Experimentelle Untersuchung des radialen Druckverlaufs im Wasserstofflichtbogen bei überlagertem axialem Magnetfeld

Experimental Investigation of Radial Pressure Distribution in a Hydrogen Arc Located in an Axial Magnetic Field

H.F. Döbele

IPP 3/27 Februar 1965

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Experimentelle Untersuchung des radialen Druckverlaufs im Wasserstofflichtbogen bei überlagertem axialem Magnetfeld

Experimental Investigation of Radial Pressure Distribution in a Hydrogen Arc Located in an Axial Magnetic Field

H.F. Döbele

IPP 3/27 Februar 1965

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

IPP 3/27 H.F. Döbele Experimental Investigation of Radial Pressure Distribution in a Hydrogen Arc Located in an Axial Magnetic Field, February, 1965 (in German).

ABSTRACT

In a cylindrically symmetric hydrogen arc discharge located in an axial magnetic field, pressure is increased in the region of electrical conductivity. Measurements were made with initial pressures of 1×10^4 and 2×10^4 dynes/cm^2, with temperatures between 8000 and 12,000 ^{o}K, and with magnetic induction of 8.5 and 12.5 k Γ. A mercury manometer was connected to a small opening in the anode to measure the radial pressure distribution in the plasma. Temperatures and electron densities were determined spectroscopically. The Saha equation was found to be applicable in this case. Therefore, experimental results can be compared with theory based on the Saha equation. Excellent agreement between experiment and theory was found.

Inhaltsverzeichnis

Seite

I. Einleitung 1

II. Experimenteller Aufbau und Bogenphänomene .. 7

III. Messmethoden und Messungen 15

1. Temperaturmessungen 15

a) Temperaturmessung aus dem Intensitätsverhältnis zweier Balmerlinien 15

b) Temperaturmessung aus dem Intensitätsverhältnis von Kontinuum und Balmerlinien 16

c) Temperaturbestimmung aus Druck- und Elektronendichte-Messungen 21

d) Temperaturbestimmung aus Druck und Absolutintensität einer Balmerlinie 22

2. Praktische Durchführung der Temperaturmessungen 23

a) Ermittlung der Intensität aus Plattenschwärzungen 23

b) Berechnung des örtlichen Emissionskoeffizienten aus der gemessenen side-on Intensität 26

3. Messung der Elektronendichte 27

4. Druckmessung 39

a) Bestimmung des Druckes aus Temperstur und Dichte 39

b) Direkte Druckmessung 40

α) Messverfahren 40

β) Diskussion der möglichen Fehler der Druckmessung 41

IV. Vergleich von Theorie und Experiment 44

V. Zusammenfassung und Schluss 55

I. Einleitung

Überlagert man einer Lichtbogensäule ein zu ihrer Achse paralleles Magnetfeld, so steigt nach Rechnungen von R.Wienecke [1] der Druck in der Entladung an. Um das Zustandekommen dieser Druckerhöhung zu verstehen, gehen wir von einer zylindersymmetrischen Entladung aus. Der elektrische Strom möge nur parallel zur Achse fliessen und überall soll lokales thermisches Gleichgewicht (LTE) vorhanden sein, d.h. der Ionisationsgrad soll durch die Sahagleichung bestimmt sein. In radialer Richtung sind Gradienten der Partialdrucke von Elektronen, Ionen und Neutralteilchen vorhanden. Diese Gradienten bewirken eine Diffusion von Ladungsträgern zu kälteren Gebieten d.h. in radialer Richtung nach aussen und von Neutralteilchen in umgekehrter Richtung. Da keine radialen Stromkomponenten vorhanden sein dürfen, erfolgt die Ladungsträgerdiffusion ambipolar. Die Diffusionsgeschwindigkeiten von Elektronen und Ionen sind daher in r-Richtung gleich. Da auch kein Massenstrom in dieser Richtung fliessen darf, muss mit

$$\rho_0 v_{0r} + \rho_i v_{ir} + \rho_e v_{er} = \rho v_r = 0 \qquad (1)$$

gelten

$$\rho_0 v_{0r} = -(\rho_i + \rho_e) v_{Lr} \quad ; \quad v_{Lr} = v_{ir} = v_{er} \qquad (1a)$$

Mit der Quasineutralitätsbedingung

$$n_i = n_e = n_L \qquad \text{(nur Einfachionisation)} \qquad (2)$$

folgt weiter:

$$n_0 v_{0r} = -n_L v_{Lr} \qquad (3)$$

Wird nun ein axiales Magnetfeld eingeschaltet, so wird we-

gen der Gyration der geladenen Teilchen deren Diffusionsgeschwindigkeit vermindert. Es strömen im Einschwingzustand zuviel Neutralteilchen nach innen, wodurch der Gasdruck in heisseren Gebieten ansteigt. Dies hat dann ein Ende, wenn durch den jetzt erhöhten Partialdruckgradienten der Ladungsträger und den verminderten der Neutralteilchen ein Gleichgewicht der Massenströme hergestellt ist.

Die Berechnung dieses Effektes geht aus von den Impulserhaltungsgleichungen für ein Dreikomponentenplasma (Elektronen, Ionen und Neutralteilchen) wie sie z.B. von Schlüter [2] angegeben wurden:

$$\rho_i \frac{d\mathfrak{w}_i}{dt} + n_i n_e \varepsilon_{ie}(\mathfrak{w}_i - \mathfrak{w}_e) + n_i n_0 \varepsilon_{i0}(\mathfrak{w}_i - \mathfrak{w}_0) = -\operatorname{grad} p_i + n_i e \mathfrak{E} + n_i e \mathfrak{w}_i \times \mathfrak{B} \tag{4a}$$

$$\rho_e \frac{d\mathfrak{w}_e}{dt} + n_i n_e \varepsilon_{ie}(\mathfrak{w}_e - \mathfrak{w}_i) + n_e n_0 \varepsilon_{e0}(\mathfrak{w}_e - \mathfrak{w}_0) = -\operatorname{grad} p_e - n_e e \mathfrak{E} - n_e e \mathfrak{w}_e \times \mathfrak{B} \tag{4b}$$

$$\rho_0 \frac{d\mathfrak{w}_0}{dt} + n_i n_0 \varepsilon_{i0}(\mathfrak{w}_0 - \mathfrak{w}_i) + n_e n_0 \varepsilon_{e0}(\mathfrak{w}_0 - \mathfrak{w}_e) = -\operatorname{grad} p_0 \tag{4c}$$

Dabei sind $\mathfrak{w}_i$, $\mathfrak{w}_e$ und $\mathfrak{w}_0$ die Schwerpunktsgeschwindigkeiten der Ionen, Elektronen und Neutralteilchen. Die ε_{kl} sind Reibungskoeffizienten. Die Addition dieser Gleichungen führt zu der Beziehung:

$$\rho \frac{d\mathfrak{w}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \mathfrak{j}' \times \mathfrak{B} \tag{5}$$

Dabei ist

$$\mathfrak{j}' = e n_i (\mathfrak{w}_i - \mathfrak{w}_e)$$

$$\rho \mathfrak{w} = \rho_i \mathfrak{w}_i + \rho_e \mathfrak{w}_e + \rho_0 \mathfrak{w}_0$$

$$p = p_i + p_e + p_0$$

Für den Druck gilt wegen der Quasineutralität:

$$p = 2p_i + p_0 \tag{6}$$

Für jede Komponente gilt ferner das ideale Gasgesetz:

$$p_m = n_m k T \tag{7}$$

In Gleichung (6) kann der Ionendruck mit Hilfe der Sahagleichung eliminiert werden:

$$\frac{p_i^2}{p_o} = \frac{2 Z_i (2\pi m_e)^{3/2} (kT)^{5/2}}{Z_o h^3} e^{-\frac{\chi_i}{kT}} = U(T) \qquad (8)$$

Dabei ist Z_o die Zustandsumme des Neutralatoms, Z_i diejenige des Ions, χ_i die Ionisierungsenergie. Die übrigen Symbole haben ihre übliche Bedeutung. Eine geeignete Zusammenfassung der Gleichungen (4a) bis (4c) und (5) liefert:

$$\mathrm{grad}_r p = \frac{e B_z^2}{(n_i + n_o)[n_i \varepsilon_{ie}(\varepsilon_{io} + \varepsilon_{eo}) + n_o \varepsilon_{io} \varepsilon_{eo}]} \mathrm{grad}_r p_o \qquad (9)$$

Bei dieser Ableitung ist vorausgesetzt, dass $v_r = v_\varphi = 0$ ist. Aus (6) und (8) bekommt man:

$$p_o = p + 2U - 2\sqrt{pU + U^2} \qquad (10)$$

$$p_i = \sqrt{pU + U^2} - U \qquad (11)$$

Die Differentiation ergibt:

$$\mathrm{grad}\, p_o = \left(\frac{\partial p_o}{\partial p}\right)_T \mathrm{grad}\, p + \left(\frac{\partial p_o}{\partial T}\right)_p \mathrm{grad}\, T \qquad (12)$$

Die Ausdrücke $\left(\frac{\partial p_o}{\partial p}\right)_T$ und $\left(\frac{\partial p_o}{\partial T}\right)_p$ werden aus (10) gewonnen. Wenn wir das Ergebnis von (12) in (9) einsetzen, so erhalten wir eine Gleichung der Form:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{F_1(p,T)\, B_z^2}{F_2(p,T) + F_3(p,T)\, B_z^2} \cdot \frac{dT}{dr} \qquad (13)$$

mit $\quad F_1 = n_o^2 e^2 \frac{dU}{dT}$

$$F_2 = n_i (n_0 + n_i)^2 \left[n_i \varepsilon_{ie} (\varepsilon_{io} + \varepsilon_{eo}) + n_0 \varepsilon_{io} \varepsilon_{eo} \right]$$

$$F_3 = n_i n_0 e^2$$

Da in Bogenentladungen die Temperatur eine monotone Funktion des Radius ist, ist es zweckmässig, zu schreiben:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{dp}{dT} \frac{dT}{dr} \tag{14}$$

Das liefert:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{F_1(p,T)\, B_z^2}{F_2(p,T) + F_3(p,T)\, B_z^2} \tag{15}$$

Das auf das Plasma wirkende Magnetfeld ist nicht ausschliesslich durch das in den Spulen erzeugte Feld gegeben, vielmehr spielen die Ströme im Plasma eine Rolle. Die vom axialen Bogenstrom erzeugte Feldkomponente in φ-Richtung kann bei den im Experiment verwendeten Stromstärken vernachlässigt werden. Die φ-Ströme im Plasma, die von den abgelenkten Ladungsträgern herrühren, erzeugen ein Magnetfeld, das das angelegte Feld schwächt. Aus (5) erhält man unter der Voraussetzung der Stationarität und $v_r = v_\varphi = 0$:

$$\operatorname{grad} p = \frac{\operatorname{rot} \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}}{\mu_0} = -\frac{1}{\mu_0} \operatorname{grad} \frac{B^2}{2} + \frac{1}{\mu_0} (\mathfrak{B} \cdot \operatorname{grad}) \mathfrak{B} \tag{16}$$

Der letzte Term verschwindet in der betrachteten Geometrie, und es bleibt:

$$\operatorname{grad} \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = 0 \tag{17}$$

Anhand dieser Gleichung kann man das Auftreten der Druckerhöhung besonders anschaulich verstehen:

Die in φ-Richtung abgelenkten Ladungsträger erzeugen einen elektrischen Strom in φ-Richtung. Das von ihm verursachte magnetische Feld ist so gerichtet, dass es das von aussen angelegte schwächt. Der Gradient des Magnetfeldes wird nach (17) durch einen Druckgradienten kompensiert.
Aus (17) erhält man durch Integration:

$$B_z^2 = B_{z_0}^2 + 2\mu_0 (p_A - p) \tag{18}$$

Dabei ist B_{zo} das in den Spulen erzeugte Magnetfeld und p_A der Druck ausserhalb der Zone elektrischer Leitfähigkeit. Parameter der Rechnung müssen also B_{zo} und p_A sein.

Zur expliziten Lösung der Differentialgleichung (15) müssen noch die Reibungskoeffizienten bekannt sein. Sie stehen mit den gaskinetischen Stossquerschnitten in folgendem Zusammenhang:

$$\varepsilon_{ke} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{8}{\pi} kT \frac{m_k m_e}{m_k + m_e}} \cdot Q_{ke} \tag{19}$$

Für die Stossquerschnitte wurde gesetzt:

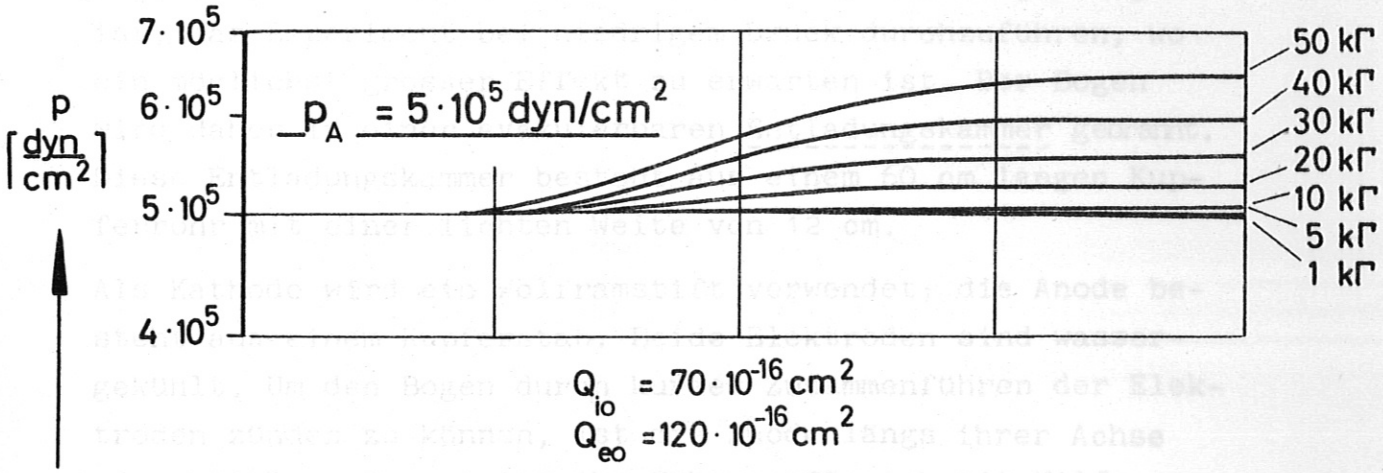
$$Q_{ie} = \frac{2{,}78}{T^2} \cdot 10^{-6} \ln \frac{(kT)^{4/3}}{e^2 p_e^{1/3}} \quad cm^2$$

$$Q_{io} = 70 \cdot 10^{-16} \; cm^2$$

$$Q_{eo} = 120 \cdot 10^{-16} \; cm^2$$

Literaturhinweise zu diesen Stossquerschnitten finden sich in [1] . Mit diesen Informationen kann die Differentialgleichung (15) numerisch gelöst werden. Die Resultate der Rechnungen für Wasserstoff sind für zwei charakteristische Fälle in Abb. 1 und und Abb. 2 dargestellt.

Ziel dieser Arbeit ist es, das Auftreten dieses Effektes in einer Wasserstoffentladung zu untersuchen und die Gültigkeit der Theorie zu überprüfen.


p
[dyn/cm²]
7·10⁵
6·10⁵
5·10⁵
4·10⁵
p_A = 5·10⁵ dyn/cm²
Q_io = 70·10⁻¹⁶ cm²
Q_eo = 120·10⁻¹⁶ cm²
50 kΓ
40 kΓ
30 kΓ
20 kΓ
10 kΓ
5 kΓ
1 kΓ

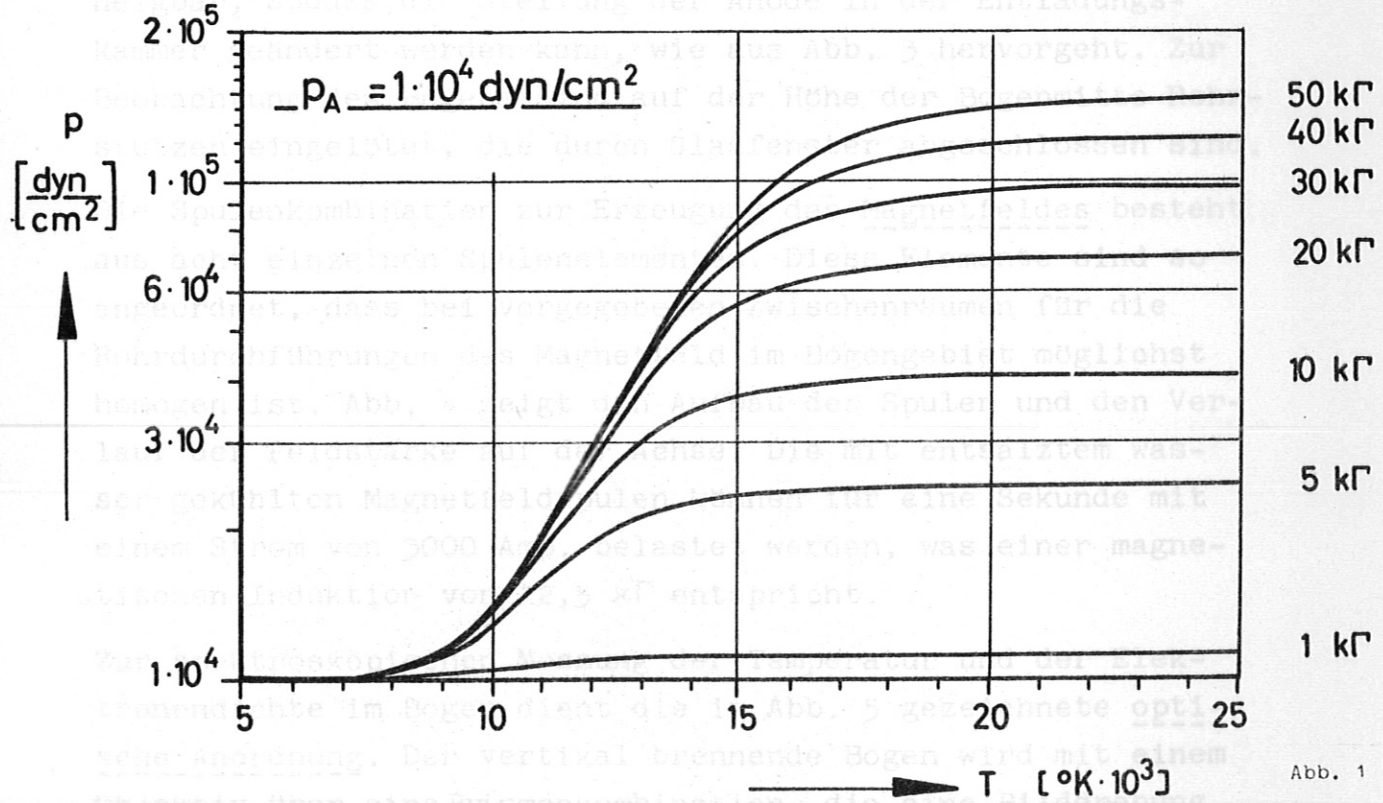

p
[dyn/cm²]
2·10⁵
1·10⁵
6·10⁴
3·10⁴
1·10⁴
p_A = 1·10⁴ dyn/cm²
5
10
15
20
25
T [°K·10³]
50 kΓ
40 kΓ
30 kΓ
20 kΓ
10 kΓ
5 kΓ
1 kΓ

Abb. 1

Abb. 2

II. Experimenteller Aufbau und Bogenphänomene

Aus Abb. 1 und Abb. 2 wird ersichtlich, dass es günstig ist, das Experiment bei niedrigem Druck durchzuführen, wo ein möglichst grosser Effekt zu erwarten ist. Der Bogen wird daher in einer evakuierbaren Entladungskammer gebrannt. Diese Entladungskammer besteht aus einem 60 cm langen Kupferrohr mit einer lichten Weite von 12 cm.

Als Kathode wird ein Wolframstift verwendet; die Anode besteht aus einem Kupferstab. Beide Elektroden sind wassergekühlt. Um den Bogen durch kurzes Zusammenführen der Elektroden zünden zu können, ist die Anode längs ihrer Achse verschiebbar. Ferner ist ihr Führungsflansch mit Hilfe von Stellschrauben in zwei zueinander senkrechten Richtungen neigbar, sodass die Stellung der Anode in der Entladungskammer geändert werden kann, wie aus Abb. 3 hervorgeht. Zur Beobachtung des Bogens sind auf der Höhe der Bogenmitte Rohrstutzen eingelötet, die durch Glasfenster abgeschlossen sind.

Die Spulenkombination zur Erzeugung des Magnetfeldes besteht aus acht einzelnen Spulenelementen. Diese Elemente sind so angeordnet, dass bei vorgegebenen Zwischenräumen für die Rohrdurchführungen das Magnetfeld im Bogengebiet möglichst homogen ist. Abb. 4 zeigt den Aufbau der Spulen und den Verlauf der Feldstärke auf der Achse. Die mit entsalztem Wasser gekühlten Magnetfeldspulen können für eine Sekunde mit einem Strom von 3000 Amp. belastet werden, was einer magnetischen Induktion von 12,5 kΓ entspricht.

Zur spektroskopischen Messung der Temperatur und der Elektronendichte im Bogen dient die in Abb. 5 gezeichnete optische Anordnung. Der vertikal brennende Bogen wird mit einem Objektiv über eine Prismenkombination, die eine Bilddrehung um 90° bewirkt, auf den Spalt des Spektrographen abgebildet. Dadurch wird erreicht, dass mit einer Spektralaufnahme jeweils ein Querschnitt der Entladung erfasst wird. Verwendet wird ein Steinheil G-H Prismenspektrograph mit Glasausrüstung. Das Objektiv wird soweit abgeblendet, dass der effektive Durchmesser kleiner als der Durchmesser des Beobachtungs-

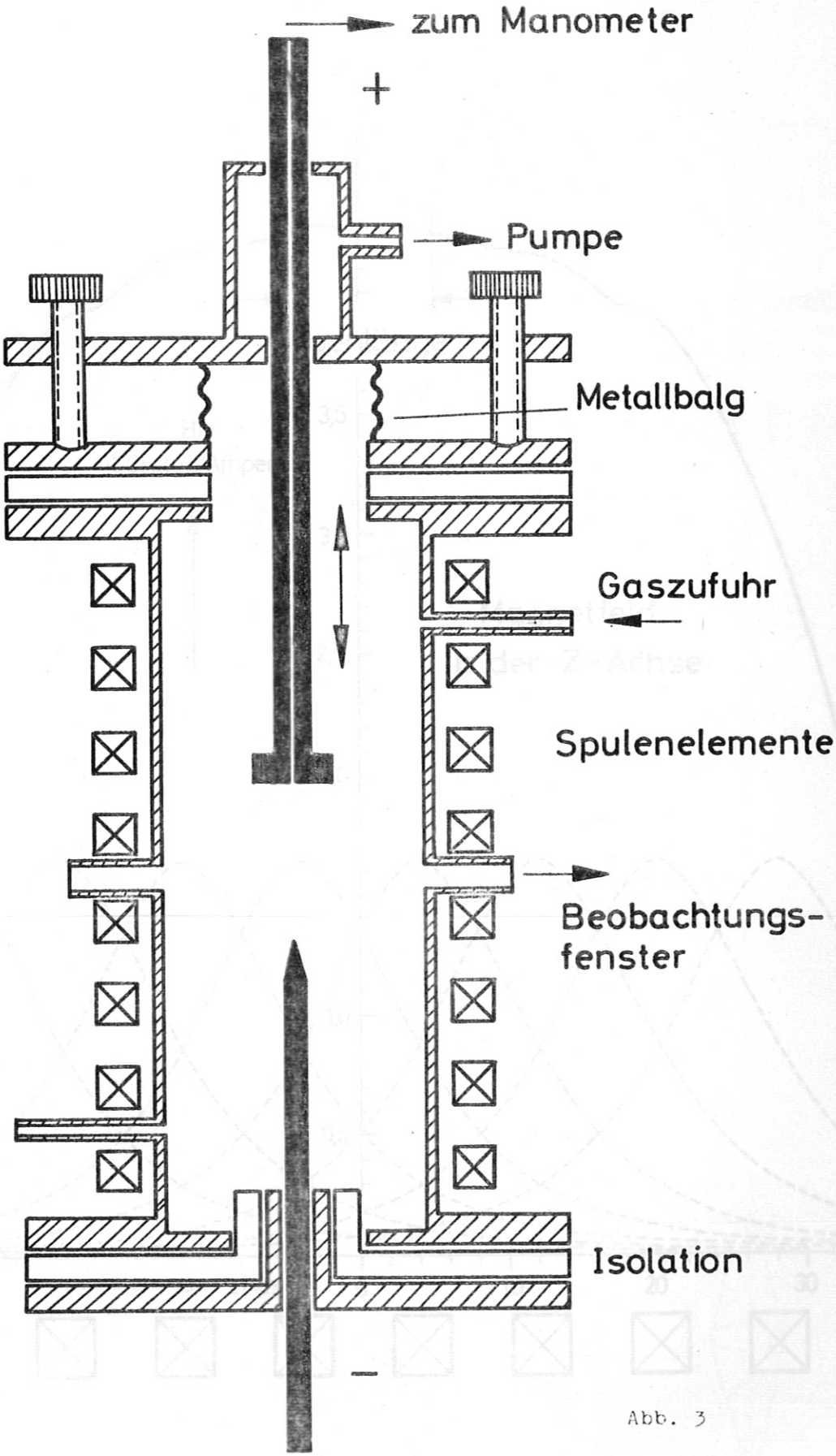

zum Manometer
+
Pumpe
Metallbalg
Gaszufuhr
Spulenelemente
Beobachtungs-
fenster
Isolation
–

Abb. 3

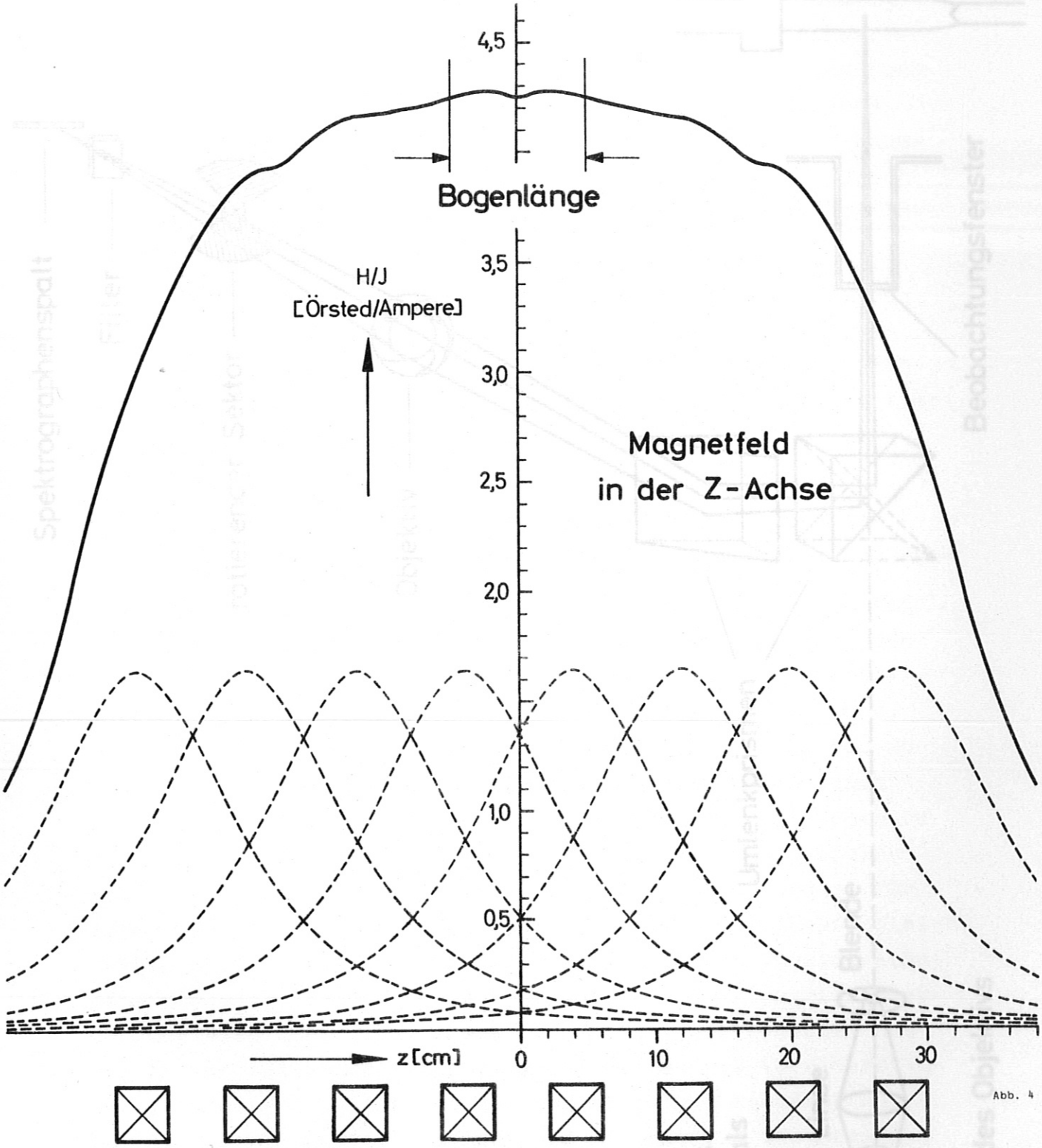

4,5
Bogenlänge
H/J
[Örsted/Ampere]
3,5
3,0
2,5
2,0
1,0
0,5
Magnetfeld
in der Z-Achse
z [cm]
0
10
20
30

Abb. 4

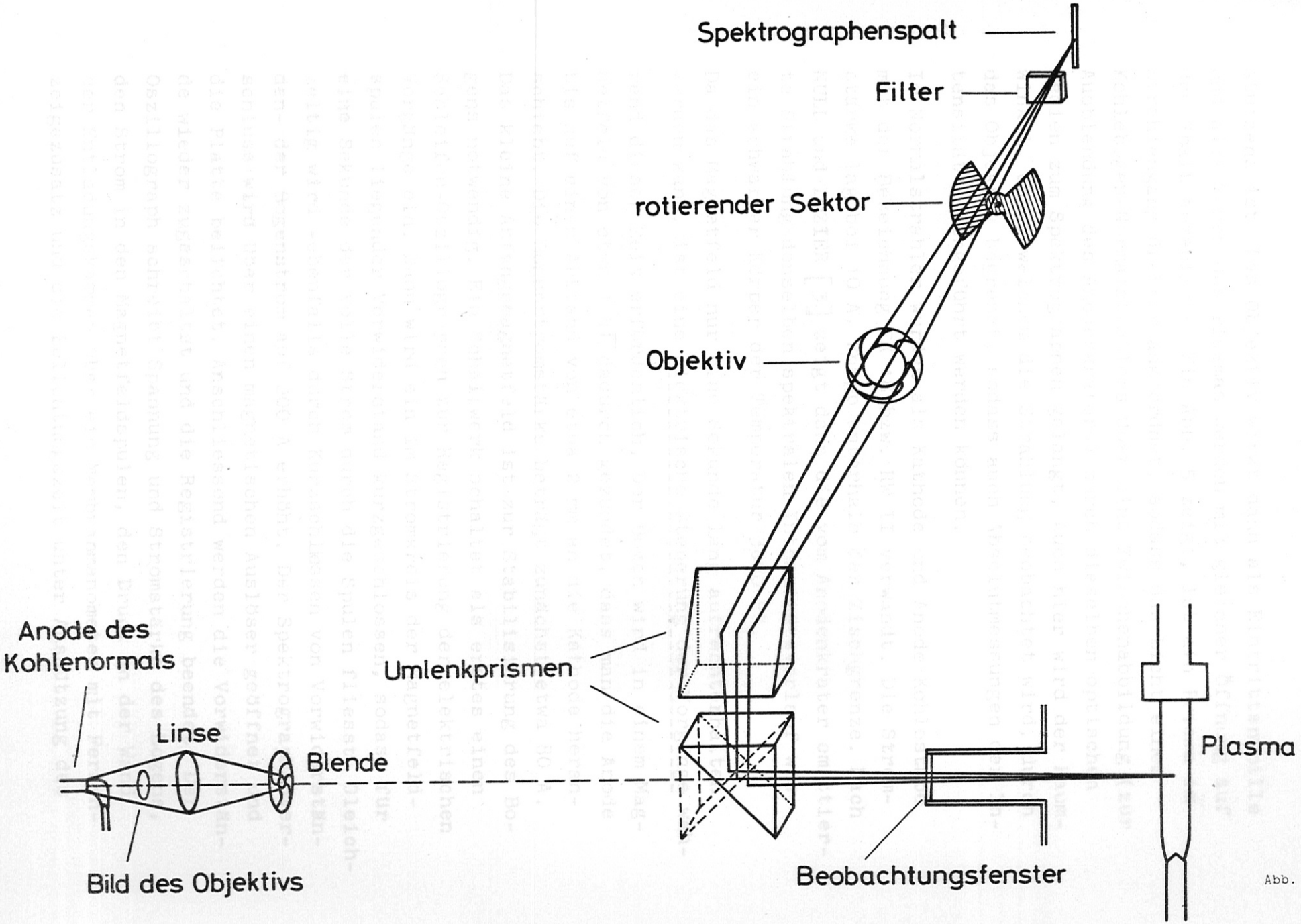

Spektrographenspalt
Filter
rotierender Sektor
Objektiv
Umlenkprismen
Anode des Kohlenormals
Linse
Blende
Bild des Objektivs
Beobachtungsfenster
Plasma

Abb. 5

stutzens ist. Das Objektiv wirkt dann als Eintrittspupille und alle Zonen des Plasmas werden mit gleicher Öffnung auf den Spalt abgebildet. Wie Abb. 5 zeigt, ist ein Prisma im Strahlengang drehbar angeordnet, sodass das Licht eines Kohlebogen-Normalstrahlers über eine Zwischenabbildung (zur Ausblendung des Anodenkraters) durch dieselben optischen Medien zum Spektrographen gelangt. Auch hier wird der Raumwinkel, unter welchem die Strahlung beobachtet wird, durch das Objektiv begrenzt, sodass auch Absolutmessungen der Intensität durchgeführt werden können.

Im Normalstrahler wurden als Kathode und Anode Kohlestäbe mit der Bezeichnung EK 18 bzw. RW II verwandt. Die Stromstärke lag bei 10 A, knapp unterhalb der Zischgrenze. Nach NULL und LOZIER [3] zeigt dann die vom Anodenkrater emittierte Strahlung denselben spektralen Intensitätsverlauf wie ein schwarzer Körper der Temperatur 3800 °K.

Da das Magnetfeld nur eine Sekunde lang aufrechterhalten werden kann, ist eine elektrische Steuerung der Vorgänge während dieser Zeit erforderlich. Der Bogen wird in einem Magnetfeld von etwa 1 kΓ dadurch gezündet, dass man die Anode bis auf einen Abstand von etwa 2 mm an die Kathode heranschiebt. Die Bogenstromstärke beträgt zunächst etwa 80 A. Das kleine Anfangsmagnetfeld ist zur Stabilisierung des Bogens notwendig. Ein Schaltwerk schaltet als erstes einen Schleifen-Oszillographen zur Registrierung der elektrischen Vorgänge ein. Dann wird ein im Stromkreis der Magnetfeldspulen liegender Vorwiderstand kurzgeschlossen, sodass für eine Sekunde der volle Strom durch die Spulen fliesst. Gleichzeitig wird -ebenfalls durch Kurzschliessen von Vorwiderständen- der Bogenstrom auf 200 A erhöht. Der Spektrographenverschluss wird über einen magnetischen Auslöser geöffnet und die Platte belichtet. Anschliessend werden die Vorwiderstände wieder zugeschaltet und die Registrierung beendet. Der Oszillograph schreibt Spannung und Stromstärke des Bogens, den Strom in den Magnetfeldspulen, den Druck an der Wand der Entladungskammer über ein Membranmanometer mit Fernanzeigezusatz und die Belichtungszeit unter Ausnützung des

Blitzkontaktes des Spektrographenverschlusses. Die Konstanz der Verschlussöffnungszeit und die Übereinstimmung mit der Anzeige über den Blitzkontakt wurde mit einer Photodiode überprüft. Abb. 6 zeigt den gesamten Aufbau des Experimentes.

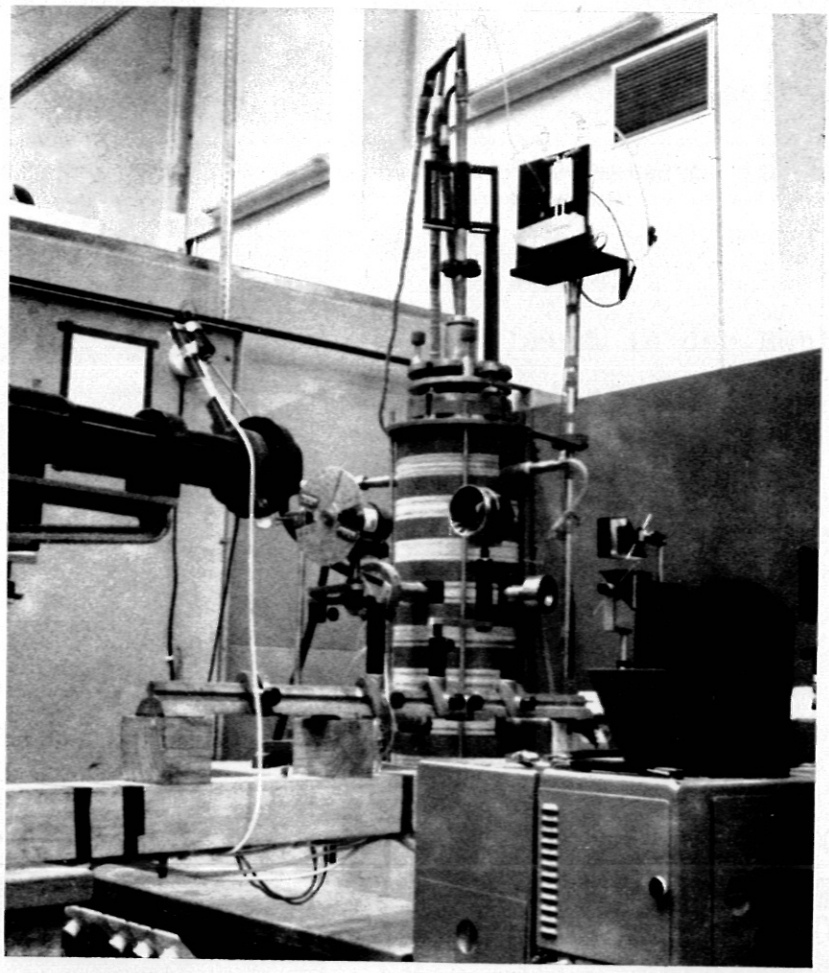
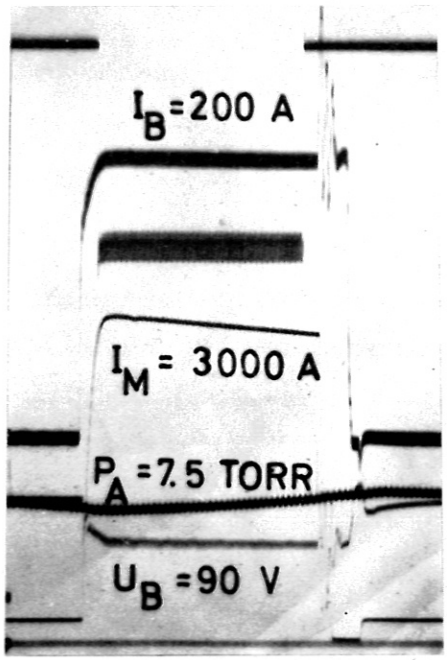


Abb. 6

Für die Messung wurden folgende Parameterkombinationen gewählt:

1. $I_{Bogen} = 200$ A, $p_A = 1 \cdot 10^4$ dyn/cm^2, $B_{zo} = 8{,}5$ kΓ
2. $I_{Bogen} = 200$ A, $p_A = 1 \cdot 10^4$ dyn/cm^2, $B_{zo} = 12{,}5$ kΓ
3. $I_{Bogen} = 200$ A, $p_A = 2 \cdot 10^4$ dyn/cm^2, $B_{zo} = 12{,}5$ kΓ

Für die übrigen Entladungsparameter wird auf die Oszillogramme in Abb. 7 verwiesen.



Ruhestellung der Druckanzeige, entspr. 760 Torr, Nullstellung der Belichtungszeitanzeige

Bogenstromstärke

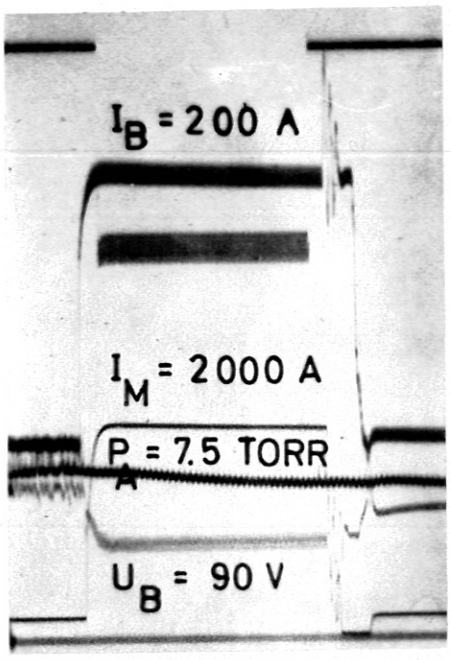
Belichtungszeitanzeige

Stromstärke in den Magnetfeldspulen

Druck in der Entladungskammer

Bogenspannung

Nullstellung der Bogenstromstärke, Bogenspannung und Spulenstromstärke



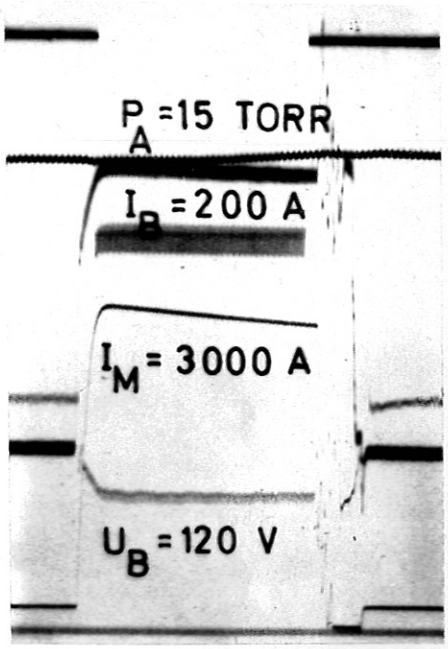
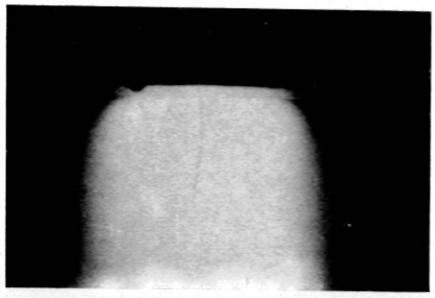


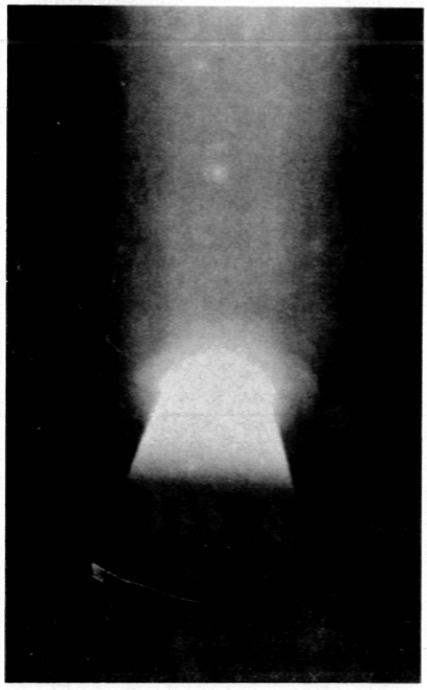
Abb. 7

Bei Zuschalten des vollen Magnetfeldes verringert sich der Bogendurchmesser und der Bogen erscheint als schlanke, zylindersymmetrische Säule. Bei kleineren Magnetfeldstärken ist diese Symmetrie nicht mehr gegeben, vielmehr weitet sich dann der Bogen zur Anode hin auf und erscheint kegelförmig. Dies ist auch bei Drucken grösser als $2 \cdot 10^4$ dyn/cm^2 der Fall, woraus sich die Einschränkung auf die gewählten Parameter ergibt.

Ein Anodenbrennfleck tritt nicht auf, die Bogensäule ist bis an die Anodenoberfläche fortgesetzt. Ebenso zeigt auch die Kathode keinen ausgesprochenen Brennfleck, wie aus Abb.8 ersichtlich ist. Die Bogenlänge beträgt bei allen Versuchen 10 cm.



Photographische Aufnahme des Anodengebietes.



Aufnahme des Bogens in der Kathodengegend.
(Geänderte Belichtungszeit gegenüber oben, um die Kathode hervorzuheben.)

Abb. 8

III. Messmethoden und Messungen

Für den Vergleich von Theorie und Experiment sind Temperatur und Druck als Funktion des Bogenradius zu messen.

1. Temperaturmessmethoden

Für die im folgenden besprochenen Methoden wird stets vorausgesetzt, dass ein 'optisch dünnes' Plasma vorliegt, d.h. die Strahlung verlässt das Plasma ohne Reabsorption.

a) Temperaturmessung aus dem Intensitätsverhältnis zweier Balmerlinien

Die Gesamtintensität einer Linie, die aus 1 cm^3 Plasma in die Raumwinkeleinheit emittiert wird, ist gegeben durch (vgl. [4])

$$i_L = \frac{1}{4\pi} A_n^m \frac{g_m}{Z_0} h\nu_L n_0 e^{-\frac{E_m}{kT}} \tag{20}$$

Dabei ist n_0 die Gesamtzahl aller Neutralatome pro cm^3, A_n^m die Übergangswahrscheinlichkeit, g_m und E_m das statistische Gewicht bzw. die Anregungsenergie des oberen Zustandes und Z_0 die Zustandsumme des Atoms. Das Intensitätsverhältnis zweier Linien ergibt sich in vereinfachter Schreibweise zu:

$$V = \frac{i_1}{i_2} = \frac{A_1 g_1 \nu_1}{A_2 g_2 \nu_2} e^{\frac{E_2 - E_1}{kT}} \tag{21}$$

Für den relativen Fehler der Temperatur ergibt die Fehlerrechnung:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{kT}{E_2 - E_1} \cdot \frac{\Delta V}{V} \tag{22}$$

Da bei Wasserstoff die Terme nach oben sehr nahe zusammenrücken, beträgt bei Linien der Balmerserie der Wert

$E_2 - E_1$ nur etwa 1 eV, d.h. bei Temperaturen von etwa 12000 ^{o}K ist die Temperatur nur mit der Genauigkeit des Intensitätsverhältnisses messbar.

b) Temperaturmessung aus dem Intensitätsverhältnis von Kontinuum und Balmerlinien

Eine andere Möglichkeit zur Bestimmung der Temperatur bietet das Verhältnis der Kontinuumsintensität an einer Stelle zwischen den Balmerlinien zur Intensität einer Balmerlinie. Das in diesem Gebiet des Spektrums liegende Kontinuum setzt sich zusammen aus der frei-frei-Strahlung und den Seriengrenzkontinua der Paschenserie und höherer Serien. UNSOLD [5] gibt für den Absorptionsquerschnitt pro Atom im m-ten Quantenzustand (im Anschluss an Rechnungen von KRAMERS) folgenden Ausdruck:

$$a_m(\nu) = \frac{64\pi^4 m_e e^{10}}{3\sqrt{3}\, c h^6 m^5 \nu^3} \tag{23}$$

Zusammen mit der Boltzmannformel:

$$n_m = n_0 \frac{g_m}{Z_0} e^{-\frac{E_m}{kT}} \tag{24}$$

wo $g_m = 2\,m^2$ das statistische Gewicht und $E_m = \chi_i(1 - \frac{1}{m^2})$ die Anregungsenergie ist, kann man den zum m-ten Quantenzustand gehörigen Absorptionskoeffizienten schreiben:

$$K_m(\nu) = n_m a_m(\nu) = \frac{128\pi^4 m_e e^{10}}{3\sqrt{3}\, c h^6 m^3 \nu^3} \left(\frac{n_0}{Z_0}\right) e^{-\frac{E_m}{kT}} \tag{25}$$

Daraus wollen wir die Intensität der im sichtbaren emittierten Kontinuumsstrahlung ermitteln. Da bei Wasserstoff die oberen Terme nahe zusammenliegen, kann man nach UNSOLD [5] statt der Summation über die im Sichtbaren ($m > 2$) auftretenden Terme für $m > 4$ integrieren.

Wir betrachten also

$$\sum_{m=5}^{\infty} \frac{1}{m^3} e^{-\chi_i\left(1-\frac{1}{m^2}\right)\frac{1}{kT}} = \sum_{m=5}^{\infty} \frac{1}{m^3} e^{-\frac{\chi_i}{kT}} e^{\frac{\chi_i}{m^2 kT}}$$

Der Ausdruck geht über in das Integral:

$$J_1 = e^{-\frac{\chi_i}{kT}} \int_5^{\infty} \frac{1}{m^3} e^{\frac{\chi_i}{m^2 kT}} dm$$

Mit der Substitution $x = -1/m^2$ folgt:

$$J_1 = \frac{1}{2} e^{-\frac{\chi_i}{kT}} \int_{-\frac{1}{25}}^{0} e^{-\frac{\chi_i}{kT} x} dx$$

Den f-f-Absorptionskoeffizienten kann man nach UNSÖLD [5] miterfassen, wenn man bei der Integration nicht bei der Ionisierungsenergie aufhört, sondern auch über die freien Energiezustände bis unendlich integriert, wenn also $-1/m^2$ von 0 bis ∞ läuft. Wir haben dann zu J_1 noch J_2 zu addieren, wo

$$J_2 = \frac{1}{2} e^{-\frac{\chi_i}{kT}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\chi_i}{kT} x} dx \qquad \text{ist.}$$

Die Summe der Integrale ist:

$$J_1 + J_2 = \frac{1}{2} e^{-\frac{\chi_i}{kT}} \int_{-\frac{1}{25}}^{\infty} e^{-\frac{\chi_i}{kT} x} dx = \frac{1}{2} e^{-\frac{\chi_i}{kT}} \frac{kT}{\chi_i} e^{\frac{\chi_i}{25kT}} \tag{26}$$

Damit erhalten wir für den gesamten Absorptionskoeffizienten, der f-f- und f-g-Strahlung umfasst, für den sichtbaren Bereich :

$$K(\nu) = \frac{128\pi^4 m_e e^{10}}{3\sqrt{3}\, c h^6 \nu^3} \left(\frac{n_0}{Z_0}\right) e^{-\frac{\chi_i}{kT}} \left\{ \sum_{m=3}^{4} \frac{1}{m^3} e^{\frac{\chi_i}{m^2 kT}} + \frac{1}{2} \frac{kT}{\chi_i} e^{\frac{\chi_i}{25kT}} \right\} \tag{27}$$

Den Emissionskoeffizienten erhält man aus dem Kirchhoff'schen Satz, wobei die erzwungene Emission dadurch berücksichtigt wird, dass wir zur Beschreibung der schwarzen Strahlung die Wien'sche Form verwenden:

$$\varepsilon(\nu) = K(\nu)\, B^*(\nu)$$

$$B^*(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\, e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

Damit ergibt sich die im Wellenlängenintervall $\Delta\lambda$ emittierte Intensität des Kontinuums

$$\varepsilon(\lambda)\Delta\lambda = \frac{256\pi^4 m_e e^{10}}{3\sqrt{3}c^2h^5\lambda^2}\left(\frac{n_0}{Z_0}\right) e^{-\frac{hc}{\lambda kT}} e^{-\frac{\chi_i}{kT}} \left\{\sum_{m=3}^{4}\frac{1}{m^3} e^{\frac{\chi_i}{m^2kT}} + \frac{1}{2}\frac{kT}{\chi_i} e^{\frac{\chi_i}{25kT}}\right\}\Delta\lambda \qquad (28)$$

Die Gesamtintensität der Linie H_β ist gegeben durch:

$$i_{H_\beta} = \frac{1}{4\pi} A_2^4 \frac{hc}{\lambda_\beta}\left(\frac{n_0}{Z_0}\right) 32\, e^{-\frac{E_4}{kT}}$$

Für das Verhältnis $V = \dfrac{\varepsilon(\lambda)\Delta\lambda}{i_{H_\beta}}$ ergibt sich daher:

$$V = \frac{32\pi^5 m_e e^{10}\lambda_\beta}{3\sqrt{3}c^3h^6A_2^4\lambda^2}\, e^{-\frac{\chi_i}{kT}-\frac{hc}{\lambda kT}} \left\{\sum_{m=3}^{4}\frac{1}{m^3} e^{\frac{\chi_i}{m^2kT}} + \frac{1}{2}\frac{kT}{\chi_i} e^{\frac{\chi_i}{25kT}}\right\}\Delta\lambda \qquad (29)$$

Nach Einsetzen der Konstanten:

$$V = \frac{2{,}9\cdot 10^{-3}}{\lambda^2}\, e^{-\left(\frac{0{,}85}{kT} + \frac{12{,}406}{\lambda kT}\cdot 10^{-5}\right)} \left\{\sum_{m=3}^{4}\frac{1}{m^3} e^{\frac{13{,}59}{m^2kT}} + \frac{1}{2}\frac{kT}{13{,}59} e^{\frac{13{,}59}{25kT}}\right\}\Delta\lambda \qquad (30)$$

Dabei ist kT in eV und λ in cm einzusetzen. Abb. 9 zeigt V für $\lambda = 6500\ 10^{-8}$ cm und $\Delta\lambda = 1\cdot 10^{-8}$ cm.

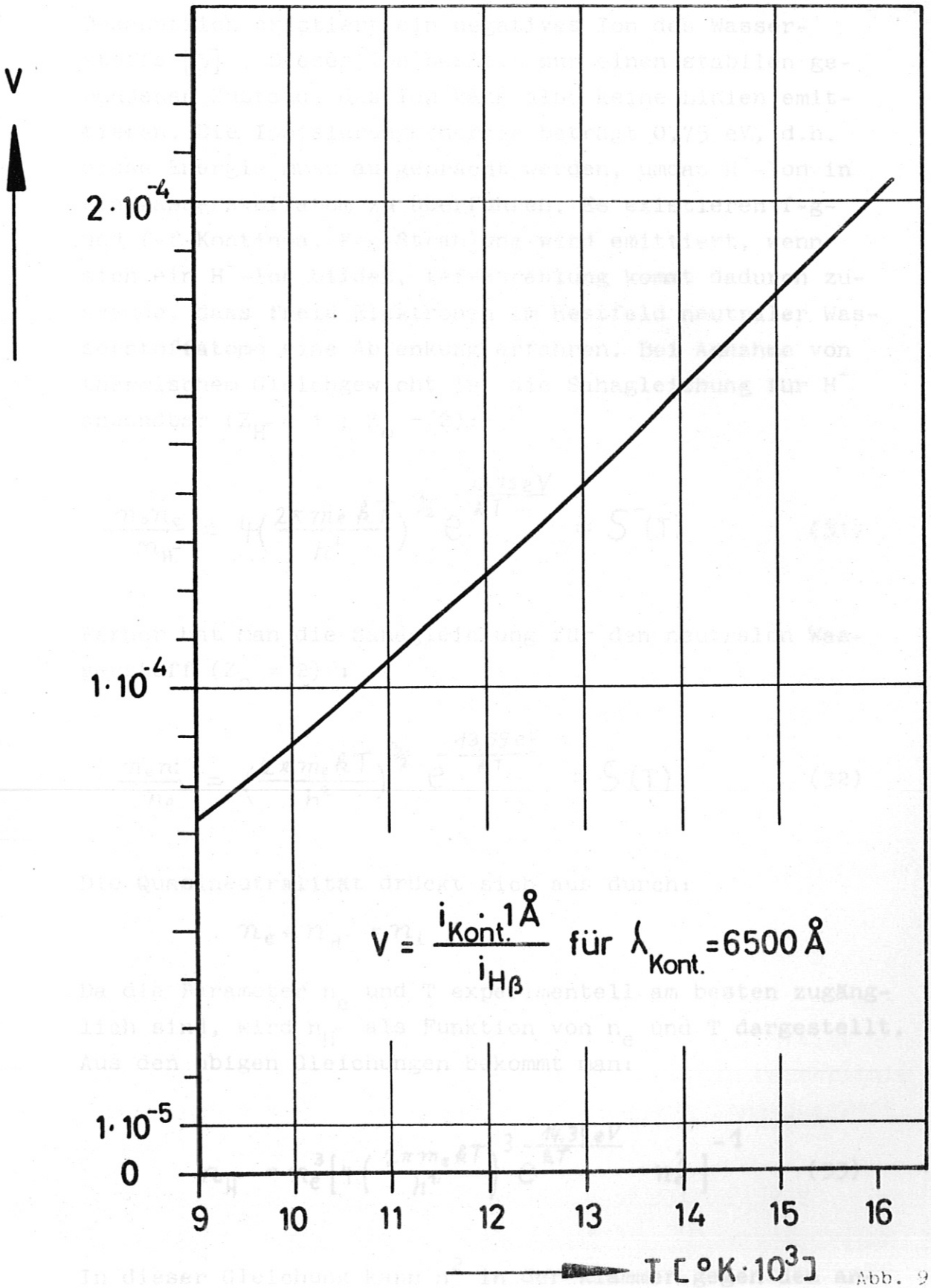

V
2·10^-4
1·10^-4
1·10^-5
0
9
10
11
12
13
14
15
16
T [°K·10^3]
V = i_Kont. 1Å / i_Hβ für λ_Kont. = 6500 Å

Abb. 9

Es erhebt sich die Frage nach der Abgrenzung der Gültigkeit der Formel (30) zu kleinen Temperaturen hin. Bekanntlich existiert ein negatives Ion des Wasserstoffs [5] . Dieses Ion besitzt nur einen stabilen gebundenen Zustand, das Ion kann also keine Linien emittieren. Die Ionisierungsenergie beträgt 0,75 eV, d.h. diese Energie muss aufgebracht werden, umdas H^--Ion in ein Wasserstoffatom zu überführen. Es existieren f-g- und f-f-Kontinua. F-g-Strahlung wird emittiert, wenn sich ein H^--Ion bildet, f-f-Strahlung kommt dadurch zustande, dass freie Elektronen im Restfeld neutraler Wasserstoffatome eine Ablenkung erfahren. Bei Annahme von thermischem Gleichgewicht ist die Sahagleichung für H^- anwendbar ($Z_{H^-} = 1$; $Z_o = 2$):

$$\frac{n_o n_e}{n_{H^-}} = 4\left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{0,75\,eV}{kT}} = S^-(T) \qquad (31)$$

Ferner hat man die Sahagleichung für den neutralen Wasserstoff ($Z_o = 2$) :

$$\frac{n_e n_i}{n_o} = \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{13,59\,eV}{kT}} = S(T) \qquad (32)$$

Die Quasineutralität drückt sich aus durch:

$$n_e + n_{H^-} = n_i$$

Da die Parameter n_e und T experimentell am besten zugänglich sind, wird n_{H^-} als Funktion von n_e und T dargestellt. Aus den obigen Gleichungen bekommt man:

$$n_{H^-} = n_e^3\left[4\left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^3 e^{-\frac{14,34\,eV}{kT}} - n_e^2\right]^{-1} \qquad (33)$$

In dieser Gleichung kann n_e^2 in der Klammer gegen den anderen Term vernachlässigt werden, da dieser für $T=10^4$ °K

in der Grössenordnung von 10^{50} liegt. Aus (33) erkennt man, dass zu hohen Elektronendichten und niedrigen Temperaturen hin die Zahl der H^--Ionen zunimmt. Für $n_e = 10^{15}$ cm^{-3} und kT = 0,7 eV ist $n_{H^-} = 9 \cdot 10^{10}$ cm^{-3}.

Rechnet man aus dem als bekannt angenommenen Absorptionskoeffizienten a (λ) pro H^--Ion die im Intervall $\Delta\lambda$ emittierte Intensität nach dem vorhin durchgeführten Verfahren aus, so erhält man nach Einsetzen der Konstanten (kT in eV) :

$$\varepsilon_{H^-}(\lambda)\Delta\lambda = \frac{3{,}28 \cdot 10^{-49}}{\lambda^5 (kT)^3}\, a(\lambda)\, n_e^3\, e^{-\frac{12{,}406}{\lambda kT}\cdot 10^{-5}}\, e^{\frac{14{,}34}{kT}}\, \Delta\lambda \text{ c.g.s.E} \qquad (34)$$

Mit (28) und (32) erhält man (kT in eV):

$$\frac{\varepsilon_{H^-}(\lambda)}{\varepsilon(\lambda)} = 3{,}29 \cdot 10^{-56}\, a(\lambda)\, \frac{n_e}{\lambda^3}\, (kT)^{-\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{27} e^{\frac{13{,}59}{9kT}} + \frac{1}{64} e^{\frac{13{,}59}{16kT}} + \frac{1}{2}\frac{kT}{13{,}59} e^{\frac{13{,}59}{25kT}}\right]^{-1} \qquad (35)$$

Bei GRIEM [6] findet man Werte für a (λ) für verschiedene Temperaturen. Für $\lambda = 6{,}5 \cdot 10^{-5}$ cm und Temperaturen um 10^4 °K verwenden wir den Wert a (λ) = $4{,}2 \cdot 10^{-17}$ cm^2. Für den Bogenrand ($n_e = 10^{15}$ cm^{-3}, kT = 0,8 eV) erhalten wir:

$$\frac{\varepsilon_{H^-}}{\varepsilon} \approx 0{,}25$$

und für die Bogenmitte ($n_e = 4 \cdot 10^{15}\, cm^{-3}$; $kT = 1\, eV$):

$$\frac{\varepsilon_{H^-}}{\varepsilon} \approx 2 \cdot 10^{-2}$$

Zusammenfassend stellen wir fest, dass die Temperatur aus dem Verhältnis der Kontinuumsintesität an einer Stelle zwischen den Balmerlinien zur Intensität einer Balmerlinie bestimmt werden kann. Die untere Grenze der Anwendbarkeit dieser Methode liegt bei etwa 9000 °K.

c) <u>Temperaturbestimmung aus Druck und Elektronendichte</u>

Weitere Möglichkeiten zur Bestimmung der Plasmatemperatur ergeben sich, wenn Druck und Elektronendichte auf anderem Wege gemessen worden sind.

Man ersetzt in der Sahagleichung (32) n_o durch $\frac{p}{kT} - 2n_e$ und erhält:

$$\frac{n_e^2}{\frac{p}{kT} - 2n_e} - \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{\chi_i}{kT}} = 0 \qquad (36)$$

Die Temperatur gewinnt man durch numerische Auflösung nach T. Zur Fehlerabschätzung gehen wir aus von der Gleichung $p = (2n_e + n_o)\,kT$. Wir erhalten durch Differentiation:

$$\frac{dp}{p} = \frac{2n_e}{2n_e + n_o}\frac{dn_e}{n_e} + \frac{n_o}{2n_e + n_o}\frac{dn_o}{n_o} + \frac{dT}{T}$$

Aus (32) erhalten wir schliesslich, wenn wir $\frac{dn_o}{n_o}$ durch n_e und T ausdrücken:

$$\frac{\Delta T}{T} = \left[\left(\frac{3}{2} + \frac{\chi_i}{kT}\right)\frac{p_o}{p} - 1\right]^{-1}\left[\frac{\Delta p}{p} + \left(1 + \frac{p_o}{p}\right)\frac{\Delta n_e}{n_e}\right] \qquad (37)$$

Wendet man diese Methode im Bereich von 10 000 °K an, so gilt für den infragekommenden Druckbereich $p_o \approx p/3$. Sind Druck und Elektronendichte auf 20% genau bekannt, so bekommen die Temperaturwerte einen Fehler von 10%. Das Verfahren wird zu niedrigeren Temperaturen hin noch genauer.

d) <u>Temperaturbestimmung aus Druck und Absolutintensität einer Balmerlinie</u>

Weiterhin lässt sich die Temperatur aus dem Druck und der gemessenen Absolutintensität einer Linie bestimmen. Dazu ersetzen wir mit Hilfe der Sahagleichung (32) in Gleichung (20) die Neutralteilchendichte n_o durch

$$n_o = S\cdot\left(\frac{p}{SkT} + 2\left(1 - \sqrt{\frac{p}{SkT} + 1}\right)\right) \qquad (38)$$

und erhalten:

$$i_L = \frac{1}{4\pi} A_m^m \frac{g_m}{Z_0} h \nu_L S \left(\frac{p}{5kT} + 2\left(1 - \sqrt{\frac{p}{5kT} + 1}\right)\right) e^{-\frac{E_m}{kT}} \tag{39}$$

Es wird wieder numerisch nach T aufgelöst.

Die Fehlerrechnung, die ganz ähnlich wie oben verläuft, liefert:

$$\frac{\Delta T}{T} = \left[\left(\frac{3}{4} + \frac{\chi_i}{2kT}\right)\left(1 - \frac{p_0}{p}\right) - \frac{E_m}{2kT}\left(1 + \frac{p_0}{p}\right) + 1\right]^{-1} \left[\frac{\Delta p}{p} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{p_0}{p}\right)\frac{\Delta i_L}{i_L}\right] \tag{40}$$

In unserem Bereich, wo $p_0 \approx p/3$ ist, gilt dann:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}\frac{\Delta p}{p} + \frac{1}{3}\frac{\Delta i_L}{i_L} \tag{41}$$

Auch diese Methode liefert demnach Temperaturwerte, deren Genauigkeit zwischen 10 und 20 Prozent liegt.

2. Die praktische Durchführung der Temperaturmessungen

a) Ermittlung der Intensitäten aus Plattenschwärzungen

Zur Intensitätsmessung auf photographischem Wege muss der Zusammenhang zwischen Schwärzung und Intensität bekannt sein. Dazu wird ein Stufenfilter mit einer für jede Stufe bekannten Durchlässigkeit mit einer Lichtquelle beleuchtet und über den Spektrographen auf die Platte abgebildet. Trägt man den Photometerausschlag gegen die bekannte Durchlässigkeit der Stufen auf, so ergibt sich die Schwärzungskurve in relativen Einheiten. Die Schwärzungskurve wird für jede Wellenlänge, bei der gemessen wird, gesondert aufgenommen. Will man Absolutmessungen der Intensität durchführen, so ist eine absolut geeichte Lichtquelle, z.B. ein Kohlelichtbogen notwendig. Um die Berücksichtigung von Schwarzschildexponenten zu vermeiden, werden für alle Spektralaufnahmen gleiche Belichtungszeiten verwendet. Die Angleichung der Strahlungsintensitäten kann durch Filter oder rotierende Sektoren erfolgen. Nach [7] gilt für Aufnahmen mit 'schmalem' Spektrographenspalt:

$$I_\lambda = \frac{F'_\lambda}{F'_{\lambda n}} \cdot \frac{E_\lambda \mu_{\lambda n} b_n}{\mu_\lambda b} \tag{42}$$

und mit 'breitem' Spalt:

$$\int_{\Delta\lambda} I_\lambda \, d\lambda = \frac{F'_\lambda}{F'_{\lambda n}} \cdot \frac{E_\lambda \mu_{\lambda n} v_\lambda \alpha_\lambda b_n}{\mu_\lambda} \tag{43}$$

Dabei haben die Symbole folgende Bedeutung:

I_λ = Absolutintensität an der Stelle λ
v_λ = Abbildungsmaßstab Spalt - Platte
b_n = Spaltbreite bei Aufnahme des Normalstrahlers
α_λ = Lineardispersion bei λ
E_λ = Der Tabelle entnommener Wert der Absolutintensität der Normalstrahlers bei λ
μ_{λ_n} = Abschwächungsfaktor bei Aufnahme des Normalstrahlers
μ_λ = Abschwächungsfaktor bei Aufnahme des Plasmas
F'_λ = Mit der Schwärzungskurve umgerechneter Photometer - ausschlag bei Aufnahme des Bogens
$F'_{\lambda n}$ = Die entsprechende Grösse bei Aufnahme des Normalstrahlers
b = Spaltbreite bei Aufnahmen mit schmalem Spalt

Dabei heisst der Spalt 'schmal', wenn gilt:

$$v_\lambda \alpha_\lambda b \ll \Delta\lambda \tag{44}$$

wo $\Delta\lambda$ die Breite der Linie bedeutet, 'breit' dagegen, wenn gilt:

$$v_\lambda \alpha_\lambda b > \Delta\lambda \tag{45}$$

Beim Steinheil GH ist in der gewählten Justierung $v \approx 1$ und man hat bei H_γ :

$$\alpha_{\lambda=4340\text{Å}} = 8 \cdot 10^{-7}$$

Für eine Spaltbreite von 10 μ also:

$$v_\lambda \alpha_\lambda b = 8 \cdot 10^{-2} \text{Å}$$

und für 2000 μ:

$$v_\lambda \alpha_\lambda b = 16 \text{Å}$$

Aus Gleichung (42) erkennt man insbesondere, dass die auf die Platte fallende Intensität linear mit der Spaltbreite ansteigt, falls es sich um Kontinuumsintensität handelt, und die Intensität über den der Spaltbreite entsprechenden Spektralbereich konstant ist. Gleichung (43) besagt, dass die Maximalschwärzung ein Mass für die Gesamtintensität der Linie ist, dass also der Spektrograph die Integration über das Linienprofil übernimmt, wenn der Spalt breit genug ist. Wird der Spalt über die von (45) geforderte Grenze hinaus geöffnet, so steigt die Schwärzung in der Linienmitte nicht weiter an.

Unter Verwendung der angeführten Beziehungen wurden die Absolutintensitäten von H_α, H_β und H_γ für alle drei Entladungsarten gemessen. Das Spektrum wurde auf Perutz-Platten Spektral-Rot aufgenommen. Das Kontinuum wurde bei λ = 6500 Å gemessen, weil hier den Einfluss durch Verunreinigungen am kleinsten war. Abb. 10 zeigt eine Zusammenstellung der zur Auswertung erforderlichen Spektralaufnahmen. Photometriert wurde mit einem Joyce Doppelstrahl-Microdensitometer.

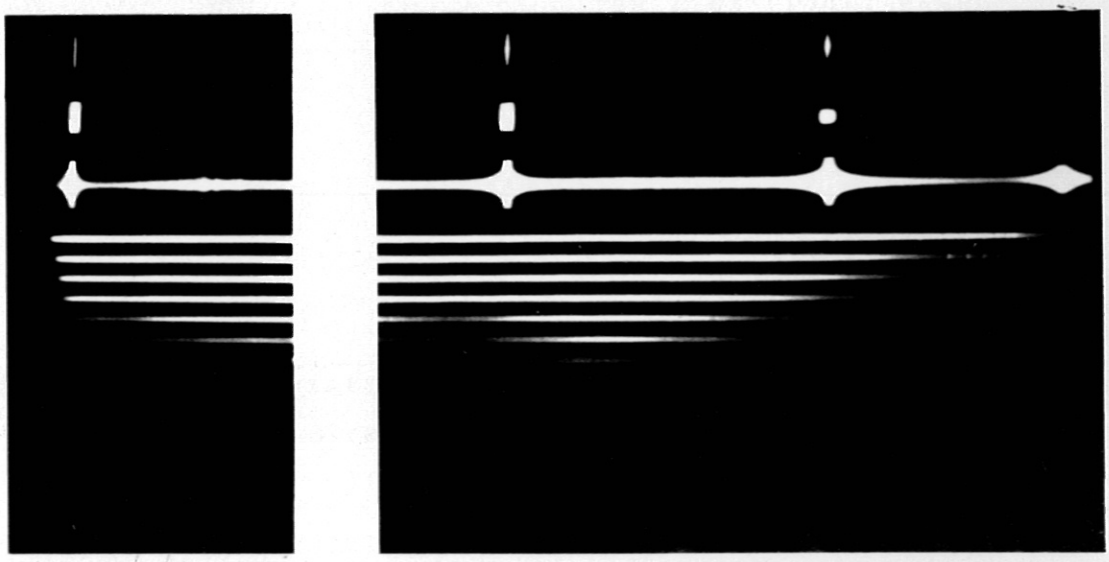
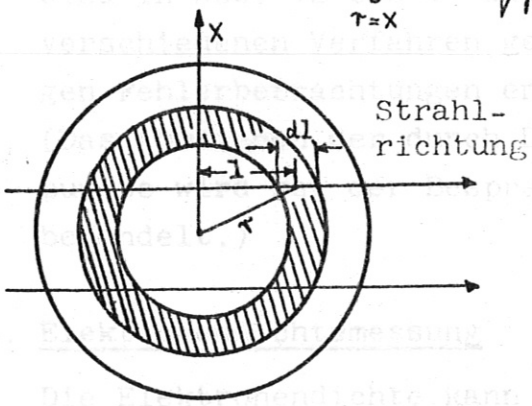


Abb. 10

b) Berechnung des örtlichen Emissionskoeffizienten aus der gemessenen 'side-on' Intensität

Die bisherigen Ausführungen bezogen sich ausnahmslos auf ein homogenes Plasma. In einer Bogenentladung hat man jedoch ein inhomogenes Plasma mit einem Temperatur- und Dichtegradienten. Man muss also, um die bisher abgeleiteten Beziehungen verwenden zu können, den Emissionskoeffizienten, der zu jedem Radius r im Bogen gehört, ermitteln. Bei side-on Beobachtung misst man die Querverteilung der Intensität und nicht die gewünschte radiale Verteilung. Die Strahlung also, die an einer bestimmten Stelle der Projektion der Bogensäule auf einer dem Bogen parallelen Ebene registriert wird, kommt aus verschiedenen Bogenzonen mit verschiedenen Temperaturen und Dichten. Unter der Annahme völliger Rotationssymmetrie lässt sich der örtliche Emissionskoeffizient ε_λ (r) mit Hilfe der Abel'schen Integralgleichung, die numerisch gelöst werden muss, bestimmen. Wie aus Abb. 11 ersichtlich, setzt sich die gemessene Querverteilung aus der gesuchten radialen Verteilung folgendermassen zusammen:

$$I_\lambda(x) = 2\int_{r=x}^{\infty} \varepsilon_\lambda(r)\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-x^2}} \qquad (46)$$



(Zu I_λ (x) liefert die schraffierte Zone den Beitrag 2 ε_λ (r)dl. Wegen $l^2=r^2-x^2$ ist $dl = \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-x^2}}$

Daraus folgt die Gl. (46))

Abb. 11

Man kann die Integration über λ zuerst ausführen. Bezeichnet man bei Linienstrahlung das Integral über den Emissionskoeffizienten mit $i(r) = \int_{\Delta\lambda} \varepsilon_\lambda (r)d\lambda$, so kann man schrei-

ben:

$$I(x) = 2\int_{r=x}^{\infty} i(r)\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-x^2}} \qquad (46a)$$

Die numerische Auflösung nach i(r) erfolgt auf der Rechenmaschine IBM 7090 nach einem vorliegenden Programm [8].

Die von je drei Spektralaufnahmen stammenden side-on Intensitäten der Linien H_α, H_β und H_γ wurden auf radiale Emission umgerechnet und die Ergebnisse gemittelt. Dabei ergab sich, dass die Absolutintensitäten von H_β sehr gut übereinstimmten, während dies für H_γ weniger gut und für H_α insbesondere zur Bogenmitte hin nur noch schlecht der Fall war. Dies findet seine Erklärung darin, dass die Intensität i_{H_α} zur Bogenmitte hin wegen des steigenden Ionisationsgrades wieder abzunehmen beginnt, sodass hier durch das Umrechnen ein beträchtlicher Fehler entsteht. Die Abweichungen von i_{H_γ} sind zwar grösser als diejenigen von i_{H_β}, liegen aber immer noch innerhalb der Fehlergrenze von 20%. Die Kontinuumsintensität wird ebenfalls auf radiale Emission umgerechnet und aus den auf diese Weise gewonnenen Ergebnissen die Temperatur bestimmt. Temperaturprofile sind in Abb. 12 bis 14 dargestellt. Dabei werden die zu verschiedenen Verfahren gehörigen Messpunkte den jeweiligen Fehlerbetrachtungen entsprechend verschieden gewertet. (Das Abweichen der durch Dreiecke gekennzeichneten Messpunkte wird bei der Besprechung der Elektronendichtemessung behandelt.)

3. Elektronendichtemessung

Die Elektronendichte kann man nach (28) und (32) aus einer Messung der Absolutintensität des Kontinuums erhalten. Besser ist es jedoch, sie aus der Linienverbreiterung zu bestimmen.

Die Balmerlinien des Wasserstoffs weisen neben der üblichen Dopplerverbreiterung eine besonders starke Druckverbreiterung auf. Die Einwirkung der Mikrofelder auf die emittierenden Atome führt zu einer Aufspaltung der Linien durch Stark-

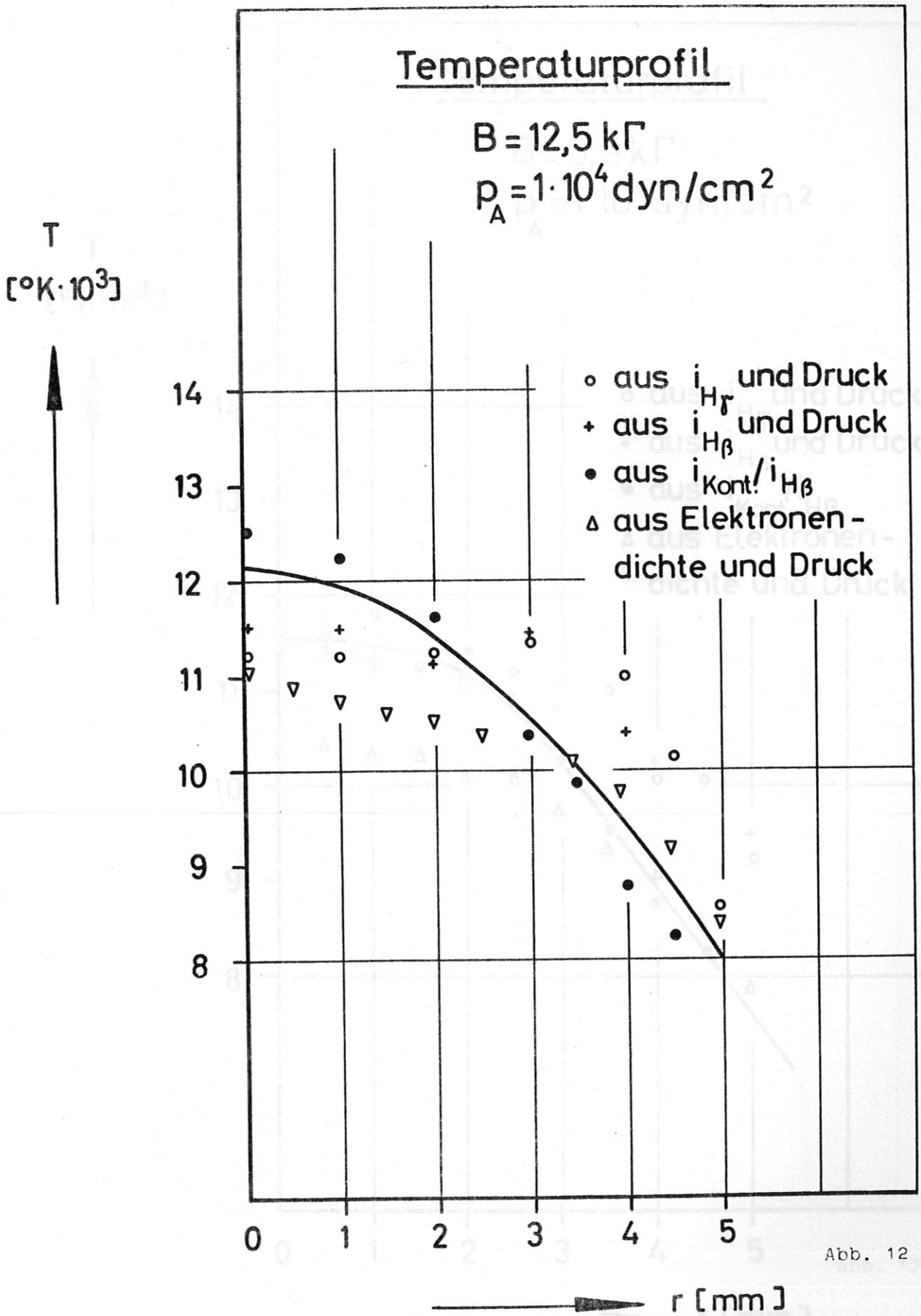

Temperaturprofil
B = 12,5 kΓ
$p_A = 1 \cdot 10^4$ dyn/cm²
T
[°K · 10³]
14
13
12
11
10
9
8
0
1
2
3
4
5
r [mm]
o aus $i_{H\gamma}$ und Druck
+ aus $i_{H\beta}$ und Druck
• aus $i_{Kont.}/i_{H\beta}$
Δ aus Elektronen-dichte und Druck

Abb. 12

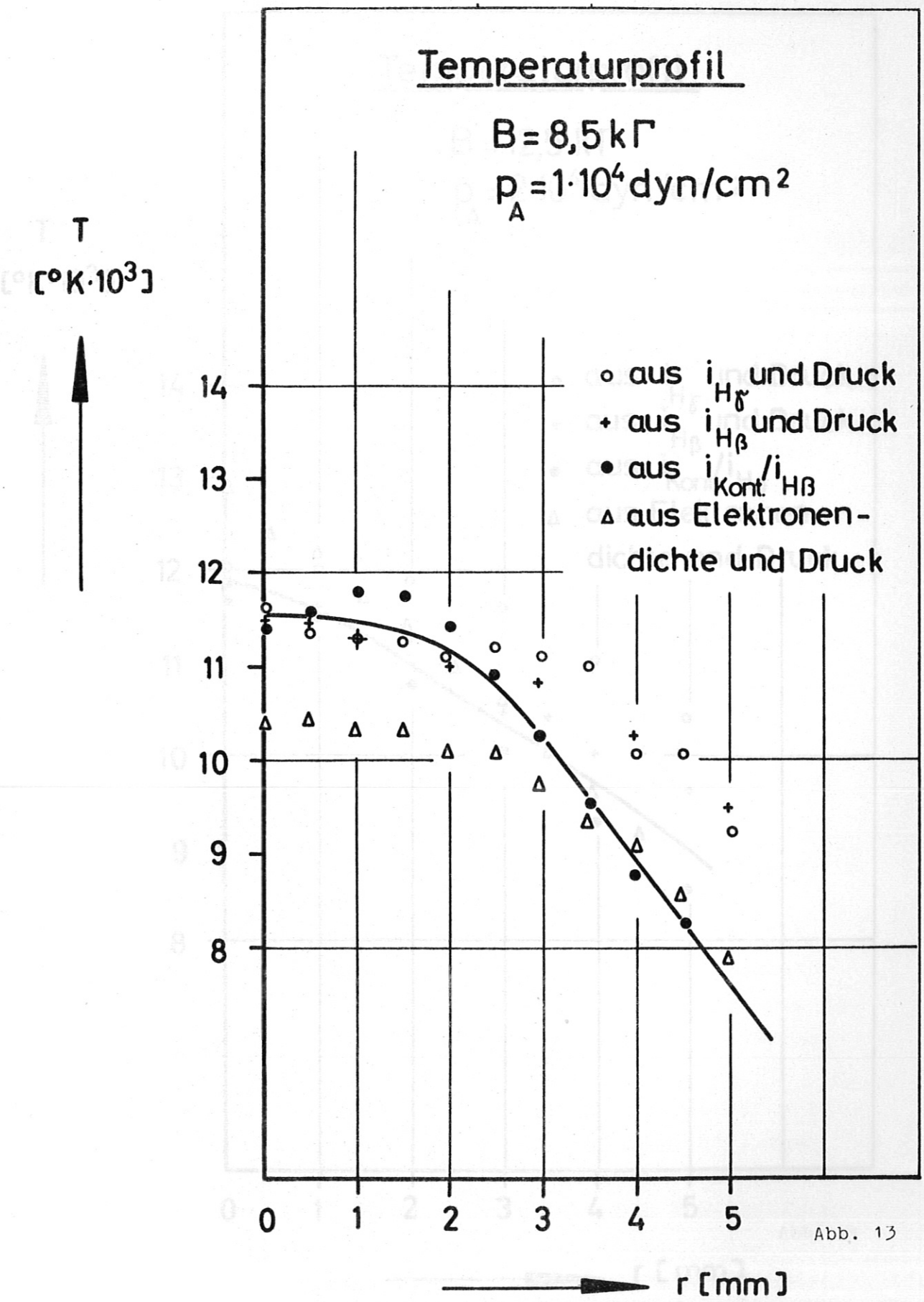

Temperaturprofil
B = 8,5 kΓ
$p_A = 1 \cdot 10^4$ dyn/cm²
T
[°K·10³]
14
13
12
11
10
9
8
o aus $i_{H\gamma}$ und Druck
+ aus $i_{H\beta}$ und Druck
● aus $i_{Kont.}/i_{H\beta}$
Δ aus Elektronen-
dichte und Druck
0
1
2
3
4
5
r [mm]

Abb. 13

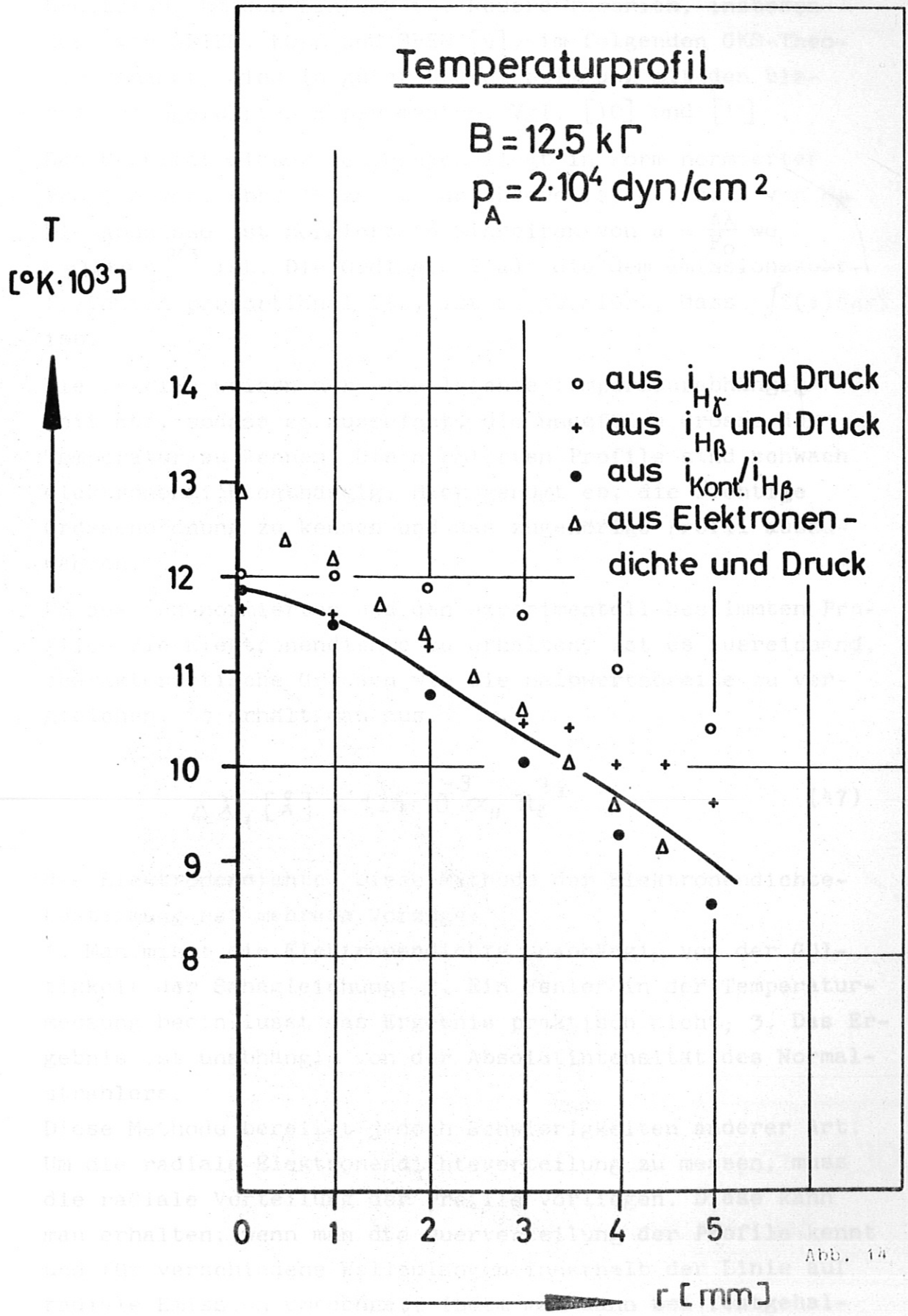

Temperaturprofil
B = 12,5 kΓ
$p_A = 2 \cdot 10^4$ dyn/cm²
T
[°K·10³]
14
13
12
11
10
9
8
0
1
2
3
4
5
r [mm]
aus $i_{H\gamma}$ und Druck
aus $i_{H\beta}$ und Druck
aus $i_{Kont.}/i_{H\beta}$
aus Elektronen-dichte und Druck

Abb. 14

effekt. Da diese Mikrofelder statistisch verteilt sind, resultiert keine diskrete Aufspaltung, sondern eine Verbreiterung um den Linienkern. Neuere Theorien, insbesondere von GRIEM, KOLB und SHEN [9], im folgenden GKS-Theorie genannt, sind in guter Übereinstimmung mit den bisher durchgeführten Experimenten. Vgl. [10] und [11] .

Das Resultat dieser Rechnungen liegt in Form normierter Profile vor. Abb. 15 zeigt das theoretische Profil von H_γ. Die Abszisse ist normiert in Einheiten von $\alpha = \frac{\Delta\lambda}{F_0}$ wo $F_0 = 2{,}61\, e\, n_e^{2/3}$ ist. Die Ordinate $S(\alpha)$, die dem Emissionskoeffizienten proportional ist, ist so normiert, dass $\int S(\alpha)d\alpha = 1$ ist.

Die Profile weisen nur eine leichte Temperaturabhängigkeit auf, sodass es ausreicht, die ungefähre Grösse der Temperatur zu kennen. Die normierten Profile sind schwach elektronendichteabhängig. Hier genügt es, die richtige Grössenordnung zu kennen und das zugehörige Profil auszuwählen.

Um aus den normierten und den experimentell bestimmten Profilen die Elektronendichte zu erhalten, ist es ausreichend, charakteristische Grössen wie die Halbwertsbreite zu vergleichen. So erhält man aus

$$\Delta\lambda_H\,[\text{Å}] = 1{,}25 \cdot 10^{-9}\, \alpha_H\, n_e^{2/3} \qquad (47)$$

die Elektronendichte. Diese Methode der Elektronendichtebestimmung hat mehrere Vorzüge:
1. Man misst die Elektronendichte unabhängig von der Gültigkeit der Sahagleichung; 2. Ein Fehler in der Temperaturmessung beeinflusst das Ergebnis praktisch nicht; 3. Das Ergebnis ist unabhängig von der Absolutintensität des Normalstrahlers.
Diese Methode bereitet jedoch Schwierigkeiten anderer Art. Um die radiale Elektronendichteverteilung zu messen, muss die radiale Verteilung der Profile vorliegen. Diese kann man erhalten, wenn man die Querverteilung der Profile kennt und für verschiedene Wellenlängen innerhalb der Linie auf radiale Emission umrechnet. Indem man dann bei festgehaltenem Radius die Werte, die man durch die Umrechnung erhält,

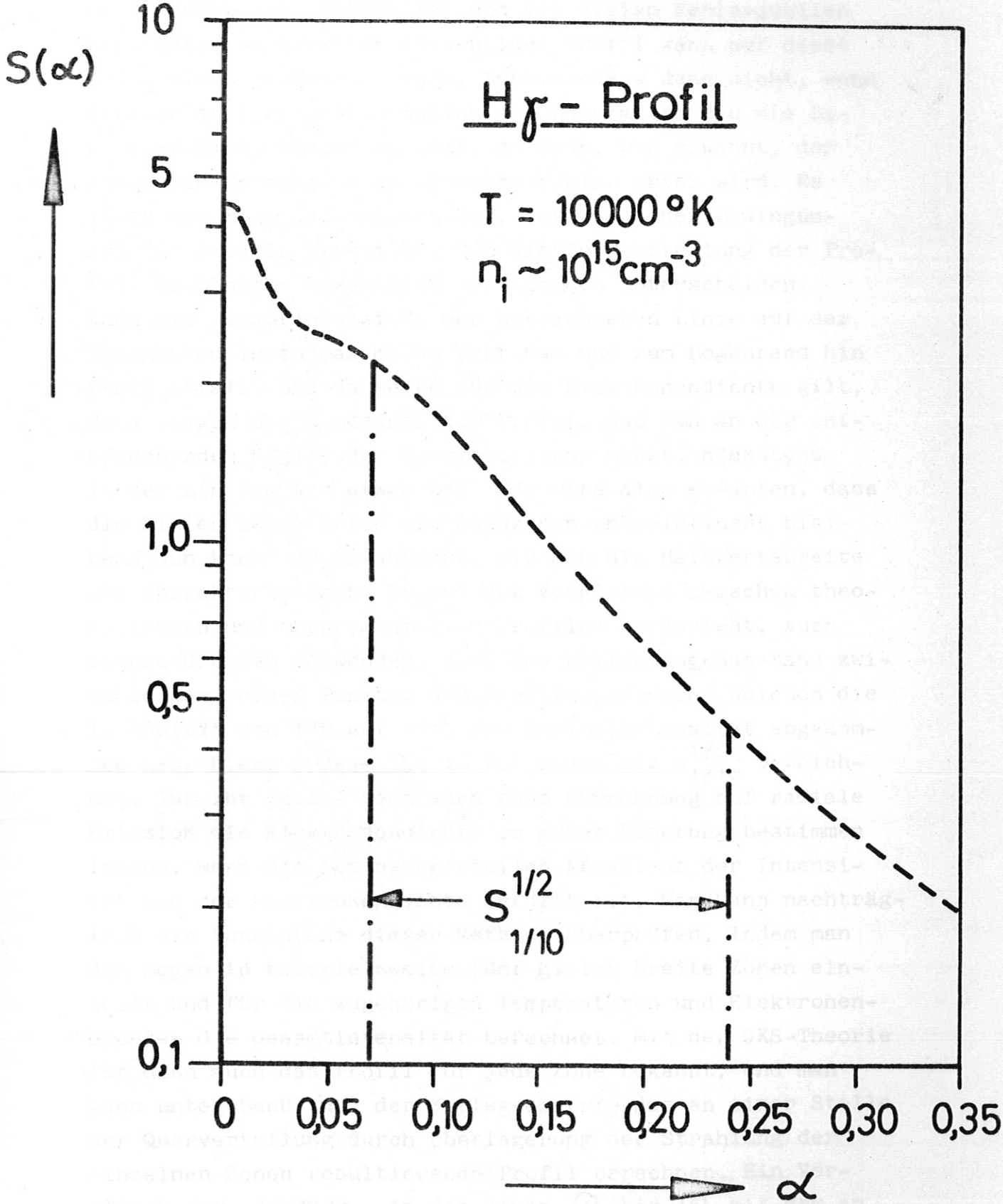

S(α)
10
5
1,0
0,5
0,1
Hγ - Profil
T = 10000 °K
$n_i \sim 10^{15} cm^{-3}$
$S^{1/2}_{1/10}$
0
0,05
0,10
0,15
0,20
0,25
0,30
0,35
α

Abb. 15

wieder in Abhängigkeit von $\Delta\lambda$ aufträgt, erhält man das wirkliche Linienprofil für den betreffenden Radius. Diese Prozedur ist umständlich und mit vielen Fehlerquellen behaftet. Ein wirklich eindeutiges Profil kann auf diese Weise nicht gewonnen werden, insbesondere dann nicht, wenn infolge steigender Ionisation zur Bogenmitte hin die Linienstrahlung wieder abnimmt, da dann, wie erwähnt, der durch die Umrechnung entstehende Fehler gross wird. Es liegt nun nahe, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die radiale Verteilung und die Querverteilung der Profile sich nicht wesentlich voneinander unterscheiden. Wenn die Gesamtintensität der betrachteten Linie auf der Bogenachse ihren maximalen Wert hat und zum Bogenrand hin steil abfällt und dasselbe für die Elektronendichte gilt, dann tragen die Randzonen zum Profil, das man an der entsprechenden Stelle der Querverteilung misst, höchstens in der Linienmitte etwas bei. Man wird also erwarten, dass die Linienflügel durch die Randzonen unbeeinflusst bleiben. Nun kann man genausogut, wie man die Halbwertsbreite als charakteristische Grösse des Vergleichs zwischen theoretischen und experimentellen Profilen heranzieht, auch andere Grössen verwenden, z.B. den Wellenlängenabstand zwischen den beiden Punkten der Profile, zwischen welchen die Intensität von 1/2 auf 1/10 der Maximalintensität abgenommen hat. Diese Grösse ist im folgenden als $s^{1/2}_{1/10}$ bezeichnet. Aus ihr sollte sich auch ohne Umrechnung auf radiale Emission die Elektronendichte in guter Näherung bestimmen lassen, wenn die Bedingung steilen Abfallens der Intensität und der Elektronendichte erfüllt ist. Man kann nachträglich die Konsistenz dieser Methode überprüfen, indem man den Bogen in beispielsweise fünf gleich breite Zonen einteilt und für die zugehörigen Temperaturen und Elektronendichten die Gesamtintensität berechnet. Mit der GKS-Theorie ist dann auch das Profil für jede Zone bekannt, und man kann unter Benützung der Kreisgeometrie das an einer Stelle der Querverteilung durch Überlagerung der Strahlung der einzelnen Zonen resultierende Profil berechnen. Ein Vergleich des Profils in den Zonen ① bis ⑤ mit dem an den Stellen 1' bis 5' der Querverteilung resultierenden Profil kann durchgeführt werden (Abb. 16).

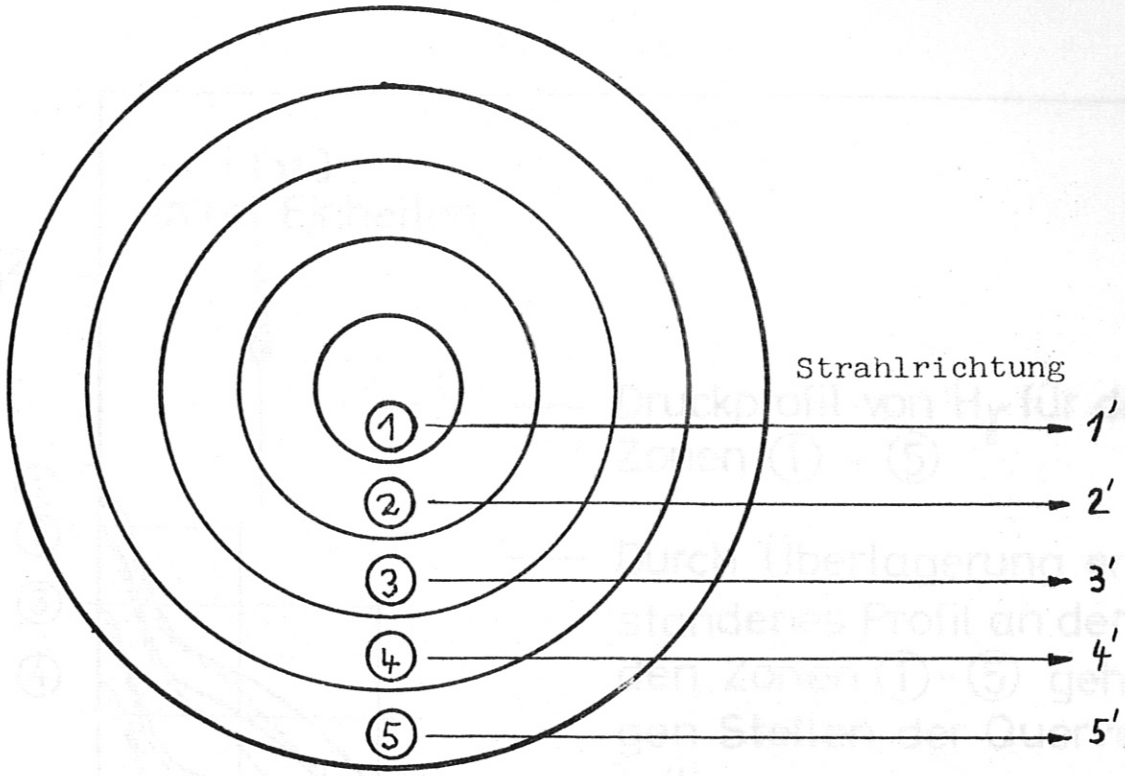


Abb. 16

Abb. 17 zeigt das Ergebnis eines solchen Vergleichs und zwar für die Entladung mit den Daten:

$I_{Bogen} = 200$ A $\quad p_A = 1 \cdot 10^4$ dyn/cm^2 $\quad B_{z_o} = 12{,}5$ kΓ

Eine Tabelle soll die Verhältnisse verdeutlichen:

Zone	1	2	3	4	5
Temperatur	12 200 °K	12 000 °K	11 400 °K	10 500 °K	9400 °K
Elektronendichte	$4{,}6 \cdot 10^{15}$ cm^{-3}	$3{,}9 \cdot 10^{15}$ cm^{-3}	$3{,}0 \cdot 10^{15}$ cm^{-3}	$2{,}2 \cdot 10^{15}$ cm^{-3}	$1{,}3 \cdot 10^{15}$ cm^{-3}
Gesamtintensität von H_γ	$0{,}25 \cdot 10^6$ c.g.s.E	$0{,}20 \cdot 10^6$ c.g.s.E	$0{,}12 \cdot 10^6$ c.g.s.E	$0{,}78 \cdot 10^5$ c.g.s.E	$0{,}38 \cdot 10^5$ c.g.s.E
Halbwertsbreite	2,5 Å	2,1 Å	1,7 Å	1,3 Å	1,0 Å
Halbwertsbreite a.d. entspr. Stelle der Querverteilung	1,8 Å	1,4 Å	1,2 Å	1,0 Å	1,0 Å
$s^{1/2}_{1/10}$	5,8 Å	5,4 Å	4,4 Å	3,6 Å	3,0 Å
$s^{1/2}_{1/10}$ der Querverteilung	5,2 Å	4,8 Å	4,2 Å	3,5 Å	3,0 Å

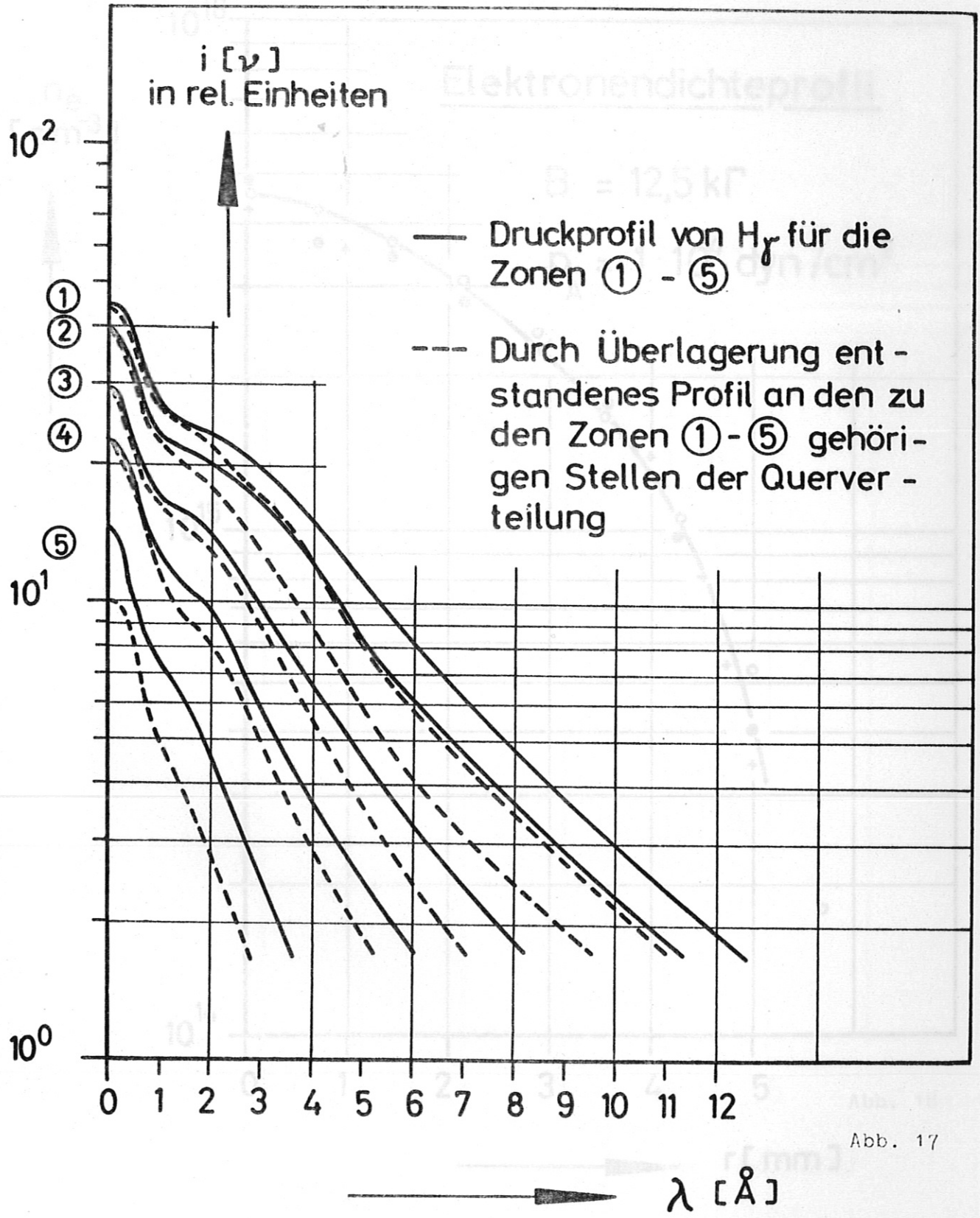

i [ν]
in rel. Einheiten
10^2
10^1
10^0
①
②
③
④
⑤
— Druckprofil von H_γ für die Zonen ① - ⑤
--- Durch Überlagerung entstandenes Profil an den zu den Zonen ① - ⑤ gehörigen Stellen der Querverteilung
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
λ [Å]

Abb. 17

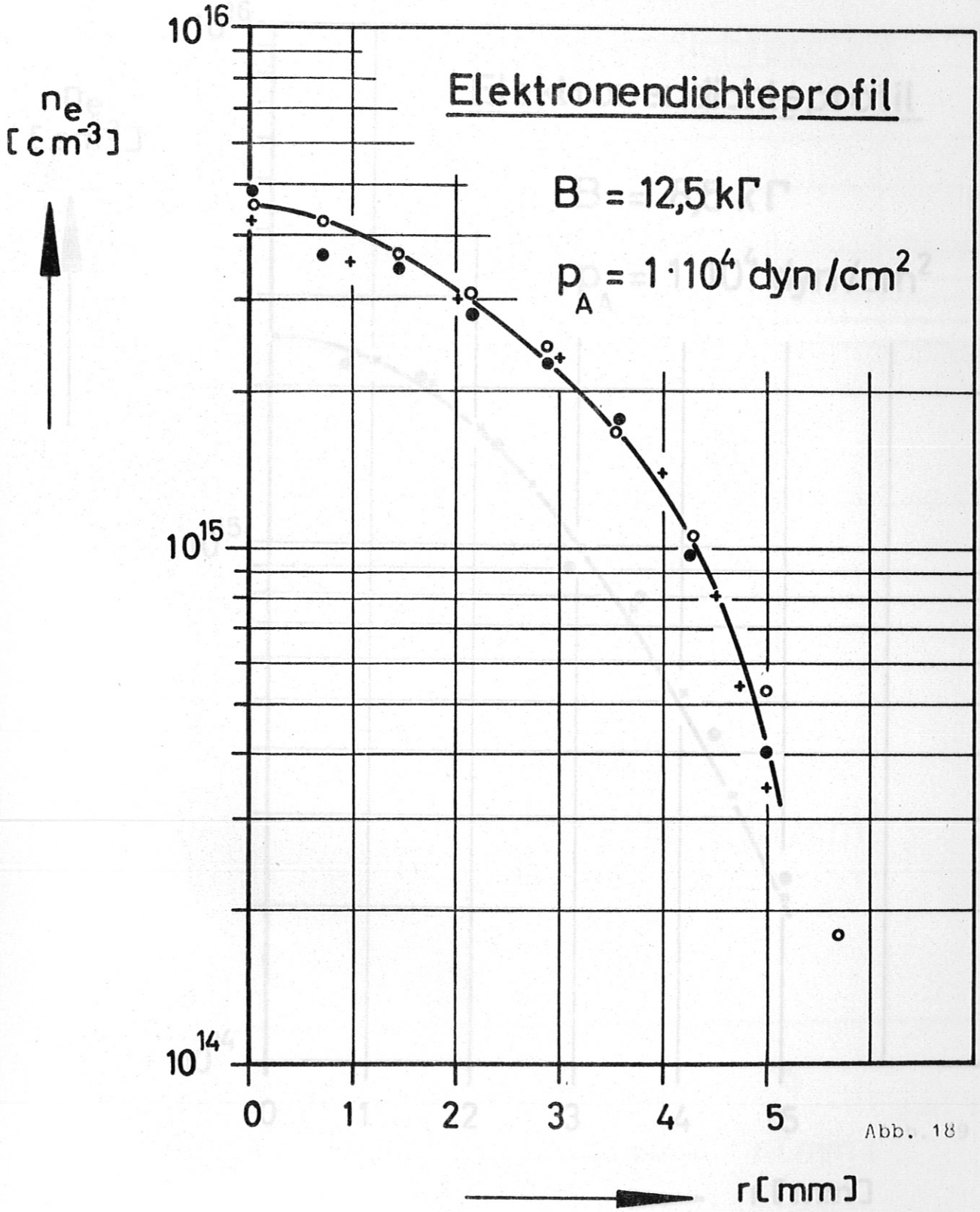

Elektronendichteprofil
B = 12,5 kΓ
$p_A = 1 \cdot 10^4$ dyn/cm²
n_e [cm⁻³]
10^{16}
10^{15}
10^{14}
0
1
2
3
4
5
r [mm]

Abb. 18

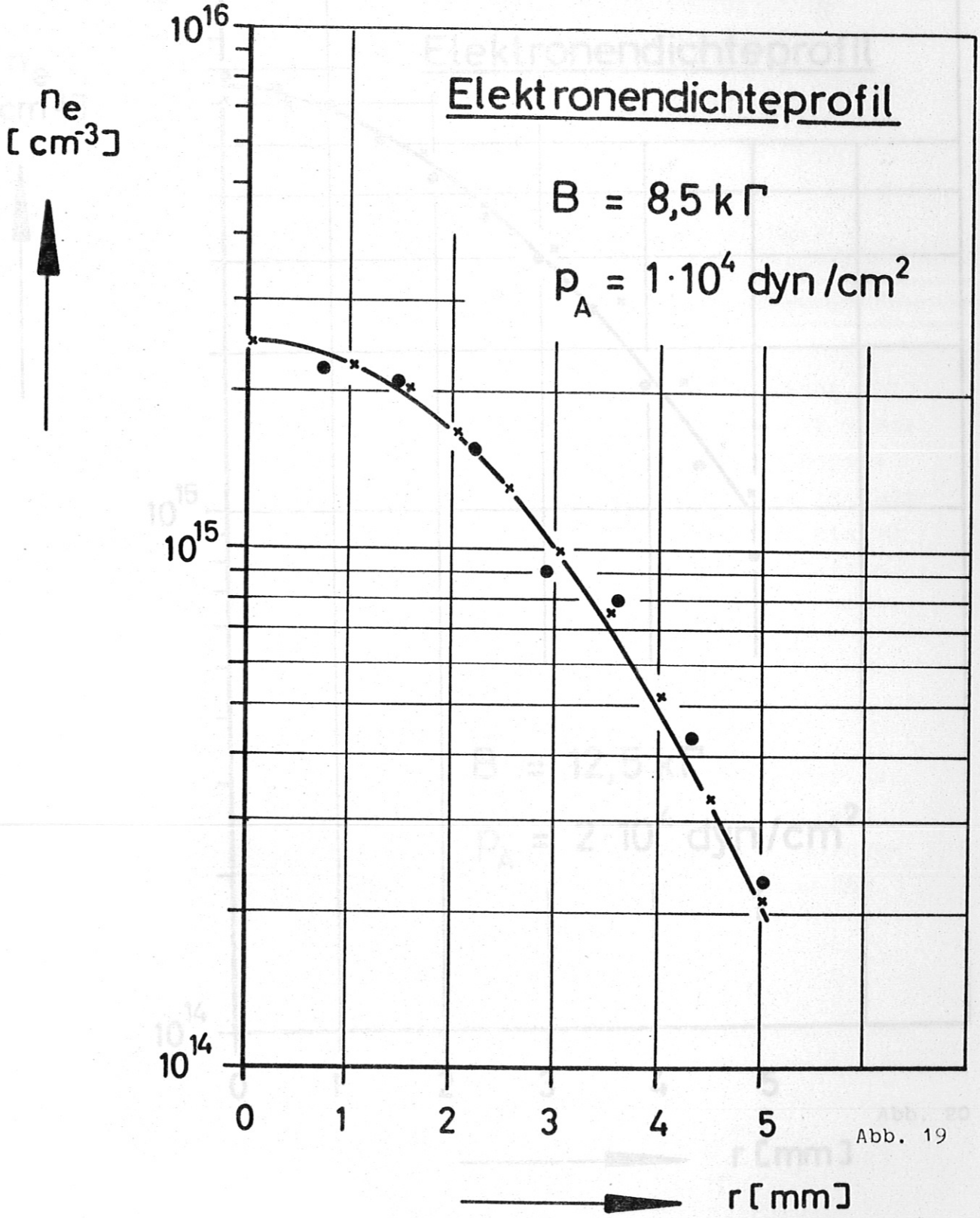

Elektronendichteprofil
B = 8,5 kΓ
$p_A = 1 \cdot 10^4$ dyn/cm²
n_e [cm⁻³]
10^{16}
10^{15}
10^{14}
0
1
2
3
4
5
r [mm]

Abb. 19

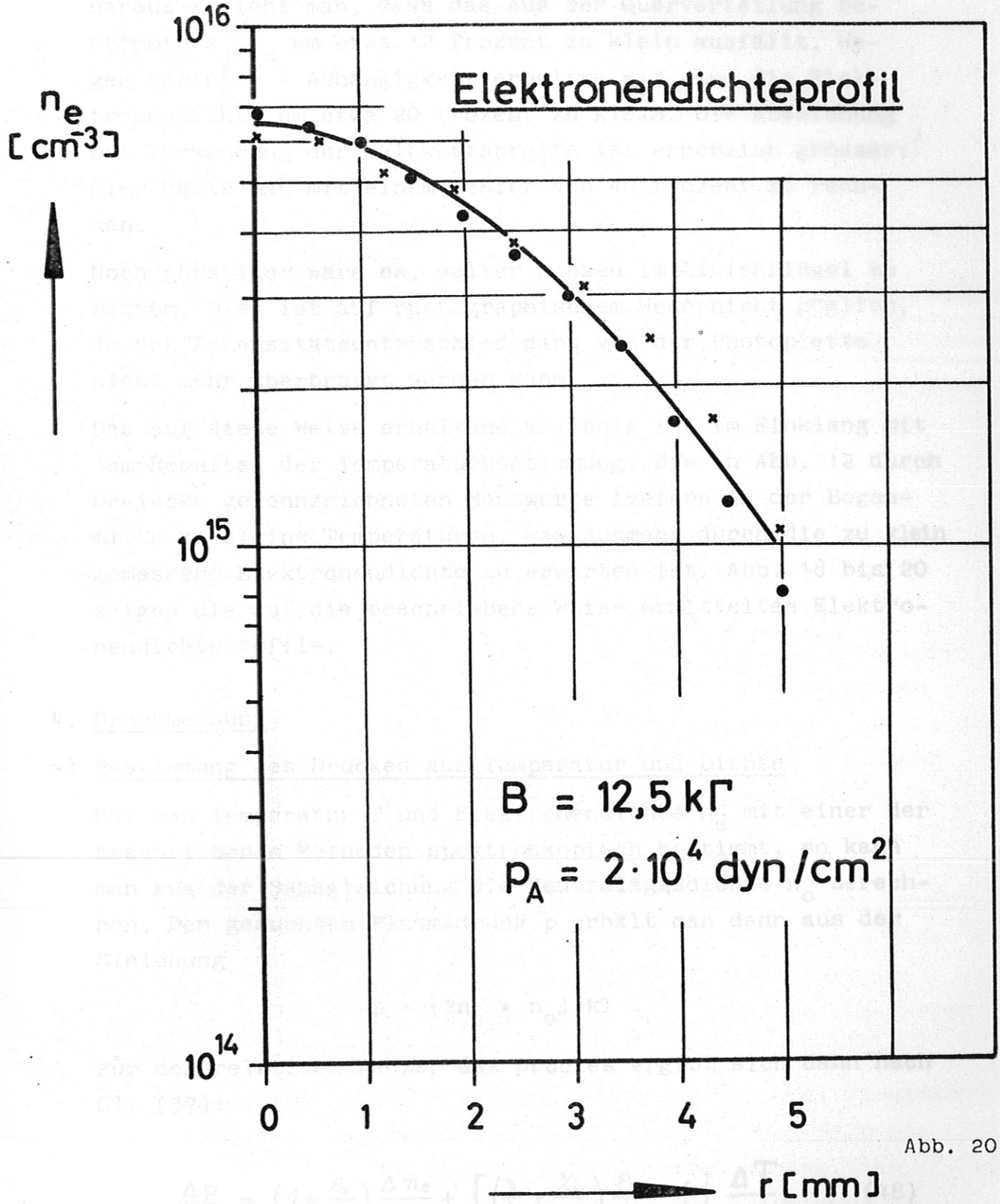

Elektronendichteprofil
n_e [cm^{-3}]
10^{16}
10^{15}
10^{14}
B = 12,5 kΓ
p_A = $2 \cdot 10^4$ dyn/cm^2
0
1
2
3
4
5
r [mm]

Abb. 20

Daraus ersieht man, dass das aus der Querverteilung bestimmte $s_{1/10}^{1/2}$ um etwa 12 Prozent zu klein ausfällt. Wegen der $n_e^{2/3}$ - Abhängigkeit erhalten wir also die Elektronendichte um etwa 20 Prozent zu klein. Die Abweichung bei Verwendung der Halbwertsbreite ist erheblich grösser: hier hätte man mit einem Fehler von 40 Prozent zu rechnen.

Noch günstiger wäre es, weiter aussen im Linienflügel zu messen. Dies ist auf photographischem Wege nicht möglich, da der Intensitätsunterschied dann von der Photoplatte nicht mehr überbrückt werden kann.

Das auf diese Weise erhaltene Ergebnis ist im Einklang mit dem Resultat der Temperaturbestimmung. Die in Abb. 12 durch Dreiecke gekennzeichneten Messwerte liefern in der Bogenmitte zu kleine Temperaturen, was nunmehr durch die zu klein gemessene Elektronendichte zu erwarten ist. Abb. 18 bis 20 zeigen die auf die beschriebene Weise ermittelten Elektronendichteprofile.

4. Druckmessung

a) Bestimmung des Druckes aus Temperatur und Dichte

Hat man Temperatur T und Elektronendichte n_e mit einer der beschriebenen Methoden spektroskopisch bestimmt, so kann man aus der Sahagleichung die Neutralsgasdichte n_o berechnen. Den gesuchten Plasmadruck p erhält man dann aus der Gleichung

$$p = (2n_e + n_o)\, kT$$

Für den relativen Fehler des Druckes ergibt sich dann nach Gl. (37):

$$\frac{\Delta p}{p} = \left(1+\frac{p_o}{p}\right)\frac{\Delta n_e}{n_e} + \left[\left(\frac{3}{2}+\frac{\chi_i}{kT}\right)\frac{p_o}{p} - 1\right]\frac{\Delta T}{T} \qquad (48)$$

Für die der Bogenachse entsprechenden Temperaturen von etwa 10 000 ^oK gilt $p_o \approx p/3$. Nehmen wir an, die Temperatur sei auf 10 Prozent und die Elektronendichte auf 20 Prozent genau gemessen, so folgt aus Gl. (48), dass der Fehler

der Druckmessung über 60 Prozent liegt. Für den Bogenrand nimmt der Fehler zu, da dort der Faktor $\frac{p_o}{p}$ grösser als in der Achse ist.

Es zeigt sich also, dass die Druckmessung auf ausschliesslich spektroskopischem Wege nicht zu befriedigenden Ergebnissen führen kann.

b) Direkte Druckmessung

α) Messverfahren

Da der Bogen bis hin zur Anodenoberfläche sehr gut zylindrisch ist, wird der an der Anodenoberfläche herrschende Druck etwa gleich dem Druck in den angrenzenden Gebieten der Bogensäule sein. Zur Messung dieses Druckes wird ein Quecksilbermanometer mit einer kleinen Bohrung, die sich in der Oberfläche der flachen Anode befindet, verbunden. Dieses Manometer zeigt dann den in der betreffenden Bogenzone herrschenden Druck an.

Praktisch wurde die Messung wie folgt durchgeführt: Es wurde eine wassergekühlte Anode der in Abb. 21 dargestellten Form, jedoch zunächst ohne Messbohrung, eingebaut, und einige Sekunden lang der im Magnetfeld stabilisierte Bogen gebrannt. Auf der vorher blanken Anodenfläche bilden sich dadurch konzentrische Zonen verschiedener Anlauffarben, in deren Mittelpunkt -auf der Achse des Bogens- ein Loch von 1,5 mm Durchmesser für die Druckmessung gebohrt wurde. Nach dem Wiedereinbau konnte man durch leichtes Kippen der Anode um eine horizontale Achse die Messöffnung in radialer Richtung verschieben, während der Bogen im Magnetfeld 'arretiert' war, sodass man ein radiales Druckprofil erhielt.

Da das Magnetfeld nur eine Sekunde lang eingeschaltet werden konnte, musste der Druck innerhalb dieser kurzen Zeit gemessen werden. Dazu wurde ein Quecksilbermanometer, das sich für diesen Zweck als am besten geeignet erwies, über zwei Magnetventile einerseits mit der Messbohrung und andererseits mit der Entladungskammer verbunden. Bei Beginn des Versuches sind beide Ventile geöffnet. Ohne Magnetfeld steht das Manomter auf null. Beim Einschalten des Magnetfeldes entsteht eine Druckdifferenz zwischen dem Bogeninneren und der Entladungskammer, die vom Manometer angezeigt wird.

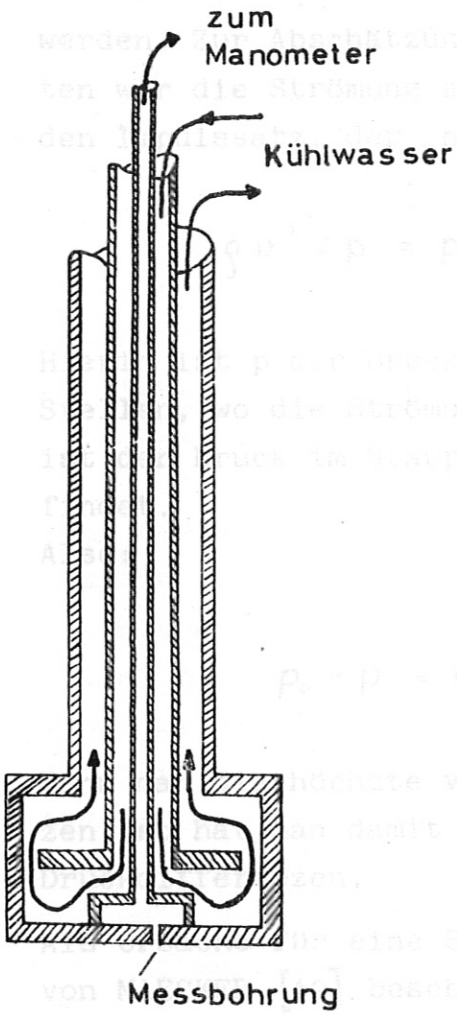


Abb. 21

Kurz vor dem Ausschalten des Magnetfeldes werden die beiden Magnetventile durch das Schaltwerk geschlossen, sodass die Manometeranzeige weiterhin ansteht und bequem abgelesen werden kann.
Zur Prüfung, ob sich die Quecksilbersäule im Manometer innerhalb der kurzen Zeit von etwa einer Sekunde der wahren Druckdifferenz zwischen Bohrung und Entladungskammer entsprechend einstellt, wurde das Manometer an zwei Volumina bekannter Druckdifferenz angeschlossen. Die Messleitungen waren mit den im Versuch verwendeten identisch. Das unter höherem Druck stehende Volumen war mit einem weiteren Magnetventil abgeschlossen, das vom Schaltwerk genausolange geöffnet wurde, wie im Experiment das Magnetfeld überlagert wurde. Die Manometeranzeige wurde anschliessend mit der wahren Druckdifferenz verglichen, wobei sich zeigte, dass die Anzeige in dem zu erwartenden Druckbereich richtig war.

β) Diskussion der möglichen Fehler der Druckmessung

β_1) Der in der Bohrung gemessene Druck ist ein Mittelwert des Druckes einer Zone von 1,5 mm radialer Ausdehnung. Bei einem Bogendurchmesser von etwa 10 mm und den erwarteten Druckgradienten dürfte diese radiale Auflösung noch ausreichend sein.

β_2) Eine parallel zur Bogenachse vorhandene Strömung verändert die Höhe des Druckanstiegs im Magnetfeld nicht; hingegen könnte die Druckmessung durch die dann vorhandene Differenz von Gesamtdruck und statischem Druck verfälscht

werden. Zur Abschätzung des möglichen Fehlers betrachten wir die Strömung als eindimensional und verwenden den Impulssatz, der in diesem Fall die Form hat:

$$\rho v^2 + p = p_0 \tag{49}$$

Hierin ist p der Druck und ρ die Dichte an denjenigen Stellen, wo die Strömungsgeschwindigkeit $v \neq 0$ ist; p_0 ist der Druck im Staupunkt, wo sich die Messbohrung befindet.
Also:

$$p_0 - p = \rho v^2 \tag{49a}$$

Kann man die höchste vorkommende Geschwindigkeit abschätzen, so hat man damit ein Mass für die maximal möglichen Druckdifferenzen.
Als Ursache für eine Strömung in unserem Bogen muss die von MAECKER [12] beschriebene "Eigenmagnetische Kompression" betrachtet werden: Durch das vom Bogenstrom erzeugte azimuthale Magnetfeld wird der Druck im Bogen erhöht und zwar umso mehr, je kleiner der Bogenquerschnitt ist. Ist der Bogenquerschnitt z.B. an der Kathode kleiner als in der Bogensäule, so wird in Achsenrichtung ein Druckgradient entstehen, der eine Strömung zur Folge hat. Eine obere Grenze für die Strömungsgeschwindigkeit erhält man nach [12], wenn man die Druckerhöhung in der Säule gegenüber der Druckerhöhung in Kathodennähe vernachlässigt. Es ist dann:

$$\frac{1}{2} \bar{\rho} v^2 = \frac{I^2}{c^2 \cdot F} \tag{50}$$

$\bar{\rho}$ ist eine mittlere Plasmadichte, I der Bogenstrom, F der Bogenquerschnitt an der Kathode, c die Lichtgeschwindigkeit. Aus (49a) und (50) bekommt man:

$$p_0 - p = \frac{2 I^2}{c^2 \cdot F} \tag{51}$$

Mit I = 200 A = 20·c el. stat. Einheiten und F = 0,27 cm^2 (Fläche des "Kathodenbrennflecks") wird:

$$p_o - p = 3 \cdot 10^3 \frac{dyn}{cm^2}$$

Diese für den ungünstigsten Fall abgeschätzte Druckdifferenz beträgt 30 % des Aussendrucks $p_A = 1 \cdot 10^4 \frac{dyn}{cm^2}$. Aus Abb. 8 ist ersichtlich, dass in Wirklichkeit kein ausgeprägter Brennfleck und damit keine klare Verengung des Querschnitts an der Kathode existiert. Zur Abschätzung wurde die Fläche der Schmelzkuppe der Kathode eingesetzt. Ferner liefert die von MAECKER angegebene Formel einen Maximalwert für die Geschwindigkeit an der Kathode. Diese Maximalgeschwindigkeit liegt jedoch an der Anode sicher nicht mehr vor, da mit zunehmendem Abstand von der Kathode die Geschwindigkeit durch innere Reibung herabgesetzt wird. R. WIENECKE [13] hat das Geschwindigkeitsfeld des 200 A - Hochstromkohlebogens untersucht und gefunden, dass schon in einem Abstand von etwa 2 cm von der Kathode die Geschwindigkeit in der Bogenmitte auf die Hälfte des Maximalwertes abgenommen hat. Wegen der quadratischen Abhängigkeit der Druckdifferenz von der Geschwindigkeit bedeutet dies auf unseren Fall angewandt, dass der an der Anode möglicherweise vorliegende Staudruck sicher gegen den statischen Druck vernachlässigt werden darf.

β_3) Die Druckmessung könnte ferner durch die im Anodenfall beschleunigten Elektronen verfälscht werden. Nimmt man an, dass der Strom in diesem Gebiet ausschliesslich von den Elektronen getragen wird, so wird der pro cm^2 und sec transportierte Impuls

$$\Delta p = m_e n_e v_e^2 = \frac{m_e}{n_e e^2} j^2 \qquad (52)$$

Mit j = 200 A/0,75 cm^2 = $8 \cdot 10^{11}$ el.stat. Einheiten und $n_e = 10^{15}\ cm^{-3}$ wird

$$\Delta p = 2{,}5 \frac{dyn}{cm^2}$$

Dieser durch die auf die Anode auftreffenden Elektronen entstehende Druck ist gegenüber $p_A = 10^4$ dyn/cm^2 zu vernachlässigen.

β_4) Der Stand der Quecksilbersäule kann auf wenige zehntel Millimeter genau abgelesen werden, sodass hier kein wesentlicher Beitrag zum Fehler zu erwarten ist. Zusammenfassend wird die Genauigkeit der Druckmessung mit Hilfe einer Bohrung in der Anode auf 10 Prozent geschätzt. Druckprofile sind in den Abb. 22 bis 24 dargestellt.

IV. Vergleich von Theorie und Experiment

Abschliessend bleibt zu prüfen, inwieweit die bei der theoretischen Behandlung gemachten Annahmen im Experiment verwirklicht sind.

Eine Schwerpunktsgeschwindigkeit in z-Richtung ändert die Ergebnisse der Rechnungen [1] nicht, da das Magnetfeld nur Kräfte auf senkrecht zu ihm bewegte Ladungsträger ausübt. Eine Rotation des Bogens ist prinzipiell nicht auszuschliessen. Diese müsste nach Gl. (5) durch eine r-Komponente des Stroms verursacht sein. Da an der Kathode keine deutlich ausgebildete Verengung vorhanden ist, und die Stromstärke nur 200 A betrug -dies ist, verglichen mit Stromstärken in Lichtbögen in Wasserstoff wo eine solche Rotation spektroskopisch festgestellt werden konnte, eine Grössenordnung weniger- ist kein Effekt zu erwarten.

Die Rechnungen über die Druckerhöhung setzen Gleichgewicht der Temperatur für alle Teilchensorten, sowie Gültigkeit der Sahaformel voraus. Wir wollen zunächst die Gleichheit der Temperaturen in Anlehnung an [4] untersuchen.

Die Ladungsträger nehmen Energie aus dem elektrischen Feld auf und geben sie durch Stösse an die Neutralteilchen weiter. Die Kopplung der Ionen an die Neutralteilchen ist wegen der Gleichheit der Massen sehr gut, sodass wir von vornherein annehmen können, dass diese gleiche Temperaturen haben. Die von den Elektronen aufgenommene Energie wird dem ungünstigen Massenverhältnis entsprechend schlechter weitergegeben. Es stellt sich also

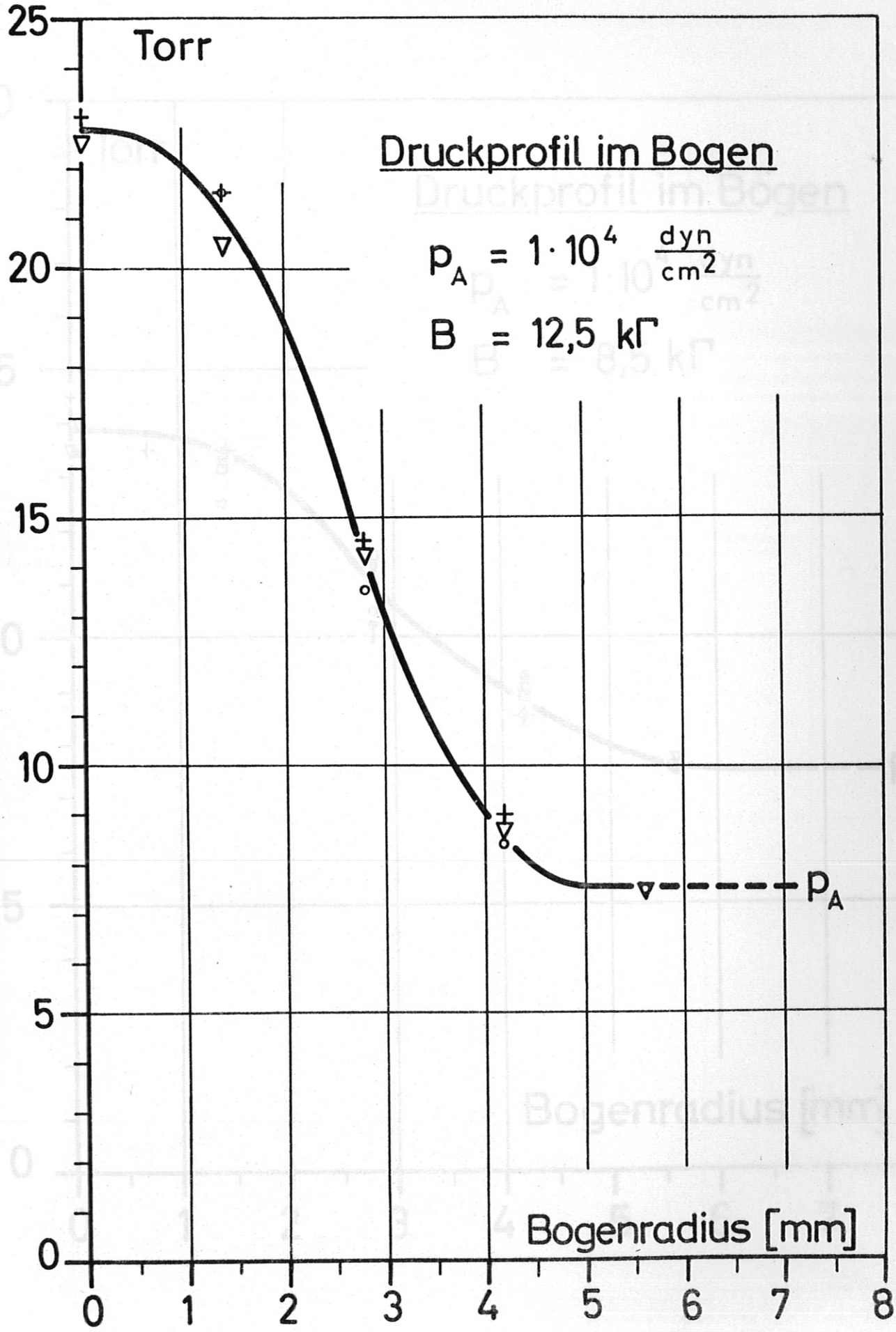

Torr
Druckprofil im Bogen
$p_A = 1 \cdot 10^4 \frac{dyn}{cm^2}$
B = 12,5 kΓ
p_A
Bogenradius [mm]
25
20
15
10
5
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8

Abb. 22

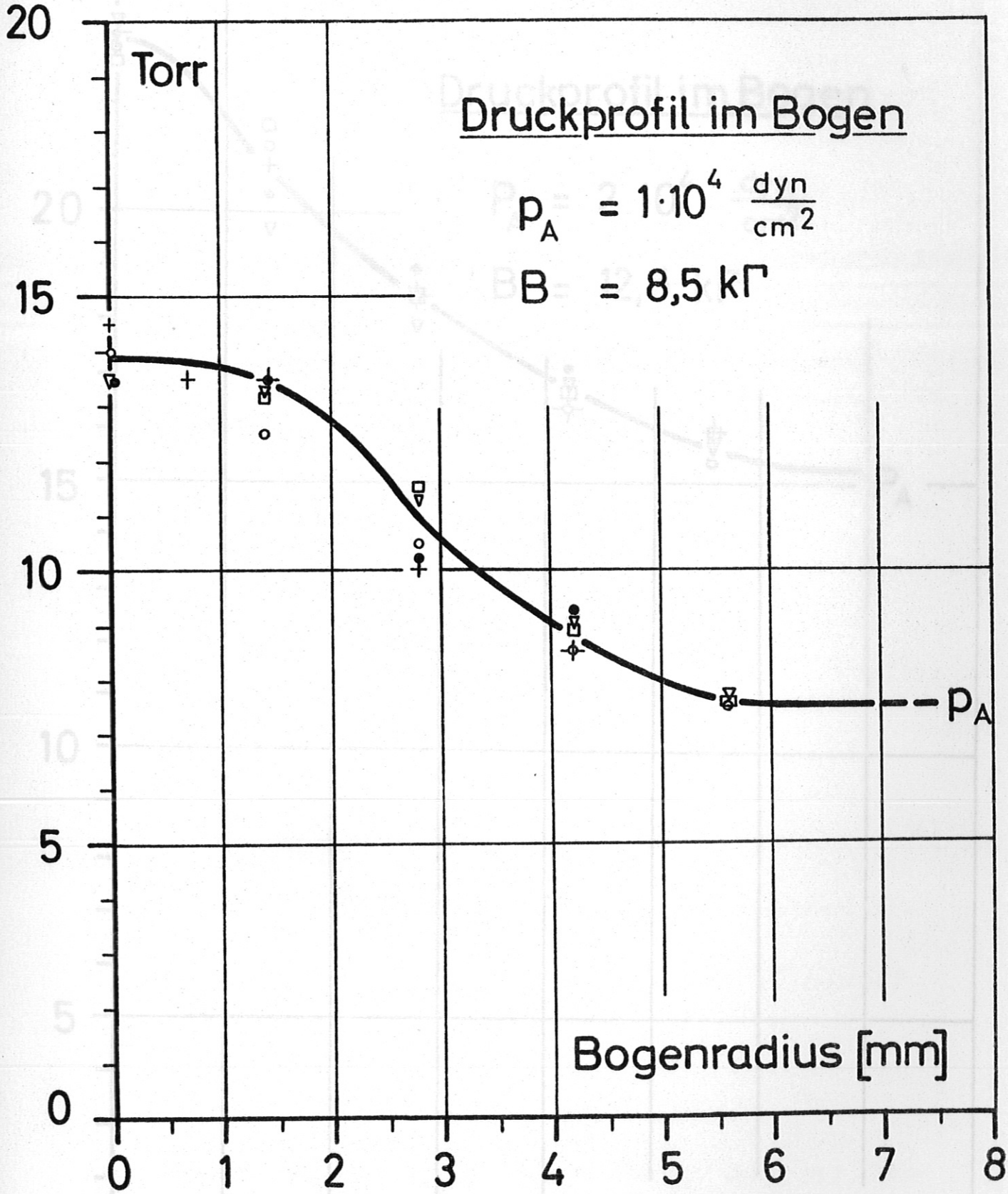

Torr
Druckprofil im Bogen
$p_A = 1 \cdot 10^4 \frac{dyn}{cm^2}$
B = 8,5 kΓ
p_A
Bogenradius [mm]
20
15
10
5
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8

Abb. 23

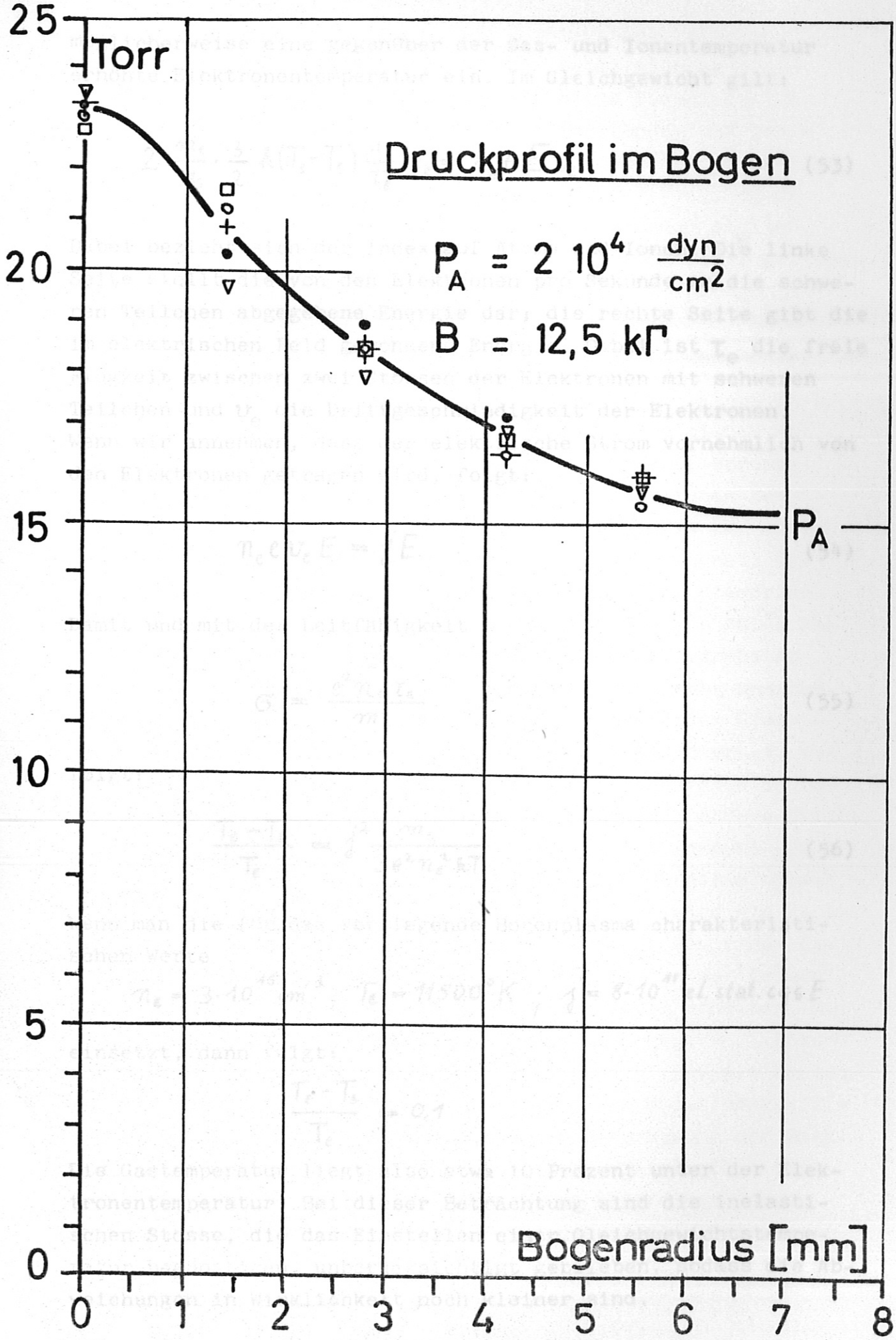

Druckprofil im Bogen
$P_A = 2\ 10^4\ \frac{dyn}{cm^2}$
B = 12,5 kΓ
Torr
25
20
15
10
5
0
P_A
Bogenradius [mm]
0
1
2
3
4
5
6
7
8

Abb. 24

möglicherweise eine gegenüber der Gas- und Ionentemperatur erhöhte Elektronentemperatur ein. Im Gleichgewicht gilt:

$$2\,\frac{m_e}{m_s}\cdot\frac{3}{2}\,k(T_e-T_s)\,\frac{1}{\tau_e}\,n_e = n_e\,e\,E\,v_e \tag{53}$$

Dabei bezieht sich der Index s auf Atome und Ionen. Die linke Seite stellt die von den Elektronen pro Sekunde an die schweren Teilchen abgegebene Energie dar; die rechte Seite gibt die im elektrischen Feld gewonnene Energie. Dabei ist τ_e die freie Flugzeit zwischen zwei Stössen der Elektronen mit schweren Teilchen und v_e die Driftgeschwindigkeit der Elektronen. Wenn wir annehmen, dass der elektrische Strom vornehmlich von den Elektronen getragen wird, folgt:

$$n_e\,e\,v_e\,E = j\,E \tag{54}$$

Damit und mit der Leitfähigkeit

$$\sigma = \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e} \tag{55}$$

folgt:

$$\frac{T_e - T_s}{T_e} = j^2\,\frac{m_s}{3e^2 n_e^2 kT} \tag{56}$$

Wenn man die für das vorliegende Bogenplasma charakteristischen Werte

$$n_e = 3\cdot 10^{15}\,cm^{-3}\,;\quad T_e = 11500^\circ K\,;\quad j = 8\cdot 10^{11}\ \text{el.stat.cgs}\,E$$

einsetzt, dann folgt:

$$\frac{T_e - T_s}{T_e} = 0{,}1$$

Die Gastemperatur liegt also etwa 10 Prozent unter der Elektronentemperatur. Bei dieser Betrachtung sind die inelastischen Stösse, die das Einstellen einer Gleichgewichtstemperatur begünstigen, unberücksichtigt geblieben, sodass die Abweichungen in Wirklichkeit noch kleiner sind.

Nun soll untersucht werden, ob der Zusammenhang zwischen Atomen, Elektronen und Ionen durch die Sahagleichung richtig beschrieben wird. Bekanntlich gilt diese Formel im thermodynamischen Gleichgewicht, wenn alle Anregungs- und Ionisationsprozesse mit ihrem Umkehrprozess im Gleichgewicht sind. In einem Bogenplasma ist dies sicher nicht der Fall, da dem Plasma Strahlung verlorengeht. Es ist aber dennoch möglich, dass in guter Näherung thermisches Gleichgewicht vorliegt, wenn nämlich die Stossprozesse den Hauptanteil an den Anregungs- und Ionisations- und deren Umkehrprozessen ausmachen. Anschaulich ist klar, dass dies insbesondere für ein Plasma hoher Dichte der Fall ist.

Quantitative Untersuchungen dieser Fragen wurden bisher mit Beschränkung auf einige Grenzfälle für Wasserstoff durchgeführt. In [14] wurde das Verhältnis der tatsächlichen Besetzung der einzelnen Energieniveaus des Wasserstoffs zur Gleichgewichtsbesetzung (Saha-Boltzmann-Besetzung) berechnet. Für das jeweils vorliegende Plasma muss zur Anwendung dieser Ergebnisse untersucht werden, welcher der behandelten Fälle am ehesten realisiert ist. Dabei genügt eine relativ grobe Abschätzung, denn auch die Rechnungen, denen die recht unsicheren Werte für die Wirkungsquerschnitte der einzelnen Elementarprozesse zugrundeliegen, sind mit einiger Unsicherheit behaftet. Im folgenden wurde das Plasma als optisch dick in Bezug auf die Lymanserie, als optisch dünn für jede andere Strahlung angesehen. Die massgebliche Grösse ist das Produkt aus Absorptionskoeffizient und durchstrahlter Schichtdicke. Kommt dieses Produkt in die Grössenordnung von 1, so wird die Reabsorption der Strahlung wichtig, und man spricht von einem optisch dicken Plasma. Für die Kontinua kann man in der früher beschriebenen Weise die Absorptionskoeffizienten erhalten. Man findet, dass die zugehörige Strahlung für die gegebenen Bogendimensionen aus optisch dünner Schicht erfolgt. Für die Linien kann man den Absorptionskoeffizienten aus dem Emissionskoeffizienten erhalten, der, wie schon bei der Besprechung der Elektronendichtemessung erwähnt, in Form normierter Profile vorliegt. Für die Linien der Lymanserie muss allerdings dieses Druckprofil mit dem zugehörigen Dopplerprofil gefaltet werden. Dabei kann die Normierung wieder so erfolgen, dass für das resultierende Profil gilt:

$$\int \varepsilon_L'(\nu)\, d\nu = 1 \tag{57}$$

Für den nichtnormierten Emissionskoeffizienten $\varepsilon_L(\nu)$ gilt wegen

$$\int \varepsilon_L(\nu)\, d\nu = i_L \tag{58}$$

die Beziehung:

$$\varepsilon_L(\nu) = i_L\, \varepsilon_L'(\nu) \tag{59}$$

Der Absorptionskoeffizient $K_L(\nu)$ folgt damit aus dem Kirchhoff'schen Satz, wenn wir annehmen, dass die Hohlraumstrahlung über die Linienbreite konstant ist:

$$K_L(\nu) = \varepsilon_L(\nu)\, B^*(\nu)^{-1}$$

Dann bekommt man mit (20):

$$K_L(\nu) = \varepsilon_L'(\nu) \cdot \frac{1}{4\pi} A_m^m \frac{n_0}{Z_0} m^2 \frac{c^2}{\nu_L^2}\, e^{\frac{h\nu_L}{kT} - \frac{E_m}{kT}} \tag{60}$$

Für die Lymanserie ergibt die Exponentialfunktion den Wert 1, da es sich hier um Übergänge in den Grundzustand handelt und deshalb $h\nu_L = E_m$ ist.

Eine exakte Behandlung der Reabsorption wäre wegen der Inhomogenität des Bogenplasmas sehr verwickelt. Im Rahmen einer Abschätzung sollte es aber genügen, den Bogen durch eine homogene Plasmaschicht mit mittleren Parametern zu ersetzen. Als solche werden gewählt:

$T = 10\,000\ ^{o}K$, $n_e = 2 \cdot 10^{15}\ cm^{-3}$, d = 1/2 Bogenradius = 0,3 cm

Für diese Werte wurden die Druckprofile mit den Dopplerprofilen für L_α und L_β gefaltet[+]. Das Druckprofil wurde dazu durch zwei Geraden (in logarithmischer Darstellung) angenähert. In Abb. 25 und 26 sind diese Profile gezeichnet. Gleichzeitig ist derjenige Bereich schraffiert, in dem die Strahlung aufgrund von Gl. (60) optisch dick ist. Bezüglich der Linien aller anderen Serien ist das Plasma optisch dünn. Da der Anteil des Energieumsatzes in der Lymanserie für L_α und L_β weitaus

---

[+]Die Faltung auf der IBM 7090 hat freundlicherweise Herr Dipl.-Phys. U. HEIDRICH übernommen.

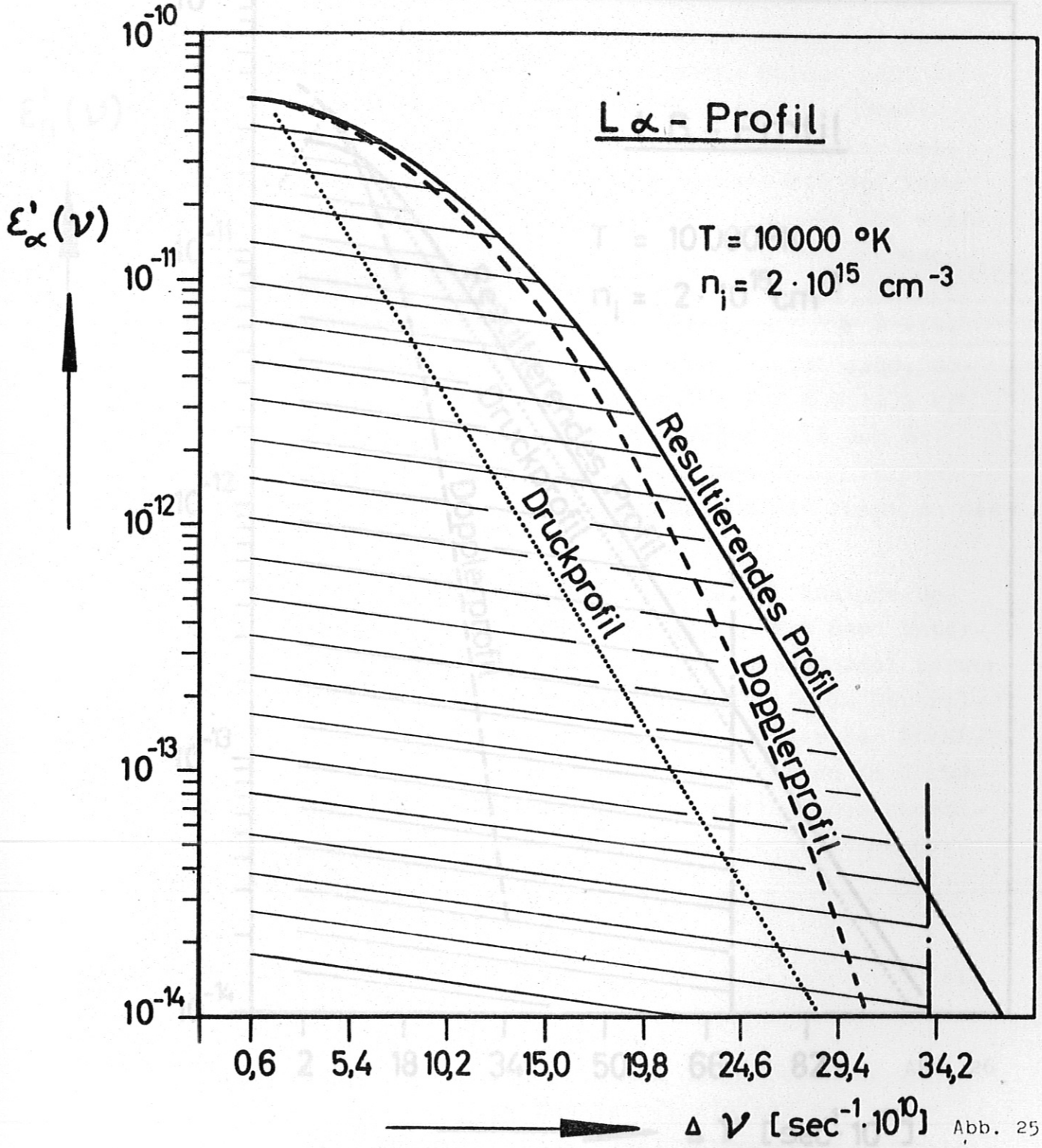

Lα - Profil
T = 10000 °K
$n_i = 2 \cdot 10^{15}$ cm^{-3}
Resultierendes Profil
Dopplerprofil
Druckprofil
$\varepsilon'_\alpha(\nu)$
10^{-10}
10^{-11}
10^{-12}
10^{-13}
10^{-14}
0,6
5,4
10,2
15,0
19,8
24,6
29,4
34,2
$\Delta\nu$ [sec$^{-1}\cdot 10^{10}$]

Abb. 25

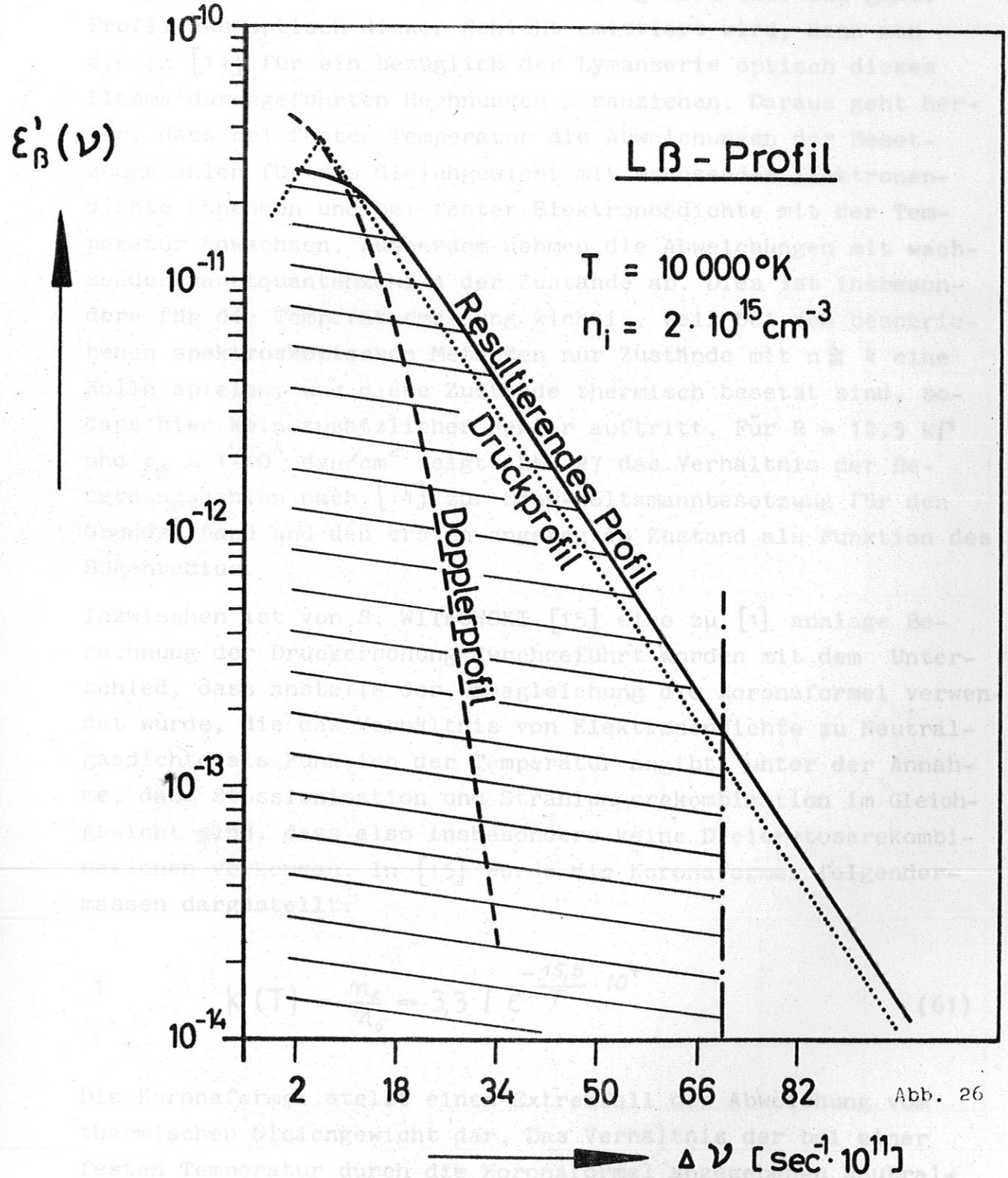

$\varepsilon'_\beta(\nu)$
10^{-10}
10^{-11}
10^{-12}
10^{-13}
10^{-14}
Lß - Profil
T = 10 000 °K
$n_i = 2 \cdot 10^{15} cm^{-3}$
Resultierendes Profil
Druckprofil
Dopplerprofil
2
18
34
50
66
82
$\Delta\nu$ [$sec^{-1} \cdot 10^{11}$]

Abb. 26

am grössten ist, und hier die Strahlung fast über das ganze Profil aus optisch dicker Schicht emittiert wird, kann man die in [14] für ein bezüglich der Lymanserie optisch dickes Plasma durchgeführten Rechnungen heranziehen. Daraus geht hervor, dass bei fester Temperatur die Abweichungen der Besetzungszahlen für das Gleichgewicht mit wachsender Elektronendichte abnehmen und bei fester Elektronendichte mit der Temperatur anwachsen. Ausserdem nehmen die Abweichungen mit wachsender Hauptquantenzahl n der Zustände ab. Dies ist insbesondere für die Temperaturmessung wichtig, weil bei den beschriebenen spektroskopischen Methoden nur Zustände mit $n \geqq 4$ eine Rolle spielen, und diese Zustände thermisch besetzt sind, sodass hier kein zusätzlicher Fehler auftritt. Für B = 12,5 kΓ und $p_A = 1 \cdot 10^4$ dyn/cm^2 zeigt Abb. 27 das Verhältnis der Besetzungszahlen nach [14] zur Saha-Boltzmannbesetzung für den Grundzustand und den ersten angeregten Zustand als Funktion des Bogenradius.

Inzwischen ist von S. WITKOWSKI [15] eine zu [1] analoge Berechnung der Druckerhöhung durchgeführt worden mit dem Unterschied, dass anstelle der Sahagleichung die Koronaformel verwendet wurde, die das Verhältnis von Elektronendichte zu Neutralgasdichte als Funktion der Temperatur angibt, unter der Annahme, dass Stossionisation und Strahlungsrekombination im Gleichgewicht sind, dass also insbesondere keine Dreierstossrekombinationen vorkommen. In [15] wurde die Koronaformel folgendermassen dargestellt:

$$K(T) = \frac{n_e}{n_0} = 3{,}3\, T\, e^{-\frac{15{,}8}{T} \cdot 10^4} \tag{61}$$

Die Koronaformel stellt einen Extremfall der Abweichung vom thermischen Gleichgewicht dar. Das Verhältnis der bei einer festen Temperatur durch die Koronaformel angegebenen Neutralteilchendichte zu der aus der Sahagleichung berechneten Neutralteilchendichte ist gegeben durch:

$$\frac{n_{0_{KORONA}}}{n_{0_{SAHA}}} = 7{,}25 \frac{\sqrt{T}}{n_e} 10^{14} \tag{62}$$

In Abb. 27 ist dieses Verhältnis ebenfalls als Funktion des

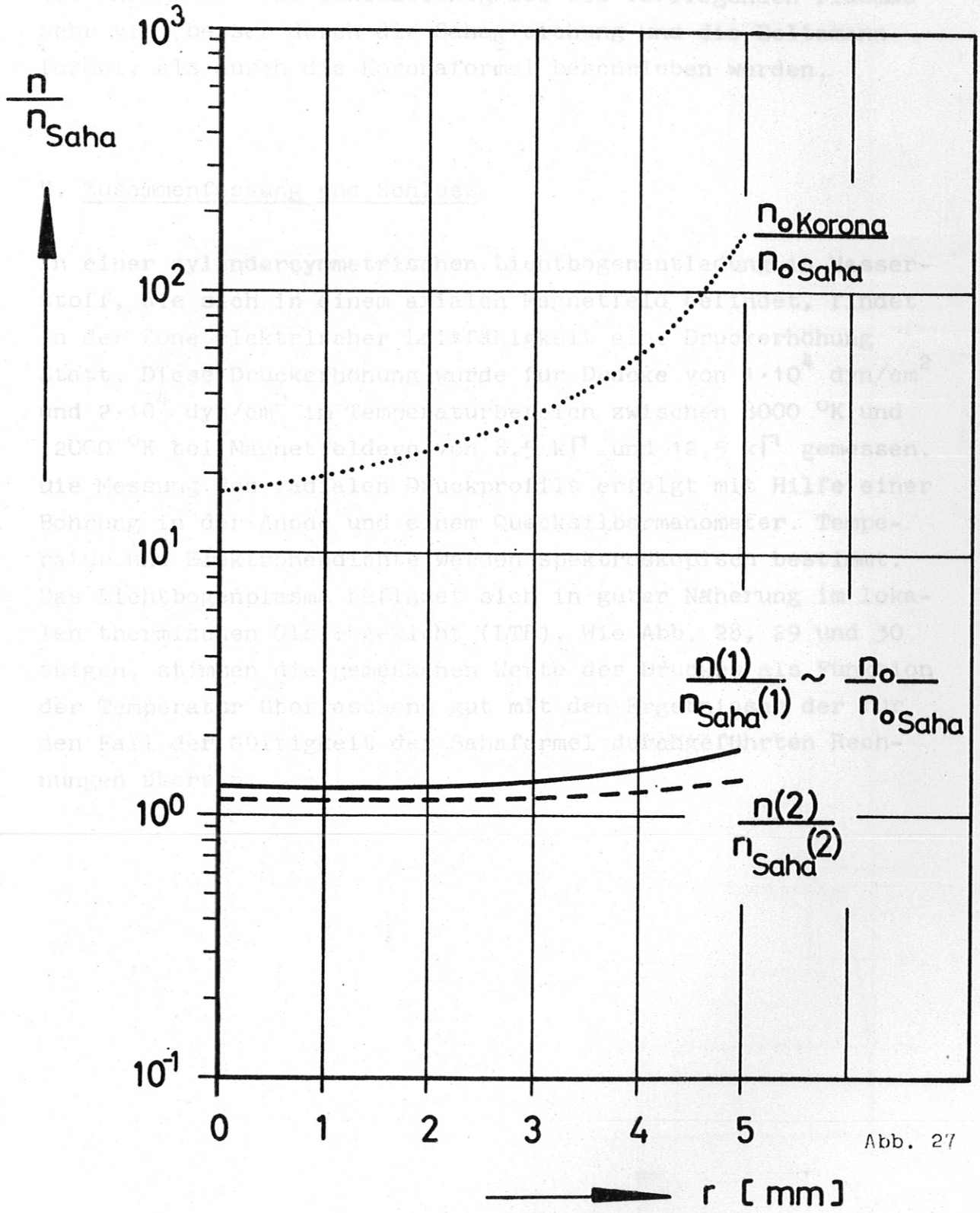

$\frac{n}{n_{Saha}}$
10^3
10^2
10^1
10^0
10^{-1}
$\frac{n_{o\,Korona}}{n_{o\,Saha}}$
$\frac{n(1)}{n_{Saha}(1)} \sim \frac{n_o}{n_{o\,Saha}}$
$\frac{n(2)}{n_{Saha}(2)}$
0
1
2
3
4
5
r [mm]

Abb. 27

Bogenradius aufgetragen. Ein Vergleich der Kurve zeigt, dass die Anregungs- und Ionisationsgrade des vorliegenden Plasmas sehr viel besser durch die Sahagleichung und die Boltzmannformel, als durch die Koronaformel beschrieben werden.

V. Zusammenfassung und Schluss

In einer zylindersymmetrischen Lichtbogenentladung in Wasserstoff, die sich in einem axialen Magnetfeld befindet, findet in der Zone elektrischer Leitfähigkeit eine Druckerhöhung statt. Diese Druckerhöhung wurde für Drucke von $1 \cdot 10^4$ dyn/cm^2 und $2 \cdot 10^4$ dyn/cm^2 im Temperaturbereich zwischen 8000 ^oK und 12000 ^oK bei Magnetfeldern von 8,5 kΓ und 12,5 kΓ gemessen. Die Messung des radialen Druckprofils erfolgt mit Hilfe einer Bohrung in der Anode und einem Quecksilbermanometer. Temperatur und Elektronendichte werden spektroskopisch bestimmt. Das Lichtbogenplasma befindet sich in guter Näherung im lokalen thermischen Gleichgewicht (LTE). Wie Abb. 28, 29 und 30 zeigen, stimmen die gemessenen Werte des Druckes als Funktion der Temperatur überraschend gut mit den Ergebnissen der für den Fall der Gültigkeit der Sahaformel durchgeführten Rechnungen überein.

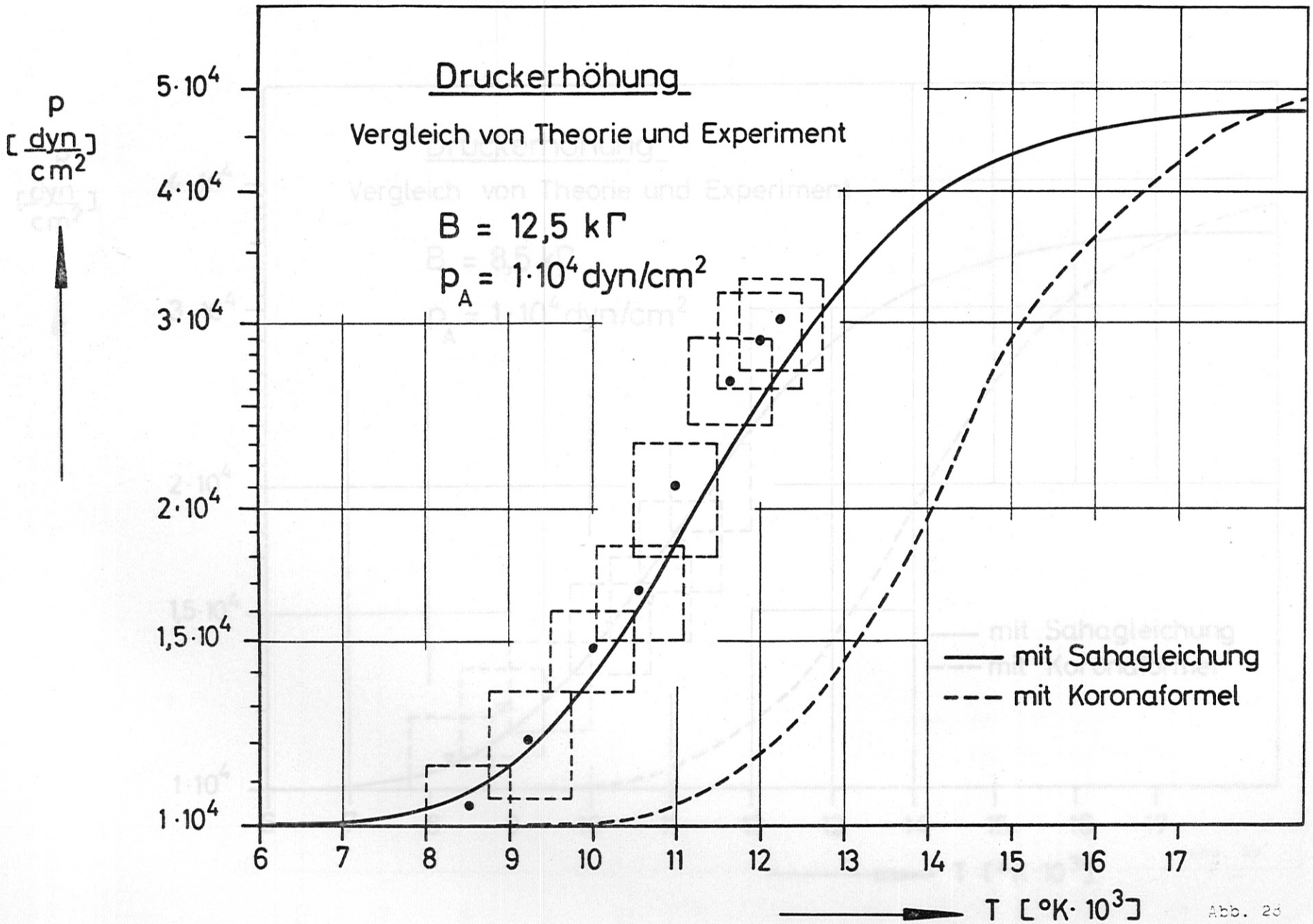

Druckerhöhung
Vergleich von Theorie und Experiment
B = 12,5 kΓ
$p_A = 1 \cdot 10^4$ dyn/cm²
p [dyn/cm²]
5·10⁴
4·10⁴
3·10⁴
2·10⁴
1,5·10⁴
1·10⁴
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
T [°K·10³]
mit Sahagleichung
mit Koronaformel

Abb. 26

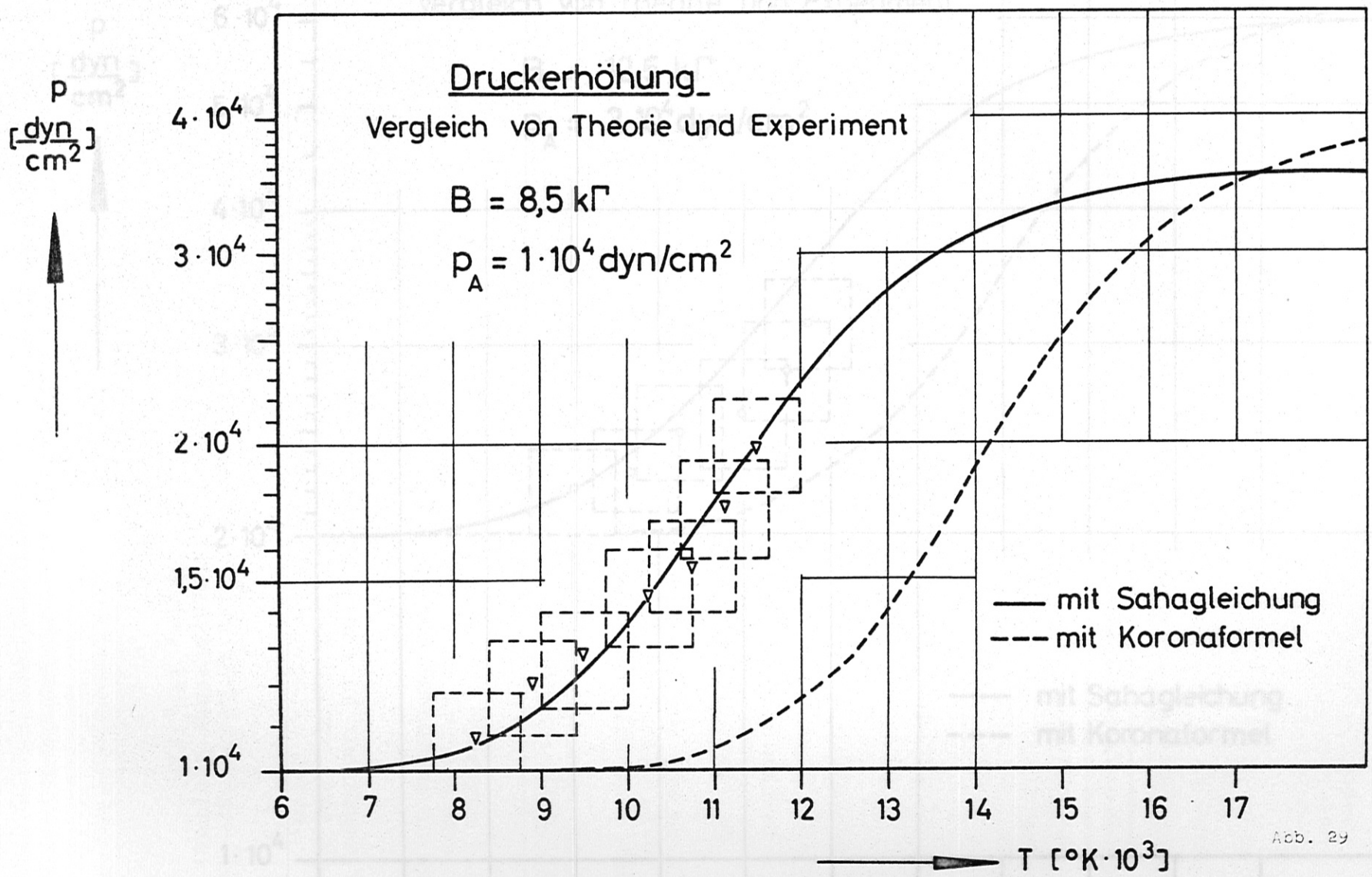

Druckerhöhung
Vergleich von Theorie und Experiment
B = 8,5 kΓ
$p_A = 1 \cdot 10^4$ dyn/cm²
p [dyn/cm²]
4·10⁴
3·10⁴
2·10⁴
1,5·10⁴
1·10⁴
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
T [°K·10³]
mit Sahagleichung
mit Koronaformel

Abb. 29

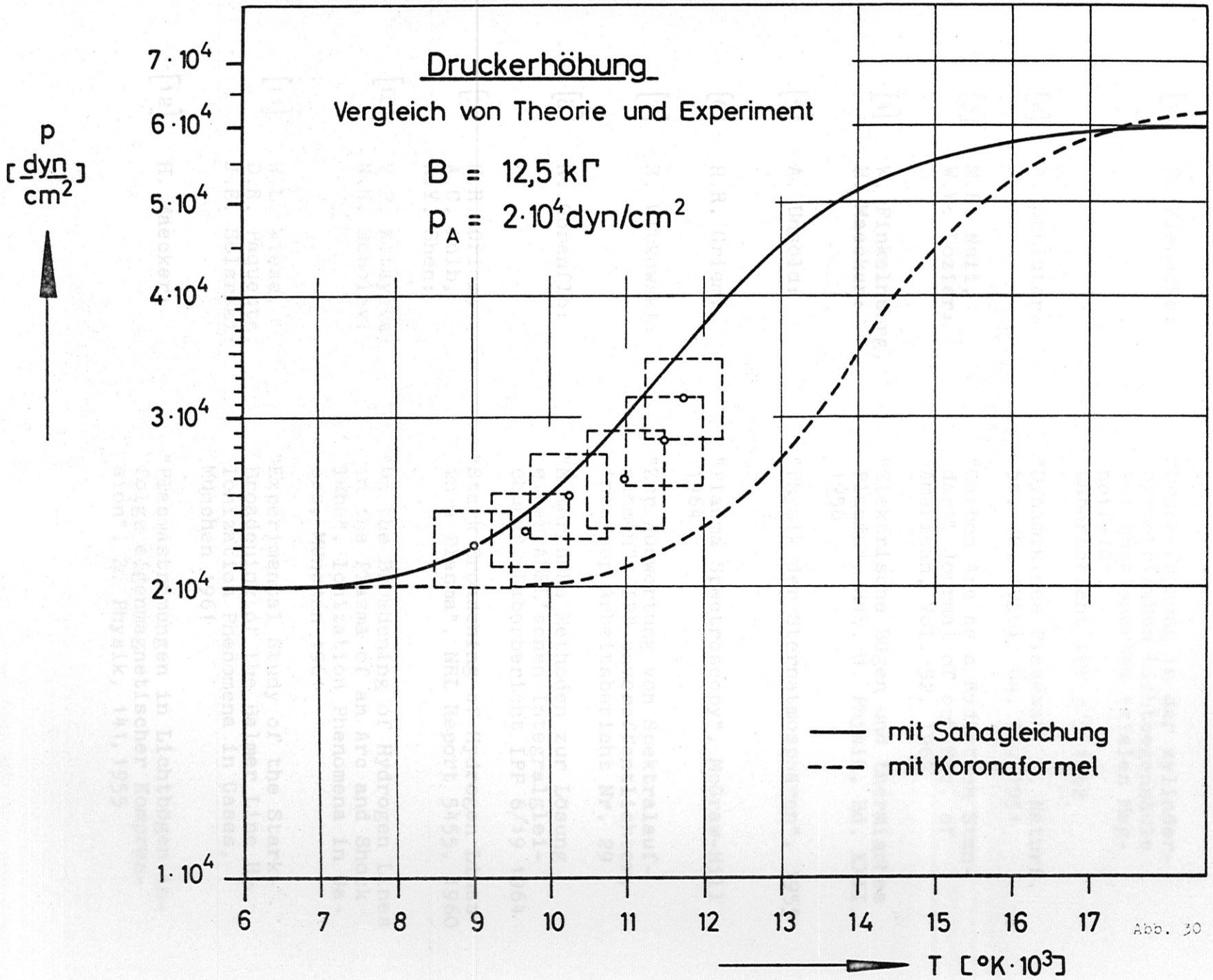

Druckerhöhung
Vergleich von Theorie und Experiment
B = 12,5 kΓ
p_A = $2 \cdot 10^4$ dyn/cm²
p [dyn/cm²]
$7 \cdot 10^4$
$6 \cdot 10^4$
$5 \cdot 10^4$
$4 \cdot 10^4$
$3 \cdot 10^4$
$2 \cdot 10^4$
$1 \cdot 10^4$
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
T [°K · 10³]
mit Sahagleichung
mit Koronaformel

Abb. 30

Literaturverzeichnis:

[1] R. Wienecke: "Druckerhöhung in der zylindersymmetrischen Lichtbogensäule bei überlagertem axialen Magnetfeld", Laborbericht IPP 3/3 1962

[2] A. Schlüter: "Dynamik des Plasmas", Z. Naturf. 5a, 72, 1950; 6a, 73, 1951

[3] M.R. Null, W.W. Lozier: "Carbon Arc as a Radiation Standart", Journal of opt.Soc. of American, Vol. 52, 1962

[4] W. Finkelnburg, H. Maecker: "Elektrische Bögen und thermisches Plasma", Hdb. d. Physik, Bd. XXII, 1956

[5] A. Unsöld: "Physik der Sternatmosphären", 1955

[6] H.R. Griem: "Plasma Spectroscopy", McGraw-Hill 1964

[7] S. Witkowski: "Zur Auswertung von Spektralaufnahmen", IPP unveröffentlichter, interner Arbeitsbericht Nr. 29

[8] R. Gorenflo: "Numerische Methoden zur Lösung einer ABEL'schen Integralgleichung", Laborbericht IPP 6/19 1964

[9] H.R. Griem, A.C. Kolb, K.Y. Shen: "Stark Broadening of Hydrogen Lines in a Plasma", NRL Report 5455, 1960

[10] V.F. Kitayeva, N.N. Sobolev: "On the Broadening of Hydrogen Lines in the Plasma of an Arc and Shock Tube", Ionization Phenomena in Gases, München 1961

[11] W.L. Wiese, D.R. Paquette, J.E. Solarski: "Experimental Study of the Stark-Broadening of the Balmer Line H_γ Ionization Phenomena in Gases, München 1961

[12] H. Maecker: "Plasmaströmungen in Lichtbögen infolge eigenmagnetischer Kompression", Z. Physik, 141, 1955

[13] R. Wienecke: "Uber das Geschwindigkeitsfeld des Hochstromkohlebogens", Z. Physik, Bd. 134, 1955

[14] D.R. Bates, A.E. Kingston, R.W.P. McWhirter: "Recombination between electrons and atomic ions", Proc.Roy.Soc. 267, 1962, Proc.Roy.Soc. 270, 1962

[15] S. Witkowski: "Druckerhöhung in der zylindersymmetrischen Lichtbogensäule bei überlagertem axialem Magnetfeld", IPP 3/23 1964

Für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für dauerndes Interesse bei ihrer Durchführung möchte ich Herrn Prof. Dr. R. Wienecke sehr danken. Für wertvolle Diskussionen und Ratschläge danke ich ferner Herrn Dr. S. Witkowski sowie den Herren Dipl.-Phys. C. Mahn, Dr. H. Ringler und Dr. G. Zankl. Herr cand.rer.nat. M. Scholer hat freundlicherweise die erforderlichen Maschinenprogramme geschrieben. Für die sorgfältige Anfertigung der Abbildungen und die Niederschrift der Arbeit bin ich Frl. E. Waldherr und Frl. I. Heidecker zu Dank verpflichtet.