Erhaltungsgrößen und mikroskopische Stabilität des Plasmas

(Conservation Laws and Microscopic Stability of the Plasma)

H. Völk

IPP 6/40 August 1965

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Erhaltungsgrößen und mikroskopische
Stabilität des Plasmas

(Conservation Laws and Microscopic
Stability of the Plasma)

H. Völk

IPP 6/40 August 1965

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

IPP 6/40 H. Völk Conservation Laws and Microscopic Stability of the Plasma (in German) August 1965

ABSTRACT: The problem is discussed to sidestep the direct solution of the linearized Vlasov-eq. and to treat the microscopic stability problem in employing constants of the motion. In the case of plane equilibria a number of conservation laws is derived in the electrostatic approximation. All these conserved quantities are quadratic expressions in the perturbations. They embrace especially the energy and momentum to second order. For some special equilibria the positive-definiteness of the total energy yields a sufficient stability criterion, analogous to the situation in the hydromagnetic theory of static equilibria. A variational principle due to Dawson and Oberman is discussed, which attempts to give a sufficient criterion also in more general cases. It is demonstrated that this extremum principle, at least in the homogeneous case without magnetic field, is equivalent to the evaluation of marginal solutions of the Vlasov-eqs, but does not lead to a minimum of the functional varied. Its numerical treatment leads back to the explicit solution of the dynamical eqs. In this variational principle use is made of conservation of energy and momentum only. If one takes into account the entirety of the conservation laws derived, one can get a necessary and sufficient stability criterion in the sense of an energy-principle. But it turns out, that one in general needs the continuum of conservation laws, except the fore mentioned special cases. So the practical usefulness of this constant of motion method seems doubtful.

Inhaltsverzeichnis

Problemstellung und Übersicht

Abgesehen von den wenigen Versuchen, die Stabilität eines Plasmas gegen endliche Störungen zu behandeln, stellt sich für eine Stabilitätsuntersuchung folgendes Problem:

Führt eine anfänglich kleine Abänderung eines stationären oder statischen Gleichgewichtszustandes zu einem Abgleiten des Plasmas aus diesem Zustand, oder behält die Konfiguration in dem Maße, wie die anfängliche Störung klein ist, ihre ursprüngliche Form bei, oder kehrt sie sogar nach langer Zeit genau wieder in die ursprüngliche Form zurück. Die beiden letzten Situationen seien als stabil bezeichnet, die erste als instabil. Im Grunde kann man nur im stabilen Fall die Unterscheidung zwischen endlichen und kleinen Störungen machen. Trotzdem betrachtet man im Rahmen der Stabilitätsrechnung die Störungen auch während ihrer ganzen zeitlichen Entwicklung als klein gegenüber den Gleichgewichtsgrößen. Dieses Vorgehen liefert daher bei Instabilität nur die Entwicklung in der Anfangsphase korrekt und verliert seine Berechtigung für große Zeiten, wenn nämlich die Störungen nicht mehr als klein betrachtet werden können.+) Im Sinne der linearisierten Theorie entfernt sich im instabilen Fall das Plasma weiter zeitlich monoton (i.A. exponentiell) aus dem Gleichgewichtszustand oder es führt Oszillationen mit monoton anwachsender Amplitude um das Gleichgewicht aus ("Überstabilität"). In Wirklichkeit werden die Störungen nicht unbegrenzt anwachsen, weil der Energievorrat des Gesamtsystems beschränkt ist. Die Theorie der kleinen Störungen, die hier konsequent betrachtet werden soll, vernachlässigt diese Rückwirkungen auf das Gleichgewicht ebenso wie die Wechselwirkung verschiedener Störungen untereinander.

Beschreibt man ein Plasma durch die hydromagnetischen Gleichungen, so sind die Gleichgewichtskonfigurationen gegeben durch stationäre oder statische Lösungen dieser Gleichungen, je nachdem, ob die Massengeschwindigkeit von Null verschieden ist oder

---

+) Diese Zeiten hängen allerdings auch von der Größe der Anfangsstörung ab. Je kleiner diese ist, für umso längere Zeiten bleibt die lineare Näherung gültig. Bis dahin kann die Störung ein Vielfaches ihrer Anfangsgröße erreicht haben.

überall verschwindet. Die Gleichungen für die Störungen ergeben sich durch Linearisierung der vollen dynamischen Gleichungen in der Umgebung des Gleichgewichts. Ihre Lösung liefert die volle Information über das Stabilitätsverhalten, insbesondere auch über die Anwachsraten der Störungen. Da die Koeffizienten dieser linearen Differentialgleichungen nur vom Gleichgewicht und damit nicht von der Zeit abhängen, ist für die gesuchten Störgrößen ein Ansatz $\sim e^{i\omega t}$ möglich. So ergibt sich ein Eigenwertproblem für die Quadrate der Frequenzen ω. Im statischen Fall ist dieses Eigenwertproblem selbstadjungiert [1,2] und damit ω^2 reell. Damit ist das Auftreten von Überstabilitäten ausgeschlossen. Unter der Voraussetzung der Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen ist das Eigenwertproblem äquivalent dem ursprünglichen Problem. Nun sind sowohl das zeitabhängige, wie das Eigenwertproblem im allgemeinen schwierig zu behandeln. Interessiert man sich jedoch nur dafür, ob das Gleichgewicht stabil ist oder instabil, so reduziert sich die Aufgabe auf die Untersuchung des Vorzeichens des tiefsten Eigenwerts (negative Eigenwerte ω^2 bedeuten Instabilität). Das äquivalente Variationsproblem, das insbesondere den tiefsten Eigenwert als das Minimum einer quadratischen Form in den Störungen liefert, steht in enger Beziehung zum Erhaltungssatz der Energie [2]. Die Gesamtenergie in zweiter Ordnung ist die Summe zweier Terme, einem stets positiven kinetischen Teil und einem Anteil, der als potentielle Energie zu interpretieren ist. Falls die potentielle Energie positiv definit ist, ist das System stabil, weil dann die Gesamtenergie eine Summe positiv definiter Terme in den Störungen ist und überdies zeitlich konstant sein muß. Instabil kann das System nur sein, wenn der Ausdruck für die potentielle Energie durch irgendeine Teststörung negativ gemacht werden kann. Dann verbietet jedenfalls der Energiesatz nicht das Überfließen von potentieller in kinetische Energie. Bernstein et.al.[2] konnten zeigen, daß unter der Voraussetzung gewisser Randbedingungen an die Störungen in diesem Fall dann auch immer eine instabile Störung existiert. Die Entscheidung über Instabilität oder Stabilität liegt also schließlich nur darin, ob man die potentielle Energie negativ machen kann oder nicht.

Falls das Gleichgewicht kein statisches ist, sind die Eigenwerte i.A. komplex und es existiert kein analoges Minimumproblem. Mit Hilfe des Eigenwertproblems kann man jedoch in diesem Fall noch ein hinreichendes Kriterium für Stabilität angeben [3]. Da für ein Plasma genügend hoher Temperatur die Stöße zwischen den Teilchen nicht genügend häufig sind, ist die Vernachlässigung des Wärmestroms (die bei der Verwendung der hydromagnetischen Gleichungen stets vorausgesetzt wird) nicht ohne weiteres eine gute Näherung. Kruskal und Oberman [4] benutzten daher eine Beschreibung des Plasmas durch die Wlassowgleichung im Grenzfall eines kleinen $\frac{m}{e}$ ($\frac{e}{m}$ = spez. Ladung des Elektrons)[+]. Da die Lösung der Wlassow-Gleichung selbst in diesem Grenzfall große analytische Schwierigkeiten bereitet, versuchten Kruskal und Oberman die direkte Lösung zu umgehen und über die Konstanten der Bewegung für die Störungen zu Stabilitätsaussagen zu gelangen. Abgesehen von der Energie gibt es für die Wlassowgleichung noch ein Kontinuum von Erhaltungsgrößen, die alle die Zeit nicht explizit enthalten. Dies hat seinen Grund darin, daß die stoßfreie Boltzmanngleichung zeitumkehrbar und daher nichtdissipativ ist. Das hat zur Folge, daß die Entropie

$$H = -k \int f \ln f \, d\overset{6}{\tau}$$

konstant ist. Darüber hinaus ist jedes Funktional $\int G(f) d\overset{6}{\tau}$ eine Konstante (G ist eine beliebige Funktion der Einteilchenverteilungsfunktion $f(\underline{x}, \underline{v}, t)$). Ganz wesentlich ist jetzt die Tatsache, daß die Larmorfrequenz groß gegen alle anderen auftretenden Zeitskalen angenommen wurde, (Grenzfall $\frac{m}{e} \to 0$). Damit ist das magnetische Moment μ eines Teilchens konstant und in den Richtungen senkrecht zum Magnetfeld entspricht diese Näherung einer hydrodynamischen Beschreibung, in der die Teilchen auch bei einer Störung an den magnetischen Feldlinien

---

+) Zusammen mit der Vernachlässigung des Wärmestroms parallel zum Magnetfeld würde dieser Limes zu den hydromagnetischen Gleichungen mit anisotropem Drucktensor [5,2,1] führen.

hängen (eingefrorenes Magnetfeld). Unter diesen Umständen ist, allgemeiner,

$$\int G(f, \mu, L)\, d\overset{6}{\tau} = const$$

wobei L die Lage einer Magnetlinie festlegt.

Mit Hilfe dieser Konstanten der Bewegung ist es nun möglich, eine allgemeinere Methode zur Aufstellung eines Energieprinzips zu entwickeln:

Eine rein instabile Störung sei so definiert, daß sie für $t \longrightarrow -\infty$ asymptotisch verschwindet. Dann müssen für diese Störungen alle Erhaltungsgrößen ihren Gleichgewichtswert haben. Verlangt man daher, daß alle die Zeit nicht explizit enthaltenden Konstanten der Bewegung ihren Gleichgewichtswert haben, d.h. also ihre Terme erster und zweiter Ordnung verschwinden, so steht zu erwarten, daß man damit bereits alle stabilen Störungen eliminiert hat. Dies soll später, im Abschnitt IV für die Wlassowgleichung im homogenen Fall explizit gezeigt werden.

Unter der zusätzlichen Annahme, daß die Gleichgewichtsverteilung statisch ist und monoton von der Energie abhängt, konnten Kruskal und Oberman [4] mit Hilfe der oben erwähnten Erhaltungsgrößen den Energieausdruck 2. Ordnung erheblich vereinfachen und auf eine Form bringen, die dem rein hydromagnetischen Ausdruck [2] analog ist. Die Positiv-Definitheit der potentiellen Energie ist dann wieder ein hinreichendes Kriterium für Stabilität. Das Festhalten der verfügbaren Konstanten der Bewegung auf ihrem Gleichgewichtswert liefert den vom Standpunkt der Stabilität aus ungünstigsten Ausdruck für die potentielle Energie. R.M. Kulsrud [6] konnte später zeigen, daß das Kriterium tatsächlich nicht nur hinreichend sondern auch notwendig ist.

Die Beschreibung des Plasmas durch die Wlassowgleichung geht über die den eben diskutierten Theorien zugrunde gelegten Modelle hinaus und bietet insbesondere die Möglichkeit Mikroinstabilitäten zu behandeln, deren Auftreten wesentlich durch die spezielle Form der Geschwindigkeitsverteilung im Gleichgewicht bestimmt ist. Die übliche Methode besteht in der Lösung der linearisierten Gleichungen im Sinne eines Anfangswertproblems. Es gibt auch hier Ansätze [7,8,9,10,11,12] mit Hilfe der Konstanten der Bewegung Stabilitätsaussagen zu gewinnen. Für einige spezielle Situationen (siehe Abschnitt III) sind sie auch außerordentlich erfolgreich.

In dieser Arbeit soll diese Möglichkeit für allgemeinere Fälle diskutiert werden, insbesondere die Möglichkeit, ein Energieprinzip im Rahmen der Wlassowgleichung aufzustellen.

Als Gleichgewichtskonfigurationen seien räumlich eindimensionale, stationäre Lösungen der Wlassowgleichung für ein Zweikomponentenplasma aus Ionen und Elektronen betrachtet. Die Störungen sollen rein elektrostatisch sein, das heißt, das magnetische Störfeld soll vernachlässigt werden. In Anhang A wird diese Näherung näher diskutiert. In Teil I wird die linearisierte Wlassowgleichung in eine Form gebracht, in der die enthaltenen Symmetrien explizit zum Ausdruck kommen. Das erlaubt eine allgemeine Diskussion des möglichen Lösungsspektrums für die Störungen. Teil II bringt die Ableitung einer Reihe von Erhaltungssätzen, insbesondere des Energie- und Impulssatzes. In Teil III wird im Anschluß an Dawson und Oberman [11] ein Extremalprinzip zur Diskussion der Stabilität formuliert. Es erweist sich im Fall einer räumlich homogenen Gleichgewichtsverteilung als äquivalent mit der Dispersionsbeziehung für marginal instabile Lösungen der Wlassowgleichung. Für räumlich inhomogene Gleichgewichte liegt derselbe Schluß nahe (siehe Anhang D). Es wird gezeigt, daß dieses Extremalprinzip kein Minimumsprinzip im Sinne der Variationsrechnung ist und daher seine Behandlung wieder auf die direkte Lösung der Wlassowgleichung zurückführt.

In Teil IV wird schließlich im Spezialfall eines homogenen Plasmas ohne Magnetfeld mit Hilfe der allgemeinsten Konstanten der Bewegung ein notwendiges und hinreichendes Stabilitätskriterium abgeleitet. Damit ist gezeigt, daß das Programm grundsätzlich durchführbar ist. Es erweist sich aber als notwendig, wirklich alle diese Konstanten der Bewegung in Betracht zu ziehen, was ein in der Praxis untraktables Problem bedeutet. Im anderen Fall liefert diese Methode keine Aussage. Das hat physikalisch seinen Grund darin, daß die Wlassowgleichung eigentlich ein System von wechselwirkungsfreien Teilchen beschreibt, in dem die einzelnen Teilchengruppen nur kollektiv über das makroskopische elektrische Feld miteinander gekoppelt sind. Die Kenntnis der angegebenen Konstanten der Bewegung in ihrer Gesamtheit liefert beinahe alle nichttrivialen Informationen über dieses System, insbesondere über die stabilen Lösungen. Das ist für das Stabilitätsproblem weit mehr, als man überhaupt zu wissen interessiert ist. Abgesehen von den erwähnten Spezialfällen kann man also diesen Weg als sinnvolle Möglichkeit zur Behandlung des Problems ausscheiden.

I Die Formulierung der Gleichungen

I 1) Die Wlassowgleichung

Es wird ein Zweikomponentenplasma betrachtet, das aus positiven Ionen und Elektronen besteht (unterschieden durch den Index $\nu = 1,2$). Die Teilchen haben die Masse m_ν und die Ladung q_ν. +)

In der hier verwendeten Beschreibung durch die stoßfreie Boltzmanngleichung (Wlassowgleichung) für die Verteilungs-

+) Streckenweise, wenn nämlich die Verallgemeinerung auf das Zweikomponentensystem ganz offensichtlich ist, werden in den folgenden Kapiteln die Ionen als unendlich schwer ($m_1 = \infty$) und räumlich verschmiert angenommen. Sie wirken dann nur als neutralisierender Hintergrund für ein reines Elektronenplasma.

funktionen $F^{\nu}(\underline{x}, \underline{v}, t)$

$$(1) \qquad \frac{\partial F^{\nu}}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial F^{\nu}}{\partial \underline{x}} + \frac{q_{\nu}}{m_{\nu}} \left(\underline{E} + \frac{1}{c} [\underline{v}, \underline{B}] \right) \cdot \frac{\partial F^{\nu}}{\partial \underline{v}} = 0$$

vernachlässigt man alle Wechselwirkungen zwischen den Teilchen, bis auf diejenigen, die durch die makroskopischen elektrischen und magnetischen Felder, $\underline{E}(\underline{x}, t)$ und $\underline{B}(\underline{x}, t)$, gegeben sind. Diese wiederum bestimmen sich in selbstkonsistenter Weise aus den Maxwell'schen Gleichungen mit

$$(2) \qquad \begin{aligned} \rho(\underline{x}, t) &= \sum_{\nu=1}^{2} q_{\nu} \int F^{\nu} d^3 v \qquad \text{als Ladungsdichte und} \\ \underline{j}(\underline{x}, t) &= \sum_{\nu=1}^{2} q_{\nu} \int \underline{v}\, F^{\nu} d^3 v \qquad \text{als Stromdichte} \end{aligned}$$

Die Gleichung (1) ist also nichtlinear. Ihre Charakteristikengleichungen sind die Bewegungsgleichungen eines Teilchens im Feld $\underline{E}$, $\underline{B}$.

I 2) Das Gleichgewicht

Betrachtet man ebene Gleichgewichtskonfigurationen, so hängt die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}$ eines Teilchens nur von der einen Koordinate x und den drei kanonischen Impulsen p_x, p_y und p_z ab. Das elektrische Feld $\underline{E}_o(x)$ hat nur eine x-Komponente, während der Strom $\underline{j}_o(x)$ in y-Richtung fließt. Das magnetische Feld $\underline{B}_o(x)$ ist senkrecht zu beiden, das heißt, parallel zur z-Achse.
Unter Einführung der elektromagnetischen Potentiale gilt:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \underline{E}_o(x) &= \left(-\frac{d\phi_o(x)}{dx}, \; 0, \; 0 \right) \\ \underline{B}_o(x) &= \left(0, \; 0, \; \frac{dA_o(x)}{dx} \right) \end{aligned}$$

und damit

$$
(4)\quad \begin{aligned}
\mathcal{H} &= m_\nu \underline{v}^2 + q_\nu \phi_o(x) \\
p_x &= m_\nu v_x \\
p_y &= m_\nu v_y + \frac{q_\nu}{c} A_o(x) \\
p_z &= m_\nu v_z
\end{aligned}
$$

Dann ist jede Funktion

$$(5)\quad f_o^\nu = f_o^\nu(\mathcal{H}, p_y, p_z),$$

die den Maxwell'schen Gleichungen nach (2) genügt, eine stationäre Lösung der Wlassowgleichung (1). Falls $E_o = B_o = 0$, ist auch p_x eine Konstante der Bewegung. Dann ist eine beliebige, positive und integrierbare Funktion der Geschwindigkeiten eine Gleichgewichtslösung.

Die Gleichung (1) kann man für stationäre Lösungen formal schreiben:

$$(6)\quad \sum_{\mu=1}^{2} A_2^{\nu\mu} f_o^\mu = 0$$

$$(7)\quad A_2^{\nu\mu} = \delta^{\nu\mu}\left\{ \underline{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \underline{x}} + \frac{q_\nu}{m_\nu}\left(\underline{E}_o + \frac{1}{c}\left[\underline{v}, \underline{B}_o\right]\right)\cdot\frac{\partial}{\partial \underline{v}} \right\}$$

I 3) Die linearisierten Gleichungen

Um die Stabilität einer Gleichgewichtslösung (5) zu untersuchen beim Vorhandensein einer kleinen Störung f in der Verteilungsfunktion, setzen wir in (1) $F^\nu = f_o^\nu + f^\nu$. +)
Das zeitliche Verhalten der Störung ist bestimmt durch die in f^ν linearisierte Wlassowgleichung.
Es sei angenommen, daß eine der möglichen Schwingungsformen für die Störungen eine rein longitudinale, elektrostatische Welle ist. Dann kann man die Störung des

---

+) Während alle Gleichgewichtsgrößen einen unteren Index o tragen, sollen die Störgrößen keinen Index haben.

Magnetfeldes vernachlässigen. (Siehe Anhang A). In elektrostatischer Näherung lautet dann die linearisierte Gleichung (1)

$$(8)\quad \frac{\partial f^\nu}{\partial t} + \sum_{\mu=1}^{2} A_2^{\nu\mu} f^\mu - \frac{q_\nu}{m_\nu}\frac{\partial f_0^\nu}{\partial \underline{v}}\cdot\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\phi(\underline{x},t) = 0$$

Das Störpotential $\phi\,(\underline{x},\ t)$ genügt der Poissongleichung. Da hier nur unendlich ausgedehnte Plasmen betrachtet werden sollen, gilt

$$(9)\quad \phi = \sum_{\mu=1}^{2} q_\mu \int \frac{d^3x'\,d^3v'}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\, f^\mu(\underline{x}',\underline{v}',t)$$

Die Gleichungen (8) kann man mit Hilfe von Gleichung (9) in folgende Form bringen [9, 12]:

$$(10)\quad \frac{\partial f^\nu}{\partial t} + \sum_{\mu=1}^{2} V^{\nu\mu} f^\mu = 0$$

Dabei wurden folgende Definitionen benützt:

$$V^{\nu\mu} = A_2^{\nu\mu} + \sum_{\kappa=1}^{2} A_1^{\nu\kappa} H^{\kappa\mu}$$

$$(11)\quad A_1^{\nu\mu} = \left(-\frac{\partial f_0^\nu}{\partial \mathcal{H}}\right)A_2^{\nu\mu} - \frac{\partial f_0^\nu}{\partial p_y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\cdot\delta^{\nu\mu} - \frac{\partial f_0^\nu}{\partial p_z}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\cdot\delta^{\nu\mu}$$

$$H^{\nu\mu} = q_\nu q_\mu \int d^3x'\cdot d^3v'\,\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}'|}$$

$H^{\nu\mu}$ ist eine symmetrische 2x2-Matrix, gebildet aus Integraloperatoren. $A_1^{\nu\mu}$ und $A_2^{\nu\mu}$ sind diagonale 2x2-Matrizen. In diesem Sinn ist dann das Paar f^1, f^2 als Spaltenvektor aufzufassen. Die willkürlich oben geschriebenen Indizes haben keine kontravariante Bedeutung.

Bei der Definition von $A_1^{\nu\mu}$ wurde zu dem Ausdruck $-\frac{\partial f_0^\nu}{\partial \underline{v}}\cdot\frac{\partial}{\partial \underline{x}}$

noch ein Anteil $\left(-\frac{\partial f_0^\nu}{\partial \mathcal{H}}\right)\frac{q_\nu}{m_\nu}\left(\underline{E}_0 + \frac{1}{c}[\underline{v},\underline{B}_0]\right)\cdot\frac{\partial}{\partial \underline{v}}$

hinzuaddiert. Das ist möglich, weil das Störpotential, auf das dieser Operator wirkt, nicht von den Geschwindigkeiten abhängt.

Die Symmetrien, die in Gleichung (8) enthalten sind, treten in den Gleichungen (9) und (10) deutlich in Erscheinung. Zunächst stellt man fest, daß in dem Ausdruck für

$A_1^{\nu\mu}$ die Reihenfolge der Faktoren in den drei Produkten unwesentlich ist. Nach Gleichung (6) vertauscht nämlich A_2 mit $\frac{\partial f_0}{\partial x}$. Weiter hängt f_0 von y und z nicht ab. +)

Die Operatoren A_1 und A_2 vertauschen; d.h. es gilt

$$(12)\quad \left[A_2, A_1\right]_- \equiv A_2A_1 - A_1A_2 = 0$$

Offenbar sind A_2 und A_1 antihermitische Operatoren, wenn bestimmte Oberflächenintegrale verschwinden. Diese Forderung ist eng verbunden mit der Voraussetzung, daß wir ein abgeschlossenes System betrachten. Weiterhin stellt man fest, daß die Elemente der Matrix $H^{\nu\mu}$ hermitische Operatoren sind. Im Sinne des üblichen Skalarprodukts im Funktionenraum

$$(13)\quad (f, Hg) \equiv \sum_{\nu,\mu=1}^{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau^6 \, (f^\nu)^* H^{\nu\mu} g^\mu \quad ; \quad d\tau^6 \equiv d^3x \cdot d^3v$$

ist $H^{\nu\mu}$ positiv semidefinit. Tatsächlich stellen diese Symmetrieeigenschaften eine Randbedingung an die erlaubten Störungen dar, die im Weiteren gestellt wird.

Für die nun folgende Diskussion des möglichen Lösungsspektrums sei die Gleichung (10) der Bequemlichkeit halber abgekürzt geschrieben:

$$(14)\quad \frac{\partial f}{\partial t} + A_2 f + A_1 H f = 0$$

Mit dem Ansatz

$$(15)\quad f = \hat{f} e^{\omega t}$$

ergibt sich das Eigenwertproblem

$$(16)\quad \omega f + A_2 f + A_1 H f = 0$$

(Hier wurde für $\hat{f}$ gleich wieder f geschrieben)

+) Tatsächlich ist die Aufspaltung von V in $V = A_1 H + A_2$ nicht eindeutig. Wenn man schreibt:

$$A_2^{\nu\mu} = \left(-\frac{\partial f_0^\nu}{\partial x}\right)^{-1} \left\{A_1^{\nu\mu} + \delta^{\nu\mu}\left(\frac{\partial f_0^\nu}{\partial p_y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial f_0^\nu}{\partial p_z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right\}$$

, so erkennt man, daß A_2 einen Term $A_1\left(-\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)^{-1}$ enthält, den man auch zu $A_1 H$ schlagen kann mit Hilfe einer Neudefinition von H durch

Da die auftretenden Operatoren reell sind, ist mit ω auch ω^* ein Eigenwert. Falls ω reell ist, kann man f als reell annehmen. Allgemein wird ω aber komplex sein. Dann sind auch die Eigenfunktionen komplex.

Unter der Annahme der V o l l s t ä n d i g k e i t des Systems der Eigenfunktionen von V hat der adjungierte Operator

(17) $V^+ = - A_2 - HA_1$

die Eigenwerte ω^*, also das gleiche Spektrum wie V.

Dann hat aber die Gleichung

(18) $\omega' g + A_2 g + HA_1 g = 0$

die Eigenwerte

(18a) $\omega' = - \omega$

Setzt man nun in (16)

(19) $f = A_1 \tilde{g}$, so sieht man, daß die resultierende Gleichung

(16a) $\omega'' A_1 \tilde{g} + A_2 A_1 \tilde{g} + A_1 HA_1 \tilde{g} = 0$ für alle $\tilde{g}$, die die Darstellung (19) erlauben, die Eigenwerte

(16b) $\omega'' = - \omega$

hat, denn (16a) ergibt sich, wenn man Gleichung (18) mit A_1 multipliziert, weil A_2 und A_1 kommutieren.

Daraus folgt insgesamt, daß im Falle der Vollständigkeit des Spektrums von V und für alle Eigenfunktionen, die mit Gleichung (19) vereinbar sind, die Gleichung (16) ebenso wie die "adjungierte" Gleichung (18) mit ω sowohl $-\omega$, als auch ω^* und damit auch $-\omega^*$ als Eigenwerte haben. Damit gibt es insbesondere zu jeder instabilen Lösung auch eine stabile und umgekehrt. Im Fall eines homogenen Gleichgewichts kann man zeigen, daß dies für a l l e Eigenfunk-

---

(11a) $\hat{H}^{\nu\mu} \equiv H^{\nu\mu} + \delta^{\nu\mu} \left(-\frac{\partial f_0^\nu}{\partial \varkappa}\right)^{-1}$

In dieser Form wurde die Wlassowgleichung ursprünglich von T.K. Fowler [9] in dem Spezialfall $f_o = f_o(\varkappa)$ benützt. Für das Weitere spielt diese Mehrdeutigkeit aber keine Rolle.

tionen f gilt. Nur gehen für die Fälle, in denen A_1^{-1} nicht existiert, die Eigenfunktionen g dann nicht aus dem entsprechenden f durch Gleichung (19) hervor.
Die Multiplikation der Gleichung (16a) mit $\tilde{g}^*$ und Integration über den Phasenraum liefert

(20) $\omega(\tilde{g}, A_1\tilde{g}) = -(\tilde{g}, (A_2A_1+A_1HA_1)\tilde{g})$

Da die auf der rechten Seite von Gleichung (20) auftretenden Operatoren hermitisch sind, kann das zugehörige Skalarprodukt nur reell sein. Wegen der Antihermitizität von A_1 ist der Faktor von ω auf der linken Seite rein imaginär. Allgemein komplexe Eigenwerte können daher nur auftreten, wenn

(21) $(\tilde{g}, A_1\tilde{g}) = 0$ u n d $(\tilde{g}, (A_2A_1+A_1HA_1)\tilde{g}) = 0$

Später, in Teil II wird sich zeigen, daß die beiden Ausdrücke in (21), gebildet mit den vollen zeitabhängigen Funktionen $g = A_1^{-1}f$, Konstanten der Bewegung sind. Da rein imaginäre ω-Werte Stabilität bedeuten, folgt, daß für Instabilität diese Konstanten den Wert Null haben müssen, in Übereinstimmung mit dem im einleitenden Abschnitt Gesagten.

II Ableitung der Konstanten der Bewegung

Mit Hilfe der Formulierung (9) und (10) für die dynamischen Gleichungen kann man eine Reihe von Erhaltungssätzen ableiten.
Dazu sei eine in den Störungen quadratische Form (f,Pf) betrachtet. P sei eine Matrix aus Operatoren, die die Zeit nicht explizit enthalten. Es seien solche Größen P gesucht, für die gilt (nach den Gleichungen (9) und (17)):

(22) $\frac{d}{dt}(f, Pf) \equiv (f, (PV + V^+P)f) = 0$

Gleichung (22) ist sicher erfüllt, falls gilt:

(23) $PV + V^+P = 0$

Da mit P auch $P + P^+$ die Gleichung (23) erfüllt, kann man P stets als hermitisch annehmen. Dann ist (f, Pf) eine r e l l e quadratische Form in f. Mit Hilfe von Gleichung (12) kann man zeigen, daß

(24) $P = A_2 A_1^{-1} + H$, oder ausführlich geschrieben: $P^{\nu\mu} = \sum_{\kappa=1}^{2} A_2^{\nu\kappa} (A_1^{-1})^{\kappa\mu} + H^{\nu\mu}$

eine Lösung von Gleichung (23) ist.

Gleichung (24) hat natürlich nur einen Sinn, wenn A_1^{-1} existiert. Kümmert man sich zunächst nicht um diese Schwierigkeit, so ist P nach (24) eine Lösung und damit (f, Pf) eine Konstante der Bewegung.

Wie in Anhang A gezeigt wird, ist

(25) $E^{(2)} = \frac{1}{2}(f, (A_2 A_1^{-1} + H)f)$

die Gesamtenergie des Systems in zweiter Näherung der Störungsrechnung. Dies legt nahe, nach weiteren Konstanten der Bewegung zu suchen, die durch andere Invarianzen von Gleichung (9) gegeben sind, als durch ihre Invarianz gegen Zeittranslationen, als deren Ausdruck der Energiesatz anzusehen ist. Zunächst gilt:

Falls es eine infinitesimale Transformation d gibt, für die gilt

(26) $[d, A_1^{-1} V]_- = 0$, so ist der Ausdruck

(27) $Q = A_1^{-1} d$ eine Lösung von (23)

Dies folgt unmittelbar aus Gleichung (23), wenn man dort P durch Q ersetzt und Gleichung (26) verwendet.

Nach Gleichung (25) ist $\frac{1}{2} \cdot A_1^{-1} V$ der Operator, der der Gesamtenergie entspricht. Gleichung (27) unter Voraussetzung von Gleichung (26) ist dann die Aussage, daß jeder infinitesimalen Transformation, die den Energieoperator invariant läßt, eine Erhaltungsgröße entspricht.

Da das Gleichgewicht nicht von y und z abhängt, wird man vermuten, daß auch

(28) $$d_y \equiv \frac{\partial}{\partial y} \qquad d_z \equiv \frac{\partial}{\partial z}$$

Erhaltungsgrößen entsprechen.

Nach Gleichung (10) vertauschen d_y und d_z sowohl mit A_2, wie A_1. Falls das elektrische Potential ϕ im Unendlichen verschwindet, oder aber periodisch ist, so gilt auch

$$(29) \qquad \left[\frac{\partial}{\partial y,z}\,,\, H\right]_- = 0$$

Diese Randbedingung bedeutet physikalisch, daß man sich das Plasma in einen leitenden Kasten eingesperrt denkt. Sie steckt bereits in dem Ansatz für das Störpotential nach Gleichung (9) und sichert die Hermitizität von H^{op}.

Damit sind

$$(30) \qquad P_y^{(2)} = \frac{1}{2}\left(f, \frac{\partial}{\partial y} A_1^{-1} f\right)$$

$$P_z^{(2)} = \frac{1}{2}\left(f, \frac{\partial}{\partial z} A_1^{-1} f\right)$$

Konstanten der Bewegung. Wie in Anhang A gezeigt wird, sind $P_{y,z}^{(2)}$ die Gesamtimpulse des Plasmas in 2. Ordnung in y- und z-Richtung.

Falls $\underline{E}_o = 0$; $\underline{B}_o = \text{const}$ (homogenes Gleichgewicht in einem homogenen Magnetfeld), so ist auch

$$(31) \qquad P_x^{(2)} = \frac{1}{2}\left(f, \frac{\partial}{\partial x} A_1^{-1} f\right) \text{ konstant.}$$

Wenn das konstante Magnetfeld nicht verschwindet, so gilt für alle zugehörigen Gleichgewichtslösungen darüberhinaus:

$$(32) \qquad \frac{d}{dt} P_{\varphi,\vartheta}^{(2)} = \frac{d}{dt}\,\frac{1}{2}\left(f, \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \vartheta}\right) A_1^{-1} f\right) = 0$$

wobei φ bzw. ϑ die Polarwinkel in einem Zylinderkoordinaten-system um die gemeinsame z-Achse des Orts- und Geschwindigkeitsraums darstellen (Drehinvarianz um die Magnetfeldrichtung). Den Erhaltungssatz (32) braucht man bei einer Stabilitätsdiskussion nicht explizit zu verwenden. Er bedeutet lediglich, daß man im Falle $\underline{B}_o = \text{const} \neq 0$ stets annehmen kann, daß die Ausbreitung einer Störung in der x-z-Ebene erfolgt [13].

Neben diesen globalen Erhaltungssätzen gibt es noch ein

Kontinuum von Erhaltungsgrößen. Es gilt nämlich

(33) $$\frac{d}{dt} S_\tau = \frac{d}{dt}\left(f, i A_1^{-1} \cdot \tau\left(i\frac{\partial}{\partial y}, i\frac{\partial}{\partial z}, iV\right) f\right) = 0$$

τ ist eine beliebige reelle Funktion seiner Argumente. Diese sind paarweise kommutierende Operatoren.
Zum Beweis von Gleichung (33) sei die Zeitdifferentiation ausgeführt.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} S_\tau &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}, iA_1^{-1}\tau f\right) + \left(f, iA_1^{-1}\tau \frac{\partial f}{\partial t}\right) \\
&= \left(-Vf, iA_1^{-1}\tau f\right) - \left(f, iA_1^{-1}\tau V f\right) \qquad \text{cf. Gl. (10)} \\
&= -\left(f, V^+ i A_1^{-1}\tau f\right) - \left(f, iA_1^{-1}\tau V f\right) \\
&= \left(f, i(A_2 A_1^{-1} + H)\tau f\right) - \left(f, i(A_2 A_1^{-1} + H)\tau f\right), \quad \text{cf. } [V,\tau] = 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Die vorher abgeleiteten Erhaltungssätze ergeben sich als Spezialfälle dieses allgemeinen Erhaltungssatzes, wie man sofort sieht, wenn man τ jeweils gleich einem seiner Argumente setzt. Eine sehr anschauliche Interpretation gibt es für den Fall

(34) $\tau = \sigma\left(i\frac{\partial}{\partial y}, i\frac{\partial}{\partial z}\right)$; σ (a,b) = beliebige Funktion von a und b

Denkt man sich nämlich die Störung f als Fourierintegral bezüglich ihrer y- und z-Abhängigkeit dargestellt, so folgt, daß der Impuls in diesen Richtungen für jede Fourierkomponente e i n z e l n konstant ist. Mit der Wahl

(35) $$\tau = \sigma\left(i\frac{\partial}{\partial y}, i\frac{\partial}{\partial z}\right) iV$$

gilt das Entsprechende für die Gesamtenergie. Für räumlich homogene Gleichgewichtsverteilungen gelten diese Folgerungen für alle drei Raumrichtungen.

(36) Für $\tau = \underline{1}$, folgt

(36a) $\frac{d}{dt}(f,\ iA_1^{-1} f) = 0$

Das bedeutet die Konstanz der ersten in Gleichung (21) auftretenden Größe (die zweite ist die Gesamtenergie $E^{(2)}$).

Alle durch S_τ zusammengefaßten Konstanten der Bewegung enthalten das Inverse des Operators A_1^{-1}. Es ist natürlich eine Frage, ob deshalb diese Größen überhaupt definiert sind. Ganz sicher ist dies nicht der Fall für alle möglichen Funktionen f, die man sich z.B. als Anfangsbedingungen für die Störungen vorstellen kann.
Der Raum der zugelassenen Störungen darf also den Nullraum von A , das heißt die Funktionen φ, für die gilt

(37) $A_1 \varphi = 0$

nicht enthalten; denn für diese Funktion ist die zu A_1 inverse Operation gar nicht definiert. Wie in Anhang B gezeigt wird, sind jedenfalls im homogenen Fall ohne Magnetfeld die Nullfunktionen keine Eigenfunktionen von V. Außerdem haben sie im Geschwindigkeitsraum δ-Funktionscharakter. Sie sind daher physikalisch gar nicht als Störungen herstellbar und sollen in Zukunft außer Betracht bleiben. Dies ist aber nur konsistent, wenn die Integrale, die die Konstanten S_τ definieren, nicht nur zu einem bestimmten Zeitpunkt wohldefiniert sind, sondern dies auch im Laufe der zeitlichen Entwicklung der Funktionen bleiben. Mit anderen Worten: der Sektor des Funktionenraums, der zu einem bestimmten Zeitpunkt die φ-Funktionen nicht enthält, darf sich im Laufe der Zeit nicht mit dem φ-Raum vermischen. Diese Forderung ist tatsächlich erfüllt. Beweis: Ein Element dieses Sektors sei mit ψ bezeichnet. Es muß die Wlassowgleichung (10) erfüllen:

(38) $\frac{\partial \psi}{\partial t} = - A_2 \psi - A_1 H \psi$

Falls $H\psi$ einen Bestandteil φ haben sollte, so wird dieser durch den Operator A_1 vernichtet. Da A_2 mit A_1 vertauscht, macht A_2 aus ψ wieder ein ψ. Damit ist nach Gleichung (38) auch der Zuwachs von ψ nach dem Zeitintervall dt wieder ein ψ. Der ψ-Sektor vermischt sich also nicht mit dem φ-Sektor.
Damit sind die Konstanten S_τ wohldefiniert, wenn man den Nullraum von A_1 ausschließt. Eine gesonderte Diskussion der Stabilität gegen Störungen aus dem φ-Raum wäre nur dann nötig, wenn dieser allein alle instabilen Störungen enthielte.+) Im homogenen Fall, der hier stets als Test benutzt wird, kann man zeigen, daß dies nicht so ist, wie auch auf Grund des singulären Charakters dieser Funktionen zu erwarten war.
Bei der Übersicht über die Konstanten der Bewegung wurde eine schon lange bekannte Klasse von Erhaltungsgrößen nicht diskutiert, die im Zusammenhang mit der Kruskal-Oberman'schen Theorie [4] des Grenzfalls $\frac{m}{e} \to 0$ in der Zusammenfassung erwähnt worden war. Es sind dies die Funktionale

$\int G(F)\, d^6\tau$, wobei G eine beliebige Funktion der Lösungen F der vollen nichtlinearen Gleichung (1) darstellt.
G ist soweit beliebig als das Integral existiert.

Wie auf S. 4 ff betont, machten Kruskal und Oberman die wesentliche Voraussetzung, daß die Gleichgewichtslösung f_o eine monoton fallende Funktion der Hamiltonfunktion $\mathcal{H}$ (siehe Gl. (4)) sei. Damit existiert auch die Umkehrfunktion $\mathcal{H} = \mathcal{H}(f_o)$ und genau nur in diesem Fall scheint es möglich, aus der Konstanz von $\int d^6\tau\, G(F)$ in erster bzw. zweiter Ordnung der Störungsrechnung analytisch faßbare Bedingungen für die Störverteilungsfunktion f abzuleiten.

Für den Fall eines magnetischen V a k u u m feldes im Gleichgewicht und für

$f_o = f_o\,(\mathcal{H})$

(40) $\frac{\partial f_o}{\partial \mathcal{H}} < 0$

+) Eine Diskussion dieses Punktes befindet sich in Anhang B.

wurden die Konstanten in der "Methode der verallgemeinerten Entropie" von einer Reihe von Autoren [7, 8, 10] zum Beweis der Stabilität gegen allgemeine (also auch magnetische) Störungen herangezogen. Gardner [10] gelang es mit dieser Methode sogar ohne die Beschränkung auf die linearisierte Theorie einen Stabilitätsbeweis gegen endliche Störungen zu führen. Die Anwendbarkeit dieser Methode ist jedoch mit dem Spezialfall (40) erschöpft.
Hier soll von diesen Erhaltungssätzen kein Gebrauch gemacht werden. Für eine Diskussion dieses Punktes sei jedoch auf Abschnitt IV verwiesen. Im jetzt folgenden Abschnitt wird sich zeigen, daß der Stabilitätsbeweis im Rahmen unserer Behandlung genau so einfach gelingt.

III Stabilitätstheorie

III 1) Hinreichende Kriterien

Mit Hilfe der abgeleiteten Konstanten der Bewegung kann man nun versuchen, Stabilitätskriterien aufzustellen. Alle diese Konstanten sind quadratische Funktionale der Störverteilungsfunktion f vom Typ:

(41) $(f,\ Pf) = \text{const}$

Falls (der vom Gleichgewicht abhängige Operator) P positiv definit ist, so ist das betrachtete Gleichgewicht stabil; denn mit f müßte auch (f, Pf) zeitlich anwachsen, was nach (41) nicht möglich ist [9]. Für eine spezielle Klasse von Gleichgewichtslösungen f_o und zwar gerade die, die durch Gl. (40) gegeben ist, gilt:

(42) $A_2 A_1^{-1} = \left(-\frac{\partial f_o}{\partial \mathcal{H}}\right)^{-1} > 0$

Nachdem der Operator H positiv semidefinit ist, ergibt sich damit für die G e s a m t e n e r g i e 2. Ordnung:

(43) $E^{(2)} = \frac{1}{2}\left(f,\ \left(\left(-\frac{\partial f_o}{\partial \mathcal{H}}\right)^{-1} + H\right) f\right) > 0,$

für alle zugelassenen Störungen f.
Damit sind alle Konfigurationen dieser Klasse stabil.

T.K. Fowler [9] zeigte darüberhinaus auf die gleiche Weise die Stabilität eines Gleichgewichts, das durch eine monoton fallende Funktion f_o einer beliebigen linearen Kombination der Konstanten $\mathcal{H}$, p_y, p_z gegeben ist. Falls f_o eine reine Funktion von $\mathcal{H}$ ist, die jedoch nicht monoton ist in $\mathcal{H}$, so ist nach (42) das Produkt $A_2 A_1^{-1}$ singulär an den Extremalstellen von $f_o(\mathcal{H})$. Da wir die Nullfunktionen φ ausgeschlossen haben, ist das keine prinzipielle Schwierigkeit, wohl aber eine praktische; denn die Gesamtenergie $E^{(2)}$ und mit ihr alle Konstanten S_r sind dann sämtlich indefinite Größen. A fortiori gilt dies für alle Gleichgewichtsfunktionen f_o $(\mathcal{H}, p_y\, p_z)$, von dem Fowler'schen Spezialfall abgesehen. Im allgemeinen Fall kann es daher keine hinreichenden Kriterien der eben diskutierten Art geben.

III 2) Ein Extremalprinzip

Von Dawson und Oberman [11] +) wurde ein Extremalprinzip angegeben, das ein hinreichendes Kriterium für Stabilität liefern soll. Ihre Ableitung bezieht sich auf ein homogenes, im Orts- und Geschwindigkeitsraum eindimensionales Gleichgewicht ohne Magnetfeld. Auch die Störungen sind in diesem Sinn als streng eindimensional angenommen. Dieses Extremalprinzip liegt bis jetzt nur in einer etwas vorläufigen Form vor [11]. Da es ein erster Ansatzpunkt zu einem Energieprinzip für die Wlassowgleichung zu sein scheint, soll es hier untersucht werden.
D.O. gehen aus von der Feststellung, daß die Energie $E^{(2)}$ nach Gl. (25) die Summe zweier Energieanteile ist:

+) Auf diese Arbeit soll im Folgenden mit D.O. Bezug genommen werden.

(44) $E^{(2)} = E^{(2)}_{kin} + E_{pot}$, mit

$E^{(2)}_{kin} = \frac{1}{2}(f, A_2 A_1{}^{-1} f)$

(45)

$E_{pot} = \frac{1}{2}(f, H f)$

E_{pot} ist die positiv semidefinite Energie des elektrostatischen Störfelds. Der Anteil $E^{(2)}_{kin}$ entspricht der Störung der kinetischen Energie des Plasmas in 2. Näherung (Siehe Anhang A, Gln, A7 und A10).
Falls $E^{(2)}_{kin}$ für alle zugelassenen Störungen f positiv wäre, so müßte das System stabil sein. (Was unter zugelassenen Störungen hier zu verstehen ist, soll gleich diskutiert werden. Es betrifft jedenfalls nicht jene Störungen φ, für die $E^{(2)}_{kin}$ gar nicht definiert ist. Diese sollen ja grundsätzlich ausgeschlossen sein.) Falls aber eine zugelassene Störung existiert, die $E^{(2)}_{kin}$ negativ macht, so verbietet offenbar die Konstanz von $E^{(2)}$ nicht das - im Sinne der linearisierten Theorie unbeschränkte - Überfließen von kinetischer Energie der Teilchen in Feldenergie.

Neben der Gesamtenergie ist jedoch auch der Impuls $P^{(2)}$ eine Konstante der Bewegung.+) Für r e i n instabile Störungen müssen diese Konstanten den Wert Null haben. Bei der speziellen Konfiguration von D.O. haben die Konstanten (44) und (31) folgendes Aussehen:

$$E^{(2)} = -\frac{m}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v f^* f}{\partial f_0/\partial v}\, dx\, dv + \frac{1}{8\pi}\int E^* E\, dx = E_{kin} + E_{pot}$$

$$P_x^{(2)} = -\frac{m}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^* f}{\partial f_0/\partial v}\, dx\, dv$$

Das elektrische Feld E ist durch die Poissongleichung gegeben:

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi q \int f\, dv$$

+) Die Konstanz des Impulses wurde in [11] zum ersten Mal abgeleitet. Siehe neuerdings auch [14] und [22].

Dabei ist angenommen, daß die Ionen unendlich schwer sind und nur als räumlich verschmierter Ladungshintergrund wirken. m und q sind dann die Masse und die (negative) Ladung eines Elektrons. f ist die Störverteilungsfunktion der Elektronen.

D.O. formulieren nun folgendes Variationsprinzip:
Gesucht sei diejenige Störverteilungsfunktion f, die bei festgehaltener Stördichte (bzw. Störfeld nach (48)) die kinetische Energie $E_{kin}^{(2)}$ extremalisiert unter den Nebenbedingungen, daß $P_x^{(2)}$ verschwindet und f die Poissongleichung erfüllt. Die Lösungen müssen als Randbedingung schließlich noch die Gesamtenergie $E^{(2)}$ zu Null machen. Da das elektrische Feld im Unendlichen verschwinden soll, sorgt die Poissongleichung dafür, daß die in der Störung enthaltene Gesamtladung verschwindet. Wenn das kleinste Extrenum von $E_{kin}^{(2)}$ einem absoluten Minimum entsprechen würde, so würde sein Vorzeichen eine notwendige Bedingung für Instabilität bzw. eine hinreichende Bedingung für Stabilität darstellen, je nachdem es negativ oder positiv ist. Das Festhalten der Konstanten $P^{(2)}$ und $E^{(2)}$ auf dem Wert Null definiert die zugelassenen Störungen und erteilt $E_{kin}^{(2)}$ den vom Standpunkt der Stabilität aus gesehen ungünstigsten Wert.
Das Suggestive an diesem Extremalprinzip ist die Tatsache, daß die so erhaltenen Extremalwerte von $E_{kin}^{(2)}$ im homogenen Fall ohne Magnetfeld, tatsächlich genau dem notwendigen und hinreichenden Stabilitätskriterium entsprechen, das von O. Penrose [15] durch die direkte Lösung der Wlassowgleichung für diesen Fall abgeleitet wurde. Dieses Kriterium kann man kurz folgendermaßen charakterisieren:
Es gibt dann und nur dann instabile Lösungen der Wlassowgleichung, wenn es marginale Lösungen gibt, d.h. solche, die einen Übergang vom stabilen in den instabilen Bereich bedeuten.
Hier soll gezeigt werden, daß dieses Variationsverfahren

der Bestimmung marginaler Lösungen der linearisierten Wlassowgleichung (8) äquivalent ist. Dadurch erklärt sich auch das erstaunliche Ergebnis; erstaunlich deshalb, weil wir im letzten Abschnitt sehen werden, daß das Extremalprinzip kein absolutes Minimum liefert. Die Vermutung besteht, daß dies alles auch für eine mit Hilfe der in Abschnitt II abgeleiteten Bewegungskonstanten verallgemeinerte Form dieses Variationsprinzips gilt. Sie ist im Anhang C abgeleitet und diskutiert. Ein Beweis dieser Vermutung würde natürlich die Kenntnis der Form des Lösungsspektrums von Gl. (8) voraussetzen. Es ist nur in dem von D.O. behandelten Falle bekannt [16].

Der Einfachheit halber sei mit einem verschmierten Ionenhintergrund gerechnet. Die Verallgemeinerung auf das Zweikomponentenplasma ist an jeder Stelle des Beweises offensichtlich.
Wir benützen gleich die Tatsache, daß nach Gl. (34) und (35) $E^{(2)}$ und $P_x^{(2)}$ für jede räumliche Fourierkomponente f_k von f im k-Raum einzeln konstant ist.
Zwischen f und f_k besteht der Zusammenhang:

$$(46) \quad f(x, v, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_k(v, t) e^{-ikx} \, dk \quad .$$

Im Weiteren tritt k nur mehr als Parameter auf. Der Bequemlichkeit halber sei die k-Abhängigkeit nur da explizit vermerkt, wo sie wesentlich ist.

In den Operatoren A_1, A_2 und H denke man sich alle räumlichen Differentiationen bzw. Integrationen durch die korrespondierenden Operationen im Fourierraum ersetzt. Die Störungen sollen keinen räumlich homogenen Anteil enthalten. Dann reduzieren sich alle Impulskonstanten auf die durch Gl. (36a) gegebene Größe.

Das Extremalprinzip lautet:

(47) $\delta E_{kin}^{(2)} = \delta\left\{-\frac{m}{2}\int dv\, f^*(v)\,\frac{v}{\partial f_0/\partial v}\, f(v)\right\} = 0$

unter den Nebenbedingungen:

(48) $\frac{m}{2}\int dv\, f^*(v)\,\frac{ik}{\partial f_0/\partial v}\, f(v) = 0$

(49) $4\pi q\int f\, dv = k^2\phi(k)$

(Ø und Ø* werden nicht variiert)

(49a) $4\pi q\int f^*\, dv = k^2\phi^*(k)$

In (49) und (49a) ist statt des elektrischen Feldes E das Potential Ø eingeführt. Die Lösungen müssen der Randbedingung genügen:

(50) $-\frac{m}{2}\int dv\,\frac{v\, f^*\, f}{\partial f_0/\partial v} + \frac{k^2}{8\pi}\,\phi^*\cdot\phi = 0$

f und f^* werden als unabhängig betrachtet. Mit den zu den Nebenbedingungen (48), (49) und (49a) gehörenden Lagrange-parametern σ, τ^* und μ ergibt sich durch Variation nach f^*:

(51) $-mv\,\frac{f}{\partial f_0/\partial v} + m\,\frac{\sigma}{k}\,\frac{1}{\partial f_0/\partial v}\, f + q\mu = 0$

und durch Variation nach f

(51a) $-mv\,\frac{f^*}{\partial f_0/\partial v} + m\,\frac{\sigma}{k}\,\frac{1}{\partial f_0/\partial v}\, f^* + q\tau^* = 0$

Da Gl. (51a) die zu Gl. (51) konjugiert komplexe Gleichung sein muß, folgt

(52) σ = reell

(53) $\tau^* = \mu^*$

In Gleichung (49) und (49a) ist Ø eine zwar bezüglich der Variation feste, sonst aber beliebige Funktion von k. Um das kleinste Extremum von $E_{kin}^{(2)}$ zu finden, muß man alle möglichen Potentiale Ø(k) und Parameter k untersuchen. Aus den Gln. (51), (48) und (50) folgt, falls sie überhaupt erfüllbar sind:

(54) $\mu(k) = \phi(k)$

Damit wird aber Gl. (51) identisch mit der durch $\partial f_0/\partial v$ dividierten linearisierten Wlassowgleichung (16), die in diesem Fall lautet:

(55) $\omega f - i\, k\, v\, f + \frac{q}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v}\, i\, k\, \emptyset = 0$

Man muß dazu nur identifizieren

(56) $\omega = i\,\sigma$

Der Zusammenhang zwischen $\emptyset$ und f ergibt sich durch die Poisson-Gleichung (49).

Setzt man in allen Ausdrücken:

(57) $f = A_1 g = i\, k \frac{\partial f_0}{\partial v}\, g \cdot \frac{1}{m}$ (vergleiche Gl. (19))

so erhält man aus (51) die "adjungierte" Gleichung

(58) $(\omega + i\, k\, v) g - \frac{q^2 4\pi i k}{m\, k^2} \int \frac{\partial f_0}{\partial v}\, g \cdot dv = 0$

Die Gleichung (58) entspricht der allgemeinen Gl. (18) K.M. Case [16] bewies, daß (58) dasselbe Spektrum hat, wie (55), wie wir das ja auch im allgemeinen inhomogenen Fall gesehen haben, wenn man dort die Voraussetzung der Vollständigkeit der Eigenfunktionen macht und die Gl. (19) voraussetzt. Es zeigt sich, daß sich auch für die Eigenfunktionen f von (55), für die die Darstellung (57) nicht gilt, eine Lösung von (58) finden läßt zum selben Eigenwert.

Der Lagrangeparameter σ , der die Rolle einer Frequenz spielt, muß aus der Nebenbedingung (48) bestimmt werden. Gl. (48) ist zusammen mit Gl. (50), in g geschrieben, identisch mit den Gln. (21), die notwendig sind für das Auftreten komplexer (d.h. nicht rein imaginärer) Werte $\omega = i\sigma$. Da σ, der Herleitung gemäß, reell sein muß, steht zu vermuten, daß man σ als den Grenzfall eines komplexen Parameters auffassen muß.

Die Extremallösungen müssen also unter den Lösungen der Gleichung (55) zu finden sein, soweit diese eine Division durch $\partial f_0/\partial v$ erlauben. Mit Hilfe von Gl. (56) und (49) lautet sie:

(59) $(kv - \sigma)f + \frac{4\pi q^2}{mk}\left(-\frac{\partial f_0}{\partial v}\right)\int f\,dv = 0$

Setzt man

(60) $f_0 = n_0 \hat{f_0}$ mit

(61) $\int \hat{f_0}\,dv = 1$

(62) $\frac{4\pi n_0 q^2}{m}\frac{1}{k^2}\left(-\frac{\partial f_0}{\partial v}\right) = \eta(v)$,

(63) $\sigma = k.\nu$

so erhält man nach Division durch k:

(64) $(v - \sigma)f + \eta(v)\int f\,dv = 0$

Gl. (64) ist die Form, in der Case [16] die Wlassowgleichung behandelt. Betrachtet man zunächst ν als beliebigen, möglicherweise komplexen Eigenwert, so gibt es 4 Klassen von Eigenlösungen und Eigenwerten. Sie seien hier im Anschluß an Case explizit aufgeführt, weil sie erstens die ungeheure Vielfalt der Lösungen deutlich machen. Außerdem benötigen wir sie im letzten Abschnitt im Einzelnen bei der Entwicklung einer beliebigen Störung nach diesen Eigenfunktionen.

<u>Klasse Ia)</u>

Sie besteht aus allen Lösungen, für die ν reell ist und $\eta(\nu) \neq 0$

(65) $f_\nu(v) = -P\frac{\eta(v)}{v-\nu} + \lambda(\nu)\,\delta(v-\nu)$

δ ist die Direac'sche δ-Funktion und P heißt, daß auch der erste Term eine Distribution im Sinne des Hauptwertes bei einer v-Integration darstellt. $\lambda(\nu)$ muß die Gleichung erfüllen

(65a) $\lambda(\nu) = 1 + P\int \frac{\eta(v)}{v-\nu}\,dv$

Diese Lösungen existieren also in beliebiger Nähe der Singularität von $A_{\underline{1}}^{-1}$.

Klasse Ib)

Hier ist auch ν reell, aber $\eta(\nu) = 0$. Falls f_o nicht eine Funktion ist, die in einem ganzen Intervall der v-Achse konstant ist, so gibt es nur eine diskrete Anzahl von solchen Werten ν.

$$f_\nu(v) = - P \frac{\eta(v)}{v-\nu} + \lambda(\nu)\,\delta(v-\nu) \tag{66}$$

$$\lambda(\nu) = 1 + \int \frac{\eta(v)}{v-\nu}\, dv \tag{66a}$$

Der Hauptwert in (66) ist nur dann wesentlich, wenn über ν zu integrieren ist. Dann müssen nämlich die Punkte ν_i der

Klasse Ic)

weggelassen werden. Für sie gilt darüberhinaus, daß $\lambda(\nu_i)$ auch verschwindet. Das zeichnet eine endliche Zahl von Eigenwerten ν_i aus (i = 1,2,....,m)

$$f_{\nu_i} = - \frac{\eta(v)}{v-\nu_i} \quad \text{mit} \tag{67}$$

$$\int f_{\nu_i}\, dv = 1 \tag{67a}$$

Klasse II)

Hier ist komplex und es gilt:

$$f_\nu = - \frac{\eta(v)}{v-\nu} \tag{68}$$

$$\int f_\nu\, dv = 1 \tag{68a}$$

Die Bedingung (68a) bestimmt wieder eine endliche Zahl komplexer Werte ν_k (k = m + 1, ... n).
Dies ist das allgemeinst mögliche Lösungssystem, falls $f_o(v)$ alle möglichen Verteilungsfunktionen durchläuft. Für die Maxwellverteilung z.B. existiert nach N.G. van Kampen [17]

nur das reelle Kontinuum der Klasse Ia.

Aus dem Lösungssystem sieht man, daß bis auf die Funktionen der Klassen Ic und II alle Lösungen der Klassen Ia und Ib Distributionen sind. Die Klasse Ib ist auszuschließen, weil sie die Division durch $\frac{\partial f_0}{\partial v}$ nicht erlaubt. Das ist aber die Bedingung, unter der die Euler-Lagrangegleichung (51) mit der Wlassowgleichung (64) gleichwertig wird. Klasse Ib enthält wegen des Terms $\lambda \cdot \delta(v - \nu)$ einen Anteil aus dem Nullraum von A_1. Die Nebenbedingung (48) ist eine quadratische Form in f. Sie impliziert also für Lösungen der Klasse Ia eine Multiplikation zweier Distributionen am selben Ort, die gar nicht erklärt ist. Diese Lösungen sollen daher weggelassen werden. Damit bleiben noch die Funktionen der Klassen Ic und II übrig. Für f_{ν_i} aus Klasse Ic folgt aus Gl.(67) und (48) als B e d i n g u n g :

$$\text{(48a)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} dv \, \frac{\eta(v)}{(v-\nu_i)^2} = 0$$

Damit dieses Integral existiert und überdies verschwinden kann, muß gelten

$$\text{(69)} \qquad \left.\frac{d\eta(v)}{dv}\right)_{v=\nu_i} = 0 \qquad \text{zusätzlich zu} \quad \eta(\nu_i) = 0$$

Diese Bedingung ist jedoch unphysikalisch. Die Tatsache des Verschwindens von η (v) für bestimmte Stellen $v = \nu_i$ ist eine physikalische Notwendigkeit, weil f_0 als Verteilungsfunktion stets positiv sein muß und daher auf jeden Fall e i n Extremum hat. Die Forderung, daß an einer solchen Stelle auch noch die zweite Ableitung von f_0 verschwindet, ist eine spezielle Forderung an die analytischen Eigenschaften von f_0 in der Umgebung des Extremums, die physikalisch keine Bedeutung hat. Deshalb ist es nicht sinnvoll, diese Lösungen zu betrachten. Damit bleiben nur noch die komplexen Eigenwerte der Klasse II übrig. Da ν aber reell sein muß, kann ν nur als Grenzwert eines komplexen Eigenwertes betrachtet werden. Dies erscheint nicht ganz inkonsistent, wenn man sich überlegt, daß die Lösungen von Gl.(51) zunächst nur bis auf die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:

$$(70) \quad m\,(v - \nu)\,\frac{f}{\partial f_0/\partial v} = 0$$

bestimmt sind.

Eine spezielle Lösung zu Gl.(70) kann man schreiben als

$$(71) \quad f = \pm\,\pi i\,\delta(v-\nu)\cdot\frac{q}{m}\,\mu\cdot\frac{\partial f_0}{\partial v}$$

was für die Lösung der vollen Gl.(51) heißt

$$(72) \quad f = \frac{\partial f_0}{\partial v}\,\frac{q}{m}\,\mu\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{v-\nu\mp i\varepsilon}$$

Die Lösung (72) bedeutet, daß man effektiv ein komplexes ν eingeführt hat, ohne mit der Realitätsbedingung für ν in Konflikt zu kommen; denn f darf ja komplex sein.

Es soll nun gezeigt werden, daß man mit der Annahme, daß ν komplex ist, für kleinen Imaginärteil alle Bedingungen erfüllen kann. In der Grenze ergibt sich dann die gesuchte Extremallösung. Nur in diesem Sinne ist das Extremalprinzip von D.O. zu interpretieren.

Eine Lösung nach Gl.(68) muß die Dispersionsbeziehung (68a) erfüllen, die identisch mit der Poissongleichung (49) ist. Sie muß aber auch die beiden Bedingungen (48) und (50) erfüllen, deren Gültigkeit die Gleichung (54) lieferte. Setzt man

$$(73) \quad \nu = \alpha + i\gamma$$

so ergibt sich aus (68):

$$0 = \gamma\cdot\int dv\,\frac{\partial f_0}{\partial v}\,\frac{1}{(v-\alpha)^2+\gamma^2}$$

$$(74) \quad \frac{k^2}{\omega_p^{\,2}} = \int dv\,\frac{\partial f_0}{\partial v}\,\frac{v-\alpha}{(v-\alpha)^2+\gamma^2}$$

$$\omega_p^{\,2} = \frac{4\pi n_0 q^2}{m}$$

Die beiden Bedingungen (48) und (50) lauten

$$(75)\qquad \begin{aligned} 0 &= \int dv \, \frac{\partial f_0}{\partial v} \, \frac{1}{(v-\alpha)^2+\gamma^2} \\ \frac{k^2}{\omega_p^2} &= \int dv \, \frac{\partial f_0}{\partial v} \, \frac{v-\alpha}{(v-\alpha)^2+\gamma^2} \end{aligned}$$

Offenbar sind die Bedingungen (74) und (75) identisch für $\gamma \neq 0$. Für γ exakt gleich Null wären sie es nicht. D.O. haben eine Bestimmung von α im Grenzfall $\gamma \to 0$ allein aus der ersten Bedingung (75) (der Impulsbedingung) versucht. Eine Entwicklung dieser Bedingung nach γ für festes α liefert

$$(76)\qquad 0 = \frac{\pi}{\gamma} \, \frac{\partial f_0}{\partial v}(v=\alpha) + P\int dv \, \frac{\partial^2 f_0}{\partial v^2} \, \frac{1}{v-\alpha} + O(\gamma)$$

Zwar ist es eine notwendige Bedingung für die Gültigkeit von Gl.(76) im Grenzfall $\gamma \to 0$, daß gilt:

$$(77)\qquad \frac{\partial f_0}{\partial v}(v=\alpha) = 0$$

Um aber den 2. Term auf der rechten Seite, der bei D.O. fehlt, zum Verschwinden zu bringen, müßte außerdem gelten

$$(78)\qquad P\int dv \, \frac{\partial^2 f_0}{\partial v^2} \, \frac{1}{v-\alpha} = 0$$

Das wäre jedoch eine falsche Bedingung. Wie man sieht, liefert ja die Randbedingung (50), also die zweite Gl.(75), eine Lösung für α , die von k und γ abhängt. Also ist (76) auch nicht die richtige Entwicklung. Um im Grenzfall $\gamma \to 0$ eine Lösung der Gleichungen (75) zu finden, machen wir den Ansatz:

$$k = k_0 + (\Delta k)$$

$$(79)\qquad \begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + b \cdot \Delta k + O\left((\Delta k)^2\right) \\ \gamma &= 0 \;\; + a \cdot \Delta k + O\left((\Delta k)^2\right) \end{aligned}$$

und lösen die Gleichungen in niedrigster Ordnung in Δk.

Für die nullte Ordnung muß gelten

(80)
$$\frac{\partial f_0}{\partial v}(v=\alpha_0) = 0$$
$$0 < \int \frac{\partial f_0}{\partial v}\,\frac{1}{v-\alpha_0}\,dv = \frac{k_0^2}{\omega_p^2}$$

Die notwendigen Bedingungen bilden zusammen das Penrosekriterium [15] . Für die Größen a und b ergibt sich

(81)
$$a = -\frac{2k_0}{\omega_p^2}\cdot\frac{\pi\,\frac{\partial^2 f_0}{\partial v^2}(v=\alpha_0)}{\left[\pi\,\frac{\partial^2 f_0}{\partial v^2}(v=\alpha_0)\right]^2 + \left[P\int \frac{\partial^2 f_0}{\partial v^2}\,\frac{1}{v-\alpha_0}\,dv\right]^2}$$
$$b = \frac{2k_0}{\omega_p^2}\cdot\frac{P\int \frac{\partial^2 f_0}{\partial v^2}\,\frac{1}{v-\alpha_0}\,dv}{\left[\pi\,\frac{\partial^2 f_0}{\partial v^2}(v=\alpha_0)\right]^2 + \left[P\int \frac{\partial^2 f_0}{\partial v^2}\,\frac{1}{v-\alpha_0}\,dv\right]^2}$$

Falls also $\frac{\partial^2 f_0}{\partial v^2}(v=\alpha_0) \neq 0$, so gibt es in der Umgebung von α_0 stets eine komplexe Lösung, die in der Grenze in eine reelle (marginale) Lösung übergeht. Diese ist die gesuchte Extremallösung. Die Gleichungen (80) sind die dazu notwendigen und hinreichenden Bedingungen, wenn wir von der schon früher gemachten Bedingung

(82) $\frac{d\eta}{dv}(v=\alpha_0) \neq 0$ absehen.

Die Bedingungen (74) sind dann genauso erfüllt. Es ergibt sich, daß nur für bestimmte Werte von k eine Lösung existiert.

Unter den endlich vielen Lösungen des Typs (68), die die Bedingungen (48) und (50) erfüllen, gibt es sicher eine, die $E_{kin}^{(2)}$ einen kleinsten Wert erteilt, falls das Problem überhaupt eine Lösung besitzt. Dieses Minimum bezieht sich aber immer nur auf eine Eigenlösung, nicht etwa auf eine lineare Kombination von Lösungen der Klassen Ia, Ic und II. Dieser Unterschied ist natürlich wesentlich. Die ganze Ableitung des vorigen Abschnitts lief ja darauf hinaus, die Lösungen des Variationsproblems explizit anzugeben, was sich als äquivalent der Bestimmung marginaler Lösungen der Wlassowgleichung herausstellte. Einen praktischen Fortschritt bringt ein Variationsprinzip jedoch nur, wenn das zu variierende Funktional durch die Nebenbedingungen nach unten beschränkt ist. Dann braucht man die Euler-Lagrangegleichung nicht explizit zu lösen, sondern kann etwa durch ein Ritz'sches Verfahren das Funktional minimalisieren. Tatsächlich beschränken die Bedingungen (48) und (50) den Ausdruck für $E_{kin}^{(2)}$ nicht nach unten und man ist auf den expliziten Lösungsweg angewiesen. Der erste Teil des folgenden Abschnitts soll dieses Problem behandeln.

IV Das allgemeine Stabilitätskriterium

IV 1) Die Frage der Beschränktheit der kinetischen Energie

Von Case [16] stammt der Beweis der Vollständigkeit des Lösungssystems, das im vorigen Abschnitt angegeben wurde. Man kann also eine beliebige Funktion $f_k(v)$, die über v integrierbar ist, folgendermaßen darstellen.

$$(83)\quad f\,(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} B(\nu)\, f_\nu(v)\, d\nu + \sum_{i=1}^{m} f_{\nu_i}\cdot a_i + \sum_{k=m+1}^{n} f_{\nu_k}\cdot a_k$$

Die Integration geht über das reelle Kontinuum der Klassen Ia und Ib; der zweite Term ist die Summe über die diskreten, reellen Eigenwerte; der dritte Term summiert über die diskreten, komplexen Eigenwerte.

Da wir die Nullfunktionen nicht betrachten wollen, darf die Entwicklung (83) die Funktionen f_ν der Klasse Ib nicht enthalten. Die allgemeinst mögliche Funktion f(v) ist dann gegeben durch:

$$(84)\quad f\,(v) = P\int B(\nu)\, f_\nu(v)\, d\nu + \sum_{i=1}^{m} f_{\nu_i}\cdot a_i + \sum_{k=m+1}^{n} f_{\nu_k}\cdot a_k$$

Das Hauptwertzeichen in dem Integral der rechten Seite soll andeuten, daß über die Punkte ν_i mit:

(85) $$\frac{\partial f_0}{\partial v}(v = \nu_i) = 0$$

nicht zu integrieren ist.

Damit f(v) integrierbar ist, muß gelten

(86) $$\int B(\nu)\,d\nu < \infty$$

Diese Darstellung soll verwendet werden, um zu sehen, inwieweit $E_{kin}^{(2)}$ nach Gl.(47) durch die Bedingungen (48) und (50) beschränkt ist.

Um die bei der Bildung von quadratischen Ausdrücken in f auftretenden Integrale bequem auswerten zu können, seien nach Gl.(57) die Funktionen

(87) $$g = A_1^{-1} f = \frac{i m}{k \cdot \partial f_0/\partial v} f_\nu(v)$$

eingeführt. Der Index ν bedeutet den Eigenwert und ist nicht zu verwechseln mit dem Index ν, der früher die Teilchensorten unterschied. Es wird ja immer ein reines Elektronenplasma betrachtet.

Die Funktionen g_ν sind die Lösungen der adjungierten Gleichung (58). Für Produkte von Funktionen f_ν und Funktionen g_μ bestehen folgende Relationen:

(88) $$\int_{-\infty}^{+\infty} g_\nu^*(v)\, f_\mu(v)\,dv = C(\nu)\cdot\delta(\nu-\mu)$$

für Eigenwerte ν und μ beide aus der Klasse Ia

(89) $$C(\nu) = \frac{\lambda^2(\nu) + \pi^2\eta^2(\nu)}{\eta(\nu)} \cdot \frac{\omega_p^2 \cdot m}{k^3}$$

(90) $$\int_{-\infty}^{+\infty} g_\nu^*(v)\cdot f_{\nu_i}(v)\,dv = 0$$

für ν aus Ia und ν_i diskret (reell oder komplex)

(91) $$\int g^*_{\nu_i}(v)\cdot f_{\nu_\ell}(v)\,dv = C_i\cdot\delta_{i\ell}$$

falls ν_i und ν_ℓ beide diskret und reell sind

(92) $C_i \neq 0$, reell, falls ν_i keine Doppelwurzel ist.

(93) $$\int g^*_{\nu_r}(v)\cdot f_{\nu_k}(v)\,dv = 0$$

falls ν_r reell und ν_k komplex

(94) $$\int \left(g_{\nu_i^*}(v)\right)^*\cdot f_{\nu_k}(v)\,dv = C(\nu_i)\cdot\delta_{ik}$$

wobei $\nu_i{}^*$ der zu ν_i konjugiert komplexe Eigenwert ist.

(95) $C(\nu i) \neq 0$, falls nicht ν_i eine Doppelwurzel der Dispersionsbeziehung (68a) ist.

(96) $(C\ (\nu_i))^* = C\ (\nu_i{}^*)$

Mit diesem Katalog von Eigenschaften und der Bemerkung, daß die Funktionen f_ν ja Eigenlösungen der Wlassowgleichung (64) sind, kann man drei Größen $E^{(2)}_{kin}$, $E^{(2)}$ und $P^{(2)}$ der Reihe nach hinschreiben: $(\hat{\nu} = k\cdot\nu)$

(97) $$E^{(2)}_{kin} = P\int dv\,|B(v)|^2\cdot\hat{v}\cdot C(v) + \sum_{i=1}^{m}|b(\nu_i)|^2\cdot\hat{\nu}_i\cdot C(\nu_i) + \sum_{k=m+1}^{n} b^*(\nu_k^*)\cdot b(\nu_k)\cdot\hat{\nu}_k\cdot C(\nu_k) - \left|P\int dv\,B(v)\right|^2 - Re\left\{P\int B(v)\,dv\cdot\sum_{\ell=1}^{n} b(\nu_\ell)\right\} - Re\left\{\sum_{i,\ell=1}^{n} b^*(\nu_i)\,b(\nu_\ell)\right\}$$

(98) $$E^{(2)} = P\int dv\,|B(v)|^2\cdot\hat{v}\cdot C(v) + \sum_{i=1}^{m}|b(\nu_i)|^2\cdot\hat{\nu}_i\cdot C(\nu_i) + \sum_{k=m+1}^{n} b^*(\nu_k^*)\cdot b(\nu_k)\cdot\hat{\nu}_k\cdot C(\nu_k)$$

(99)
$$\frac{1}{k}\cdot P^{(2)} = P\int dv\,|B(v)|^2\cdot C(v) + \sum_{i=1}^{m}|b(\nu_i)|^2\cdot C(\nu_i) + \sum_{k=m+1}^{n} b^*(\nu_k^*)\cdot b(\nu_k)\cdot C(\nu_k)$$

Die allgemeine Größe S_τ liefert den Ausdruck:

(100) $$S_\tau = P\int d\nu\, |B(\nu)|^2 \cdot C(\nu)\cdot \tau(\hat{\nu}) + \sum_{i=1}^{m} |b(\nu_i)|^2 C(\nu_i)\tau(\hat{\nu}_i) + \sum_{k=m+1}^{n} b^*(\nu_k^*)\cdot b(\nu_k)\cdot C(\nu_k)\cdot \tau(\hat{\nu}_k)$$

Die Größen $E^{(2)}$ und $P^{(2)}$ sind ja nach Gl.(33) nur Spezialfälle von S_τ, wenn man $\tau = \hat{\nu}$ und $\tau = 1$ setzt. Daß S_τ konstant ist, sieht man sofort, wenn man sich überlegt, daß die allgemeine Funktion f (v) aus Gl.(84) von der Zeit so abhängt, daß die Funktionen f_ν (v) von der Zeit nur durch einen Exponentialfaktor $e^{ik\nu t}$ abhängen. Betrachtet man f als eine Zeitfunktion, so kann man sich einfach die $B(\nu)$ bzw. b (ν_ℓ) mit dem Zeitfaktor $e^{ik\nu t}$ bzw. $e^{ik\nu_\ell t}$ versehen denken. Die ersten beiden Terme auf der rechten Seite von (100) bedeuten das reelle Kontinuum (Klasse Ia) und die diskreten reellen Werte. Da nur die Beträge von B (ν) bzw. b (ν_i) eingehen, fällt die Zeitabhängigkeit heraus. Der letzte Term, der den Beitrag der komplexen Werte beschreibt, enthält den Faktor $b^*(\nu_k^*)\ b(\nu_k)$, also immer den Koeffizienten einer instabilen Schwingung multipliziert mit dem konjugiert komplexen Koeffizienten der zugehörigen gedämpften Schwingung. Wir haben ja gesehen, daß immer beide Schwingungsformen möglich sind. Das folgt speziell auch daraus, daß die Gl.(64) reell ist. Deswegen ist auch der dritte Term zeitunabhängig und darüberhinaus reell, weil $\tau(\nu)$ als reelle Funktion der möglicherweise komplexen Variablen angenommen war. S_τ ist also zeitunabhängig und reell. Für eine Funktion $f_o(v)$, die nur ein Maximum hat, das bei v = 0 liegen möge, existiert nur das Kontinuum. Die einzige Nullstelle von $f_o'(v)$ gehört dann zu dem Parameterwert k = 0, den wir ausgeschlossen haben, weil er eine räumlich homogene Störung beschreiben würde. Siehe auch [17]

Da in diesem Fall gilt

(101) $\nu\cdot C(\nu) > 0$ für alle ν,

ist $E^{(2)}$ stets positiv für jede Wahl von $B(\nu)$.
Wegen der Galileiinvarianz der Wlassowgleichung gilt dies für jede solche einbucklige Funktion, weil man das Maximum stets in den Nullpunkt transformieren kann. In jedem anderen Fall hat f_o mehrere Extremwerte und damit wird $C(\nu)$ nach Gl.(89) an diesen Stellen singulär. Durch den Ausschluß der Nullfunktionen von A_1 ist die Singularität von $\mathcal{S}_\tau$ beseitigt; das Hauptwertzeichen deutet das an. Die Funktion $B(\nu)$ ist aber, abgesehen von der Integrierbarkeitsbedingung (86), vollkommen frei wählbar, insbesondere in der Umgebung der Singularitäten. Selbst wenn man alle Beiträge von instabilen Lösungen wegläßt ($b(\nu_k) = 0$), so kann man durch passende Wahl von $B(\nu)$ alleine schon die Ausdrücke für $E^{(2)}$ und $P^{(2)}$ zum Verschwinden bringen. Also haben diese Erhaltungsgrößen nicht nur für e i n e reine instabile Eigenlösung den Wert Null, sondern können auch durch eine Kombination stabiler Störungen zu Null gemacht werden. Damit wird $E^{(2)}_{kin}$ negativ, obwohl das System nicht instabil zu sein braucht; denn es gibt durchaus Gleichgewichtsverteilungen $f_o(v)$, die nicht einbucklig und trotzdem stabil sind. Man kann also nicht, wie im Fall statischer hydromagnetischer Gleichgewichtslösungen [2] , aus der Möglichkeit, daß man $E^{(2)}$ nichttrivial zu Null machen kann, auf Instabilität schließen, selbst wenn $P^{(2)} = 0$ gefordert wird. Diese Bedingung reicht bei weitem nicht aus, um $B(\nu) = 0$ und $b(\nu_i) = 0$ zu erzwingen, wie man sofort aus einem Vergleich von (98) und (99) sieht. Durch $E^{(2)} = 0 = P^{(2)}$ ist auch $E^{(2)}_{kin}$ nicht nach unten beschränkt; denn diese Bedingungen legen nicht den Amplitudenfaktor von ϕ_k und damit $B(\nu)$ und $b(\nu_i)$ bzw. $b(\nu_k)$ fest.
Fixiert man jedoch zum Beispiel $\phi(k)$ in irgendeiner Weise, so legt man zusammen mit der Bedingung $E^{(2)} = 0$ auch $E^{(2)}_{kin}$ fest. Dann kann man aber auch kein Extremalprinzip mehr formulieren für $E^{(2)}_{kin}$.

Zusammenfassend muß man also das Extremalprinzip von Dawson und Oberman als eine elegante Formulierung des Problems ansehen, marginale Eigenlösungen der Wlassowgleichung zu bestimmen. Seine praktische Behandlung führt zurück zur Lösung der Wlassowgleichung.

Im allgemeinen inhomogenen Fall kann man das Variationsprinzip ebenfalls formulieren (siehe Anhang C). Doch das Auftreten des Inversen des Operators A_1, das sich im vorliegenden Spezialfall als Division durch $\partial f_0/\partial v$ äußert, macht die gleichen Schlußfolgerungen plausibel. Die ganze Diskussion dieses Variationsprinzips bezog sich auf ein streng eindimensionales, homogenes Plasma ohne Magnetfeld. Man kann auch von dem entsprechenden, in Ort und Geschwindigkeit dreidimensionalen Fall ausgehen. In räumliche Fourierkomponenten zerlegt, kann man die Wlassowgleichung bei fester Richtung des k-Vektors über die beiden zu $\underline{k}$ senkrechten Geschwindigkeitsrichtungen integrieren und erhält so eine Gleichung für die integrierte Störverteilung $\int f \, d^2 v_\perp$

Alle Gleichungen und Rechnungen von Beginn des Abschnittes III ab bleiben formal identisch, wenn man dort ersetzt:

(102)
$$\frac{\partial f_0}{\partial v} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial v_\parallel} \int f_0(v_\parallel, \underline{v}_\perp) \, d^2 v_\perp$$
$$k \longrightarrow |\underline{k}|$$

Nur muß man jetzt zusätzlich noch am Ende alle möglichen Richtungen von $\underline{k}$ untersuchen. Natürlich ist diese zweifach integrierte Form der Wlassowgleichung nicht notwendig mit der ursprünglichen Form gleichwertig. Der allgemeinere Fall kann ebenso, wie der allgemeine inhomogene Fall sicher nicht einfacher sein, als die hier diskutierte Situation.

IV 2) Das notwendige und hinreichende Stabilitätskriterium im streng eindimensionalen Fall ohne Magnetfeld

Das Extremalprinzip benützt nur die Konstanz der Energie und des Impulses für jede Fourierkonstante im k-Raum. Mit S_τ stehen jedoch sehr viel mehr Konstanten der Bewegung zur Verfügung. Man muß jetzt die Frage diskutieren, ob man mit Hilfe dieser allgemeinen Konstanten der Bewegung Stabilitätskriterien ableiten kann. Dazu sei wieder der homogene Testfall betrachtet.
Unter allen möglichen Störungen sind die komplexen Eigenlösungen dadurch ausgezeichnet, daß für sie die Erhaltungsgrößen S_τ verschwinden. Aus $E^{(2)} = P^{(2)} = 0$ folgt nicht, daß das System instabil ist. Wie groß muß also die Klasse $\tilde{S}_\tau$ aus S_τ gewählt werden, daß man aus dem Verschwinden von $\tilde{S}_\tau$, ohne daß die Störung f selbst identisch verschwindet, auf Instabilität schließen kann? Um physikalisch sinnvolle Situationen zu behandeln, seien die Gleichgewichte wieder ausgeschlossen mit $\frac{d\eta}{dv}$ $(v = \nu_i) = 0$. Damit fallen die reellen diskreten Lösungen der Klasse Ic weg, d.h. der Beitrag des zweiten Terms auf der rechten Seite von Gl.(100).
Läßt man für τ $(k \cdot \nu)$ eine beliebige, eindeutige, reelle Funktion zu, so muß sie wegen der geforderten Realität von S_τ bei den zu ν_k konjugiert komplexen Werten $\nu_k{}^*$ den konjugiert komplexen Wert annehmen. Das ist stets erfüllbar, weil τ als reelle Funktion der komplexen Variablen ν angenommen war. Sie sei zunächst so gewählt, daß sie jeweils nur in einer kleinen Umgebung je eines der endlich vielen, diskreten Werte ν_k und dementsprechend auch in dem konjugiert komplexen Bereich von Null verschieden ist. Zu ν_k gibt es stets auch eine Eigenlösung mit ν_k^*. Daraus folgt dann:

$$(103) \quad (b(\nu_k{}^*))^* b(\nu_k) \cdot C(\nu_k) \cdot \tau(\hat{\nu}_k) + b(\nu_k{}^*)\ (b(\nu_k))^* \cdot C(\nu_k{}^*) \tau(\hat{\nu}_k{}^*) = 0$$

$$k = m+1, \dots n$$

Aus (103) folgt, daß jeweils entweder

(104) $b(\nu_k) = 0$ oder $b(\nu_k{}^*) = 0$ gelten muß.

Daß heißt: entweder die instabile Welle oder die zugehörige, stets auch existierende, gedämpfte Welle darf in der Entwicklung (84) nicht enthalten sein. Das Argument ist also völlig symmetrisch zwischen den beiden Wellentypen, wie es wegen der Symmetrie der Gl. (64) ja auch sein muß. Wesentlich ist nur, daß nicht beide Entwicklungskoeffizienten zugleich verschwinden müssen.
Damit bleiben in der Gleichung (84) nur noch die Beiträge des Kontinuums übrig. Wählt man jedoch jetzt $\tau(\nu)$ als auf der reellen Achse beliebige, z.B. unendlich oft differenzierbare Funktion und fordert für alle derartigen Funktionen, daß $\tilde{S}_\tau = 0$, so muß die Distribution

(105) $|B(\nu)|^2 P \dfrac{\lambda^2(\nu)+\pi^2\eta^2(\nu)}{\eta(\nu)}$ verschwinden. (Siehe z.B. [18]).

Das ist nur möglich, wenn $|B(\nu)|^2 = 0$. Damit ist das van Kampen-Kontinuum der Klasse Ia ausgeschlossen.
Die Bedingung
$\tilde{S}_\tau = 0$
für alle beliebigen reellen Funktionen τ kann also nichttrivial nur von einer einzigen oder, allgemeiner, einer Kombination komplexer Eigenlösungen erfüllt werden. Im Fall einer Kombination darf nur der zu ν_k konjugiert komplexe Eigenwert $\nu_k{}^*$ nicht in der Kombination enthalten sein.

Wenn es somit eine Störung f gibt, die $\tilde{S}_\tau$ für beliebiges τ zum Verschwinden bringt und nicht selbst identisch verschwindet, so ist das betrachtete Gleichgewicht instabil. Falls $\tilde{S}_\tau = 0$ für alle τ nur durch $f \equiv 0$*) möglich ist, so ist das Gleichgewicht stabil. Dieses Kriterium ist daher notwendig und hinreichend. Man sieht aber sofort, daß man dazu wirklich beliebige Funktionen τ benötigt; eine endliche Anzahl genügt keinesfalls, um das Verschwinden der

*) $f \equiv 0$ in dem Raum, der die Nullfunktionen von A_1, d.h. hier, δ-Funktionen an den Nullstellen von $\partial f_0/\partial v$, nicht enthält. (Siehe Anhang B)

Distribution (105) zu erzwingen. Ebensowenig würden alle Potenzen genügen; denn das Momentenproblem hat sogar für stetige Funktionen im unendlichen Intervall keine eindeutige Lösung [19]. Die Klasse $\tilde{S}_\tau$ muß also genau die volle Klasse von Erhaltungsgrößen S_τ sein. Im Gegensatz zu der Stabilitätstheorie statischer magnetohydrodynamischer Gleichgewichtslösungen, wo das Verschwinden der Gesamtenergie zweiter Ordnung allein schon ein notwendiges und hinreichendes Stabilitätskriterium ist, braucht man bei der Wlassowgleichung also das Kontinuum S_τ. Benützt man weniger Konstanten der Bewegung, so erhält man keine Aussage.

Man kann nun fragen, was man mit dieser Methode eingetauscht hat gegen die direkte Lösung der Wlassowgleichung. Bei der direkten Lösung wird man von vorneherein davon ausgehen, daß das System instabil ist, indem man in der Gleichung (8) für die Zeitabhängigkeit der Störverteilung f den Ansatz macht:

$$(106) \quad f_k(v,t) = f_k(v,\omega)\, e^{-i\omega t}; \qquad \omega = \omega_0 + i\gamma$$

und nachsicht, ob die resultierende Gleichung für $f_k(v,\omega)$ eine Lösung hat für $\gamma > 0$. Man erhält so eine Dispersionsbeziehung, deren Lösbarkeit in der oberen ω-Halbebene zu untersuchen ist. Damit wird von der zu untersuchenden Mannigfaltigkeit von Lösungen das Kontinuum der Klasse Ia von vorneherein ausgeschlossen. Es ist in diesem Zusammenhang auch nicht interessant. Bei der vorhin diskutierten Methode muß man eine Funktion $f_k(v)$ suchen, die für alle möglichen Funktionen $\tau(iV)$ das zugehörige Funktional S_τ zu Null macht, ohne selbst identisch zu verschwinden. Das ist natürlich viel mehr, als eine Dispersionsbeziehung zu lösen und praktisch gar nicht durchführbar. Eine vollständige Kenntnis der Mannigfaltigkeit S_τ bringt darüber hinaus eine viel größere Kenntnis des Systems, als für eine Stabilitätsuntersuchung notwendig ist. Stellt man sich die Zahlenwerte von S_τ als sinnvoll vorgeschrieben vor, d.h. so, daß es überhaupt eine Störung f gibt, die diese Werte liefert, so erhält man in dieser Weise die Funktion $|B(\nu)|^2$. Bis auf uninteressante Phasenfaktoren ist dadurch bestimmt, mit welcher Amplitude die Kontinuumslösungen in der betrachteten Störung vertreten sind. Für die diskreten, komplexen Störungen kann man wohl nur eine Relation zwischen den im Allgemeinen komplexen Amplituden $b(\nu_k)$ und $b(\nu_k{}^*)$ angeben. Diese werden also sicher nicht einzeln festgelegt. Eine detailierte Untersuchung darüber soll hier jedoch nicht versucht werden; denn es ist nicht klar, wie man entscheiden soll, für welche Funktionen τ der Wert von S_τ von Null verschieden sein kann. Dazu müßte man vorab wissen, wie das komplexe Spektrum aussieht für das betrachtete Gleichgewicht. Jedenfalls aber erhält man durch die Kenntnis der Konstanten S_τ Informationen über das System, die man gar nicht braucht, nämlich zumindest über das Kontinuum der reellen Lösungen.

In diesem Zusammenhang ist es vielleicht nützlich, die Frage noch einmal zu stellen, warum in dieser Arbeit von den "verallgemeinerten Entropien" kein Gebrauch gemacht wurde (siehe die Seiten 3 und 17). Abgesehen davon, daß man sie für die Stabilitätstheorie nur in den Sonderfällen des Abschnittes III verwerten kann, stellen auch sie Konstanten der Bewegung dar, die die Zeit nicht explizit enthalten. Sie enthalten, ebenso, wie S_τ eine freie Funktion einer Variablen. Es ist daher kaum zu erwarten, daß sie mehr Information als S_τ liefern können. Zur Stabilitätsdiskussion braucht man stets mindestens den Energiesatz zusätzlich [4].

Schlußbemerkung

Die Schwierigkeiten, die sich dem Versuch entgegenstellen, auf dem Weg über ein Energieprinzip das Stabilitätsproblem zu behandeln, liegen an der Existenz des Kontinuums von reellen Lösungen der Wlassowgleichung. Diese Lösungen beschreiben einzelne Teilchengruppen, die gerade so konstruiert sind, daß sie im elektrischen Feld zu einer ungedämpften, rein periodischen Welle führen. Dies liegt im Wesen der Wlassowgleichung selbst, die ja ein System fast wechselwirkungsfreier Teilchen beschreibt, wobei eine Wechselwirkung zwischen den Teilchen nur über das makroskopische elektrische (bzw. magnetische) Feld gegeben ist. Eine Konstante der Bewegung des Systems als Ganzes ist in jedem Fall ein Ausdruck, der eine globale Aussage über all diese Freiheitsgrade enthält. Nur in dem Fall, in dem das Gleichgewicht ein einziges Maximum in der Geschwindigkeit besitzt, tragen diese Freiheitsgrade in gleicher Weise zu dem Energieausdruck zweiter Ordnung bei. Man kann sie dann gewissermaßen zu einem Freiheitsgrad zusammenfassen. Dann erhält man auch ein einfaches Stabilitätskriterium. In jedem anderen Fall treten die Freiheitsgrade sozusagen individuell auf und man muß soviele Beschränkungsgleichungen haben, wie es Freiheitsgrade gibt, nämlich kontinuierlich viele. In der direkten Lösung der Wlassowgleichung kann man die wenigen echt kollektiven Moden, die keine δ-Funktionen und damit einzelne Freiheitsgrade des quasi frei strömenden Gases enthalten, analytisch erfassen. Eine Konstante der Bewegung enthält diese Freiheitsgrade zwangsläufig mit.

Die Methode, durch Erhaltungssätze zu Stabilitätsaussagen zu gelangen, ist also in diesem Fall grundsätzlich nicht einfacher zu handhaben als die direkte Lösung der Stabilitätsgleichungen. Praktisch erscheint sie bis auf die zitierten Sonderfälle undurchführbar.

Herrn Prof. Dr. A. Schlüter möchte ich danken für sein freundliches Interesse für diese Arbeit und für förderndkritische Diskussionen. Herrn Dr. D. Pfirsch danke ich für zahlreiche klärende Gespräche. Den Mitarbeitern der theoretischen Abteilung des Instituts für Plasmaphysik, sowie Herrn Dr. L. Grünbaum danke ich für viele Diskussionen.

Frl. Brunner und Frl. Steiger bin ich für das Schreiben des Manuskripts sehr verbunden.

Verzeichnis der Literatur

1.) K. Hain, R. Lüst, A. Schlüter: Stability problems of a plasma. Terz. congress. internazionale sui fenomeni d'ionizzazione nei gas, tenuto a Venezia 1957, p.458

2.) J.B. Bernstein, E.A. Frieman, M.D. Kruskal, and R.M. Kulsrud, Proc. Roy. Soc. (London) A 244, 17 (1958)

3.) E.A. Frieman and Rotenberg, Rev.Mod.Phys. 32, 898 (1960)

4.) M.D. Kruskal and C.R. Oberman: Stability of plasma in static equilibrium. Proceedings Geneva Conference, Geneva 1958, Vol. 31, p.137

5.) G.F. Chew, M.L. Goldberger, F.E. Low, Proc.Roy.Soc. A 236, 112 (1956)

6.) R.M. Kulsrud, Phys. Fluids Vol.5, 192 (1962)

7.) W.A. Newcomb, Anhang zu 13.)

8.) M.N. Rosenbluth, Risö Report No. 18, p.189 (1960)

9.) T.K. Fowler, Phys. Fluids 4, 1393 (1961)

10.) C.S. Gardner, Phys. Fluids 6, 839 (1963)

11.) J.Dawson and C. Oberman, Phys. Fluids 7 , 773 (1964)

12.) H. Völk, Proc.Paris Conference on Ion. Phen. in Gases III, 191 (1963)

13.) I.B. Bernstein, Phys. Rev., 109, 10 (1958)

14.) C. Oberman and M. Kruskal, J. Math. Phys. 6, 327 (1965)

15.) O. Penrose, Phys. Fluids 3, 258 (1960)

16.) K.M. Case, Ann. Phys. 7, 349 (1959)

17.) N.G. van Kampen, Physica XXI, 949 (1955)

18.) J.-P. Marchand: Distributions, S.9, North-Holl.Publ.Comp.(1962)

19.) G. Doetsch, Hd.-Buch d. Lapl.-Transf. I, 73 (1950)

20.) H. Völk, Phys. Letters 12, Nr. 3, 208 (1964)

21.) E.G. Harris, Phys.Rev.Letters 2, 34 (1959)

22.) R.M. Case, Phys. Fl. 8, Nr. 1 (1965)

Anhang A

Es soll gezeigt werden, daß die in Teil II abgeleiteten Erhaltungsgrößen $E^{(2)}, P^{(2)}_{y,z}$ die 2. Näherung von Erhaltungsgrößen der vollen nichtlinearen Gleichungen darstellen und zwar die Gesamtenergie und die Gesamtimpulse des Plasmas in y- und z-Richtung. Die vollen Gleichungen lauten allgemein:

(A 1) $$\frac{\partial f^\nu}{\partial t} + \underline{v} \cdot \frac{\partial f^\nu}{\partial t} + \frac{q_\nu}{m_\nu}\left(\underline{E} + \frac{1}{c}\left[\underline{v}, \underline{B}\right]\right) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \underline{v}} = 0$$

(A 2) $$\mathrm{rot}\, \underline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

(A 3) $$\mathrm{div}\, \underline{B} = 0$$

(A 4) $$\mathrm{rot}\, \underline{B} = \frac{4\pi}{c}\underline{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \; ; \quad \underline{j} = \sum_{\nu=1}^{2} q_\nu \int \underline{v} f^\nu d^3v$$

(A 5) $$\mathrm{div}\, \underline{E} = -4\pi\rho \; ; \quad \rho = \sum q_\nu \int f^\nu d^3v$$

Durch Multiplikation von (A 1) mit $m_\nu \underline{v}$ bzw. $\frac{1}{2} m_\nu \underline{v}^2$, nachfolgende Integration über den Orts- und Geschwindigkeitsraum, sowie Summation über beide Teilchensorten, erhält man den Impuls- bzw. Energiesatz

(A 6) $$\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{2} m_\nu \int f^\nu \underline{v}\, d^6\tau = -\frac{1}{4\pi c}\frac{d}{dt}\int \left[\underline{E}, \underline{B}\right] d^3x + \int d^3x\, \mathrm{div}\, \underset{\Rightarrow}{T}$$

(A 7) $$\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{2} \frac{m_\nu}{2}\int \underline{v}^2 f\, d^6\tau = -\frac{1}{8\pi}\frac{d}{dt}\int (\underline{E}^2 + \underline{B}^2)\, d^3x - \frac{c}{4\pi}\int \mathrm{div}\left[\underline{E}, \underline{B}\right] d^3x$$

$\underset{\Rightarrow}{T}$ ist der Maxwell'sche Spannungstensor.

Es sei angenommen, daß f^ν für $\underline{x} \to \infty$ und $\underline{v} \to \infty$ genügend stark verschwinden und ebenso $\underline{E} \to 0$ für $x \to \infty$ ($\underline{B}$ braucht hier nicht betrachtet zu werden, weil nur die nullte Näherung im Weiteren berücksichtigt werden soll), so verschwinden alle Integrale über die div -Terme.

Weiter sei angenommen, daß

(A 8) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{E} \cdot d\underline{s} = 0$$

Das Integral sei über eine beliebige Kurve genommen, die quer durch das Plasma verläuft.

Diese Annahme entspricht genau der in Teil II gemachten, daß nämlich das Plasma in einem leitenden Kasten eingeschlossen ist, der beliebig groß sein kann. Die folgende Ableitung folgt dem Gedankengang von Dawson und Oberman, die diese Erhaltungssätze für den Fall eines in Ort und Geschwindigkeit eindimensionalen, homogenen Gleichgewichtszustandes ohne Magnetfeld abgeleitet haben.

Um die Erhaltungssätze (A 6) und (A 7) für elektrostatische Störungen korrekt bis zur zweiten Ordnung hinzuschreiben, wird der Ansatz gemacht:

$$f^{\nu} = f_0^{\nu}(x, \underline{v}) + \varepsilon f_1^{\nu}(\underline{x}, \underline{v}, t) + \varepsilon^2 f_2^{\nu}(\underline{x}, \underline{v}, t) + O(\varepsilon^3)$$

$$\text{(A 9)} \quad \underline{E} = \underline{E}_0(x) + \varepsilon \underline{E}_1(\underline{x}, t) + \varepsilon^2 \underline{E}_2(\underline{x}, t) + O(\varepsilon^3)$$

$$\underline{B} = \underline{B}_0(x)$$

ε ist ein kleiner Parameter, der die Abweichung der wirklichen Lösung von der Gleichgewichtslösung charakterisiert.

Die Annahme der elektrostatischen Näherung, die in (A 9) durch das Nullsetzen der magnetischen Störungen zum Ausdruck gebracht wird, ist im Allgemeinen nicht exakt. Aus Gl. (A 2) folgt nämlich, daß das elektrische Feld stets als Gradient eines Potentials darstellbar ist; die Störungen sind also longitudinal. Der Teilchenstrom $\underline{j}$, der nach Gl. (A 4) dann aber den Verschiebungsstrom kompensieren sollte, bleibt jedoch, außer für spezielle Gleichgewichtsverteilungen f_0, nicht genau longitudinal, selbst wenn die Anfangsstörung als rein longitudinal angenommen wurde. Diese Kopplung zwischen transversalen und longitudinalen Wellen kann man im homogenen Fall einigermaßen übersehen. Es ergibt sich, daß die Kopplung dann vernachlässigbar ist, wenn die Phasengeschwindigkeit ω/k der Störwelle klein gegen die Lichtgeschwindigkeit c ist. Ebenso müssen alle charakteristischen Geschwindigkeiten im Gleichgewicht, wie thermische Geschwindigkeit v_{th} oder charakteristische Strömungsgeschwindigkeit $\bar{v}$ klein gegen c sein. Die zweite Voraussetzung ist durch die Verwendung der nichtrelativistischen Wlassowgleichung schon ganz allgemein impliziert. Da zumindest für den homogenen Fall ohne Magnetfeld die instabilen Störungen, in elektrostatischer Näherung berechnet, immer der Ungleichung genügen

$$\mathrm{Re}\left\{ \omega/k \right\} < \bar{v}$$

erscheint die Näherung durchaus vernünftig. Ihr Interesse liegt darin, daß die longitudinalen Anwachsraten im Allgemeinen um einen Faktor $\frac{c}{\bar{v}}$ größer sind als die transversalen. Trotzdem muß die Berechtigung dieser Näherung natürlich in jedem konkreten Fall geprüft werden.

In diesem Sinne ist dann die Gleichung (A 4) mit Null auf der linken Seite korrekt. Sie folgt dann auch aus (A 1) und (A 5), ist also keine unabhängige Gleichung mehr. In niedrigster, nichtverschwindender Ordnung in ϵ ergibt sich so für den Energiesatz

$$\text{(A 10)} \quad \int d^3x \, \underline{E}_1 \cdot \underline{j}_1 + \frac{1}{8\pi} \frac{d}{dt} \int \underline{E}_1^2 \, d^3x = 0$$

und für den Impulssatz:

$$\text{(A 11)} \quad \int \left(\underline{E}_1 \rho_1 + \underline{E}_0 \rho_2 + \underline{E}_2 \rho_0 \right) d^3x = 0$$

In y- und z-Richtung gilt wegen (A 8) und der Unabhängigkeit der Gleichgewichtsgrößen von y und z

$$\text{(A 12)} \quad \int E_1^{y,z} \rho_1 \, d^3x = 0$$

In x-Richtung gilt zwar (A 11) auch in der angegebenen Form. Es treten jedoch Größen zweiter Ordnung auf, die man, außer im homogenen Fall, nicht durch solche erster Ordnung ausdrücken kann. Da hier nur Erhaltungssätze für die Gleichung erster Ordnung (die linearisierte Gleichung) gesucht sind, ist in x-Richtung die Gleichung (A 11) im inhomogenen Fall ohne praktischen Wert. Drückt man in (A 10) und (A 12) die Größen ρ_1 und $\underline{j}_1$ durch die Verteilungsfunktion erster Ordnung aus, so folgt aus (A 10) der Erhaltungssatz (28) bzw. (28a). Nach Gl. (A 7) entspricht also $(f, A_2 A_1^{-1} f)$ der kinetischen Energie in 2. Ordnung. Die Gleichungen (A 12) entsprechen der Konstanz der Größen $P_y^{(2)}$ und $P_z^{(2)}$ gemäß (34). Explizit gezeigt werden soll dies z.B. für $E^{(2)}$. Während in diesem Anhang alle Größen als reell vorausgesetzt wurden, sind die Konstanten (25) ff. mit komplexen Größen gebildet. Dann muß man die Zuordnung treffen:

(A 13) $$j_1 E_1 \longrightarrow \frac{1}{2}\left(j^* \cdot E + j \cdot E^*\right)$$

Nun wird Gl. (9) mit dem Operator

(A 14) $$q_\nu (f^\nu)^* (A_2 A_1^{-1})^{\nu\mu}$$

multipliziert, anschließend über den Phasenraum integriert und über ν und μ summiert. Es ergibt sich:

(A 15) $$\left(f, A_2 A_1^{-1} \frac{\partial f}{\partial t}\right) + \left(f, A_2 A_1^{-1} A_2 f\right) - j^* \cdot E = 0$$

Addiert man zu (A 14) die dazu konjugiert komplexe Gleichung, so ergibt sich

(A 16) $$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}\left(f, A_2 A_1^{-1} f\right) - \frac{1}{2}\left[j^* \cdot E + j \cdot E^*\right] = 0$$

Ebenso gilt

(A 17) $$\frac{1}{8\pi} \int E^* \cdot E = \frac{1}{2}\left(f, H f\right)$$

Aus der Beziehung (A 10) folgt dann der Erhaltungssatz (25). Für die anderen Erhaltungsgrößen geht die Rechnung ganz analog.

Anhang B

Die Nullfunktionen φ von A_1 sind im eindimensionalen, homogenen Fall ohne Magnetfeld definiert durch:

(B 1) $$\frac{\partial f_0}{\partial v}\frac{\partial}{\partial x}\varphi = 0$$

Mit dem Ansatz $\varphi = e^{-ikx}\cdot\varphi_k$ ergibt sich:

(B 2) $$k\frac{\partial f_0}{\partial v}\varphi_k = 0 \quad \curvearrowright \quad \varphi_k = g(k, v)\cdot\delta\left(\frac{\partial f_0}{\partial v}\right)$$

Die Störungen mit k = 0 sind räumlich homogen, wie das Gleichgewicht und sollen nicht betrachtet werden.
Die Lösungen $\varphi(k, v)$ müssen über v integrierbar sein. Die allgemeine Lösung ist daher

(B 3) $$\varphi\ (x, v) = \sum_{i=1}^{m} g\ (x, v_i)\ .\ \delta\ (v - v_i)$$

wobei m die Anzahl der diskret liegend angenommenen Extremwerte von $f_o(v)$ ist.

Durch Vergleich mit den Eigenfunktionen von V ergibt sich, daß die instabilen Eigenlösungen der Klasse II nicht diesen Charakter haben. Betrachtet man die Lösungen nach (B 3) als Anfangsbedingungen für die zeitabhängige Wlassowgleichung (8), so haben die zugehörigen Lösungen immer einen rein oszillatorischen Bestandteil mit den Frequenzen $k\cdot v_i$ und bei Instabilität auch mit der Zeit exponentiell anwachsende Bestandteile. Falls keine komplexen instabilen Eigenfunktionen existieren, so bleiben die Lösungen zeitlich beschränkt. In jedem Fall enthalten die φ-Funktionen dann und nur dann instabile Anteile, wenn es auch instabile Eigenlösungen gibt, die natürlich keine φ-Funktionen sind.

Bei einem inhomogenen Gleichgewicht ist das gleiche Verhalten zu vermuten. Ein Beweis ist jedoch nicht vorhanden. Das heißt also, daß in diesem Fall eine Stabilitätsdiskussion, die vom φ-Raum absieht, mit der Richtigkeit dieser Vermutung steht und fällt.

Anhang C

Die Ausdehnung des Extremalprinzips auf allgemeinere Fälle

Im Abschnitt II wurden die Konstanten der Bewegung S_τ für den allgemeinen, ebenen, inhomogenen Fall angegeben. In den Abschnitten III und IV ist stets nur der Spezialfall eines streng eindimensionalen, homogenen, magnetfeldfreien Gleichgewichts untersucht worden. Man kann das Extremalprinzip von D.O. [11] auch auf den inhomogenen Fall und ein Zweikomponentensystem ($\nu = 1,2$) ausdehnen. Dazu werden die Konstanten $E^{(2)}$, $p^{(2)}_{y,z}$ und die Konstante (36a) benützt. Weiterhin wird gleich von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß bezüglich der y-und z-Abhängigkeit diese Größen für jede Fourierkomponente $f(x, k_y, k_z, \underline{v})$ von $f(x, y, z, \underline{v})$ einzeln konstant sind. Die Störungen sollen keinen räumlich homogenen Bestandteil enthalten. Die Randbedingung (A 8) am Anhang A ist dann jedenfalls in y- und z-Richtung automatisch befriedigt, wenn die Parameterwerte $k_y = k_z = 0$ ausgeschlossen werden. Damit reduzieren sich alle Impulskonstanten auf die Konstante (36a). In den Operatoren A_1, A_2, H und allen sonst auftretenden Operationen, wie div oder div·grad, denke man sich alle Differentiationen bzw. Integrationen bezüglich y und z durch die entsprechenden Operationen im Fourierraum ersetzt. Alle Größen hängen damit von k_y und k_z als Parametern ab. Um eine zu umständliche Schreibweise zu vermeiden, sei diese Abhängigkeit nur da explizit geschrieben, wo sie wesentlich ist. Damit lautet das Extremalprinzip:

(C1) $$\delta E^{(2)}_{kin} = \delta \sum_{\nu,\mu=1}^{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} d^3v \, (f^\nu)^* \left(A_2 A_1^{-1}\right)^{\nu\mu} f^\mu = 0$$

unter den Nebenbedingungen

(C2) $$\sum_{\nu,\mu=1}^{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} d^3v \, (f^\nu)^* \left(i A_1^{-1}\right)^{\nu\mu} f^\mu = 0$$

(C3) $$\sum_{\nu=1}^{2} 4\pi q_\nu \int d^3v \, f^\nu = -\Delta\phi$$

$\left.\begin{matrix}(\phi(x,k_y,k_z) \\ \phi^*(x,k_y,k_z)\end{matrix}\right\}$ fest, wird nicht variiert)

(C3a) $$\sum_{\nu=1}^{2} 4\pi q_\nu \int d^3v \, (f^\nu)^* = -\Delta\phi^*$$

Für die Lösungen soll noch die Randbedingung

$$(C4) \quad E^{(2)} = E^{(2)}_{kin} - \frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,(\Delta\phi)^*\phi = 0$$

erfüllt sein.

Die Funktionen f^ν und $(f^\nu)^*$ $(\nu = 1,2)$ werden als unabhängig betrachtet.

Mit den zu (C2), (C3) und (C3a) gehörenden Lagrange-"Parametern" $\sigma(k_y, k_z)$, $\tau^*(x, k_y, k_z)$, $\mu(x, k_y, k_z)$ ergibt sich durch Variation nach $(f^\alpha)^*$

$$(C5) \quad \sum_{\mu=1}^{2}\left(A_2A_1^{-1}\right)^{\alpha\mu} f^\mu + \sigma\sum_{\mu=1}^{2} i\left(A_1^{-1}\right)^{\alpha\mu} f^\mu + 4\pi q_\alpha \cdot \mu = 0 \quad (\alpha = 1,2)$$

und durch Variation nach f^α:

$$(C5a) \quad \sum_{\mu=1}^{2}\left[\left(A_2A_1^{-1}\right)^{\alpha\mu} f^\mu\right]^* + \sigma\left[\sum_{\mu=1}^{2}\left(iA_1^{-1}\right)^{\alpha\mu} f^\mu\right]^* + 4\pi q_\alpha^* \tau^* = 0$$

Die Gleichung für f^* muß durch Bildung des konjugiert Komplexen aus der Gleichung für f hervorgehen. Aus (C5) und (C5a) folgt damit

$$(C6) \quad \sigma = \text{reell} \; ; \; \tau^* = \mu^*$$

Da $(A_2A_1^{-1})^{\alpha\mu}$ und $(A_1^{-1})^{\alpha\mu}$ Diagonalmatrizen sind, bilden die Gleichungen (C5) für $\alpha = 1,2$ ein System von Gleichungen für die beiden f^α, die nur über μ gekoppelt sind. Die Gleichung (C5) ist inhomogen in f^α. Die Lösungen sind daher nur bis auf die allgemeine Lösung der zu (C5) gehörigen homogenen Gleichung gestimmt. Die Nebenbedingungen (C2) und (C3) (Poissongleichung) reichen im Allgemeinen nicht aus, die Lösung eindeutig zu machen und gleichzeitig $\mu(x, k_y, k_z)$ und $\sigma(k_y, k_z)$ festzulegen. Im räumlich homogenen Fall, wo die Erhaltungssätze auch für die x-Abhängigkeit in derselben Weise gelten, wie für die y- und z-Abhängigkeit, folgt mit Hilfe der Randbedingung (C4) und der Nebenbedingung (C2), sofern sie überhaupt durch eine Lösung von (C5) erfüllbar sind:

$$(C7) \quad \mu(k_x, k_y, k_z) = \phi(k_x, k_y, k_z)$$

Im inhomogenen Fall gilt nur die Gleichung:

(C8) $$\int dx \, (\Delta\phi)^* \left[\mu(x, k_y, k_z) - \phi(x, k_y, k_z)\right] = 0$$

(C8) ist zwar mit

(C9) $$\phi(x, k_y, k_z) = \mu(x, k_y, k_z)$$

verträglich, macht aber die Gleichheit nicht zwangsläufig, weil nicht klar ist, ob die am Ende resultierenden möglichen Funktionen $\phi(x)$ ein vollständiges System bilden. Die verfügbaren Konstanten liefern ja auch weniger Information, als im homogenen Fall.

Nimmt man jedoch die Gleichung (C9) als erfüllbar an, so liegen für d i e s e Lösungen ganz ähnliche Schlüsse nahe, wie sie im streng eindimensionalen homogenen Fall gezogen werden können. Ersetzt man nämlich wieder f durch eine Funktion g mit Hilfe von

(C10) $f = A_1 g$ (siehe Gl. (19))

so wird die Gleichung (C5) identisch mit der "adjungierten" Gleichung (18), wenn man identifiziert

(C11) $$\omega = i\sigma \, .$$

Der Zusammenhang zwischen ϕ und g ist durch die Poissongleichung (C3) gegeben.

Ebenso entspricht die Gl.(C5) selbst der Wlassowgl.(16), wenn man diese mit A_1^{-1} multipliziert. Dann sind wieder die Lösungen der Gl.(16), die die Darstellung (C10) erlauben, auch Lösungen des Extremalproblems.

Die Frequenzen ω müssen nach (C6) und (C10) rein imaginär sein. Die Bedingungen (C2) und (C4) sind identisch mit den Gleichungen (21), die die notwendigen Bedingungen für das Auftreten allgemein komplexer Werte ω sind. Die Vermutung liegt nahe, daß diese Extremallösungen marginale Lösungen der Wlassowgleichung (16) sind. Ob es darüber hinaus noch Extremallösungen gibt, die (C9) nicht erfüllen, kann man natürlich nicht allgemein sagen. Das Auftreten des Inversen von A_1 in den Ausdrücken (C1), (C2) und (C4) läßt es jedoch ganz allgemein vermuten, daß dieses Extremalprinzip kein Minimumsprinzip ist, wie sich in dem speziellen homogenen Fall ergeben hat. Falls das Gleichgewicht homogen ist (es mag auch ein homogenes Magnetfeld vorhanden sein) so gilt die der Gleichung (C9) entsprechende Gl.(C7). Aber das dem Case-Spektrum [16] entsprechende allgemeine Lösungssystem ist nicht bekannt. Geht man von der Annahme aus, daß nur die marginalen Lösungen die Bedingungen (C2) und (C4) erfüllen, siehe [20] , so erhält man ohne Magnetfeld wieder das Penrosekriterium (80), wobei unter $\frac{\partial f_0}{\partial v}$ die Größe (102) zu verstehen ist. Im Fall des homogenen Magnetfelds sind die Extremallösungen ebenfalls durch marginale Lösungen der Dispersionsbeziehung von Harris [21] gegeben.