\vec{S}_{0\rightarrow}$ in die Zone WW ausgelöst werden, wird sich an dem resultierenden Strömungsbild nichts Wesentliches ändern. In Analogie zu Fig. 3 erhält man für die Einteilung der Strömungszonen Fig. 15. Bis auf die Orientierung besteht der einzige Unterschied im Vorland der Stosswelle. Dieses ist jetzt das Hinterland von $S_{0\rightarrow}$ und strömt nach rechts, während in den übrigen Zonen 2 - 4 das Gas nach links strömt. Daher bekommt man beim Übergang 1→2 eine Strömungsumkehr.

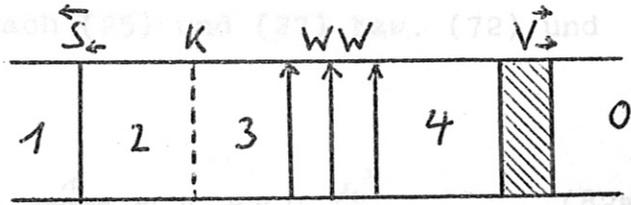


Fig. 15

In einem $p - v$ - Diagramm (Fig. 16) wird die Verdünnungswelle V_{\rightarrow} durch die Kurve V_{\rightarrow} beschrieben, die spiegelsymmetrisch zur Kurve V_{\leftarrow} aus Fig. 4 liegt. Die Beschreibung der Stosswelle \vec{S}_{\leftarrow} erhält man durch

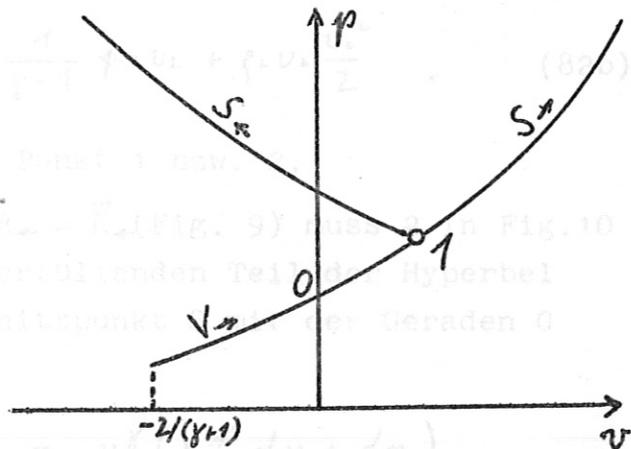


Fig. 16

Fortsetzung der Kurve S_{\leftarrow} aus Fig. 13 (Gleichung (68) und (69)) in den Bereich negativer Geschwindigkeiten. Der Unterschied zu Fig. 4 besteht im Wesentlichen darin, dass die Kurven für die Stoss- und die Verdünnungswelle nicht auf der p -Achse zusammenstossen. Dies bedeutet aber nur, dass für das Einsetzen der Strömungsumkehr eine gewisse Mindeststärke der äusseren Einwirkungen erforderlich ist. Ansonsten bringt dieser Fall nichts Neues, seine Behandlung erfolgt genau wie die des Problems 1.

$W = 0, P \leq 0$ (Kurzschlussfall)

Die Behandlung dieses Falles wird auf starke Primärwellen $S_{0\rightarrow}$ eingeschränkt. Dimensionsgrößen werden wie bei den Anwendun-

gen in Abschn. 4 B durch Überstreichen gekennzeichnet.

$W = 0$ und $P \leq 0$ bedeutet, dass in der Anordnung von Fig. 2 die Elektroden kurzgeschlossen sind. Wegen $\vec{E} = 0$ und $\vec{j} = -\vec{\delta} \vec{v} \vec{B}$ wird dann nämlich $\vec{W} = \int \vec{j} \vec{E} d\vec{x} = 0$ und

$$\vec{P} = - \int \vec{\delta} \vec{v} \vec{B}^2 d\vec{x} \quad (81)$$

negativ. ≤ 0 für $dv < 0$.

In einem $p - v$ -Diagramm erfolgen die Zustandsänderungen der Strömung durch die Zone WW nach (25) und (27) bzw. (72) und (74) auf den Kurven

$$\frac{1}{\gamma-1} \rho v + \beta_1 v_1 \frac{v^2}{2} = \frac{1}{\gamma-1} \rho_1 v_1 + \beta_1 v_1 \frac{v_1^2}{2} \quad (82a)$$

bzw. $\rho_2 v_2$ bzw. S_+ , wobei

$$\frac{1}{\gamma-1} \rho v + \beta_2 v_2 \frac{v^2}{2} = \frac{1}{\gamma-1} \rho_2 v_2 + \beta_2 v_2 \frac{v_2^2}{2} \quad (82b)$$

Dies sind Hyperbeln durch den Punkt 1 bzw. 2.

Bei den Wechselwirkungen mit $R_{\leftarrow} = \vec{R}_{\leftarrow}$ (Fig. 9) muss 2 in Fig. 10 auf dem die Bedingung $s \geq s_1$ erfüllenden Teil der Hyperbel (82a) unterhalb von deren Schnittpunkt S mit der Geraden G liegen. Nun ist

$$ds \sim d(\rho v^\gamma) = v^\gamma \left(\gamma \frac{\rho}{v} dv + d\rho \right),$$

daher gilt speziell auf (82a) wegen

setzt, ist

$$d\rho = - \left[\frac{\rho}{v} + (\gamma-1) \beta v \right] dv \quad (83)$$

und mit (18)

$$ds = (\gamma-1) \rho v^\gamma (1 - v^2/c^2) dv/v \quad (84)$$

Unterhalb von G ist $(1 - v^2/c^2) \leq 0$, daher bekommt man $ds \geq 0$ und $s \geq s_1$ nur für $dv < 0$, also nur auf dem links von 1 gelegenen Teil der Kurve (82a) (in Fig. 17 Kurve $W_1 = 0$ zwischen 1 und S). Auf diesem ist auch die Voraussetzung $P \leq 0$ erfüllt, wie man durch Kombination der aus (25) und (26) folgenden Be-

ziehung

$$dP = \rho v dv + \frac{1}{\gamma} dp \quad (87)$$

mit (83) und (18) erkennt. Es ergibt sich

$$dP = -\frac{P}{\gamma v} (1 - v^2/c^2) dv, \quad (85)$$

d.h. $dP \leq 0$ für $dv < 0$.

Da die so erhaltenen Punkte 2 alle über der Kurve S_{\rightarrow} liegen, folgt das Ergebnis $R_{\leftarrow} = V_{\leftarrow}$.

Für eine Reflexion nach links kommt bei starker Primärwelle $\vec{S}_{0\rightarrow}$ nur der Fall $R_{\leftarrow} = \vec{S}_{\leftarrow}$ in Frage (Fig. 12 und Fig. 13). Bei gegebenem Punkt 2 liegt 3 im Schnittpunkt der Kurve (82b)

($W_2 = 0$ in Fig. 17) mit $p = \rho_2 v_2 v$ bzw. S_{\rightarrow} , wobei auf Grund der auch auf (82b) gültigen Gleichungen (84) und (85) mit $(1 - v^2/c^2) > 0$ und $v_3 > v_2$ wieder $S_3 \gg S_2$ und $P \leq 0$ erfüllt sind. Bei schwachem \vec{S}_{\leftarrow} tritt zunächst noch eine Verdünnungswelle \vec{V}_{\leftarrow} auf, die mit wachsender Stärke von \vec{S}_{\leftarrow} allmählich verschwindet.

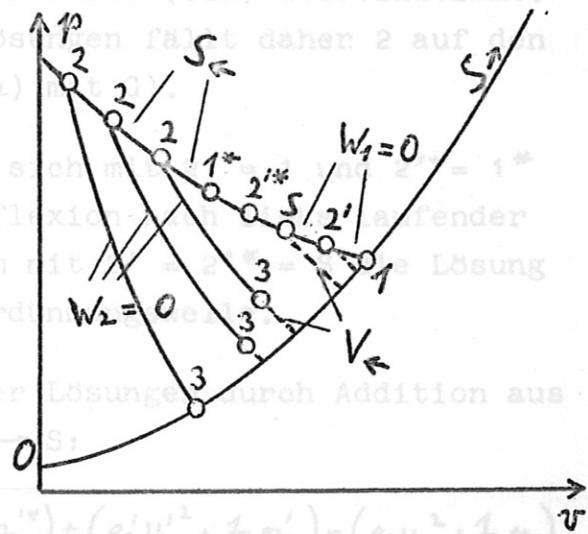


Fig. 17

Derjenige Wert P , bei dem die Reflexion von Stosswellen einsetzt, ist

$$P_s = -\frac{2(\gamma - 2\sqrt{\gamma - 1})}{\gamma(\gamma - 1)} M_0^2 \quad (86)$$

Er gilt auch für die Reflexion der stärksten Verdünnungswelle sowie für die Lösungen mit einer stehenden Stosswelle in WW.

Der Beweis dieser Behauptungen schliesst sich an die zuletzt genannten Lösungen an. Diese wurden allgemein bei Fig. 11a und 11b untersucht. In dem jetzt betrachteten Fall muss der Punkt 2' auf dem Kurvenstück $W_1 = 0$ liegen (Fig. 17). Der hinter dem stehenden Stoss erreichte "Spiegelzustand" 2'' erfüllt

die Gleichungen

$$\rho_2^{1*} v_2^{1*} = \rho_2' v_2' \quad (87)$$

$$\rho_2^{1*} v_2^{1*2} + \frac{1}{\gamma} p_2^{1*} = \rho_2' v_2'^2 + \frac{1}{\gamma} p_2' \quad (88)$$

$$\frac{1}{\gamma-1} \rho_2^{1*} v_2^{1*} + \rho_2^{1*} v_2^{1*} \frac{v_2^{1*2}}{2} = \frac{1}{\gamma-1} \rho_2' v_2' + \rho_2' v_2' \frac{v_2'^2}{2} \quad (89)$$

Der anschliessende Übergang $2^{1*} \rightarrow 2$ erfolgt mit $W = 0$ auf der Kurve

$$\frac{1}{\gamma-1} \rho v + \rho v \frac{v^2}{2} = \frac{1}{\gamma-1} \rho_2^{1*} v_2^{1*} + \rho_2^{1*} v_2^{1*} \frac{v_2^{1*2}}{2},$$

die wegen $\rho v = \rho_2^{1*} v_2^{1*}$, (87), $\rho_2' v_2' = \rho_1 v_1$, (89), und weil $2'$ auf (82a) liegt, mit der Kurve (82a) übereinstimmt. Bei allen jetzt betrachteten Lösungen fällt daher 2 auf den Punkt S (=Schnittpunkt von (82a) mit G).

Unter diesen Lösungen befindet sich mit $2' = 1$ und $2^{1*} = 1^*$ auch diejenige, bei der die Reflexion nach links laufender Stosswellen einsetzt, ausserdem mit $2' = 2^{1*} = S$ die Lösung mit Reflexion der stärksten Verdünnungswelle.

P berechnet sich für jede dieser Lösungen durch Addition aus den Übergängen $1 \rightarrow 2'$ und $2^{1*} \rightarrow S$:

$$P = (\rho_s v_s^2 + \frac{1}{\gamma} p_s) - (\rho_2^{1*} v_2^{1*2} + \frac{1}{\gamma} p_2^{1*}) + (\rho_2' v_2'^2 + \frac{1}{\gamma} p_2') - (\rho_1 v_1^2 + \frac{1}{\gamma} p_1).$$

Mit (88) folgt daraus für alle Lösungen der gleiche Wert

$$P = (\rho_s v_s^2 + \frac{1}{\gamma} p_s) - (\rho_1 v_1^2 + \frac{1}{\gamma} p_1) \quad (90)$$

p_s und v_s sind die Koordinaten des Schnittpunkts von (82a) mit G ($\hat{=} p = \rho_1 v_1$). Mit den für starken Stoss $S_{0 \rightarrow}$ gültigen Beziehungen

$$\rho_1 = 2\gamma M_0^2 / (\gamma+1) \quad (91)$$

$$v_1 = 2M_0 / (\gamma+1) \quad (92)$$

$$\rho_1 = (\gamma+1) / (\gamma-1) \quad (93)$$

erhält man für diese

$$p_s = 4M_0^2 / (\gamma + 1) \sqrt{\gamma - 1} \quad (94)$$

$$v_s = 2\sqrt{\gamma - 1} M_0 / (\gamma + 1) \quad (95)$$

Setzt man $\rho_s v_s = \rho_1 v_1$ und (91) - (95) in (90) ein, so erhält man für P den Wert P_s von Gleichung (86).

Für die praktische Anwendung wird in einer Überschlagsrechnung noch das Magnetfeld ermittelt, bei dem der Übergang $\vec{v}_\leftarrow \rightarrow \vec{S}_\leftarrow$ stattfindet. Mit $\bar{P} = \gamma \bar{p}_0$ P erhält man aus (81) und (86)

$$\int_1^5 \bar{\delta} \bar{v} \bar{B}^2 d\bar{x} = \frac{2(\gamma - 2\sqrt{\gamma - 1})}{(\gamma - 1)} \bar{\rho}_0 M_0^2 \quad (96)$$

v ändert sich im Integral zwischen den Grenzen v_1 und v_s , nach (92) und (95) also um

$$\Delta v = 2(1 - \sqrt{\gamma - 1}) M_0 / (\gamma + 1)$$

Die relative Änderung beträgt

$$\Delta v / v_1 = \Delta \bar{v} / \bar{v}_1 = 1 - \sqrt{\gamma - 1}$$

Da das bei $\gamma = 5/3$ nur etwa 18% sind, kann $\bar{v} = \bar{c}_0 v$ durch den Mittelwert

$$\bar{v}_M = (1 + \sqrt{\gamma - 1}) M_0 \bar{c}_0 / (\gamma + 1)$$

ersetzt und vor das Integral gezogen werden. $\bar{\delta}$ ändert sich mit \bar{v} nur wenig und wird zusammen mit \bar{B} (vgl. (45)) ebenfalls als Konstante betrachtet. Setzt man noch $\int_1^5 d\bar{x} = \bar{L}$, so erhält man aus (96) schliesslich

$$\bar{B} \approx \sqrt{\frac{2(\gamma + 1)(\gamma - 2\sqrt{\gamma - 1}) \bar{\rho}_0 M_0}{(\gamma - 1)(1 + \sqrt{\gamma - 1}) \bar{\delta} \bar{c}_0 \bar{L}}} \quad (97)$$

Für $\gamma = 5/3$ ergibt dies

$$\bar{B} \approx \sqrt{0,14 \bar{\rho}_0 M_0 / \bar{\delta} \bar{c}_0 \bar{L}} \quad (98)$$

des Schnittpunkts S von (100a) $P = 0, W \geq 0$ (reine Wärmezufuhr)

Auch dieser Fall wird nur für starke Primärwellen $S_{0 \rightarrow}$ untersucht. $P = 0$ und $W \geq 0$ bedeutet, dass in der Anordnung von Fig. 2 kein Magnetfeld angelegt wird. Mit $\bar{B} = 0$ und $\bar{j} = \delta \bar{E}$ wird nämlich $\bar{P} = \int \bar{j} \bar{B} d\bar{x} = 0$ und

$$\bar{W} = \int \delta \bar{E}^2 d\bar{x} \quad (99)$$

positiv. Man hat den Fall reiner Wärmezufuhr ohne Arbeitsleistung äusserer Kräfte. Seine Realisierung kann man sich auch anders als elektromagnetisch vorstellen, z.B. durch Wärmeeinstrahlung in die Zone WW.

Die Behandlung verläuft analog zu derjenigen des vorhergehenden Falles $W = 0, P \leq 0$. An die Stelle von (82a) und (82b) treten die Geradengleichungen

$$\rho_1 v_1 v + \frac{1}{\gamma} p = \rho_1 v_1^2 + \frac{1}{\gamma} p_1 \quad (100a)$$

$$\rho_2 v_2 v + \frac{1}{\gamma} p = \rho_2 v_2^2 + \frac{1}{\gamma} p_2 \quad (100b)$$

an die Stelle von Fig. 17 tritt die Fig. 18. Wieder ist entweder $R_{\leftarrow} = \vec{V}_{\leftarrow}$ oder $R_{\leftarrow} = \vec{S}_{\leftarrow}$, und der Übergang $\vec{V}_{\leftarrow} \rightarrow \vec{S}_{\leftarrow}$ vollzieht sich über die Lösungen mit stehenden Stosswellen bei

$$W_s = \frac{(2-\gamma)^2}{(\gamma-1)^2 (\gamma+1)} M_0^3 \quad (101)$$

(101) ergibt sich aus der zu (90) analogen Gleichung

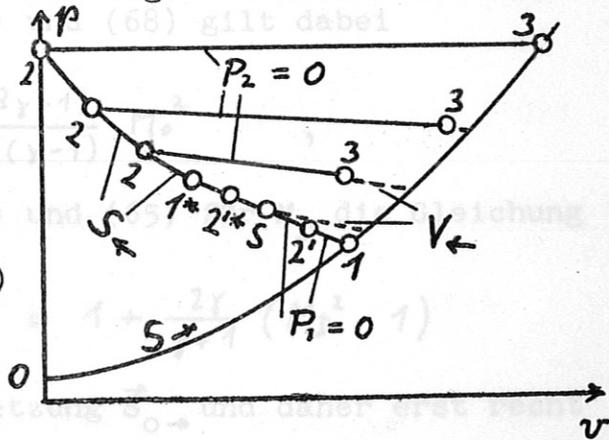


Fig. 18

$$W = \left(\frac{1}{\gamma-1} \rho_s v_s + \rho_s v_s \frac{v_s^2}{2} \right) - \left(\frac{1}{\gamma-1} \rho_1 v_1 + \rho_1 v_1 \frac{v_1^2}{2} \right),$$

wenn man in diese $\rho_s v_s = \rho_1 v_1$, (91) - (93) und die Koordinaten

$$\rho_s = 2\gamma M_0^2 / (\gamma^2 - 1)$$

$$v_s = \gamma M_0 / (\gamma + 1)$$

des Schnittpunkts S von (100a) mit $p = \rho_1 v_1 v$ einsetzt.
Mit $\bar{W} = \bar{\rho}_0 \bar{c}_0^3 W$ erhält man aus (99) und (101)

$$\int \bar{\delta} \bar{E}^2 d\bar{x} = \frac{(2-\gamma)^2}{(\gamma-1)^2 (\gamma+1)} \bar{\rho}_0 \bar{c}_0^3 M_0^3,$$

und wenn man hierin wieder $\bar{\delta}$ konstant setzt, erhält man mit $\gamma \bar{p}_0 / \bar{\rho}_0 = \bar{c}_0^2$

$$\bar{E} = \frac{2-\gamma}{\gamma-1} \sqrt{\frac{\gamma \bar{p}_0 \bar{c}_0 M_0^3}{(\gamma+1) \bar{\delta} \bar{c}_0}} \quad (102)$$

als diejenige Feldstärke, bei der die Reflexion von Stosswellen einsetzt. Für $\gamma = 5/3$ lautet sie

$$\bar{E} = \sqrt{0,16 \bar{p}_0 \bar{c}_0 M_0^3 / \bar{\delta} \bar{c}_0} \quad (103)$$

In Fig. 18 wird mit wachsender Stärke von \vec{S}_\leftarrow auch die durchgehende Welle $\vec{S}_{D\rightarrow}$ immer stärker, da die Geraden (100b) ($\hat{=} P_2 = 0$ in Fig. 18) nach (77) mit $v_2 \rightarrow 0$ immer flacher werden. Die obere Grenze für die Machzahl M_D von $\vec{S}_{D\rightarrow}$ wird erreicht, wenn mit $v_2 = 0$ die Gerade (100b) horizontal und daher $p_3 = p_2$ wird. Nach (78) und (68) gilt dabei

$$p_2 = \frac{2\gamma(3\gamma-1)}{(\gamma+1)(\gamma-1)} M_0^2,$$

sodass sich zusammen mit (63) und (65) für M_D die Gleichung

$$\frac{2\gamma(3\gamma-1)}{(\gamma+1)(\gamma-1)} M_0^2 = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_D^2 - 1)$$

ergibt. Nun ist nach Voraussetzung $\vec{S}_{O\rightarrow}$ und daher erst recht $\vec{S}_{D\rightarrow}$ ein starker Stoss. Aus diesem Grund darf die rechte Seite der letzten Gleichung durch $2\gamma M_D^2 / (\gamma+1)$ ersetzt werden, und es folgt schliesslich

$$M_D / M_0 = \sqrt{\frac{3\gamma-1}{\gamma-1}} \quad (104)$$

Dies ist die maximale Verstärkung der Stosswelle $\vec{S}_{O\rightarrow}$, die man durch reine Wärmezufuhr erreichen kann. Bei $\gamma = 5/3$ er-

gibt sich dafür

$$M_D / M_0 = \sqrt{6} \approx 2,4$$

Ähnlichkeitsgesetz bei starken Stosswellen $S_{O \rightarrow}$ und $S_{D \rightarrow}$

Sind $S_{O \rightarrow}$ und $S_{D \rightarrow}$ starke Stosswellen, so gelten statt (53)-(55) und statt (65)-(67) die Gleichungen

$$p_1 = 2\gamma M_0^2 / (\gamma + 1), \quad v_1 = 2M_0 / (\gamma + 1), \quad \rho_1 = (\gamma + 1) / (\gamma - 1) \quad (105)$$

$$p_4 = 2\gamma M_D^2 / (\gamma + 1), \quad v_4 = 2M_D / (\gamma + 1), \quad \rho_4 = (\gamma + 1) / (\gamma - 1) \quad (106)$$

Geht man mit

$$\frac{p}{M_0^2} = \tilde{p}, \quad \frac{v}{M_0} = \tilde{v}, \quad \rho = \tilde{\rho} \quad (107)$$

zu den Variablen \tilde{p} , \tilde{v} und $\tilde{\rho}$ über, so gelten stattdessen die Gleichungen

$$\tilde{p}_1 = 2\gamma / (\gamma + 1), \quad \tilde{v}_1 = 2 / (\gamma + 1), \quad \tilde{\rho}_1 = (\gamma + 1) / (\gamma - 1) \quad (108)$$

$$\tilde{p}_4 = 2\gamma m^2 / (\gamma + 1), \quad \tilde{v}_4 = 2m / (\gamma + 1), \quad \tilde{\rho}_4 = (\gamma + 1) / (\gamma - 1) \quad (109)$$

mit $m = M_D / M_0$ (110)

c transformiert sich wie v, wenn man in Analogie zu Gleichung (18) $c = \sqrt{\tilde{p} / \tilde{\rho}}$ definiert.

Im Falle $R_{\leftarrow} = \tilde{S}_{\leftarrow}$ erhält man aus den Gleichungen (68)-(70) und (72)-(74) in den neuen Variablen

$$\tilde{p}_2 = \tilde{p}_1 \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_R^2 - 1) \right] \quad (111)$$

$$\tilde{v}_2 = \tilde{v}_1 - \frac{2\tilde{c}_1}{\gamma + 1} (M_R - 1/M_R) \quad (112)$$

$$\tilde{\rho}_2 = \tilde{\rho}_1 \frac{(\gamma + 1) M_R^2}{2 + (\gamma - 1) M_R^2} \quad (113)$$

gibt sich dafür $\text{Übergang } 1 \rightarrow 2, \text{ und}$

$$M_D / M_0 = \sqrt{6} \approx 2,4 \quad (114)$$

Ähnlichkeitsgesetz bei starken Stosswellen $S_{O \rightarrow}$ und $S_{D \rightarrow}$

Sind $S_{O \rightarrow}$ und $S_{D \rightarrow}$ starke Stosswellen, so gelten statt (53)-(55) und statt (65)-(67) die Gleichungen

$$p_1 = 2\gamma M_0^2 / (\gamma + 1), \quad v_1 = 2M_0 / (\gamma + 1), \quad \rho_1 = (\gamma + 1) / (\gamma - 1) \quad (105)$$

$$p_4 = 2\gamma M_D^2 / (\gamma + 1), \quad v_4 = 2M_D / (\gamma + 1), \quad \rho_4 = (\gamma + 1) / (\gamma - 1) \quad (106)$$

Geht man mit $\text{Übergang } 2 \rightarrow 3,$

Schlüsselt man die Gleichungen für den Übergang $3 \rightarrow 4$ die Gleichungen

$$\frac{p}{M_0^2} = \tilde{p}, \quad \frac{v}{M_0} = \tilde{v}, \quad \rho = \tilde{\rho} \quad (107)$$

zu den Variablen \tilde{p} , \tilde{v} und $\tilde{\rho}$ über, so gelten stattdessen die Gleichungen

$$\tilde{p}_1 = 2\gamma / (\gamma + 1), \quad \tilde{v}_1 = 2 / (\gamma + 1), \quad \tilde{\rho}_1 = (\gamma + 1) / (\gamma - 1) \quad (108)$$

$$\tilde{p}_4 = 2\gamma m^2 / (\gamma + 1), \quad \tilde{v}_4 = 2m / (\gamma + 1), \quad \tilde{\rho}_4 = (\gamma + 1) / (\gamma - 1) \quad (109)$$

mit $m = M_D / M_0 \quad (110)$

c transformiert sich wie v, wenn man in Analogie zu Gleichung (18) $c = \sqrt{\tilde{p} / \tilde{\rho}}$ definiert.

Im Falle $R_{\leftarrow} = \tilde{S}_{\leftarrow}$ erhält man aus den Gleichungen (68)-(70) und (72)-(74) in den neuen Variablen

$$\tilde{p}_2 = \tilde{p}_1 \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_R^2 - 1) \right] \quad (111)$$

$$\tilde{v}_2 = \tilde{v}_1 - \frac{2\tilde{c}_1}{\gamma + 1} (M_R - 1/M_R) \quad (112)$$

$$\tilde{\rho}_2 = \tilde{\rho}_1 \frac{(\gamma + 1) M_R^2}{2 + (\gamma - 1) M_R^2} \quad (113)$$

für den Übergang 1 → 2, und

$$\tilde{\rho}_3 \tilde{v}_3 = \tilde{\rho}_2 \tilde{v}_2 \quad (114)$$

$$\tilde{\rho}_3 \tilde{v}_3^2 + \frac{1}{\gamma} \tilde{p}_3 = \tilde{\rho}_2 \tilde{v}_2^2 + \frac{1}{\gamma} \tilde{p}_2 + \tilde{P} \quad (115)$$

$$\frac{1}{\gamma-1} \tilde{p}_3 \tilde{v}_3 + \tilde{\rho}_3 \tilde{v}_3 \frac{\tilde{v}_3^2}{2} = \frac{1}{\gamma-1} \tilde{p}_2 \tilde{v}_2 + \tilde{\rho}_2 \tilde{v}_2 \frac{\tilde{v}_2^2}{2} + \tilde{W} \quad (116)$$

mit

$$\tilde{P} = P / M_0^2 \quad (117)$$

$$\tilde{W} = W / M_0^3 \quad (118)$$

für den Übergang 2 → 3.

Schliesslich gelten für den Übergang 3 → 4 die Gleichungen

$$\tilde{\rho}_4 = \tilde{\rho}_3, \quad \tilde{v}_4 = \tilde{v}_3, \quad \tilde{K} = \tilde{\rho}_3 / \tilde{\rho}_4, \quad (119)$$

wo \tilde{K} die Stärke der Kontaktfront ist und zu den Unbekannten des Problems zählt.

Das durch die Gleichungen (108), (109), (111)-(116) und (119) gegebene System enthält die Parameter \tilde{P} und \tilde{W} und dient zur Berechnung der Unbekannten M_R , m und \tilde{K} .

Hat man eine Lösung dieses Systems gefunden, d.h. bestimmte Werte M_R , m und \tilde{K} zu gegebenen Parametern \tilde{P} und \tilde{W} , so gehört zu dieser Lösung eine ganze Schar der alten Parameter P und W , nämlich alle diejenigen, die bei variablem M_0 und fest gegebenem \tilde{P} und \tilde{W} den Gleichungen (117) und (118) genügen. Aus diesen folgt durch Kombination

$$P^3 / W^2 = \tilde{P}^3 / \tilde{W}^2 = \text{const}, \quad (120)$$

und es resultiert das folgende Ähnlichkeitsgesetz:

Für alle P und W , die Gleichung (120) erfüllen, erhält man Lösungen mit derselben Stärke M_R von \tilde{S}_\leftarrow , derselben Stärke $K = \tilde{K}$

der Kontaktfront und derselben Schwächung bzw. Verstärkung $m = M_D/M_0$ der Primärwelle $S_{0 \rightarrow}$.

Auf Grund der Voraussetzung, dass $S_{0 \rightarrow}$ und $S_{D \rightarrow}$ stark sein sollen, ist die Gültigkeit des Ähnlichkeitsgesetzes auf hinreichend grosse Werte von M_D und M_0 eingeschränkt (bei $\gamma = 5/3$: $M_D \geq 3, M_0 \geq 3$).

Für den Fall $R_{\leftarrow} = \vec{S}_{\leftarrow}$ oder \vec{V}_{\leftarrow} führen die analogen Betrachtungen zum selben Ähnlichkeitsgesetz. Dabei tritt bei $R_{\leftarrow} = \vec{V}_{\leftarrow}$ die Stärke $|v_3 - v_2|$ der Verdünnungswelle als dritte Unbekannte an die Stelle von M_R .

Geht man mit $\bar{P} = \gamma \bar{p}_0 P$ und $\bar{W} = \bar{\rho}_0 \bar{c}_0^3 W$ auf die ursprünglichen Parameter (13) und (14) zurück, so ergibt sich aus (120) mit $\gamma \bar{p}_0 / \bar{\rho}_0 = \bar{c}_0^2$

$$\bar{P}^3 / \bar{\rho}_0 \bar{W}^2 = \text{const} \quad (121)$$

Mit (45) und (46) erhält man daraus

$$\frac{\bar{B}^3 \bar{J}}{\bar{h} \bar{\rho}_0 \bar{E}^2} = \text{const} \quad (122)$$

Beweis von $dW/dv_1 |_{r < 0}$

Vor dem eigentlichen Beweis folgen zunächst einige Hilfsbetrachtungen.

1-te Hilfsbetrachtung: Kombiniert man unter Fortlassung des Index 2 Gleichung (25) und Gleichung (27), so erhält man bei fest gewähltem W als eine in der ganzen $p - v -$ Ebene definierte Funktion

$$W(p, v) = \frac{1}{\gamma-1} (pv - p_1 v_1) + \frac{\rho v}{2} (v^2 - v_1^2) \quad (28)$$

Da $W(p, v)$ differenzierbar ist, gilt

$$dW = \dots$$

mit

$$dW = \left(\frac{p}{\gamma-1} + \rho_1 v_1 v \right) dv + \frac{v}{\gamma-1} dp \quad (29)$$

ANHANG I : Eigenschaften der Lösungen mit konstantem P

3-te Hilfsbetrachtung: a) Gleichung (19) liefert durch ihre Ableitung

Beweis von $dv_2/dv_1|_P < 0$

Nach (25) und (26) gilt

$$\rho_1 v_1 v_2 + \frac{1}{\gamma} p_2 = \rho_1 v_1^2 + \frac{1}{\gamma} p_1 + P$$

Hält man P konstant und differenziert nach v_1 , so erhält man mit (19) und (20)

$$\rho_1 v_1 \frac{dv_2}{dv_1} \Big|_P + \frac{1}{\gamma} \frac{dp_2}{dv_1} \Big|_P = - (1 - \frac{\gamma-1}{2} v_1)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} (1 - \frac{\gamma+1}{2} v_1) [v_2 + (1 - \frac{\gamma+1}{2} v_1)] \quad (1^*)$$

Da p_2 auf $S \rightarrow$ eine (monoton wachsende) Funktion von v_2 ist, kann für die linke Seite

$$\left(\rho_1 v_1 + \frac{1}{\gamma} \frac{dp_2}{dv_2} \right) \frac{dv_2}{dv_1} \Big|_P$$

geschrieben werden. Die rechte Seite ist für alle $v_1 < 2/(\gamma+1)$ negativ, und wegen $\rho_1 v_1 \geq 0$ und $\frac{1}{\gamma} dp_2/dv_2 > 0$ wird $\frac{dv_2}{dv_1} \Big|_P < 0$. 2 rutscht also auf $S \rightarrow$ nach links ($dv_2 < 0$), wenn 1 auf $V \leftarrow$ nach rechts rückt ($dv_1 > 0$).

Beweis von $dW/dv_1|_P < 0$

Vor dem eigentlichen Beweis folgen zunächst einige Hilfsbetrachtungen.

1-te Hilfsbetrachtung: Kombiniert man unter Fortlassung des Index 2 Gleichung (25) und Gleichung (27), so erhält man bei fest gewähltem 1 W als eine in der ganzen p - v - Ebene definierte Funktion

$$W(p, v) = \frac{1}{\gamma-1} (p v - p_1 v_1) + \frac{\rho_1 v_1}{2} (v^2 - v_1^2) \quad (2^*)$$

Eigentlicher Beweis:

Da $W(p, v)$ differenzierbar ist, gilt

$$W = \int_1^{\cdot} dW$$

mit $dW = \left(\frac{p}{\gamma-1} + \rho_1 v_1 v \right) dv + \frac{v}{\gamma-1} dp \quad , \quad (3^*)$

Das Verhalten von W lässt sich wobei der Integrationsweg beliebig gewählt werden darf.

2-te Hilfsbetrachtung: a) Gleichung (19) liefert durch ihre Ableitung

$$\frac{d p_1}{d v_1} = -\gamma \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} v_1 \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1} - 1} \quad (4^*)$$

die Steigung von $V \leftarrow$ im Punkte 1. Dividiert man durch die Steigung $-\gamma \xi_1 v_1$ der Geraden (33), so erhält man

$$\frac{\text{Steigung von } V \leftarrow}{\text{Steigung der Geraden}} = \frac{1 - \frac{\gamma-1}{2} v_1}{v_1} = 1 + \frac{1 - \frac{\gamma+1}{2} v_1}{v_1}$$

Für $v_1 < 2/(\gamma+1)$ ist das Verhältnis grösser als 1, d.h. die Gerade verläuft bei $v_1 < 2/(\gamma+1)$ flacher als $V \leftarrow$.

b) Setzt man in (33) $v = v_1$, so wird $p = p_1 + \gamma P$. Die Gerade (33) geht also durch einen Punkt G_1 , der im Abstand γP über 1 liegt. Dies gilt für jede Lage des Punktes 1.

c) Unter Benutzung von Gleichung (20) berechnet man

$$d(\xi_1 v_1) / d v_1 = \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} v_1 \right)^{\frac{3-\gamma}{\gamma-1}} \left(1 - \frac{\gamma+1}{2} v_1 \right)$$

Für $v_1 < 2/(\gamma+1)$ ist $d(\xi_1 v_1) / d v_1 > 0$, d.h. $\xi_1 v_1$ wächst monoton mit v_1 . Daher ist die Gerade (33) umso steiler, je grösser v_1 ist.

d) Gibt man auf $V \leftarrow$ zwei benachbarte Punkte 1 und 1' vor, 1' rechts von 1, so definiert Gleichung (33) bei gegebenem P dazu zwei Geraden g_1 und g_1' . Durch Abtragen der Strecke γP über v_1 bzw. v_1' erhält man die Punkte G_1 und G_1' . Da nach a) g_1 bei v_1 flacher ist als $V \leftarrow$, liegt G_1' unterhalb der Geraden g_1 . Nach c) fällt g_1' steiler ab als g_1 (s. Fig. 1*).

Eigentlicher Beweis:

a) P sei so gross, dass G_1 über der Kurve $S \rightarrow$ liegt (Fig. 1*). 1' soll in differentieller Nachbarschaft rechts vom Punkt 1 liegen und kann stets so nahe bei diesem gewählt werden, dass auch G_1' über $S \rightarrow$ liegt. Die Geraden g_1 und g_1' liefern durch ihre Schnittpunkte mit $S \rightarrow$ die Lösungspunkte 2 und 2'.

Das Verhalten von W lässt sich jetzt durch den Vergleich von $\int_1^2 dW$ und $\int_{1'}^{2'} dW'$ bestimmen. Als Integrationswege werden dabei gewählt:

für den Übergang $1 \rightarrow 2$:

- $1 \rightarrow 1'$ längs $V \leftarrow$,
- $1' \rightarrow H_1'$ längs $v = v_1'$,
- $H_1' \rightarrow 2$ längs g_1 ;

für den Übergang $1' \rightarrow 2'$:

- $1' \rightarrow G_1'$ längs $v = v_1'$,
- $G_1' \rightarrow 2'$ längs g_1' .

Auf den Wegstücken $1' \rightarrow H_1'$ bzw. $1' \rightarrow G_1'$ ist $dv = 0$ und daher nach (3*)

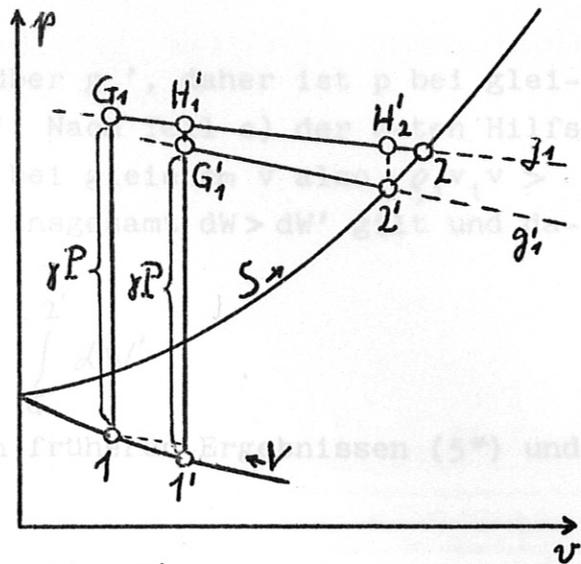


Fig. 1*

Jetzt ist nur noch das Verhalten von W am Übergang $1 \rightarrow 2$ zu ermitteln. Nach (4*) gilt

$$dW = dW' = \frac{v_1'}{\gamma-1} dp$$

Da H_1' über G_1' liegt, gilt

$$\int_{1'}^{H_1'} dW > \int_{1'}^{G_1'} dW' \quad (5^*)$$

Längs g_1 gilt nach (33) und (3*)

$$dp = -\gamma \rho_1 v_1 dv$$

und

$$dW = \frac{1}{\gamma-1} (p - \rho_1 v_1 v) dv \quad (6^*)$$

Mit $\rho_1 v_1 = \rho v$ ((25) unter Fortlassung des Index 2) und mit (18) wird

$$dW = \frac{1}{\gamma-1} (1 - v^2/c^2) \rho c^2 dv$$

und da das zur Integration benutzte Stück von g_1 im Unterschallbereich der $p-v$ -Ebene liegt (also oberhalb der Geraden $p = \rho_1 v_1 v$ von Fig. 4), gilt von H_1' bis 2 $dW > 0$. Bezeichnet H_2' den auf g_1 liegenden Punkt mit der Abszisse v_2' , so folgt:

$$\int_{H_1'}^2 dW > \int_{H_1'}^{H_2'} dW \quad (7^*)$$

Analog zu (6*) gilt längs g_1'

$$dW' = \frac{1}{\gamma-1} (p - \rho_1' v_1' v) dv$$

g_1 liegt zwischen H_1' und H_2' über g_1' , daher ist p bei gleichem v in dW grösser als in dW' . Nach Teil c) der 2-ten Hilfsbetrachtung ist $\rho_1 v_1 < \rho_1' v_1'$, bei gleichem v also $-\rho_1 v_1 v > -\rho_1' v_1' v$, sodass bei gleichem v insgesamt $dW > dW'$ gilt und daraus folgend

$$\int_{H_1'}^{H_2'} dW > \int_{G_1'}^{2'} dW'$$

Fasst man dies zusammen mit den früheren Ergebnissen (5*) und (7*), so erhält man

$$\int_{1'}^2 dW > \int_{1'}^{2'} dW' \quad (8^*)$$

Jetzt ist nur noch der Beitrag des Wegstückes $1 \rightarrow 1'$ am Übergang $1 \rightarrow 2$ zu ermitteln. Nach (4*) gilt auf V_{\leftarrow}

$$dp = -\gamma \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} v\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}-1} dv$$

Setzt man dies in (3*) ein, so ergibt sich

$$dW = \left[\frac{p}{\gamma-1} + \rho_1 v_1 v - \frac{\gamma v}{\gamma-1} \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} v\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}-1} \right] dv$$

Da $1'$ nach Voraussetzung differentiell benachbart zu 1 liegt, kann $v = v_1$ und $p = p_1$ gesetzt werden. Dann ergibt sich mit (19), (20) und nach einigen Umformungen

$$dW = \frac{1}{\gamma-1} \left(1 - \frac{\gamma+1}{2} v_1\right) \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} v_1\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \left(1 - \frac{3(\gamma-1)}{2} v_1\right) dv$$

Für $v_1 < \frac{2}{\gamma+1}$ sind alle drei Klammerfaktoren positiv, es ist $dW > 0$, und zusammen mit (8*) erhält man schliesslich

$$\int_1^2 dW > \int_{1'}^2 dW > \int_{1'}^{2'} dW'$$

Damit ist für die in Fig. 1* dargestellte Situation gezeigt, dass W abnimmt, wenn 1 nach rechts rutscht.

b) Liegt G_1 unterhalb von S_{\rightarrow} , so wird $v_2 < v_1$ und der obige

Beweisgang führt nicht mehr zum Ziel. Weiterhin gültig bleibt jedoch die zuletzt bewiesene Ungleichung

Analog zur 1-ten Hilfsbetrachtung von Anhang I kann P bei gegebenem Zustand 1 durch

$$\int_1^2 dW > \int_{1'}^{2'} dW \quad (9^*)$$

Nun ist nach (3*) mit

$$\int_{1'}^2 dW = \frac{1}{\gamma-1} (p_2 v_2 - p_1' v_1') + \frac{\beta_1 v_1}{2} (v_2^2 - v_1'^2)$$

$$\int_{1'}^{2'} dW' = \frac{1}{\gamma-1} (p_2' v_2' - p_1' v_1') + \frac{\beta_1' v_1'}{2} (v_2'^2 - v_1'^2),$$

und daher
daher gilt

$$\int_{1'}^2 dW - \int_{1'}^{2'} dW' = \frac{1}{\gamma-1} (p_2 v_2 - p_2' v_2') + \frac{1}{2} [\beta_1' v_1' (v_2^2 - v_2'^2) - \beta_1 v_1 (v_1'^2 - v_1'^2)]. \quad (10^*)$$

Wegen $v_1' > v_1$ und $\left. \frac{dv_2}{dv_1} \right|_P < 0$ (erster Teil des Anhangs I) ist $v_2 > v_2'$, damit $p_2 > p_2'$, also

bzw.

$$p_2 v_2 - p_2' v_2' > 0$$

Aus $v_2 > v_2'$ folgt weiterhin

$$v_1'^2 + v_2^2 > v_1'^2 + v_2'^2$$

bzw.

$$v_1'^2 - v_2'^2 > v_1'^2 - v_2^2,$$

ausserdem gilt $\beta_1' v_1' > \beta_1 v_1$, daher ist auch der Ausdruck in der eckigen Klammer von (10*) positiv und es folgt

und (60) mit $M_R = v_2/c$ zu

$$\int_{1'}^2 dW - \int_{1'}^{2'} dW' > 0 \quad (12)$$

Zusammen mit (9*) ergibt sich wieder

$$v_2^2 = \int_1^2 dW \frac{2}{v_1} > \left(\int_{1'}^{2'} dW' \right) \frac{2}{v_1'} \quad (13)$$

Hieraus folgt mit (18) und (25)

$$(p_2' - p_2) / (v_2^2 - v_2'^2) = -\gamma \rho - v_2$$

ANHANG II: Druckverhalten stationärer Strömungen ohne Wärmezufuhr

Analog zur 1-ten Hilfsbetrachtung von Anhang I kann P bei gegebenem Zustand 1 durch

$$P = \int_1 dP$$

ausgedrückt werden mit

$$dP = \rho v dv + \frac{1}{\gamma} dp$$

Bei Strömungen ohne Wärmezufuhr gilt mit Gleichung (31)

$$dv = -v dp / \gamma p$$

und daher

$$dP = \frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{\rho v^2}{p} \right) dp$$

Mit (18) wird daraus

$$dp = \gamma dP / (1 - v^2/c^2) \quad (11^*)$$

bzw.

$$\Delta p = \int \frac{\gamma dP}{1 - v^2/c^2}$$

Daraus folgt für Unterschallströmungen $\Delta p > 0$, für Überschallströmungen $\Delta p < 0$.

ANHANG III: "Spiegelung" der Punkte 2

Die Koordinaten p_2^* und v_2^* des Punktes 2* ergeben sich aus (59) und (60) mit $M_R = v_2/c_2$ zu

$$p_2^* = p_2 + \frac{2\gamma p_2}{\gamma+1} \left(\frac{v_2^2}{c_2^2} - 1 \right) \quad (12)$$

$$v_2^* = v_2 - \frac{2}{\gamma+1} \frac{c_2^2}{v_2} \left(\frac{v_2^2}{c_2^2} - 1 \right) \quad (13)$$

Hieraus folgt mit (18) und (25)

$$(p_2^* - p_2) / (v_2^* - v_2) = -\gamma \rho_1 v_1$$

d.h. 2^* liegt auf der durch 2 gehenden Geraden

$$p = p_2 - \gamma \rho_1 v_1 (v - v_2) .$$

Deren Schnittpunkt S mit der Geraden G ($p = \rho_1 v_1 v$) liegt bei

$$v_s = \frac{1}{\gamma+1} \left(\frac{p_2}{\rho_1 v_1} + \gamma v_2 \right) , \quad (14^*)$$

und das ist genau auf halbem Weg zwischen v_2^* und v_2 , da nach (13*), (14*), (18) und (25) gilt:

[1] R. Courant and "Supersonic Flow and Shock Waves".

K.O. Friedrichs:

$$v_s = \frac{v_2^* + v_2}{2} .$$

[2] J.H. de Leeuw: "The Interaction of a Plane Strong

Damit ist gezeigt, dass S die die beiden Punkte 2 und 2^* verbindende Geradenstrecke halbiert, bzw. dass 2 und 2^* bzgl. S symmetrisch liegen.

of Aerophysics, Report No. 49 (1958).

[3] L.D. Landau und "Fluid Mechanics".

E.M. Lifshitz:

[4] Herrn Prof. Dr. A. Schlüter und Herrn Prof. Dr. R. Wienecke

danke ich für ihr förderndes Interesse an der Arbeit. Bei

Herrn Dr. K.U. von Hagenow bedanke ich mich für zahlreiche

[5] Diskussionen und für wertvolle "Anregungen".
hydrodynamic Channel Flow",
Readers Forum, J. Aero/Space Sci.
(1960).

[6] E.L. Resler Jr. und "The Prospects for Magneto-Aerody-

W.R. Sears:

namios",
J. Aero/Space Sci. (1958).

[7] E. Rebhan: "Eindimensionale Plasmaströmung in gekreuzten elektrischen und magnetischen Feldern",
Zeitschr. f. Naturforsch., im Druck.

Literaturverzeichnis

- [1] R. Courant und
K.O. Friedrichs: "Supersonic Flow and Shock Waves".
- [2] J.H. de Leeuw: "The Interaction of a Plane Strong Shock Wave with a Steady Magnetic Field",
University of Toronto, Institute of Aerophysics, Report No. 49 (1958).
- [3] L.D. Landau und
E.M. Lifshitz: "Fluid Mechanics".
- [4] J. Rosciszewski und
A.K. Oppenheim: "Shock Interaction with an Electromagnetic Field",
The Physics of Fluids 6 (1963).
- [5] J.E. McCune: "On Magnetohydrodynamic Channel Flow",
Readers Forum, J. Aero/Space Sci. (1960).
- [6] E.L. Resler Jr. und
W.R. Sears: "The Prospects for Magneto-Aerodynamics",
J. Aero/Space Sci. (1958).
- [7] E. Rebhan: "Eindimensionale Plasmaströmung in gekreuzten elektrischen und magnetischen Feldern",
Zeitschr. f. Naturforschg., im Druck.