

# INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Streuung elektromagnetischer Wellen  
an Plasmazylindern

Diffraction of Electromagnetic Waves  
on Plasmacylinders

W. Lünow und M. Tutter

IPP 6/44

November 1965

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

IPP 6/44 W. Lünow und M. Tutter

Diffraction of Electromagnetic Waves  
on Plasmacylinders,  
December, 1965 (in German).

ABSTRACT

The diffraction of electromagnetic waves on a cylindrical plasma is numerically computed. The calculations are made using the geometrical optic approximation and using the wave equation (exact solution). The electric field vector of the incident wave is taken to be parallel to the axis of the cylinder. The calculation is carried out for constant electron density  $N$  and for a Gaussian density distribution ( $N=N_0 \exp(-a^2 r^2)$ ).

## Inhaltsverzeichnis

	Seite
A. <u>Berechnung nach der strahlenoptischen Theorie</u>	
I. Homogener Zylinder	1
II. Inhomogener Zylinder	3
B. <u>Berechnung nach der wellenoptischen Theorie</u>	
I. Vorbetrachtung	7
II. Schichtmodell	9
Danksagung	19
Literaturverzeichnis	20
Abbildungen	21

Einleitung

Für die Streuung elektromagnetischer Wellen ist naturgemäss das Verhältnis der Wellenlänge zu den Abmessungen des streuenden Gegenstandes von prinzipieller Wichtigkeit. Beim Durchgang von Wellen durch Sternatmosphären liefert in den meisten Fällen die strahlenoptische Berechnung richtige Ergebnisse. Wird dagegen die Mikrowellentransmission durch Laboratoriumsplasmen betrachtet, so genügt die Strahlenoptik häufig nicht mehr. Von den Arbeiten, in denen strahlenoptisch gerechnet wird, sei die von Burkhardt und Schlüter<sup>1)</sup>, von den nach der Wellenoptik verfahrenen die von Jones und Wooding<sup>2)</sup> als Beispiele zitiert. Die Ergebnisse beider Rechenverfahren am gleichen Plasma sollen in der vorliegenden Arbeit miteinander verglichen werden.

Das Plasma wird im Folgenden als Dielektrikum mit dem Brechungsindex

$$n = \sqrt{\epsilon} = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{1/2}$$

behandelt ( $\omega_p$  = Plasmafrequenz,  $\omega$  = Messfrequenz). Ein Zylinder mit diesem Brechungsindex wirkt wegen

$$Re n \leq 1$$

wie eine Zerstreulinse und verursacht die Abschwächung der Intensität einer durchgestrahlten Welle. Diese Abschwächung wird als gross angesehen verglichen mit derjenigen, welche durch die Stösse der Elektronen hervorgerufen wird. Die Stossfrequenz der Elektronen ist daher im Brechungsindex gleich Null gesetzt.

Der elektrische Vektor der Welle wird parallel der Zylinderachse vorausgesetzt, sodass ein in dieser Richtung angelegtes äusseres Magnetfeld im Brechungsindex nicht in Erscheinung tritt. Die Streuung wird zunächst nach der strahlenoptischen Theorie, später nach der Wellentheorie berechnet.

A) Berechnung nach der strahlenoptischen Theorie

I. Homogener Zylinder

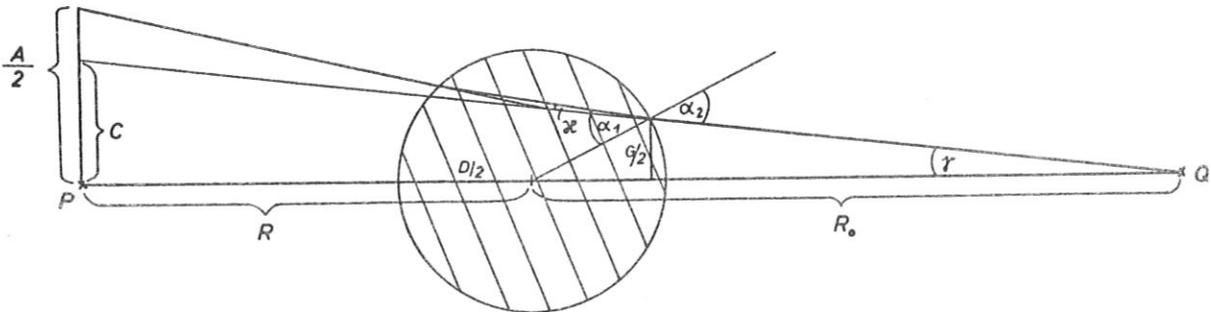


Abb. 1 Geometrie der Anordnung  
Schraffiertes Gebiet: Plasmazylinder, Q: Sender,  
P: Mittelpunkt der Empfängerfläche

Die z-Achse des Koordinatensystems wird in die Zylinderachse gelegt. Der Sender (Q) wird punktförmig angenommen (Strahlungsmittelpunkt einer hinreichend weit entfernten Hornantenne), sein Abstand von der Zylinderachse sei  $R_0$  (Abb. 1). Als Empfänger wird eine Rechteckfläche mit den Seiten A und B angenommen (Offnungsfläche einer Hornantenne), deren Mittelpunktsnormale durch Q geht und senkrecht auf der z-Achse steht. Die Länge der senkrecht zur z-Rich-

tung liegenden Rechteckseite sei A, der Abstand der Fläche von der z-Achse sei R.

Es wird weiterhin angenommen, dass folgende Ungleichungen erfüllt sind:

$$A < D \cdot \frac{R_0 + R}{R_0} \quad (\text{AI1})$$

(D ist der Durchmesser des Zylinders)

$$\frac{B}{2} \ll R_0 + R \quad (\text{AI2})$$

Die erste Bedingung bedeutet, dass vom Punkt Q gesehen die Empfängerfläche vollkommen vom Zylinder verdeckt wird. Die zweite Bedingung gestattet die Vernachlässigbarkeit der Brechung in z-Richtung; der darin liegende Fehler tritt nur in unmittelbarer Nähe von  $\omega = \omega_p$ ,  $n = 0$  merklich in Erscheinung.

Die Richtcharakteristik der Sendeantenne sei so beschaffen, dass die Intensität der abgestrahlten Welle innerhalb eines Winkels konstant ist, welcher grösser ist als der durch folgende Beziehung gegebene Winkel  $\gamma_0$ :

$$\text{tg } \gamma_0 = \frac{A}{2(R_0 + R)}$$

Dann ist die empfangene Leistung proportional dem Raumwinkel, der von denjenigen von Q ausgehenden Strahlen gebildet wird, welche nach der Brechung auf die Begrenzung der Empfängerfläche treffen. Der Quotient aus den empfangenen Leistungen mit und ohne Plasma ist daher

$$\frac{|E|^2}{|E_0|^2} = \frac{\gamma}{\gamma_0} \quad (\text{AI3})$$

Die Bedeutung von  $\gamma$  geht aus der Abbildung hervor; E ist die elektrische Feldstärke der empfangenen Welle. Die Berechnung des Quotienten  $\gamma/\gamma_0$  erfolgt durch zweimalige Anwendung des Snellius'schen Gesetzes:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{1}{n}$$

und nach den aus der Abbildung ersichtlichen, bei

$$\frac{A}{2} \ll R_0 + R \quad (\text{AI4})$$

gültigen Beziehungen:

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 &= \alpha \\ \sin(\alpha_2 - \gamma) &= \frac{G}{D} \\ G &= 2\gamma \cdot \left( R_0 - \frac{D}{2} \right) \\ \frac{A}{2} - C &= 2\alpha R \\ C &= \gamma (R_0 + R) \end{aligned}$$

Man findet

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = g \cdot \frac{D}{A} \cdot \frac{R_0 + R}{R_0 - \frac{D}{2}} \quad (\text{AI5})$$

$g = \frac{G}{D}$  ist die positiv reelle Wurzel der Gleichung<sup>3)</sup>:

$$2R \left( \frac{1}{n} - 1 \right) g \sqrt{1 - g^2} = \frac{A}{2} (1 - g^2) + \frac{Dg}{2R_0 - D} \left[ g^2 (R_0 + R) + R \left( 1 - \frac{2}{n} \right) - R_0 \right] \quad (\text{AI6})$$

Wegen der gemachten Voraussetzung (AI4) ist  $g$  schon bei kleinen Plasmadichten klein gegen Eins, d.h. die optischen Weglängen aller Strahlen, welche die Empfängerfläche erreichen, sind in guter Näherung gleich der optischen Weglänge des Strahles, der das Plasma längs der optischen Achse durchsetzt. Die durch das Plasma bewirkte Phasenänderung des empfangenen Signals gegenüber dem ohne Plasma empfangenen ist demnach

$$\Delta\phi = \oint \left( \frac{e^{-i\frac{\omega}{c}nD}}{e^{-i\frac{\omega}{c}D}} \right) = \frac{\omega}{c} (1-n) D \quad (\text{AI7})$$

Eine Verkleinerung der optischen Weglänge  $n \cdot D$  bringt somit eine Vergrößerung von  $\Delta\phi$ . Abb. 2 zeigt das Ergebnis der numerischen Auswertung von Gl. (AI5) bis (AI7), die Werte  $|E/E_0|^2$  und  $\Delta\phi$  als Funktionen der relativen Dichte  $\beta = \omega_p^2/\omega^2$  mit  $D$  als Parameter, bei konstanten, willkürlich gewählten  $R_0, R, A$  und  $\omega$ . Im Experiment sind Betrag und Phase des E-Vektors der empfangenen Welle mit Brückenmethoden messbar. Aus den Messwerten lassen sich mittels jener Kurvenscharen  $\omega_p^2/\omega^2$  und  $D$  leicht bestimmen. Die dabei auftretenden Fehler, welche durch die Fehler der Messwerte verursacht werden, sind für einige Plasmadichte- und Durchmesserwerte in Tab. I zusammengestellt. Die Berechnung erfolgte nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz mit Hilfe von Abb. 2. Für die Messwertfehler wurden Erfahrungswerte eingesetzt. Wie ersichtlich, ist der Fehler in der Dichtebestimmung in der Nähe von  $\omega_p = \omega$  am kleinsten.

## II. Inhomogener Zylinder

Bei kontinuierlich vom Ort abhängendem Brechungsindex gilt für die örtliche Krümmung eines Strahles<sup>4)</sup>

$$\vec{K} = \frac{1}{n} [A \times \nabla n] \times A \quad (\text{AII1})$$

Es bedeuten:

- $\vec{K}$  → Krümmungsvektor
- $n$  → Brechungsindex
- $\nabla n$  → Gradient des Brechungsindex
- $A$  → Einheitsvektor in Strahlrichtung

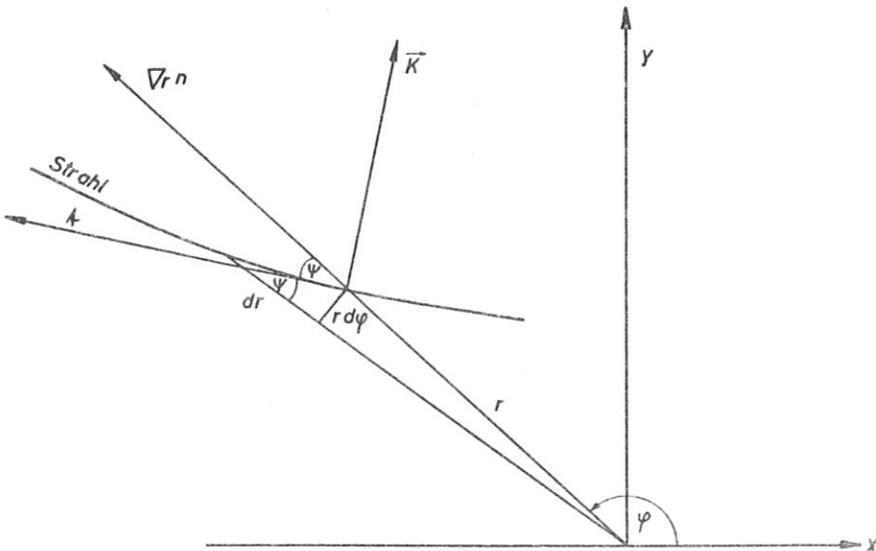


Abb. 3 Strahlenkrümmung im Medium mit inhomogenem Brechungsindex

Abb. 3 bezieht sich auf die spezielle Geometrie des vorliegenden Problems. Die Achse des Plasmazyllinders liegt in z-Richtung.

Wegen

$$\vec{A} \times \nabla_r n \quad \perp \quad \vec{A} \tag{AII2}$$

lautet der Betrag der Krümmung

$$K = \frac{1}{n} |\vec{A} \times \nabla_r n| = \frac{1}{n} |\nabla_r n| \sin \psi \tag{AII3}$$

mit

$$|\nabla_r n| = \frac{dn}{dr} \tag{AII4}$$

Es gilt

$$K = \frac{1}{n} \cdot \frac{dn}{dr} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \text{ctg}^2 \psi}} \tag{AII5}$$

Aus Abb. 3 folgt

$$\text{ctg} \psi = \frac{dr}{r d\psi} = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\psi} = \frac{r'}{r} \tag{AII6}$$

d.h.

$$K = \frac{1}{n} \cdot \frac{dn}{dr} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \tag{AII7}$$

Für eine Kurve der Darstellung

$$r = r(\psi) \tag{AII8}$$

ergibt sich aus der Differentialgeometrie der Betrag der Krümmung zu

$$K = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} \tag{AII9}$$

Es folgt

$$\frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r(r^2 + r'^2)} = \frac{d \ln n}{dr} \tag{AII10}$$

Dies ist die Differentialgleichung des Strahles in Polarkoordinaten  $r, \psi$ .

Für die hier auszuführende numerische Integration ist sie nicht sehr geeignet, weil für grössere  $|x|$  (also gerade in vom Plasmakern entfernten Integrationsbereichen mit im allgemeinen nur noch schwacher Strahlkrümmung) die  $r'$  sehr steil werden können, was genügend kleine Integrationsschrittweiten und damit lange Rechenzeiten bedingt. Die Gleichung wird deshalb in kartesische Koordinaten transformiert. Es gilt

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{AII11}$$

$$x = r \cos \psi \tag{AII12}$$

$$y = r \sin \varphi \quad (\text{AII13})$$

und

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi \quad (\text{AII14})$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi = \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi \quad (\text{AII15})$$

dh.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{r' r \sin \varphi + r r' \cos \varphi}{r' r \cos \varphi - r r' \sin \varphi} = \frac{r' y + r x}{r' x - r y} \quad (\text{AII16})$$

oder

$$r' = r \frac{y y' + x}{x y' - y} \quad (\text{AII17})$$

Für eine Kurve der Darstellung

$$y = y(x) \quad (\text{AII18})$$

ergibt sich aus der Differentialgeometrie der Betrag der Krümmung zu

$$K = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad (\text{AII19})$$

Dann folgt

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{d \ln n}{dr} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \quad (\text{AII20})$$

$$y'' = \frac{1}{r} \cdot \frac{d \ln n}{dr} \cdot (1 + y'^2) |x y' - y| \quad (\text{AII21})$$

Es gilt

$$\frac{1}{r} \frac{d \ln n}{dr} = \frac{1}{y y' + x} \left[ \frac{\partial \ln n}{\partial x} + \frac{\partial \ln n}{\partial y} y' \right] \quad (\text{AII22})$$

Also lautet die Differentialgleichung des Strahles in karthesischen Koordinaten

$$y'' = \frac{(1 + y'^2) |x y' - y|}{y y' + x} \left[ \frac{\partial \ln n}{\partial x} + \frac{\partial \ln n}{\partial y} y' \right] \quad (\text{AII23})$$

Es wird die folgende Elektronendichteverteilung über den Radius des Plasmazylinders angenommen

$$N = N_0 e^{-a^2 r^2} \quad (\text{AII24})$$

Damit wird

$$\omega_p^2 = \frac{4 \pi e^2}{m} \cdot N_0 e^{-a^2 r^2} = \omega_{p0}^2 \cdot e^{-a^2 r^2} \quad (\text{AII25})$$

und

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_{p_0}^2}{\omega^2} \cdot e^{-a^2 r^2} = 1 - \beta_0 e^{-a^2 r^2} \quad (\text{AII26})$$

bzw.

$$n = \sqrt{1 - \beta_0 e^{-a^2(x^2 + y^2)}} \quad (\text{AII27})$$

Dann folgt

$$\frac{\partial \ln n}{\partial x} = \frac{a^2 \beta_0 e^{-a^2(x^2 + y^2)}}{1 - \beta_0 e^{-a^2(x^2 + y^2)}} \cdot X \quad (\text{AII28})$$

$$\frac{\partial \ln n}{\partial y} = \frac{a^2 \beta_0 e^{-a^2(x^2 + y^2)}}{1 - \beta_0 e^{-a^2(x^2 + y^2)}} \cdot Y \quad (\text{AII29})$$

und schliesslich als spezialisierte Strahlgleichung

$$Y'' = \frac{a^2 \beta_0 e^{-a^2(x^2 + y^2)}}{1 - \beta_0 e^{-a^2(x^2 + y^2)}} (1 + Y'^2) |X Y' - Y| \quad (\text{AII30})$$

Für die am inhomogenen Zylinder ausgeführte Rechnung gilt grundsätzlich das Gleiche wie für die Rechnung am homogenen Zylinder. Der Winkel  $\gamma$  (vergl. Abb. 1) wird durch Integration der Strahlgleichung zwischen Q mit  $(x = +R_0, y = 0)$  und der Begrenzung der Empfängerfläche mit  $(x = -R; y = \frac{A}{2})$  gewonnen.

Die optische Weglänge auf diesem Strahl wird nach der Formel

$$S_1 = \int_{x=+R_0}^{-R} n \left[ x; \gamma(x) \right] \sqrt{1 + \gamma'^2(x)} dx \quad (\text{AII31})$$

bestimmt, die auf der optischen Achse nach

$$S_0 = \int_{x=+R_0}^{-R} n \left[ x; 0 \right] dx \quad (\text{AII32})$$

Die vom Plasma bewirkte Phasenänderung für den im Punkt  $(-R, \frac{A}{2})$  auftreffenden Strahl ist (analog zu Gl. AI7):

$$\Delta \phi_1 = \frac{\omega}{c} \left( \sqrt{(R + R_0)^2 + \frac{A^2}{4}} - S_1 \right) \quad (\text{AII33})$$

und für den im Punkt  $(-R, 0)$  auftreffenden Strahl

$$\Delta \phi_0 = \frac{\omega}{c} (R + R_0 - S_0) \quad (\text{AII34})$$

Ergebnisse der numerischen Rechnung:

Die Abb. 4 zeigt, der Abb. 2 entsprechend, die Grössen  $|E/E_0|^2 = \gamma/\gamma_0$  und  $\Delta \phi_0$  in Abhängigkeit von der maximalen relativen Dichte  $(\beta_0 = (\omega_{p_0}^2/\omega^2))$ , mit dem mittleren Radius  $\varrho' = 1/a$  als Parameter, für die gleichen Werte von  $R_0, R, A$  und  $\omega$  wie in Abb. 2. Die Integration ergibt, dass  $\Delta \phi_1$  und  $\Delta \phi_0$  sich um weniger als 0,02 % voneinander unterscheiden, was die

Berechtigung der Näherung (AI7), die Phasenverschiebung durch Betrachtung der optischen Weglängen auf der optischen Achse zu berechnen, beweist.

Um Abb. 4 bequemer mit Abb. 2 vergleichen zu können, wurden zu Parameterwerten des inhomogenen Zylinders diejenigen Parameterwerte des homogenen Zylinders gesucht, welche jeweils die gleiche Abschwächung und Phasenverschiebung erzeugen. Abb. 5 zeigt das Ergebnis. Qualitativ kann festgestellt werden, dass innerhalb der interessanten Durchmesser- und Dichtebereiche die maximale Dichte des inhomogenen Zylinders etwas grösser und sein mittlerer Radius  $\rho'$  etwas kleiner als die entsprechenden Werte des homogenen Zylinders sein müssen, um die gleichen Messwerte zu erzeugen.

Die Abb. 6 und 7 zeigen zur Veranschaulichung des Zustandekommens der Abschwächung den Verlauf des Strahles, welcher auf die Begrenzung der Empfängerfläche trifft, bei verschiedenen Dichte- und Durchmesserwerten.

Die Strahlintensität  $S$  (Leistung pro Flächeneinheit) an einem bestimmten Ort ist im allgemeinen von der ohne Plasma gegebenen verschieden. Dies geht aus den Abb. 8 und 9 hervor, in denen jeweils eine Schar von Strahlen gezeichnet ist, welche vom Senderpunkt  $Q$  mit gleichen Winkelabständen ausgehen. Die Wellennormalen sind in gleichen optischen Abständen ebenfalls eingezeichnet. Die Länge eines normalen Kurvenstücks zwischen zwei Strahlen ist umgekehrt proportional der dort herrschenden Strahlintensität.

In der Herleitung der Gl. (AII3) sind Reflexionen an Dichtegradienten nicht berücksichtigt. Die Kurven der Abb. 8 und 9 sind strenggenommen nur dort richtig, wo die Bedingung:

$$\left| \frac{1}{2n} \cdot \frac{dn}{dr} \cdot \frac{1}{\cos \psi} \right| \ll \left| \frac{\omega}{c} n \right| \quad (\text{AII35})$$

erfüllt ist, das bedeutet, wo die Reflexion gegen die Transmission vernachlässigbar ist<sup>4)</sup>. Unter Verwendung von Gl. (AII3) lässt sich diese Bedingung auch schreiben:

$$|K| \ll \left| \frac{\omega}{c} n \sin 2\psi \right| \quad (\text{AII36})$$

In den Scheitelpunkten der Strahlen ist diese Ungleichung offensichtlich prinzipiell nicht erfüllbar.

## B) Berechnung nach der wellenoptischen Theorie

### I. Vorbetrachtung

Um einen Einblick in das Beugungsphänomen zu erhalten, wird zunächst die Beugung an einem undurchlässigen Streifen nach dem Huygens'schen Prinzip untersucht<sup>5)</sup>.

<sup>4)</sup> Die Änderung der elektrischen Feldstärke beim Durchlaufen eines infinitesimalen Weges  $\delta L$  ist

$$\delta E = E \left( \delta P - i \frac{\omega}{c} n \delta L \right)$$

$\delta P$  ist der infinitesimale Reflexionsfaktor, welcher bei der gemachten Voraussetzung:  $\vec{E} \perp \nabla n$  folgendermassen lautet:

$$\delta P = \frac{\delta n}{2n} \frac{1}{\cos^2 \psi}$$

wo  $\psi$  der Winkel zwischen der Strahltangente und dem Ortsvektor  $\vec{r}$  ist. Mit  $\delta r = \delta L \cos \psi$  wird dann

$$\delta E = E \delta L \left( \frac{1}{2n} \cdot \frac{dn}{dr} \cdot \frac{1}{\cos \psi} - i \frac{\omega}{c} n \right)$$

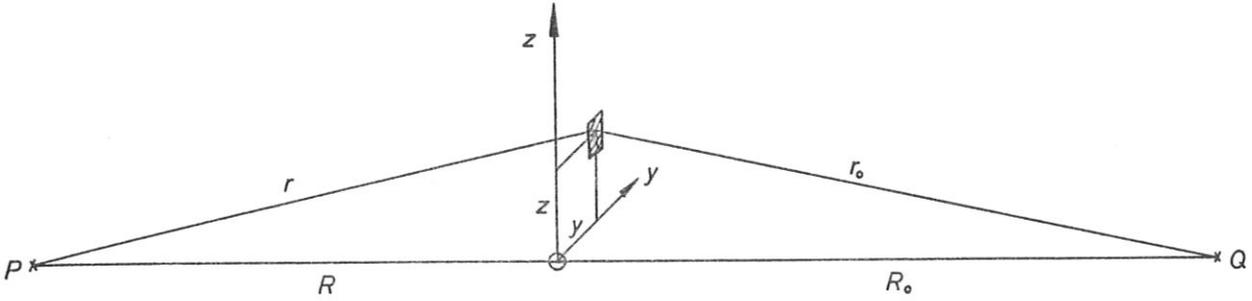


Abb. 10 Beugung nach dem Huygens'schen Prinzip

Die Strahlungsquelle Q wird wieder punktförmig angenommen, s. Abb. 10. Die Feldstärke E im Aufpunkt P wird durch das Fresnel-Kirchhoff'sche Beugungsintegral über die betreffende Öffnungsfläche gegeben:

$$E \sim \int dy dz e^{-i \frac{\omega}{c} (\tau + \tau_0)} \cdot \frac{\cos(R, \tau) + \cos(R_0, \tau)}{r \tau_0} \quad (\text{BI1})$$

Für kleine Öffnungsflächen in Achsennähe gilt:

$$r \approx R + \frac{y^2 + z^2}{2R}, \quad \tau_0 \approx R_0 + \frac{y^2 + z^2}{2R_0}$$

$$\cos(R, \tau) \approx \cos(R_0, \tau_0) \approx 1$$

Mit den neuen Variablen

$$v = \sqrt{\frac{\omega}{c\pi} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_0} \right)} \cdot y, \quad w = \sqrt{\frac{\omega}{c\pi} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_0} \right)} \cdot z \quad (\text{BI2})$$

ist dann genähert

$$E \sim \int e^{-i \frac{\pi}{2} v^2} dv \cdot \int e^{-i \frac{\pi}{2} w^2} dw$$

Bei einem Spalt von der Breite  $2\varrho$ , der symmetrisch zur optischen Achse in z-Richtung liegt, sind die Integrationsbereiche

$$-\varrho \leq y \leq \varrho, \quad -V \leq v \leq V, \quad -\infty \leq z \leq \infty$$

Die Integration in z-Richtung liefert eine Konstante und man erhält mit Hilfe der Cornu'schen Spirale (Abb. 11)

$$E \sim \int_0^V e^{-i \frac{\pi}{2} v^2} dv = l'$$

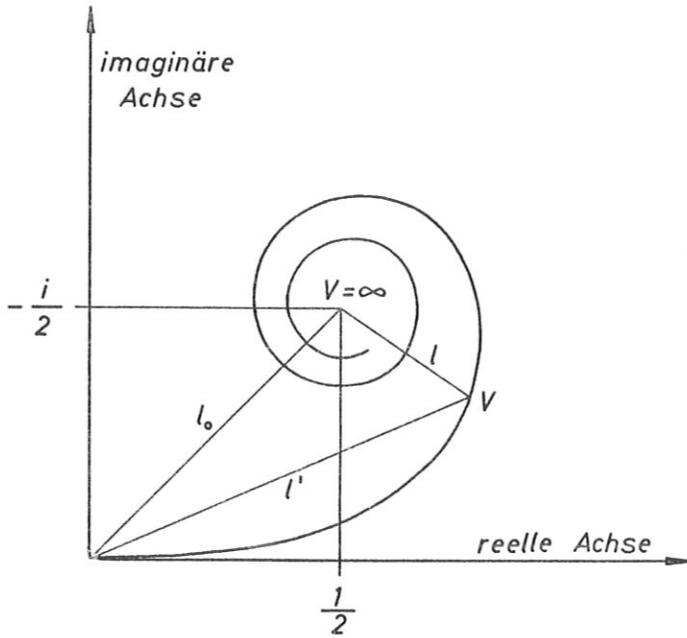


Abb. 11 Cornu'sche Spirale<sup>5)</sup>

und

$$\frac{E}{E_0} = \frac{l'}{l_0}$$

Eine ähnliche Betrachtung für den undurchlässigen Streifen liefert

$$\frac{E}{E_0} = \frac{l}{l_0}$$

(in Abb. 12 gezeichnet),

wie nach dem Babinet'schen Theorem (komplexe Addition von  $l$  und  $l'$  gibt  $l_0$ ) zu erwarten.

Bei einem gewissen Wert  $\vartheta = \vartheta_k$ , der nach Gl. (BI2) gegeben ist durch

$$\vartheta_k = \sqrt{\lambda} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_0}}} \quad (\text{BI3})$$

wird  $V = \sqrt{2}$  und  $|E/E_0| \approx 1/3$ . ( $y = \vartheta_k$  ist derjenige Abstand, wo bei  $z = 0$   $r_0 + r = R_0 + R + \lambda/2$  ist, vergl. Abb. 10). Mittels (BI3) lässt sich abschätzen, bei welchen Streifenbreiten  $2\vartheta$  die Wellenoptik zur Berechnung der Abschwächung herangezogen werden muss, nämlich etwa bei  $2\vartheta < 2\vartheta_k$ . Bei ebenen einfallenden Wellen ( $R_0 \rightarrow \infty$ ) gibt dies z.B.:

$$2\vartheta < \sqrt{\lambda R} \quad (\text{BI4})$$

Wird der undurchlässige Streifen durch einen Plasmazylinder mit der oben betrachteten Dichteverteilung ersetzt, so wird nach Abb. 8c und 9c die effektiv undurchlässige Zone wesentlich grösser als der Durchmesser des undurchlässigen Plasmakerns. Diese Erscheinung wird umso mehr ins Gewicht fallen, je langsamer die Dichte bei einer rotationssymmetrischen Verteilung nach aussen abfällt.

Eine strenge Behandlung muss jedoch vom Wellenansatz im dispersiven Medium ausgehen.

## II. Schichtmodell

Grundgleichungen:

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \text{rot } \vec{H} \quad (\text{BII1})$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot } \vec{E} \quad (\text{BII2})$$

$$\text{div } \vec{D} = 0 \quad (\text{BII3})$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (\text{BII4})$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (\text{BII5})$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{BII6})$$

Wegen der Auffassung des Plasmas als Dielektrikum fehlen Leitungsstrom und Ladungsdichte. Das Plasma besitze die Permeabilität des Vakuums, d.h. (in Zylinderkoordinaten)

$$\mu(t; z; r; \varphi) = 1 \quad (\text{BII7})$$

Mit der Annahme, dass

$$\varepsilon(t) = \text{const.} \quad (\text{BII8})$$

folgt aus (BII1), (BII2) und (BII5)

$$\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \text{rot rot } \vec{E} = 0 \quad (\text{BII9})$$

Es gilt weiter

$$\text{div } (\varepsilon \vec{E}) = 0 \quad (\text{BII10})$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (\text{BII11})$$

$\vec{E}$  besitze nur eine  $E_z$ -Komponente

$$\vec{E}(E_z; E_r; E_\varphi) = \vec{E}(E_z; 0; 0) \quad (\text{BII12})$$

Weiterhin soll gelten

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0 \quad (\text{BII13})$$

Dann wird aus (BII9)

$$\frac{\varepsilon}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} \quad (\text{BII14})$$

Aus (BII10) wird

$$\varepsilon \text{div } \vec{E} + \vec{E} \text{grad } \varepsilon = 0 \quad (\text{BII15})$$

d.h. (BII3) ist wegen (BII13) erfüllt.

Aus (BII2) folgt wegen (BII12)

$$\vec{B}(B_z; B_r; B_\varphi) = \vec{B}(0; B_r; B_\varphi) \quad (\text{BII16})$$

Damit wird aus (BII4)

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} \right] = 0 \quad (\text{BII17})$$

Durch die später angegebene Lösung von (BII14) wird (BII17) erfüllt. Der Nachweis soll hier jedoch entfallen.

Die Erweiterung der Annahme (BII8) auf

$$\varepsilon(t, z, r, \varphi) = \text{const.}$$

ermöglicht eine analytische Lösung der partiellen Differentialgleichung (BII14).

Das Folgende ist der Versuch, die realen Verhältnisse - d.h. kontinuierlich veränderlicher Brechungsindex über den Zylinderradius - dadurch anzunähern, dass der Plasmazylinder in eine Anzahl koaxialer Schichten unterteilt wird, deren jede ein konstantes

$$\varepsilon_n(t, z, r, \varphi) = \text{const.} \quad (\text{BII18})$$

besitzt (Abb. 13).

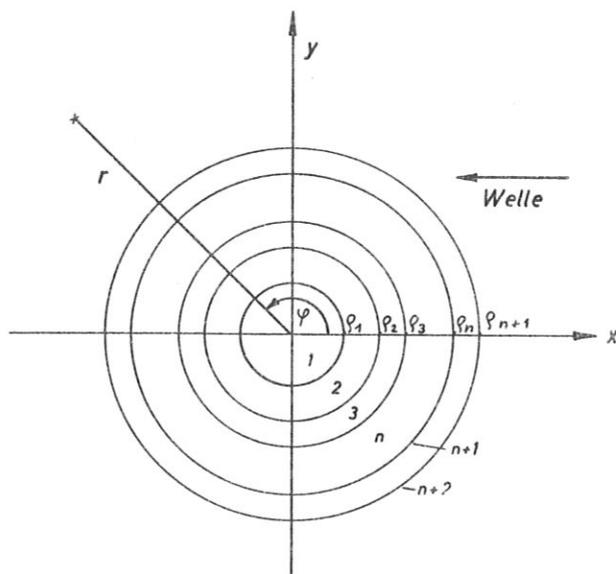


Abb. 13 Schichtmodell

(BII14) wird dann für jede Schicht  $n$  analytisch gelöst. Die einzelnen Lösungen werden durch Grenzbedingungen verknüpft.

Grenzbedingungen:

Stetigkeit der Tangentialkomponenten

$$[E_z]_n = [E_z]_{n+1} \quad \text{für} \quad r = r_n \quad (\text{BII19})$$

$$[H_\varphi]_n = [H_\varphi]_{n+1} \quad \text{für} \quad r = r_n \quad (\text{BII20})$$

Mit (BII2) gilt anstelle von (BII20)

$$\left[ \frac{\partial E_z}{\partial r} \right]_n = \left[ \frac{\partial E_z}{\partial r} \right]_{n+1} \quad \text{für} \quad r = r_n \quad (\text{BII21})$$

Einfallende Welle:

Als einfallende Welle wird eine monochromatische, in negativer x-Richtung fortschreitende ebene Welle der Form

$$E_z^e = e^{i\omega(t + \frac{1}{c}x)} = e^{i\omega(t + \frac{1}{c}r \cos\varphi)} \quad (\text{BII22})$$

angenommen. (Diese Näherung bedingt experimentell einen genügend grossen Abstand des Senders vom Plasmazylinder,  $R_0 \rightarrow \infty$ )

Verhalten der Lösung für  $r = \infty$ :

Die durch den Plasmazylinder hervorgerufene Störung der einfallenden Welle muss im Unendlichen abgeklungen sein. Für  $r = \infty$  reduziert sich die elektrische Feldstärke auf die der einfallenden Welle.

Ausstrahlungsbedingung:

Die vom Plasmazylinder hervorgerufene Störung der einfallenden Welle soll in nach aussen fortschreitenden divergierenden Zylinderwellen bestehen.

Lösungsansatz für (BII14):

Mit zeitlich monochromatischen Schwingungen soll gelten

$$E_z = e^{i\omega t} \cdot R(r) \Psi(\varphi) \quad (\text{BII23})$$

Durch Einsetzen von (BII23) in (BII14) folgt

$$-\frac{\epsilon}{c^2} \omega^2 R \Psi = R'' \Psi + \frac{1}{r} R' \Psi + \frac{1}{r^2} R \Psi'' \quad (\text{BII24})$$

worin die Striche Ableitungen nach den entsprechenden Argumenten bedeuten.

(BII24) durch  $\frac{R \Psi}{r^2}$  dividiert, ergibt

$$-\frac{\epsilon \omega^2}{c^2} r^2 - r^2 \frac{R''}{R} - r \frac{R'}{R} = \frac{\Psi''}{\Psi} = C \quad (\text{BII25})$$

Darin bedeutet  $C$  eine Separationskonstante, die negativ reell mit Einschluss der Null gesetzt wird

$$C = -m^2 \quad (\text{BII26})$$

dann zerfällt (BII25) in zwei Gleichungen

$$\Psi'' + m^2 \Psi = 0 \quad (\text{BII27})$$

und

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \left( \frac{\epsilon \omega^2}{c^2} - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (\text{BII28})$$

Gleichung (BII27):

Sie wird gelöst durch den Ansatz

$$\Psi(\varphi) = a_1 \sin m\varphi + a_2 \cos m\varphi \quad (\text{BII29})$$

Aus Symmetriegründen muss  $\Psi(\varphi)$  für  $\varphi = \varphi_0$  den gleichen Wert annehmen wie für  $\varphi = -\varphi_0$ .  
D.h.

$$a_1 = 0$$

Mit  $a_2 = 1$  wird also

$$\Psi(\varphi) = \cos m\varphi \quad (m = 0, 1, 2 \dots \infty) \quad (\text{BII30})$$

Gleichung (BII28):

Mit

$$K^2 = \frac{\epsilon}{c^2} \omega^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \epsilon \quad (\text{BII31})$$

( $\lambda$  = Vakuumwellenlänge)

geht (BII28) über in

$$\frac{d^2 R}{d(Kr)^2} + \frac{1}{Kr} \cdot \frac{dR}{d(Kr)} + \left(1 - \frac{m^2}{(Kr)^2}\right) R = 0 \quad (\text{BII32})$$

(BII32) wird gelöst durch den Ansatz

$$R_m(Kr) = a_m R_m^1(Kr) + b_m R_m^2(Kr) \quad (\text{BII33})$$

mit

$$m = 0, 1, 2 \dots \infty$$

Für

$$\epsilon \geq 0 \implies K \text{ (reell)} \quad (\text{BII34})$$

gilt

$$\left. \begin{aligned} R_m^1(Kr) &= J_m(Kr) \\ R_m^2(Kr) &= Y_m(Kr) \end{aligned} \right\} \text{Besselfunktionen (reell)} \quad (\text{BII35})$$

und für

$$\epsilon < 0 \implies K = iK^* \quad (\text{imaginär}) \quad (\text{BII36})$$

gilt

$$\left. \begin{aligned} R_m^1(Kr) &= J_m(Kr) = I_m(K^*r) \\ R_m^2(Kr) &= Y_m(Kr) = K_m(K^*r) \end{aligned} \right\} \text{modifizierte Besselfunktionen (reell)} \quad (\text{BII37})$$

Damit lautet (BII23) (allgemeine Lösung von (BII14))

$$E_z(t; r; \varphi) = e^{i\omega t} \sum_m^{0, \infty} [a_m R_m^1(Kr) + b_m R_m^2(Kr)] \cos m\varphi \quad (\text{BII38})$$

Randbedingung für  $r = 0$ :

Die zentrale Zylinderschicht schliesst den Fall

$$r \rightarrow 0 \quad \text{ein,}$$

d.h.

$$|Y_m| \rightarrow \infty \quad ; \quad |K_m| \rightarrow \infty \quad ; \quad (\text{BII39})$$

$E_z(t; r=0; \varphi)$  muss jedoch endlich bleiben, daher gilt

$$b_m^{n=1} = b_m^1 = 0$$

Lösung für den Aussenbereich:

Der Aussenbereich enthält den Messpunkt. Die Lösung besteht aus der Überlagerung von ein-  
gestrahlter ebener Welle

$$E_z^e = e^{i\omega t} e^{ikr \cos \varphi} \quad (\text{BII40})$$

und den gemäss der Ausstrahlungsbedingung nach aussen fortschreitenden divergierenden Zylinderwellen. Letztere lassen sich durch Hankelfunktionen der Form

$$H_m(kr) = J_m(kr) - i Y_m(kr) \quad (\text{BII41})$$

darstellen.

Im Aussenbereich soll stets

$$\varepsilon \geq 0 \quad (k \text{ reell) sein.}$$

Für (BII40) gilt die Entwicklung

$$E_z^e = e^{i\omega t} \sum_m^{0, \infty} (2i^m) J_m(kr) \cos m\varphi \quad (\text{BII42})$$

mit

$$(2i^m) = 1 \quad \text{für } m=0 \quad (\text{BII43})$$

Damit ergibt sich im Aussenbereich die folgende Lösung

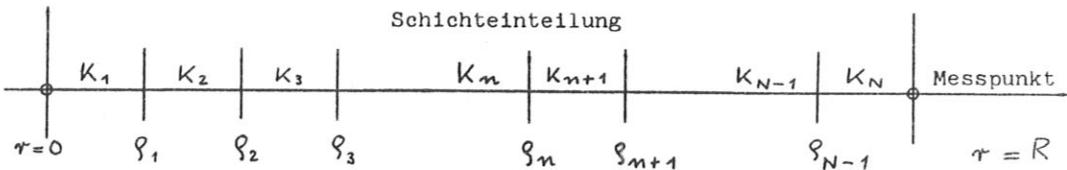
$$E_z = e^{i\omega t} \sum_m^{0, \infty} [(2i^m) J_m(kr) + c_m H_m(kr)] \cos m\varphi \quad (\text{BII44})$$

Zusammenfassung der Lösungen:

Das räumliche Verhalten der Gesamtlösung wird hier vorerst zur Zeit

$$t = 0 \implies e^{i\omega t} = 1 \quad \text{betrachtet.}$$

Zudem wird die  $E_z$ -Komponente im Folgenden mit E bezeichnet.



a). Zentrale Zylinderschicht

$$E = \sum_m^{0, \infty} a_m^1 R_m^1(k_i r) \cos m\varphi \quad (\text{BII45})$$

b) Zwischenschichten

$$E = \sum_m^{0, \infty} \left[ a_m^n R_m^1(k_n r) + b_m^n R_m^2(k_n r) \right] \cos m \varphi \quad (\text{BII46})$$

c) Aussenbereich

$$E = \sum_m^{0, \infty} \left[ (2i^m) j_m(k_N r) + c_m H_m(k_N r) \right] \cos m \varphi \quad (\text{BII47})$$

Grenzbedingungen:

Es gelten die folgenden Grenzbedingungen;

a)  $r = \varrho_1$

$$a_m^1 R_m^1(k_1 \varrho_1) = a_m^2 R_m^1(k_2 \varrho_1) + b_m^2 R_m^2(k_2 \varrho_1) \quad (\text{BII48})$$

$$k_1 a_m^1 R_m^{1'}(k_1 \varrho_1) = k_2 \left[ a_m^2 R_m^{1'}(k_2 \varrho_1) + b_m^2 R_m^{2'}(k_2 \varrho_1) \right] \quad (\text{BII49})$$

b)  $r = \varrho_n$

$$a_m^n R_m^1(k_n \varrho_n) + b_m^n R_m^2(k_n \varrho_n) = \quad (\text{BII50})$$

$$a_m^{n+1} R_m^1(k_{n+1} \varrho_n) + b_m^{n+1} R_m^2(k_{n+1} \varrho_n)$$

$$k_n \left[ a_m^n R_m^{1'}(k_n \varrho_n) + b_m^n R_m^{2'}(k_n \varrho_n) \right] = \quad (\text{BII51})$$

$$k_{n+1} \left[ a_m^{n+1} R_m^{1'}(k_{n+1} \varrho_n) + b_m^{n+1} R_m^{2'}(k_{n+1} \varrho_n) \right]$$

c)  $r = \varrho_{N-1}$

$$a_m^{N-1} R_m^1(k_{N-1} \varrho_{N-1}) + b_m^{N-1} R_m^2(k_{N-1} \varrho_{N-1}) = \quad (\text{BII52})$$

$$(2i^m) j_m(k_N \varrho_{N-1}) + c_m H_m(k_N \varrho_{N-1})$$

$$k_{N-1} \left[ a_m^{N-1} R_m^{1'}(k_{N-1} \varrho_{N-1}) + b_m^{N-1} R_m^{2'}(k_{N-1} \varrho_{N-1}) \right] = \quad (\text{BII53})$$

$$k_N \left[ (2i^m) j_m'(k_N \varrho_{N-1}) + c_m H_m'(k_N \varrho_{N-1}) \right]$$

Koeffizientenbestimmung:

Für N Zylinderschichten folgen aus (BII48) bis (BII53) 2(N-1) Gleichungen, in denen 2(N-1) unbekannte komplexe Koeffizienten  $a_m^n$ ,  $b_m^n$  und  $c_m$  enthalten sind. Die Gleichungen sind in den  $a_m^n$ ,  $b_m^n$  und  $c_m$  linear und dienen zu deren Bestimmung. Da die Lösung am Messpunkt ( $r=R$ ;  $\varphi = \varphi_M$ ) betrachtet wird, ist eine explizite Bestimmung lediglich des  $c_m$  notwendig. Dies kann hier durch sukzessives Fortschreiten von Schicht zu Schicht geschehen. Dabei wird in der zentralen Zylinderschicht begonnen, mit einem zunächst willkürlichen Wert von  $a_m^1 (=1)$ . Es lassen

sich dann jeweils die  $a_m^{n+1}$ ;  $b_m^{n+1}$  aus den  $a_m^n$ ;  $b_m^n$  berechnen und schliesslich  $c_m$  aus  $a_m^{N-1}$ ;  $b_m^{N-1}$ .  $a_m^1$  pflanzt sich dabei als Faktor durch sämtliche Schichten fort und lässt sich aus dem Ausdruck für  $c_m$  eliminieren. Auf die Ausführung der entsprechenden algebraischen Umrechnungen von (BII48) bis (BII53) sei hier verzichtet. Die gesuchte Lösung lautet somit

$$E = e^{i\omega t} \left[ e^{i k_N R \cos \varphi_N} + \sum_m^{0, \infty} c_m H_m(k_N R) \cos m \varphi_N \right] \quad (\text{BII54})$$

(Superposition von Originalwelle (1. Term) und gestreuter Welle (2. Term) )

Bemerkungen:

Zur Bestimmung der  $k$  gilt

$$k^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \varepsilon = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} n^2 \quad (\text{BII55})$$

mit

$$n^2 = 1 - \beta_0 e^{-a^2 r^2} \quad (\text{BII56})$$

Die Radien  $\varrho_n$  der Schichtgrenzen wurden so gelegt, dass sich die Brechzahl  $n$  von  $\varrho_n$  zu  $\varrho_{n+1}$  immer um den gleichen Betrag  $\Delta n$  ändert. Die Schichtkonstanten  $k_n$  sind jeweils die arithmetischen Mittelwerte von  $k(\varrho_{n-1})$  und  $k(\varrho_n)$ .

Solange die  $k_n$  in sämtlichen Schichten reell bleiben, bereitet die Berechnung des  $c_m$  keine grundsätzlichen Schwierigkeiten. Werden die  $k_n$  der inneren Zylinderschichten imaginär, so liegt prinzipiell wegen

$$\lim_{kr \rightarrow 0} \left\{ \begin{array}{l} |Y_m(kr)| \\ |K_m(kr)| \end{array} \right\} \rightarrow \infty \quad (\text{BII57})$$

eine Singularität der Lösung von (BII32) bei  $kr = 0$  vor.<sup>+)</sup>

Bei geschickter Schichteinteilung tritt diese Singularität in der numerischen Rechnung nicht direkt hervor. Im Gesamtbild der Lösung macht sie sich jedoch indirekt durch starke Unstetigkeiten bemerkbar.

Zur Vermeidung dieser Schwierigkeit erwies sich das folgende Rechenverfahren als geeignet. -

Der Radius  $\varrho_n$  (kritischer Radius) einer Schichtgrenze wird genau an die Stelle gelegt, an der  $k = 0$  wird. Dann wären für die an  $\varrho_n^{\text{krit.}}$  angrenzende innere Schicht die modifizierten Besselfunktionen  $I_m$  und  $K_m$  zu benutzen, für die an  $\varrho_n^{\text{krit.}}$  angrenzende äussere Schicht die Besselfunktionen  $J_m$  und  $Y_m$ . Tatsächlich sind für die an  $\varrho_n^{\text{krit.}}$  angrenzende innere Schicht  $I_m(k^* \varrho_n^{\text{krit.}})$  und  $J_m(k^* \varrho_n^{\text{krit.}})$  verwendet worden, für die an  $\varrho_n^{\text{krit.}}$  angrenzende äussere Schicht  $J_m(k_{n+1} \varrho_n^{\text{krit.}})$  und  $I_m(k_{n+1} \varrho_n^{\text{krit.}})$ ; d.h. Funktionen, die für  $kr = 0$  grundsätzlich nicht unendlich gross werden können. Auf diese Weise bleibt das Problem mathematisch eindeutig bestimmt. Das Vorgehen entspricht einer Überlappung der Bereiche "k-reell" und "k-imaginär". Physikalisch lässt sich diese Überlappung durch die Überlegung rechtfertigen, dass in einem realen Plasma eine Stossdämpfung vorhanden ist, die bewirkt, dass einerseits im Durchlassgebiet die Wellen gedämpft werden, andererseits Wellen auch noch im Cutoff-Gebiet fortschreiten können, wo ohne Verlustmechanismen nur exponentielles Abklingen stattfinden würde.

<sup>+)</sup> Von Ginzburg<sup>6)</sup> wird eine Singularität der elektrischen Feldstärke diskutiert, welche bei der Reflexion elektromagnetischer Wellen an einem inhomogenen Plasma an der Stelle  $\varepsilon=0$  auftritt. Diese Singularität wird darauf zurückgeführt, dass erstens die Möglichkeit der Erzeugung von Plasmawellen ausser Acht gelassen wurde, zweitens thermische Effekte und drittens Stossdämpfung vernachlässigt wurden.

Die Abb. 14 bis 18 zeigen die Ergebnisse der numerischen Rechnung im Falle des homogenen Zylinders, die Abb. 19 bis 23 im Falle des inhomogenen Zylinders, welcher durch 10 homogene, koaxiale Schichten dargestellt wurde.

In den Abb. 14 und 19 ist der Quotient  $E/E_0$  nach Betrag und Phase als Funktion der relativen Plasmadichte  $\beta$  bzw.  $\beta_0$  aufgetragen.

(Gl. (BII54);  $E_0$  bezeichnet die ohne Plasma allein vorhandene Originalwelle (BII40), deren Betrag gleich Eins ist.)

Der Empfänger liegt dabei bei  $\varphi = 180^\circ$ , also hinter dem Zylinder. Zum Vergleich sind die Ergebnisse der strahlenoptischen Rechnung aus Abb. 2 und 4 ebenfalls eingezeichnet (entsprechend Gl. (AI7) bedeutet eine Vergrößerung von  $\Delta\theta$ , also eine positive Zeigerdrehung in der komplexen Ebene, eine Verkleinerung der optischen Weglänge).

Während nach der strahlenoptischen Berechnung die Amplitude mit  $\beta, \beta_0 \rightarrow 1$  gegen Null konvergiert, nähert sie sich nach der wellenoptischen Berechnung einem von Null verschiedenen Wert, welcher im Falle des inhomogenen Zylinders kleiner ist als im Falle des homogenen. Beim inhomogenen Zylinder wurde die rel. Dichte  $\beta_0$  auf der Achse über den Wert 1 hinaus vergrößert, sodass ein undurchlässiger Kern entsteht, und die Amplitude nach den Überlegungen zu Beginn dieses Abschnittes (Abb. 12) sich im Uhrzeigersinn dem Nullpunkt nähern sollte. Diese Annäherung ist andeutungsweise im Kurvenverlauf auch ganz richtig vorhanden. Zu höheren  $\beta_0$ -Werten als etwa 8 zu gehen, war aus rechentechnischen Gründen (Bereichsüberschreitung) nicht möglich. Die Abb. 15 und 20 zeigen entsprechende Beugungskurven für Empfängerorte, die im gleichen Abstand R von der Zylinderachse etwas seitlich der optischen Achse liegen. Die Verlagerung der Kurven lässt sich qualitativ so verstehen, dass bei Schwenkung des Empfängerorts um die Zylinderachse der Einfluss der Originalwelle stärker ("direkte Strahlung") und gleichzeitig die mittlere optische Weglänge grösser wird, da das Plasma optisch dünner ist als Vakuum. Demzufolge ist eine Phasendrehung im Uhrzeigersinn zu erwarten, die für niedrige  $\beta$ - bzw.  $\beta_0$ -Werte auch herauskommt (gestrichelte Kurven mit  $\beta_0 = \text{const}$  in Abb. 20).

In den Abb. 16 und 21 ist die Feldstärke der gestreuten Welle allein für einen bei  $\varphi = 90^\circ$  stehenden Empfänger gezeichnet. Die Originalwelle wurde nicht mitgenommen, da eine im Experiment normalerweise verwendete Antenne in dieser Stellung infolge ihrer Richtcharakteristik diese Welle auch nicht empfangen würde. Die Vielzahl der Phasenumläufe der Kurven in Abb. 21 gegenüber den geringen Phasenänderungen in Abb. 16 lässt sich durch die Überlegung deuten, dass beim inhomogenen Zylinder die Elementarwellen, die die Feldstärke im Empfängerpunkt erzeugen, plasmaerfüllten Raum zu durchlaufen haben, wobei die zurückgelegten optischen Weglängen von der relativen Dichte  $\beta$  abhängen.

Die Abb. 17 und 22 zeigen die in die Richtung des Senders zurückgestreute Welle. Da die Originalwelle den Betrag Eins hat, geben die Kurven gleichzeitig den Reflexionsfaktor des Zylinders, bezogen auf den Ort des Empfängers, an. In den Abb. 18 und 23 ist schliesslich für einige  $\beta$ - bzw.  $\beta_0$ -Werte die Amplitude der Streuwelle als Funktion des Winkels  $\varphi$  in logarithmischem Maßstab aufgetragen. Scharf ausgeprägte Minima wie beim homogenen Zylinder sind beim inhomogenen nicht vorhanden.

#### Fehlerbetrachtung:

Die in die gesamte Rechnung eingehenden Fehler lassen sich nach ihrem Ursprung klassifizieren.-

- a) Verwendung des Schichtmodells anstelle eines kontinuierlichen Modells
- b) Allgemeine numerische Fehler während der Rechnung
- c) Numerische Fehler bei der Berechnung der Besselfunktionen
- d) Abbruch der Reihenentwicklungen bei  $m < \infty$

Zu a):

Wegen des Fehlens einer Lösung für das kontinuierliche Modell kann eine Lösung für das Schichtmodell grundsätzlich nicht mit ihr verglichen werden.

Vor der Entscheidung der Frage, ob sich die Lösung der N Differentialgleichungen (BII14) mit

$N$  Konstanten  $\epsilon_n$  plus  $(N-1)$  Grenzbedingungen plus Randbedingungen bei wachsendem  $N(\rightarrow \infty)$  der Lösung der Differentialgleichung (BII14) mit  $\epsilon(r)$  plus Randbedingungen immer besser annähert, und zwar allein aus der Kenntnis von (BII14) und sämtlicher Nebenbedingungen, ist in dieser Arbeit abgesehen worden. Hier bleibt auch offen, inwieweit eine Entscheidbarkeit der Frage auf dem angedeuteten Wege überhaupt möglich ist.

Für die benutzten Parameterwerte rechtfertigen die Ergebnisse der numerischen Rechnung offensichtlich die Verwendung des Schichtmodells als Näherungsmodell für den kontinuierlichen Fall.

Zu b):

Die verwendete IBM 7090 gestattet Operationen mit Zahlen, die im Bereich  $10^{-38} \dots 10^{+38}$  durch 8 Dezimalen dargestellt werden. Wegen der begrenzten Maschinenkapazität wurde mit einfacher Genauigkeit gerechnet.

Zu c):

Die numerischen Werte der Besselfunktionen sollen nach Angabe des Autors der entsprechenden Subroutinen in den unter "zu b)" erwähnten 8 Dezimalen genau sein.

Zu d):

Die an dieser Stelle vorliegenden Fehler hängen eng mit der Konvergenz der Reihen zusammen. Die  $c_m$  resultieren aus sämtlichen in den einzelnen Schichten verwendeten Reihenentwicklungen. Die numerische Rechnung zeigte, dass die  $|c_m|$  mit wachsendem  $m$  kleiner wurden. Der Gesamtfehler ergibt sich also aus einer äusserst unübersichtlichen Überlagerung der einzelnen, hier zum Teil noch nicht einmal bekannten Fehler a) bis d). Es ist deshalb beabsichtigt, die Berechnungen mit entsprechenden Messungen zu vergleichen.

Bereits vorhandene Messungen an Objekten, die dem hier behandelten Plasmazylinder ähnlich sind, erlauben die Annahme, dass die gesamte Rechnung in der Lage ist, ein mindestens qualitatives Bild über die Abhängigkeit der elektrischen Feldstärke  $E$  am Messpunkt von den Plasmametern  $a$  und  $\beta$  zu geben.

Die Zahl der verwendeten Zylinderschichten und Ordnungen der Besselfunktionen wurde ausser durch Begrenzungen in den Subroutinen für die Zylinderfunktionen im wesentlichen durch die Maschinenkapazität und nicht mehr vermeidbare Über- bzw. Unterläufe ( $\gamma > 10^{+38}$  bzw.  $\gamma < 10^{-38}$ ) von Zahlenwerten  $\gamma$  während der Rechnung bestimmt.

Mit den Herren Prof. Dr. R. Gould und B. O'Brien hatten wir nützliche Diskussionen. Herr O'Brien unterzog das Manuskript zudem einer kritischen Durchsicht. Herr A. Jelic, Fräulein E. Bock und Frau A. Trostel führten Teile der numerischen Rechnung aus, Fräulein Bock fertigte auch die Zeichnungen an. Allen Genannten sei hiermit gedankt.

Literaturverzeichnis\*

- 1) G. Burkhardt u. A. Schlüter                      Zeitschr. f. Astrophysik, 26, 295 (49)
- 2) A.R. Jones a. E.R. Wooding                      PPG 5 (1964), University College of Wales,  
Aberystwyth
- 3) B.B. Rosen    Proj. Matterhorn Tech. Memo 85, (1959),  
Princeton, N.J.
- 4) A. Sommerfeld                                      Optik, 3. Aufl., Leipzig 1964, S. 296
- 5) M. Born a. E. Wolf                                  Principles of Optics, Pergamon Press 1964,  
S. 382, 428
- 6) V.L. Ginzburg    Propagation of Electromagnetic Waves in  
Plasma, New York 1961, S. 378

Abbildungen

- Abb. 2 Leistungsquotient  $\gamma/\gamma_0$  (nach rechts abfallende Kurven) und Phasenverschiebung  $\Delta\theta$  (nach rechts ansteigende Kurven) als Funktionen der relativen Plasmadichte  $\beta$  und des Durchmessers  $D$  des homogenen Zylinders.
- Abb. 4 Leistungsquotient  $\gamma/\gamma_0$  (nach rechts abfallende Kurven) und Phasenverschiebung  $\Delta\theta$  (nach rechts ansteigende Kurven) als Funktionen der relativen Plasmadichte  $\beta_0$  und des mittleren Radius  $\varrho' = a^{-1}$  des inhomogenen Zylinders mit der Dichteverteilung  $\beta = \beta_0 \exp(-a^2 r^2)$ .
- Abb. 5 Vergleich von Wertepaaren,  $(\varrho (=D/2), \beta)$  und  $(\varrho', \beta_0)$ , welche jeweils gleiche Leistungsquotienten  $\gamma/\gamma_0$  und gleiche Phasenverschiebung  $\Delta\theta$  liefern.
- Abb. 6 Verlauf des Strahles, welcher vom Senderpunkt  $x = R_0, y = 0$  ausgehend auf den Randpunkt  $x = -R, y = A/2$  der Empfängerfläche trifft, in Abhängigkeit von der relativen Dichte  $\beta_0$  auf der Achse des inhomogenen Zylinders.

Abb. 7 Verlauf des Strahles wie in Abb. 6, in Abhängigkeit vom mittleren Radius  $\varrho'$  des inhomogenen Zylinders für zwei  $\beta_0$ -Werte.

Abb. 8 Wellenfeld in der Nähe der Achse,  $x = 0, y = 0$ , des inhomogenen Zylinders. Das Wellenfeld wird dargestellt durch Strahlen, die mit dem Anfangswinkel  $\pi - \psi_0$  in gleichen Winkelabständen vom Senderpunkt ausgehen, und den Normalen zu diesen Strahlen, den "Wellenebenen", die in Abständen  $\lambda/2$  eingezeichnet sind;  $s$  ist die optische Weglänge, vom Sender an gerechnet.- In Abb. 8b liegt der Cutoff-Punkt ( $\beta=1$ ) gerade auf der Zylinderachse, in Abb. 8c ist  $\beta = 1$  bei einer Entfernung  $r = r_c = 1$  cm von der Achse. Die mittlere Eindringtiefe  $\delta$  des Feldes ist definiert durch

$$\int_{r=r_c}^{r=r_c+\delta} n_I(r) dr = -1, \quad n_I(r) = -\left(\beta_0 e^{-a^2 r^2} - 1\right)^{1/2}$$

wie bei senkrechtem Einfall einer ebenen Welle auf eine ebene dielektrische Oberfläche.

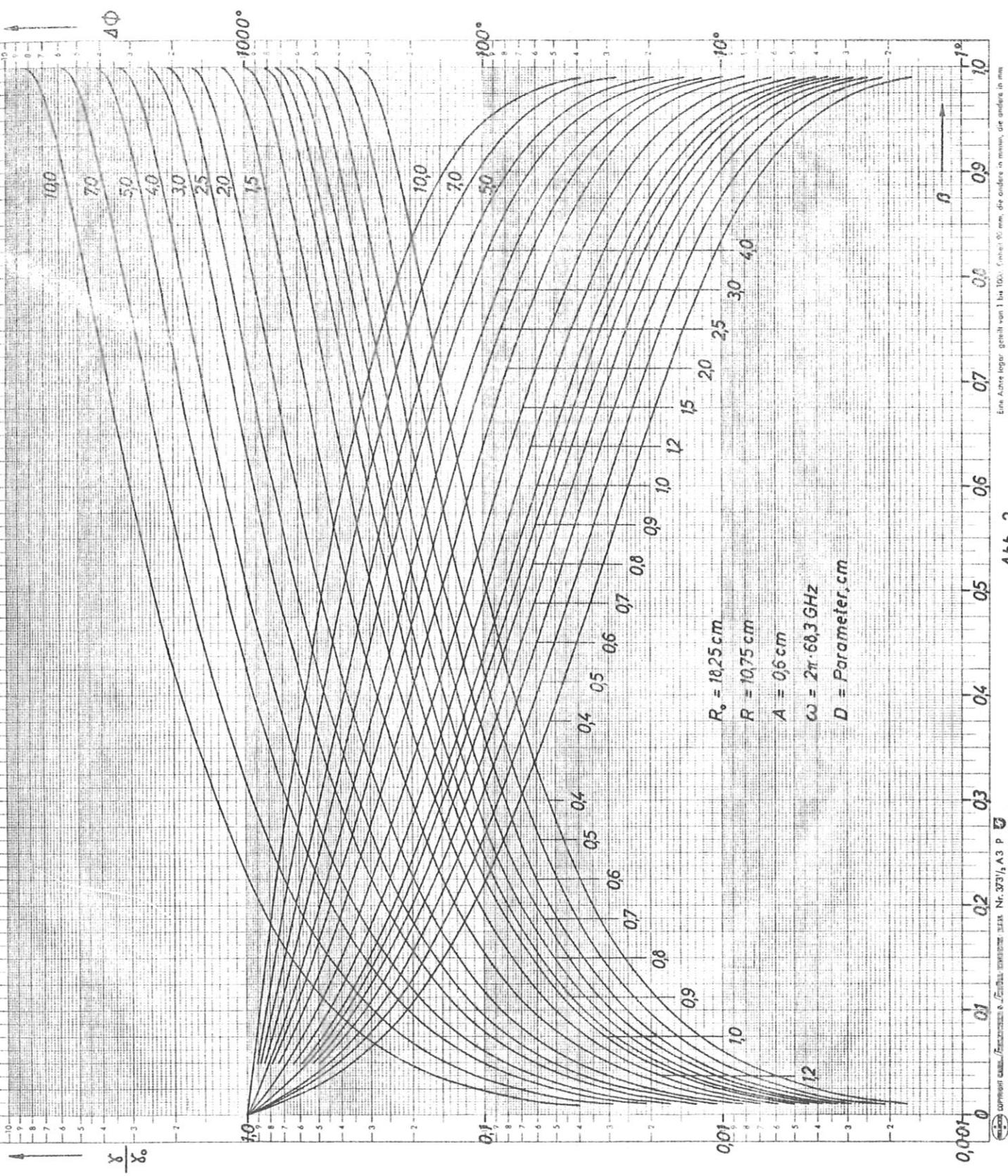
Abb. 9 Wellenfeld wie in den Abb. 8, für einen anderen mittleren Zylinder-radius  $\varrho'$  (inhomogener Zylinder).

Abb. 12 Feldstärke  $E$  im Abstand  $R$  hinter einem undurchlässigen Streifen der Breite  $2\varrho$ , wenn der Sendepunkt im Abstand  $R_0$  vor dem Streifen liegt, als Funktion der normierten halben Streifenbreite

$$V = \sqrt{\frac{\omega}{c\pi} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_0} \right)} \cdot \beta$$

$E$  ist auf  $E_0$ , die Feldstärke bei  $\varrho = 0$ , normiert, und  $E/E_0$  als Vektor in der komplexen Ebene dargestellt, d.h. Betrag  $|E/E_0|$  und Phasendifferenz  $\Delta\theta$  zwischen  $E$  und  $E_0$ . Vergrößerung von  $V$  bringt Vergrößerung der effektiven optischen Weglänge.

- Abb. 14 Quotient  $E/E_0$  in der komplexen Ebene als Funktion der relativen Dichte  $\beta$  des homogenen Zylinders. Die sich dem Nullpunkt annähernden Kurven sind nach der Strahlenoptik berechnet, die nach einem Punkt ausserhalb des Nullpunktes konvergierenden nach der Wellenoptik. Der Empfänger liegt hinter dem Zylinder,  $\psi = 180^\circ$ .  $E_0$  ist die ohne Plasma vorhandene Originalwelle.
- Abb. 15 Wellenoptisch berechnete Kurven für  $E/E_0$  wie in Abb. 14a, jedoch bei etwas seitlich verlagertem Empfänger,  $\psi$  von  $180^\circ$  bis  $167,5^\circ$ . Die gestrichelte Kurve verbindet die Punkte mit  $\beta = 0,05$  der einzelnen Kurven. Aus Deutlichkeitsgründen sind sonst keine  $\beta$ -Werte eingezeichnet.
- Abb. 16 Wellenoptisch berechnete Kurven für  $E$ , wobei der Empfänger seitlich ( $\psi = 90^\circ$ ) vom homogenen Zylinder steht. Die Originalwelle wird nicht betrachtet; ohne Plasma ist dann die empfangene Feldstärke Null.
- Abb. 17 Wellenoptisch berechnete  $E$ -Kurven wie in Abb. 16, aber für  $\psi = 0$  (Reflexion).
- Abb. 18 Amplitude  $|E|$  der gestreuten Welle als Funktion des Winkels  $\psi$  in logarithmischem Maßstab, für drei  $\beta$ -Werte (homogener Zylinder).
- Abb. 19 Der Quotient  $E/E_0$  wie in Abb. 14, jedoch für inhomogenen Zylinder ( $\beta = \beta_0 \exp(-a^2 r^2)$ ).
- Abb. 20  $E/E_0$ -Kurven wie in Abb. 15, für inhomogenen Zylinder. Die gestrichelten Kurven verbinden Punkte gleichen  $\beta_0$ -Wertes auf den einzelnen Kurven.
- Abb. 21 In Richtung  $\psi = 90^\circ$  gestreute Welle  $E$  wie in Abb. 16, für inhomogenen Zylinder.
- Abb. 22 Wellenoptisch berechnete reflektierte Welle  $E$  wie in Abb. 17, für inhomogenen Zylinder.
- Abb. 23 Streuwellenamplitude  $|E|$  als Funktion des Winkels  $\psi$ , wie in Abb. 18, für inhomogenen Zylinder.

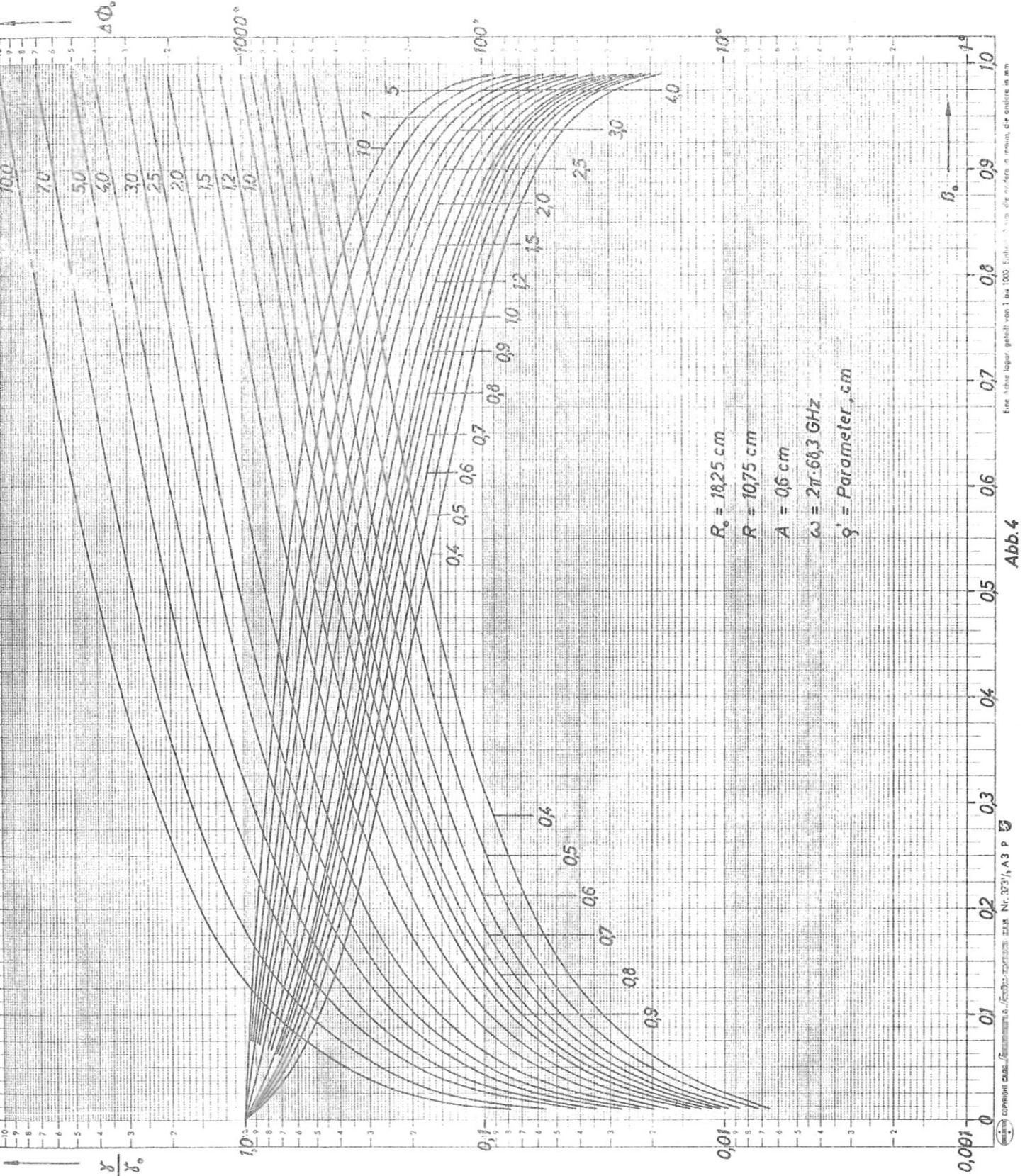


Еще Ахве легар грейт ван 1 bus 100. (mish) 90 mm, die andere in mm, die andere in mm

Abb. 2

Tab. I

D \ β	0,025			0,5			0,975			
	E/E <sub>0</sub>   mit Meßfehler	ΔΦ	Fehler von β   D							
2 cm	0,92	21°	77%	0,39	480°	17%	0,11	1390°	5%	37%
	10%	25%	72%	20%	10%	16%	100%	10%		
0,6 cm	0,79	6°	24%	0,23	144°	35%	0,06	415°	7%	10%
	10%	30%	37%	50%	10%	6%	100%	10%		



Еще более логар. график от 1 до 1000. Единица — шаг, для которого в мм, для заданной в мм.

Abb. 4

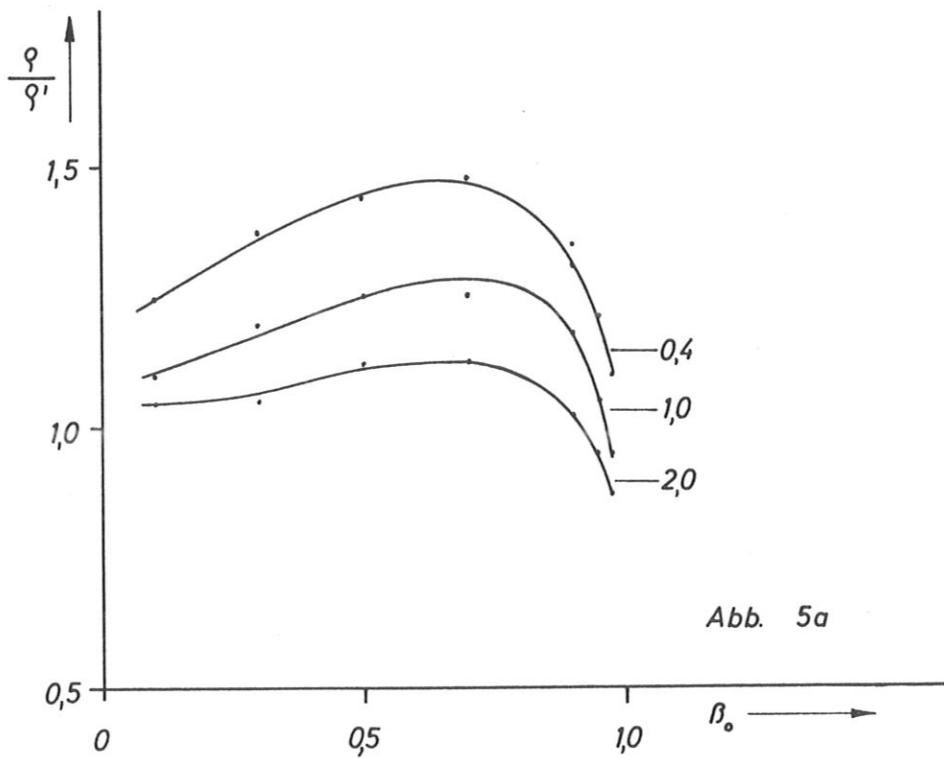


Abb. 5a

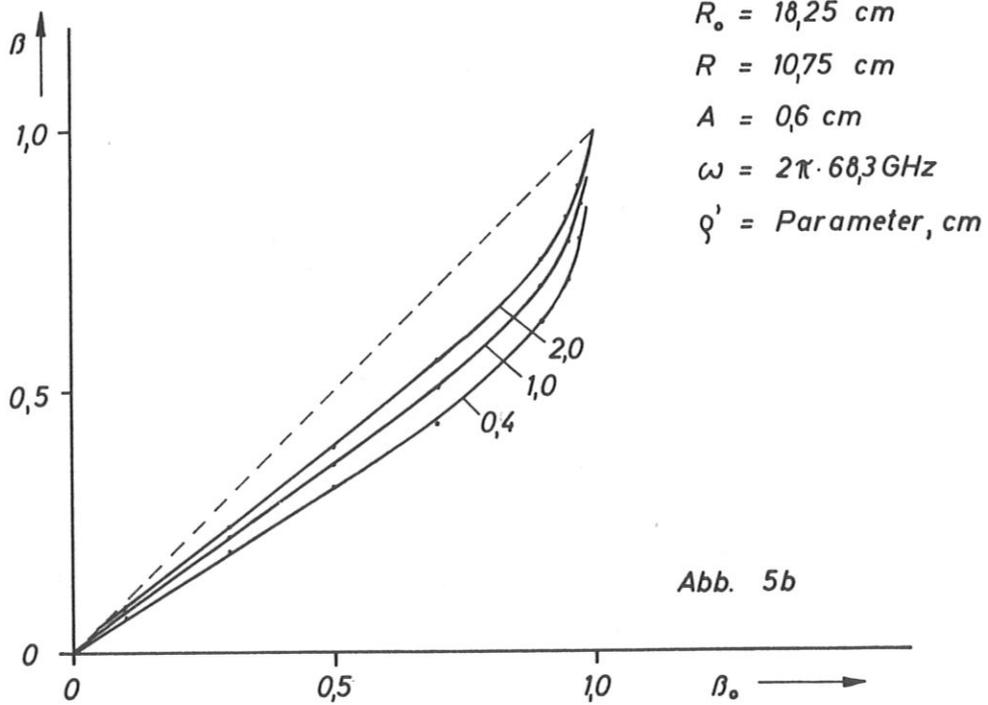


Abb. 5b

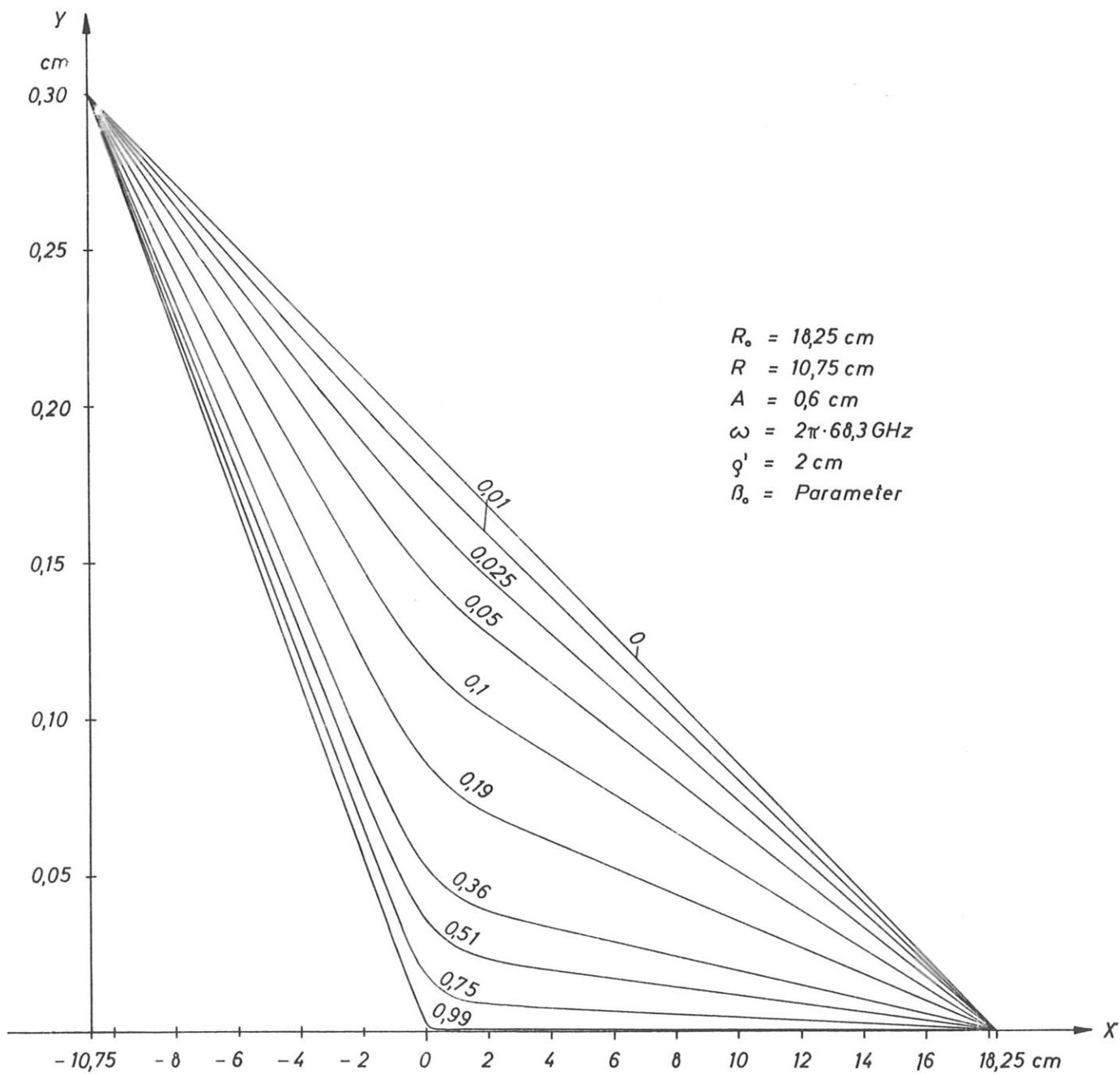


Abb. 6

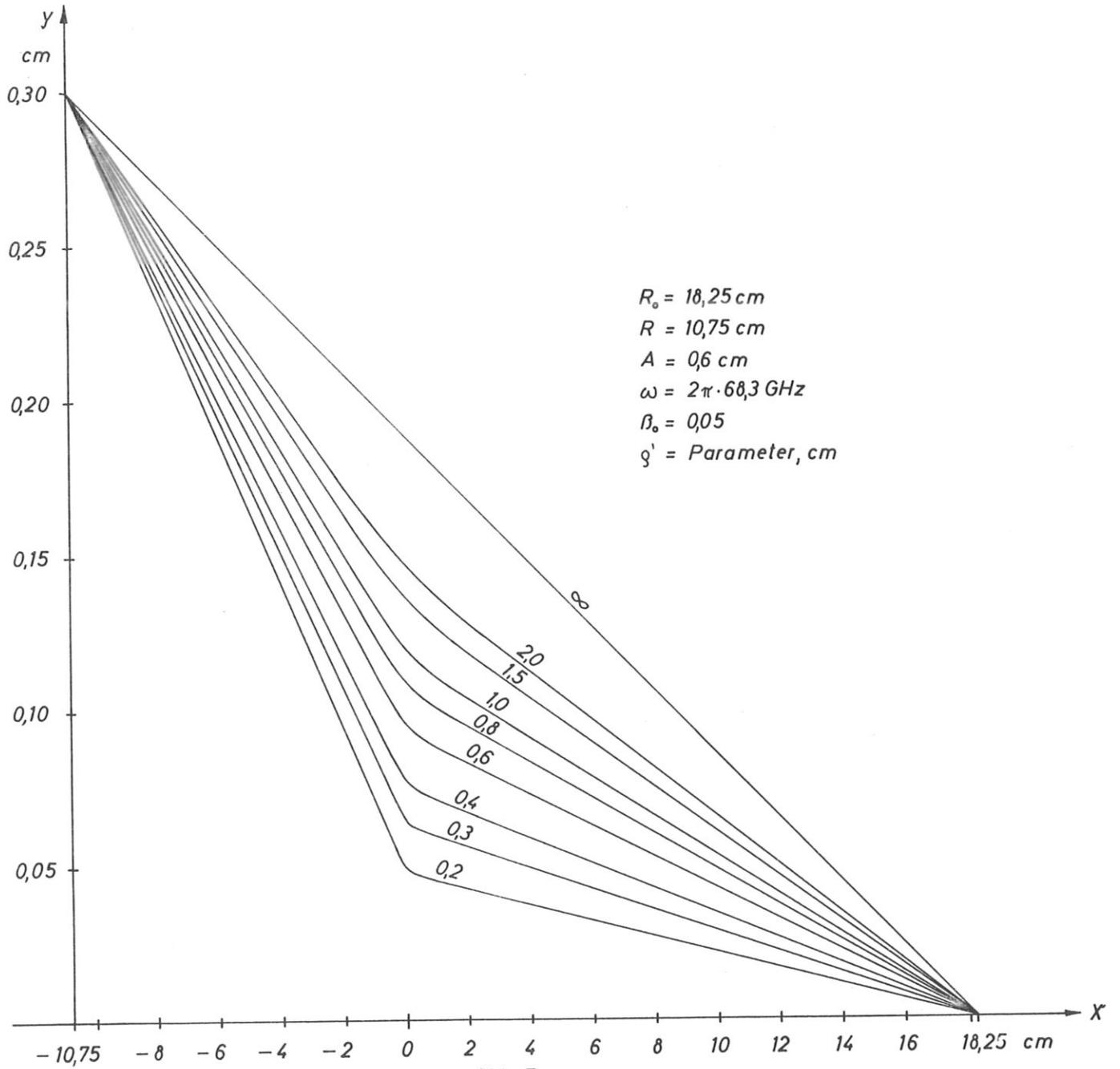


Abb. 7a

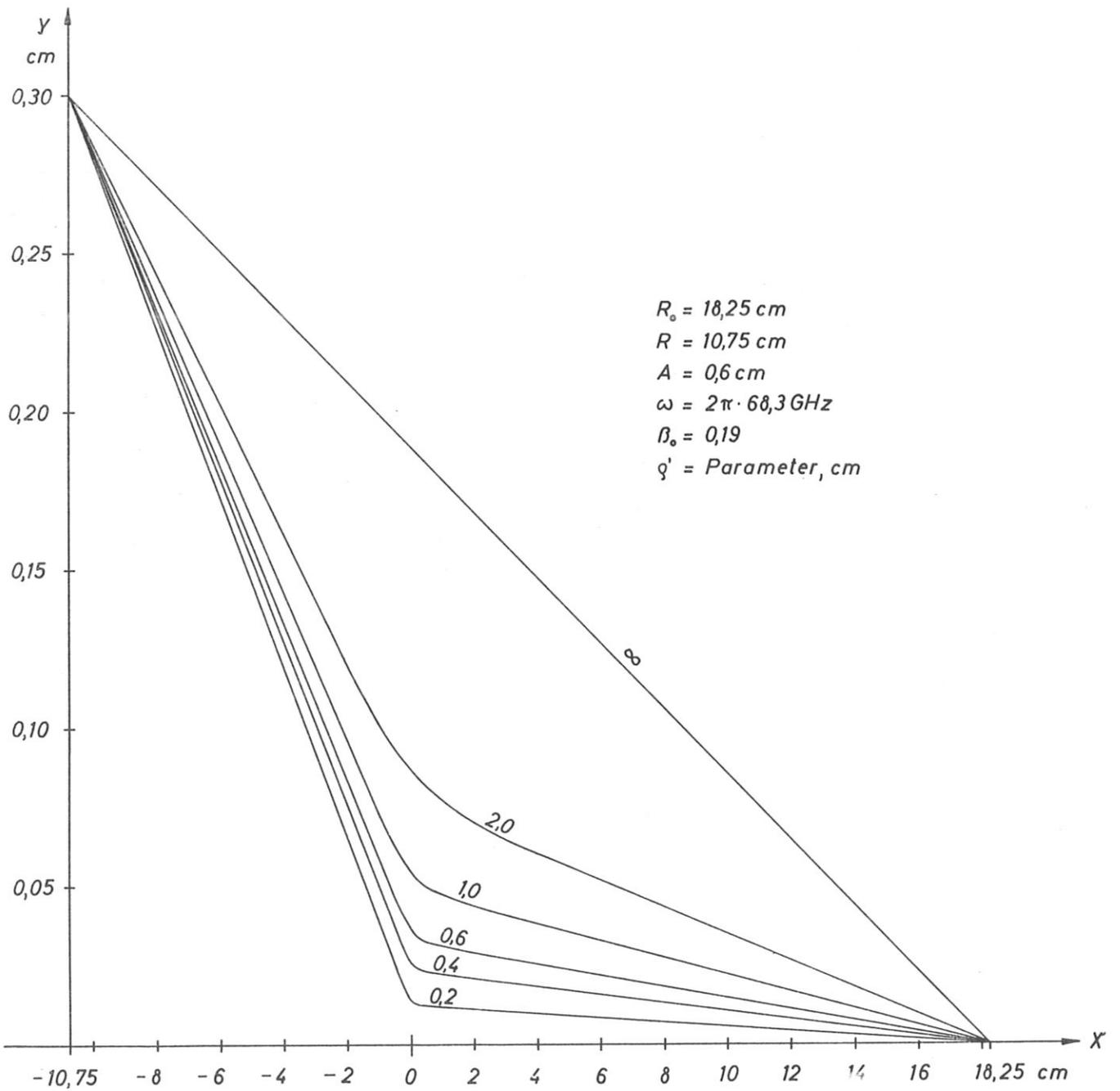


Abb. 7b

$$R_0 = 18,25 \text{ cm}$$

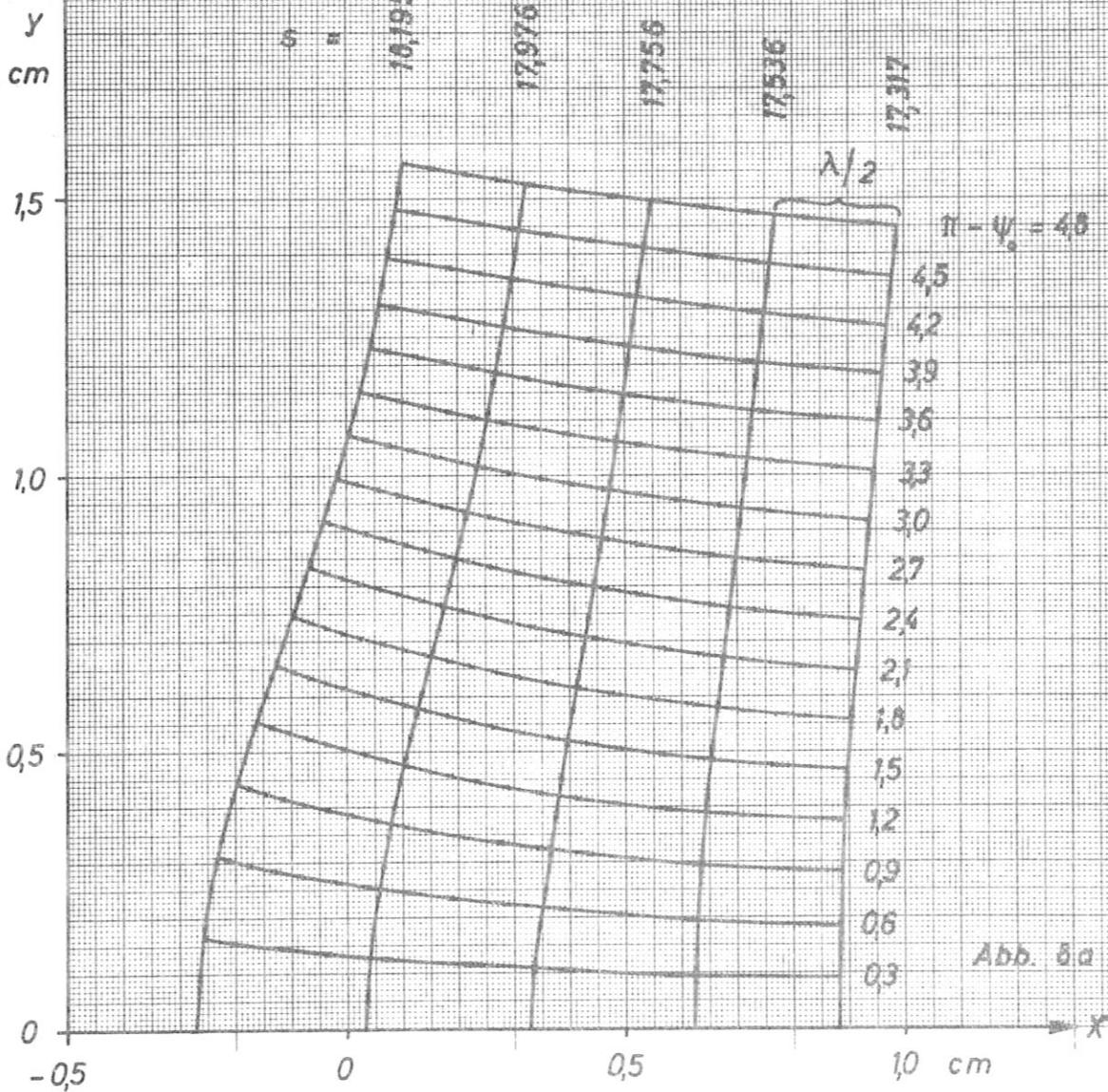
$$\omega = 2\pi \cdot 60,3 \text{ GHz}$$

$$g' = 1,0 \text{ cm}$$

$$\beta_0 = 0,5$$

$$s = \text{Parameter, cm}$$

$$\pi - \psi_0 = \text{Parameter, Grad}$$



$$R_0 = 18,25 \text{ cm}$$

$$\omega = 2\pi \cdot 66,3 \text{ GHz}$$

$$q' = 10 \text{ cm}$$

$$D_0 = 10$$

$$s = \text{Parameter, cm}$$

$$\tau - \psi_0 = \text{Parameter, Grad}$$

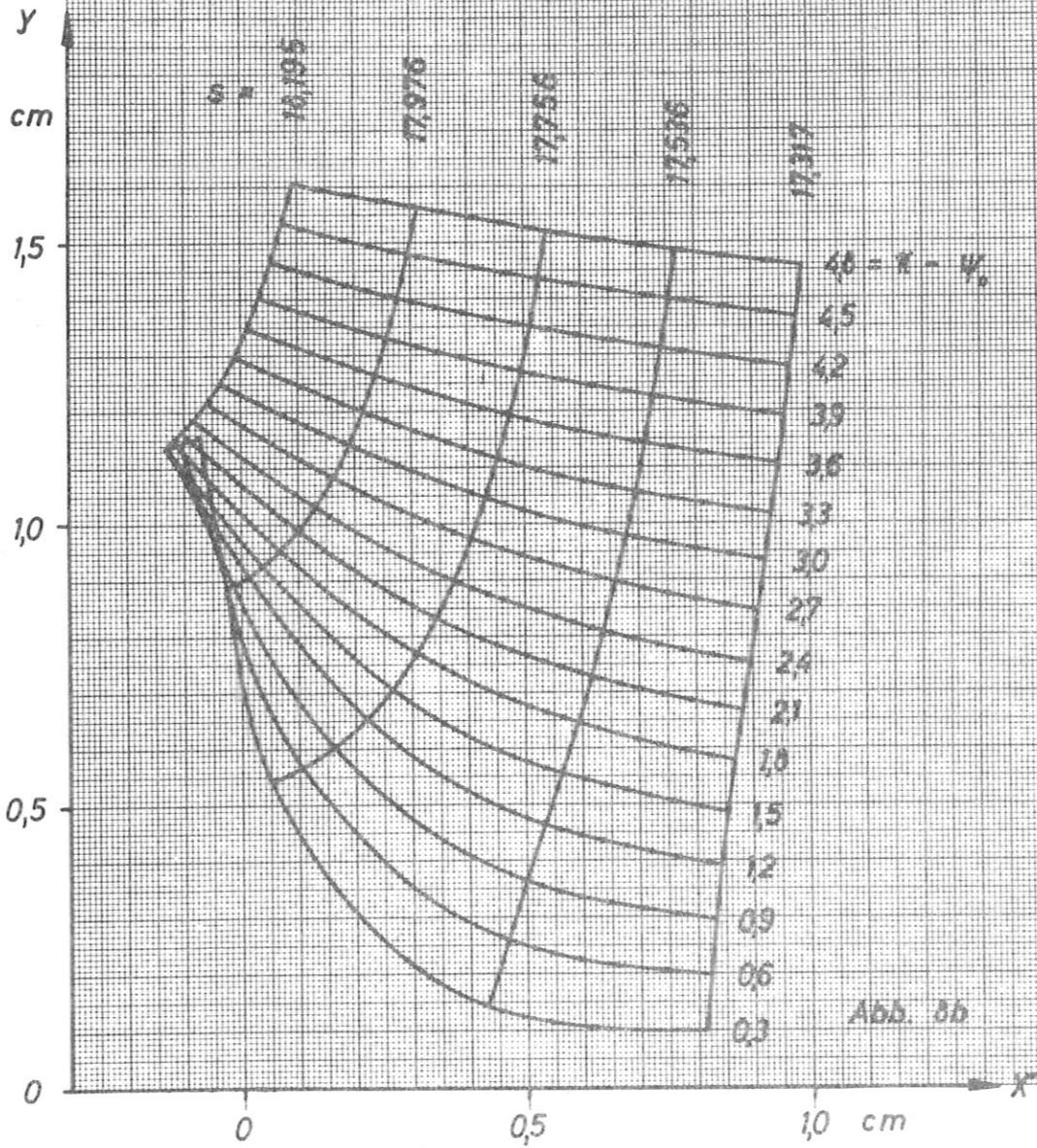


Abb. 5b

$R_0 = 10,25 \text{ cm}$   
 $\omega = 2\pi \cdot 60,3 \text{ GHz}$   
 $\varphi' = 1,0 \text{ cm}$   
 $\beta_0 = 2,72$   
 $s = \text{Parameter, cm}$   
 $\pi - \psi_0 = \text{Parameter, Grad}$

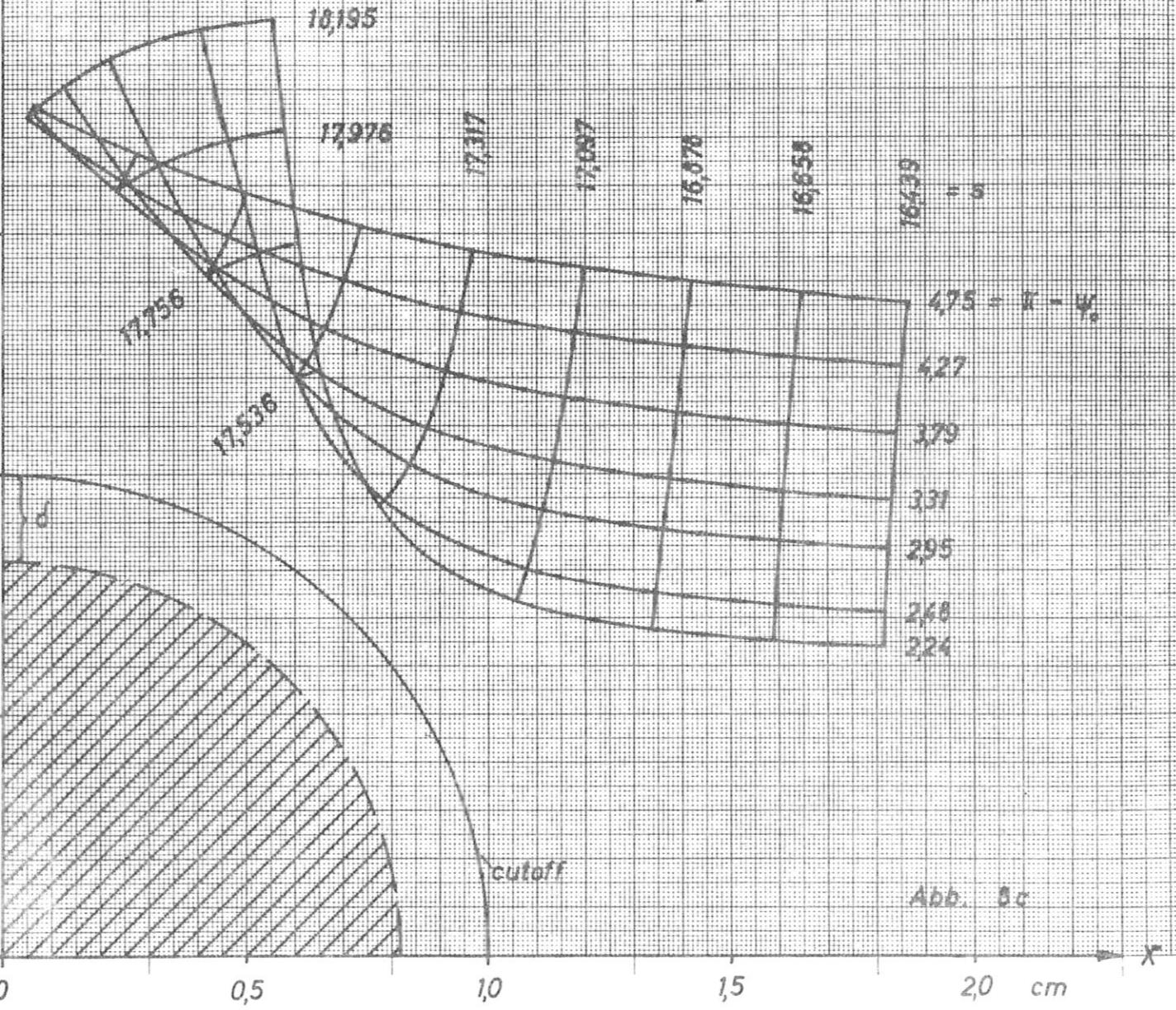


Abb. 8c

$$R_0 = 16,25 \text{ cm}$$

$$\omega = 2 \pi \cdot 68,3 \text{ GHz}$$

$$g' = 0,5 \text{ cm}$$

$$\Delta_0 = 0,5$$

$$s = \text{Parameter, cm}$$

$$\gamma - \psi_0 = \text{Parameter, Grad}$$

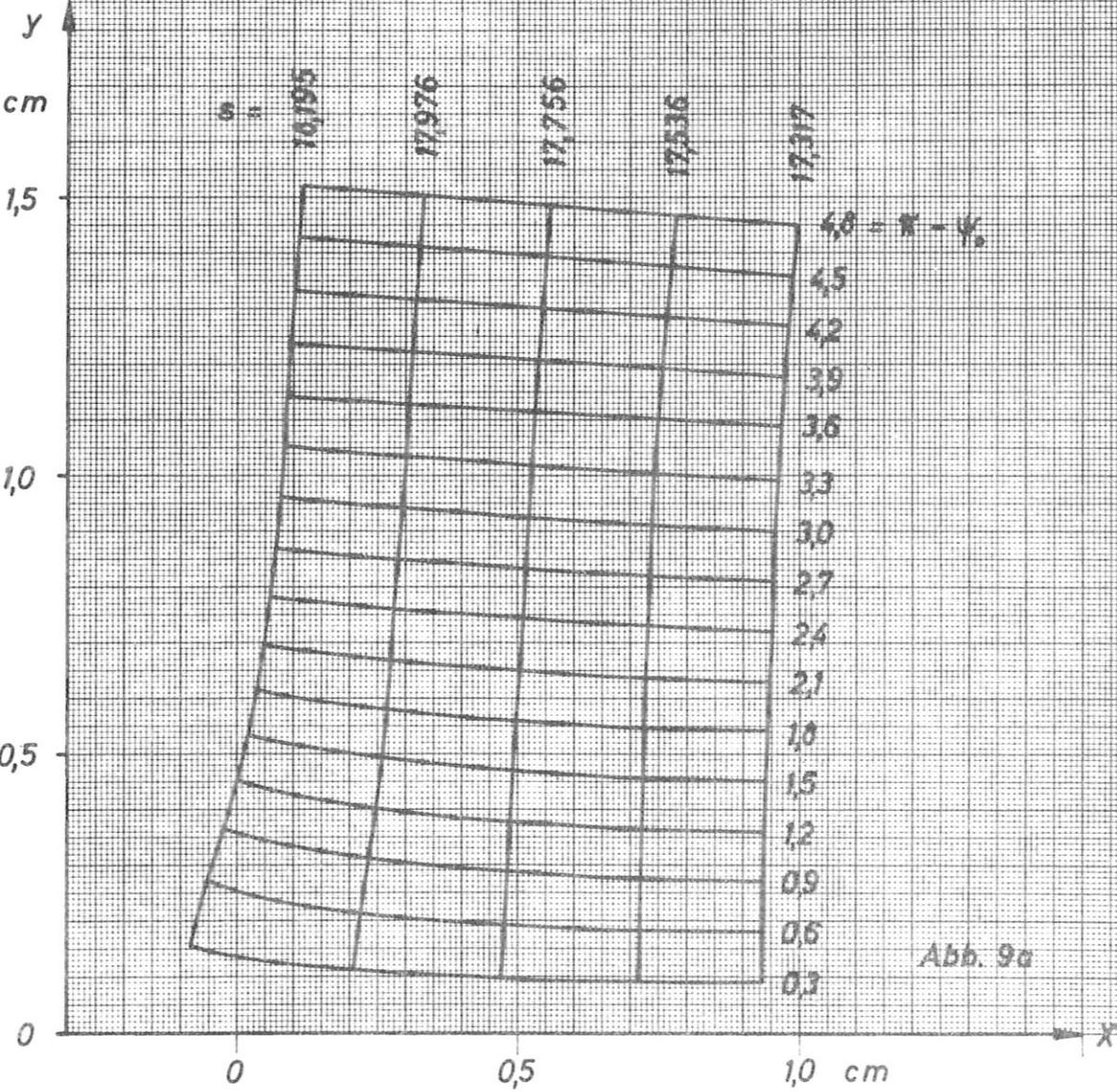


Abb. 9a

$$R_0 = 10,25 \text{ cm}$$

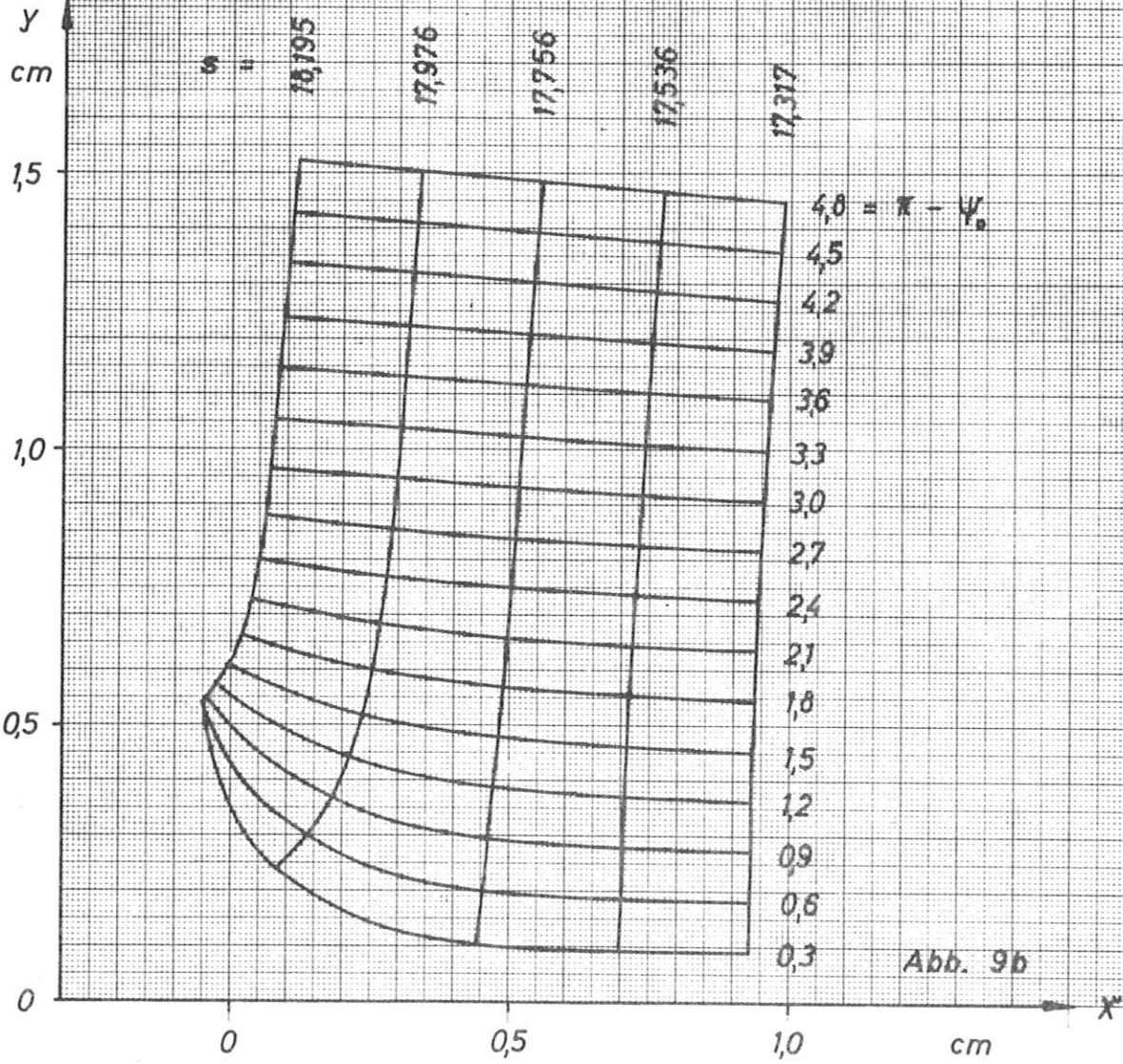
$$\omega = 2\pi \cdot 60,3 \text{ GHz}$$

$$q' = 0,5 \text{ cm}$$

$$n_0 = 1,0$$

$$s = \text{Parameter, cm}$$

$$\kappa - \psi_0 = \text{Parameter, Grad}$$



$$R_0 = 16,25 \text{ cm}$$

$$\omega = 2\pi \cdot 68,3 \text{ GHz}$$

$$q' = 0,5 \text{ cm}$$

$$\theta_0 = 2,72$$

$$s = \text{Parameter, cm}$$

$$\pi - \psi_0 = \text{Parameter, Grad}$$

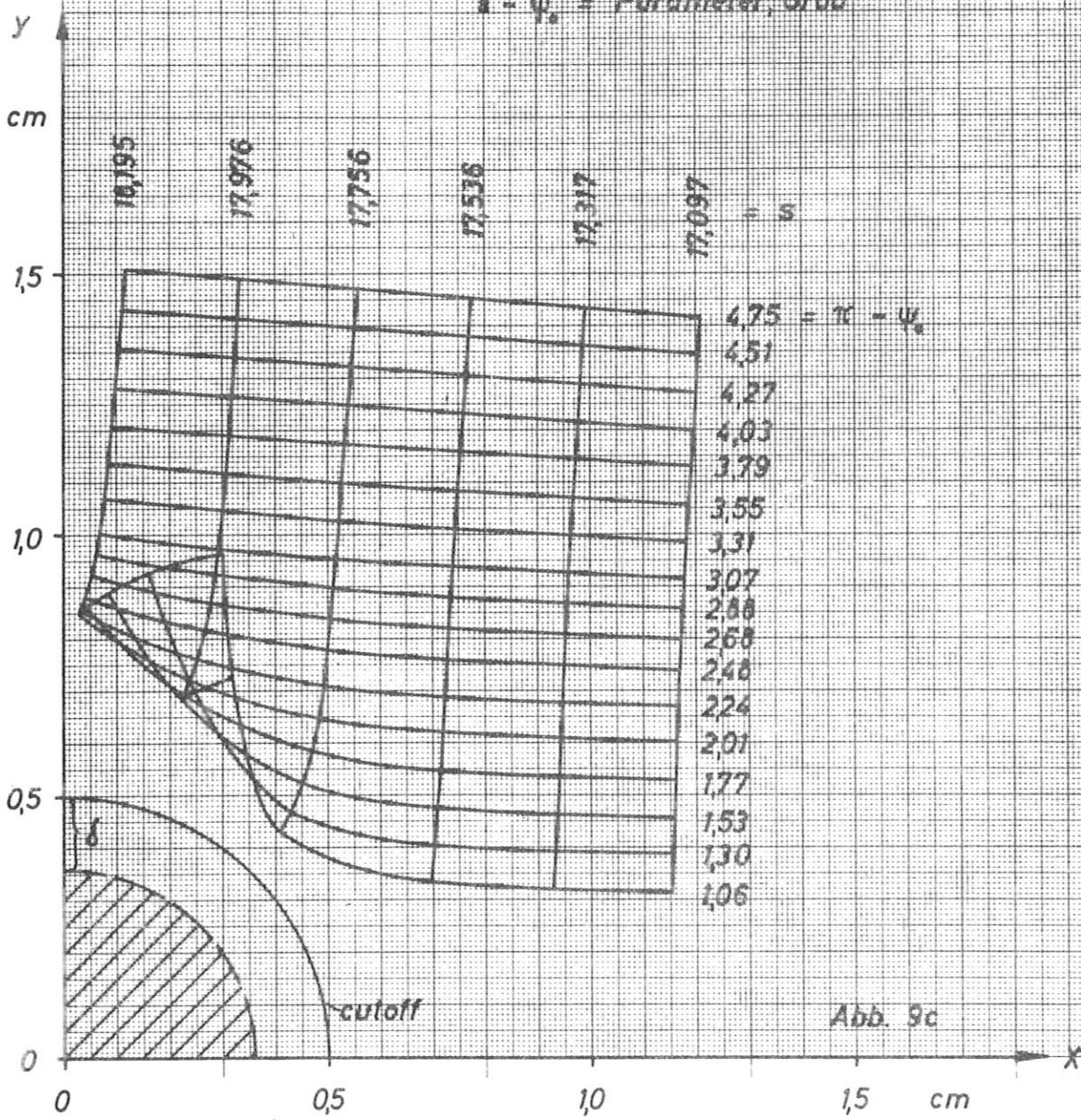


Abb. 9c

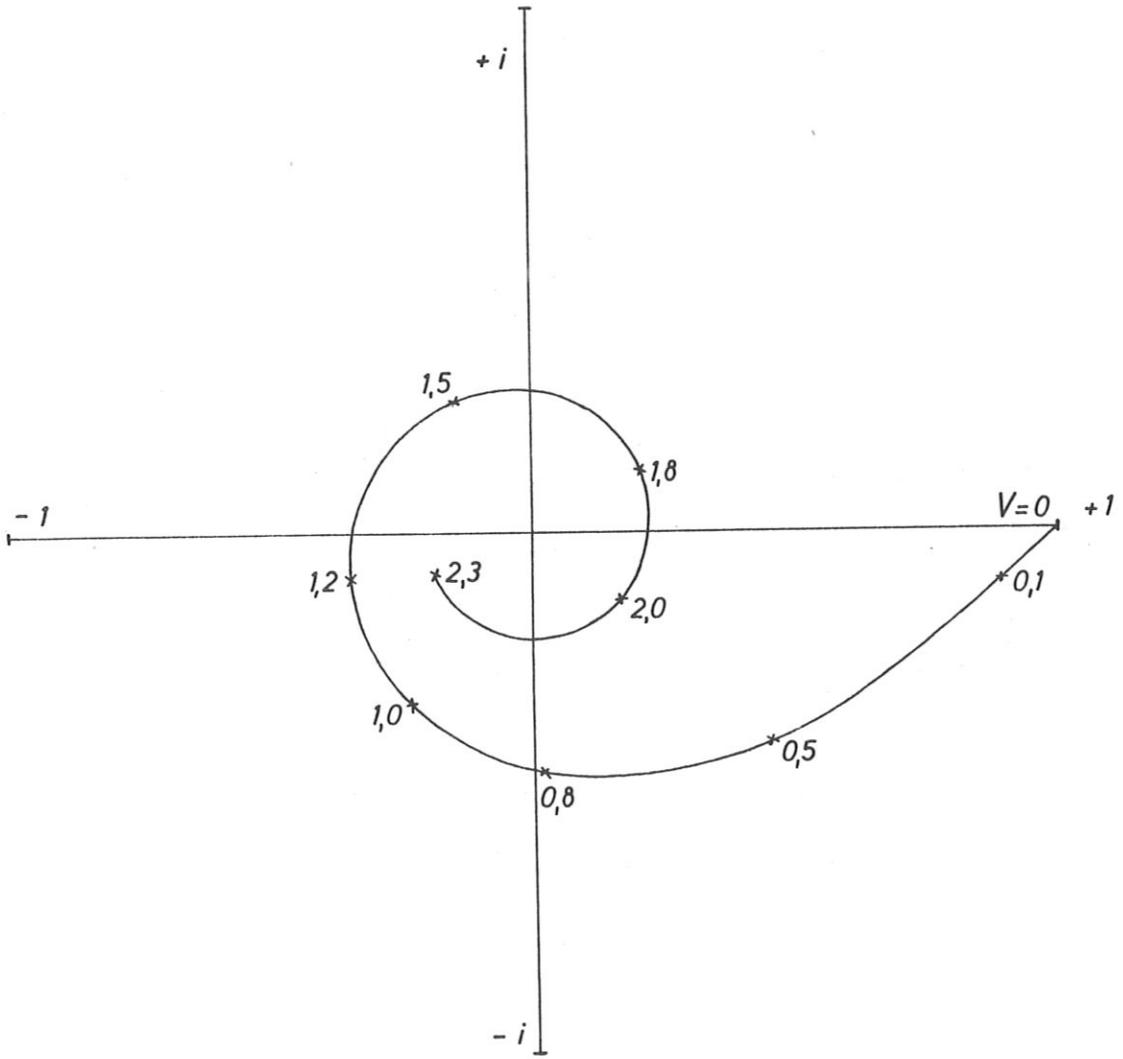


Abb. 12

$$R_0 = \begin{cases} 10,25 \text{ cm} & \text{strahlenoptisch} \\ \rightarrow \infty & \text{wellenoptisch} \end{cases}$$

$$R = 10,75 \text{ cm}$$

$$A = 0,6 \text{ cm}$$

$$\omega = 2\pi \cdot 68,3 \text{ GHz}$$

$$\psi = 180^\circ$$

$$\rho = 1,0 \text{ cm}$$

$$\beta = \text{Parameter}$$

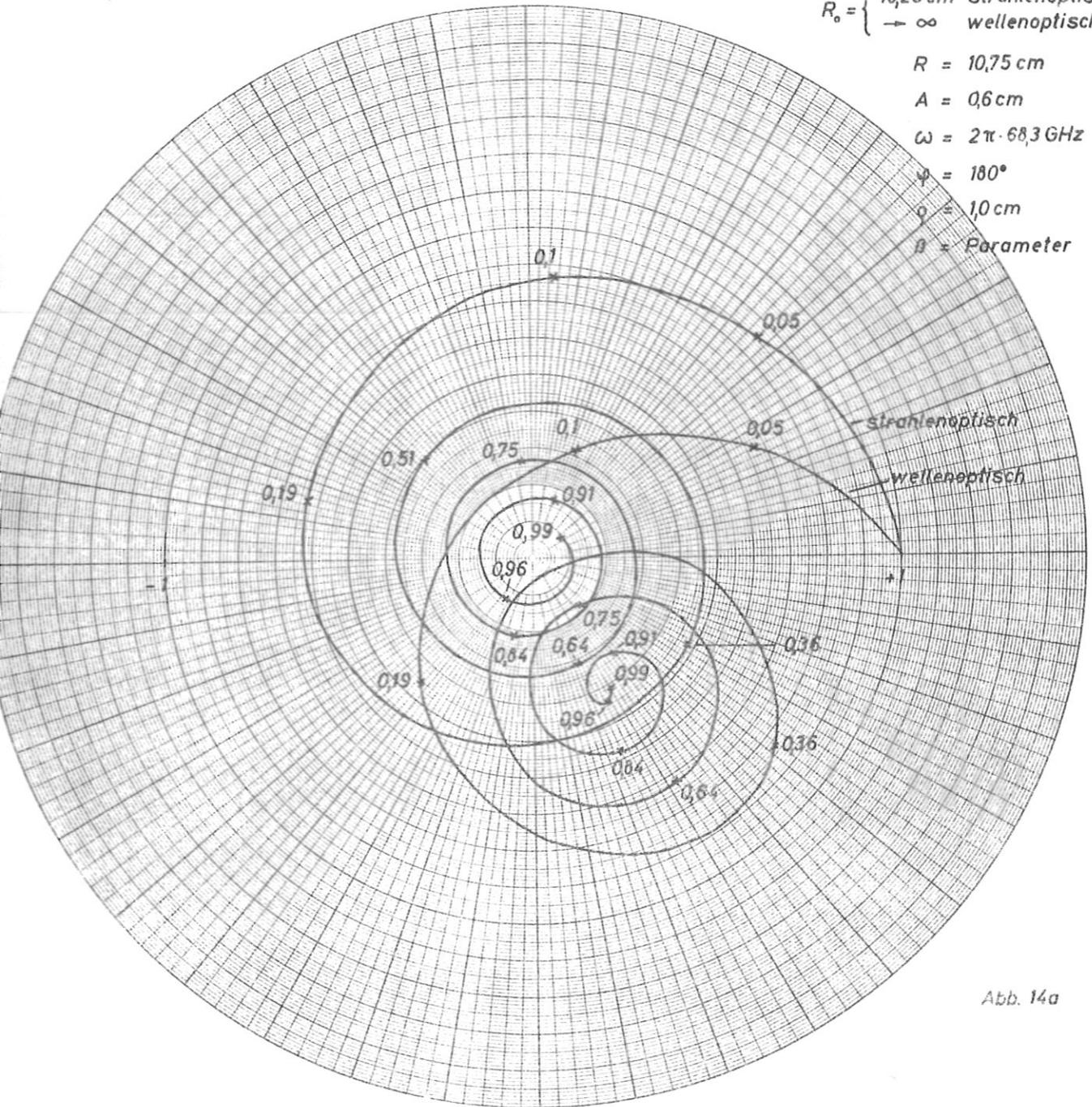


Abb. 14a

$$R_0 = \begin{cases} 10,25 \text{ cm} & \text{strahlenoptisch} \\ \rightarrow \infty & \text{wellenoptisch} \end{cases}$$

$$R = 10,75 \text{ cm}$$

$$A = 0,6 \text{ cm}$$

$$\omega = 2\pi \cdot 60,3 \text{ GHz}$$

$$\varphi = 180^\circ$$

$$g = 0,5 \text{ cm}$$

$$\beta = \text{Parameter}$$

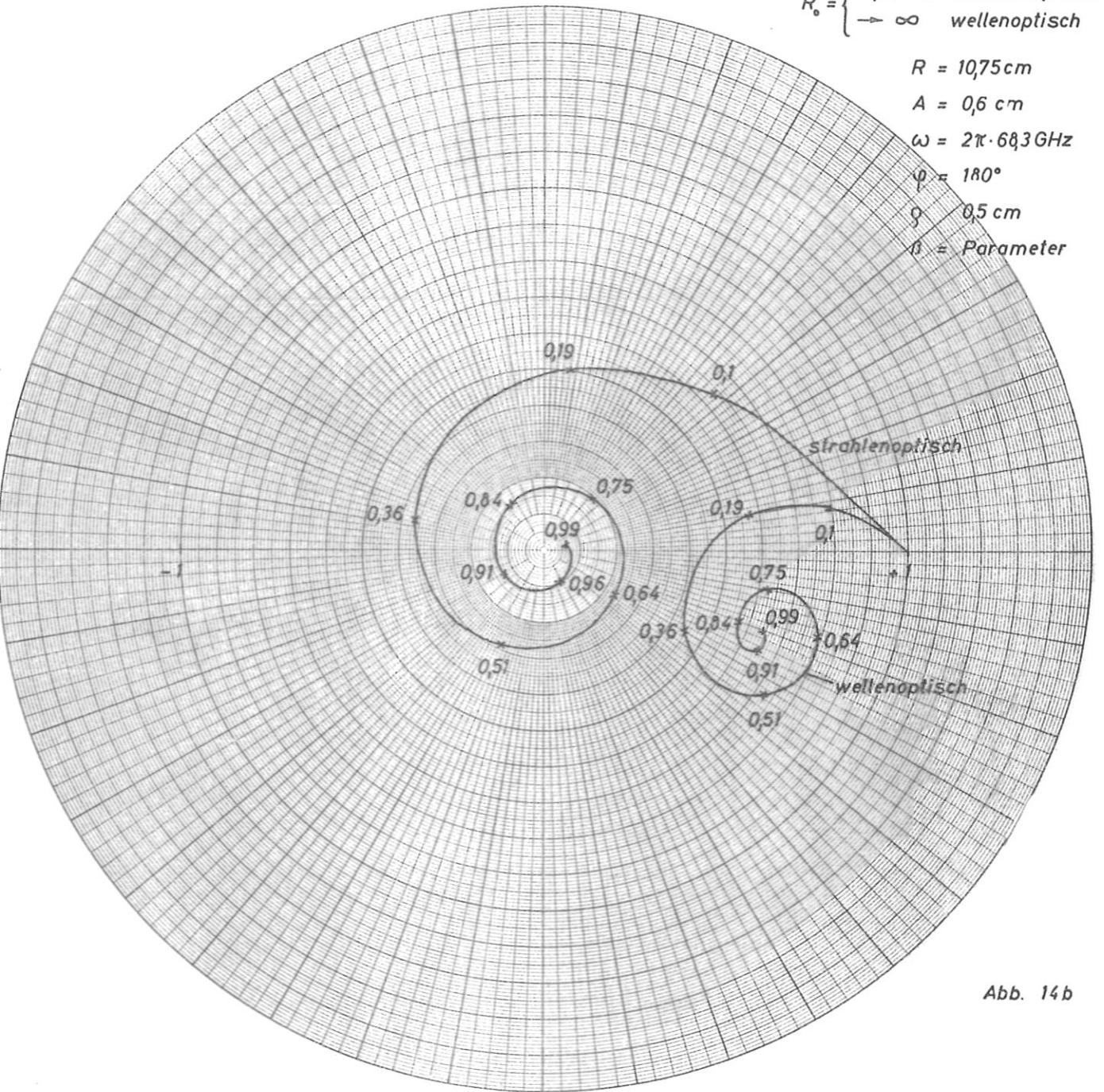


Abb. 14b

$$R_0 = \begin{cases} 18,25 \text{ cm} & \text{strahlenoptisch} \\ \rightarrow \infty & \text{wellenoptisch} \end{cases}$$

$$R = 10,75 \text{ cm}$$

$$A = 0,6 \text{ cm}$$

$$\omega = 2\pi \cdot 68,3 \text{ GHz}$$

$$\psi = 180^\circ$$

$$q = 0,2 \text{ cm}$$

$$\beta = \text{Parameter}$$

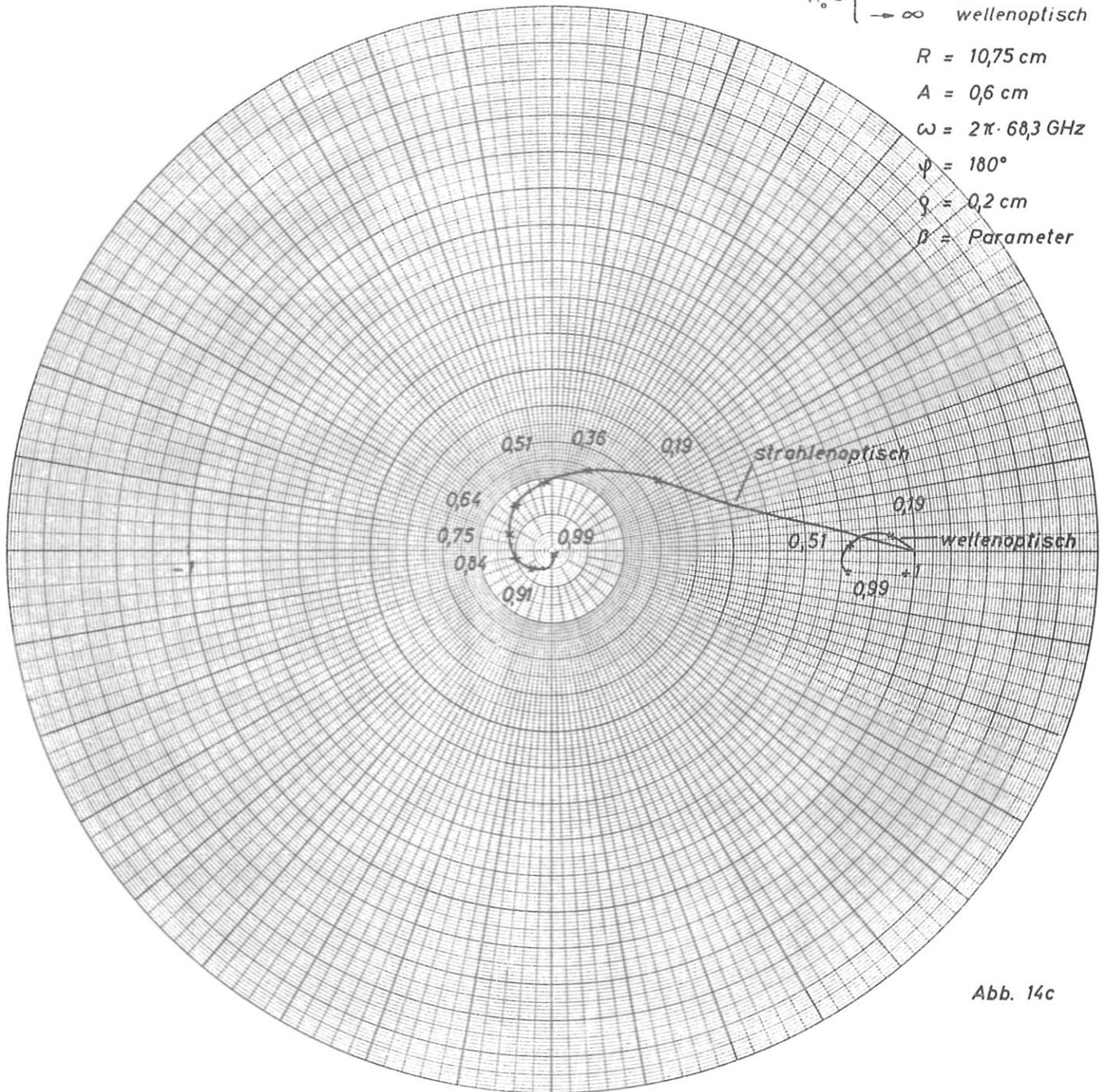


Abb. 14c

$R_0 \rightarrow \infty$   
 $R = 10,75 \text{ cm}$   
 $\omega = 2\pi \cdot 60,3 \text{ GHz}$   
 $q = 1,0 \text{ cm}$   
 $\beta = \text{Parameter}$

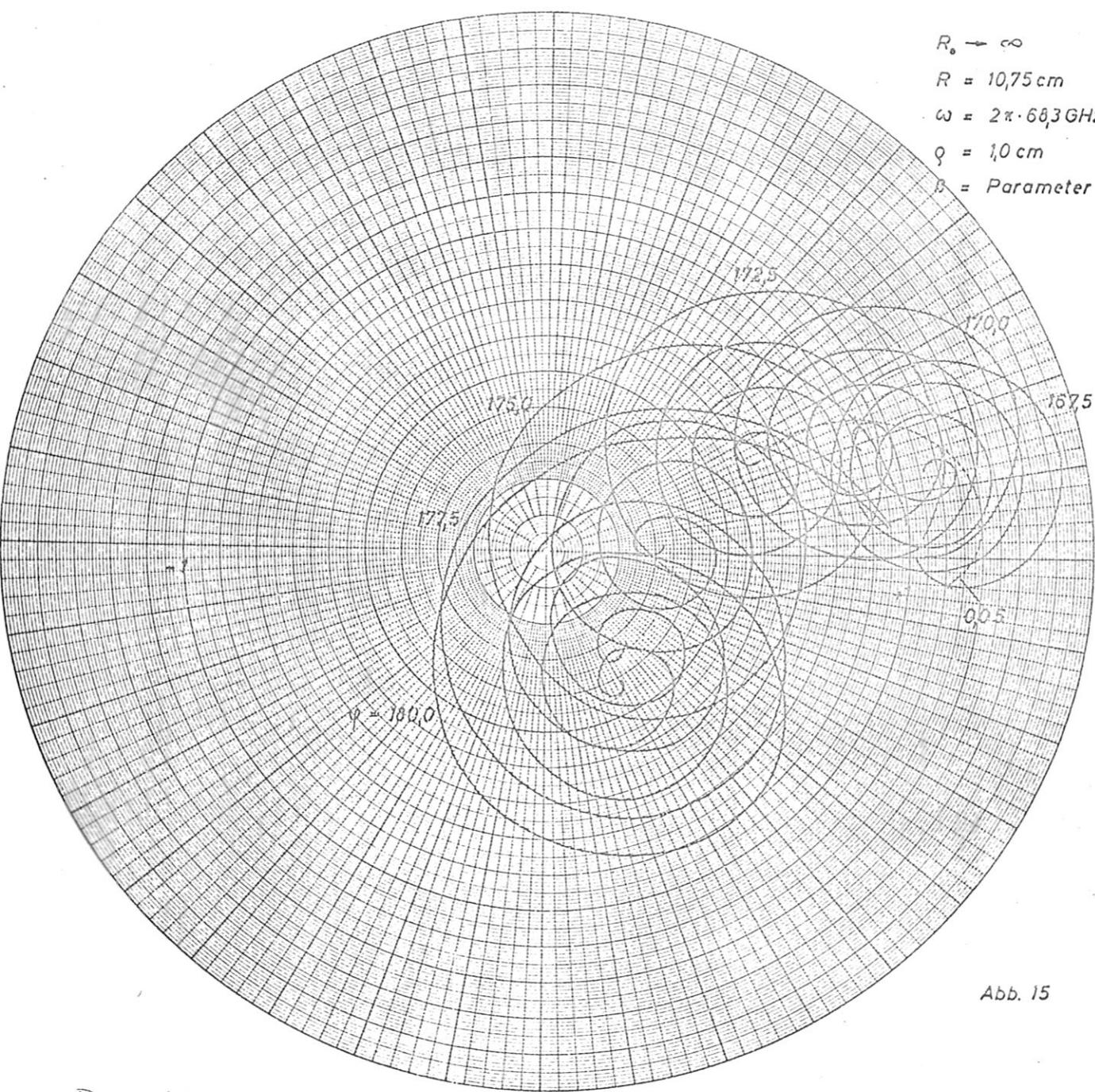


Abb. 15

$$R_o \rightarrow \infty$$

$$R = 10,75 \text{ cm}$$

$$\omega = 2\pi \cdot 60,3 \text{ GHz}$$

$$\theta = 90^\circ$$

$\rho$  = Parameter

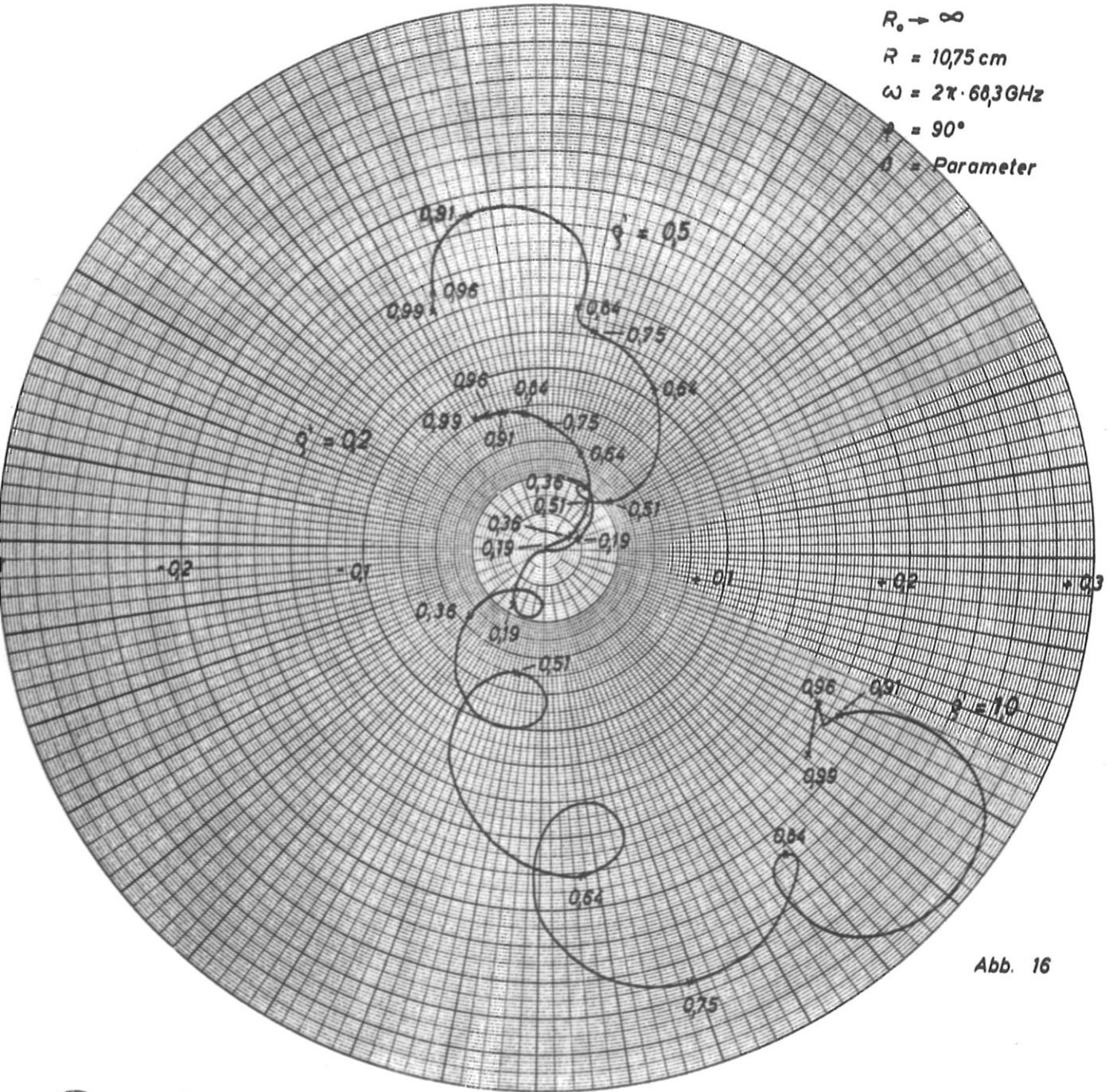


Abb. 16

$R_0 \rightarrow \infty$   
 $R = 10,75 \text{ cm}$   
 $\omega = 2\pi \cdot 60,3 \text{ GHz}$   
 $\psi = 0^\circ$   
 $\beta = \text{Parameter}$

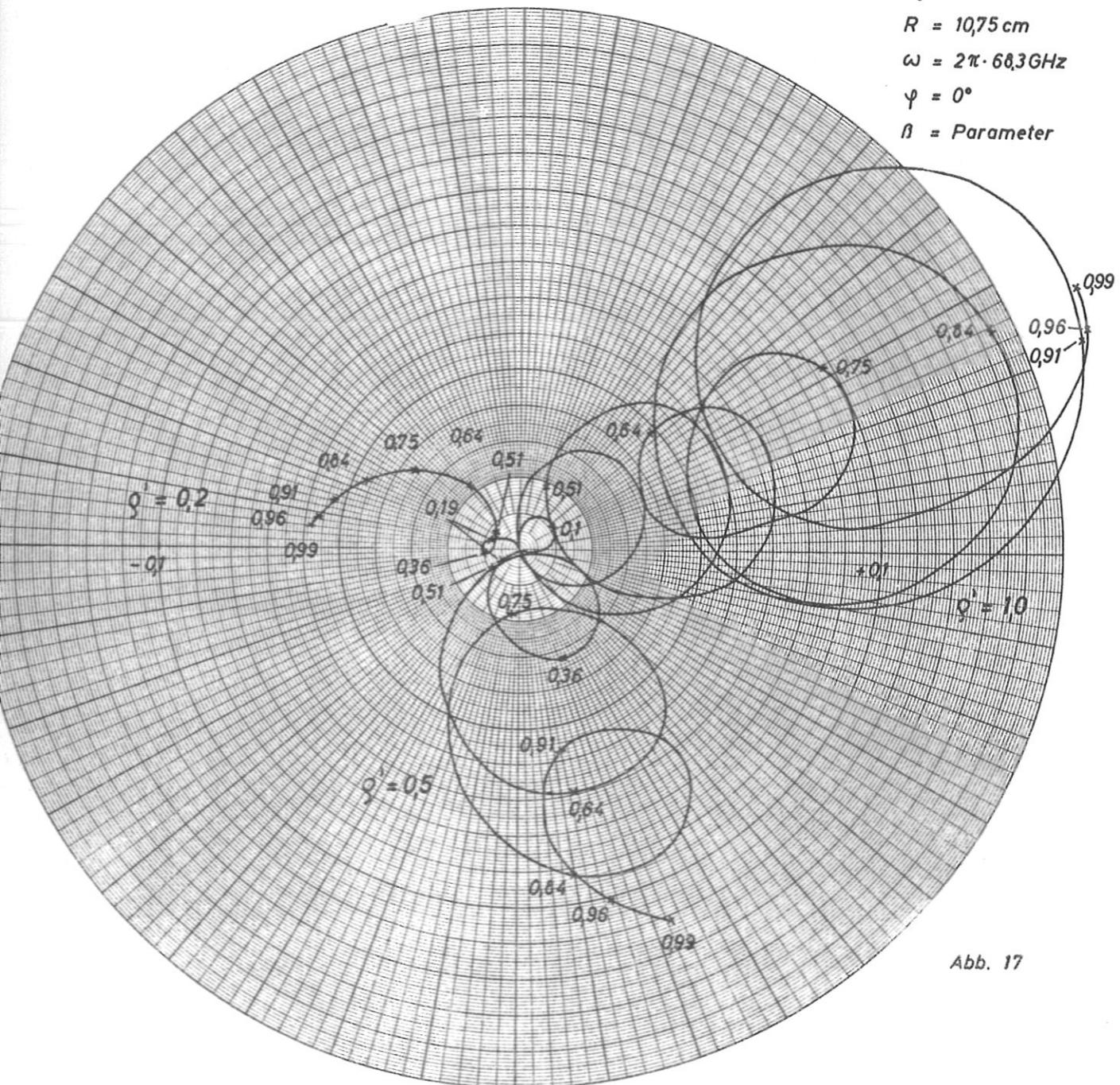
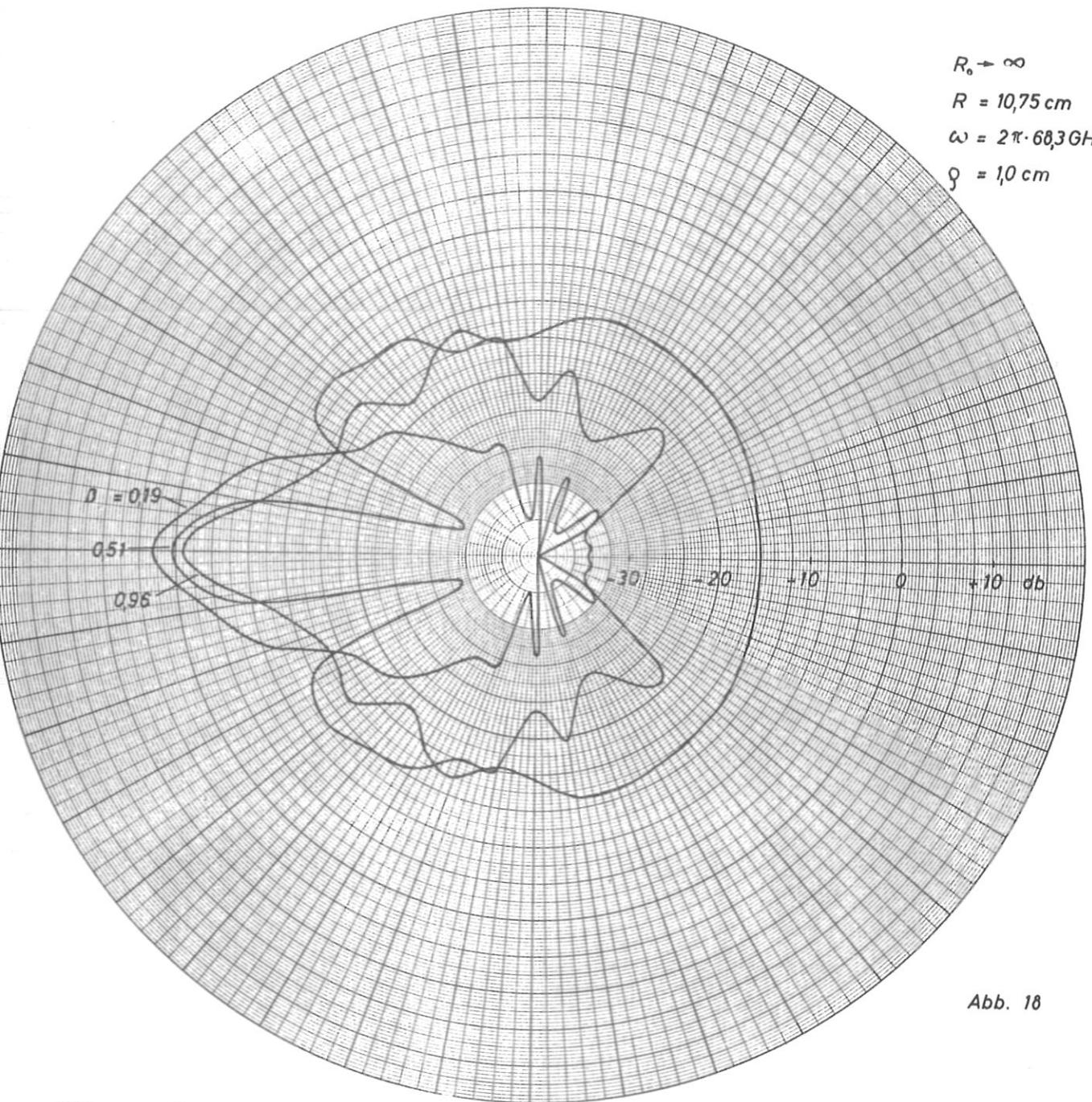


Abb. 17



$R_0 \rightarrow \infty$   
 $R = 10,75 \text{ cm}$   
 $\omega = 2\pi \cdot 60,3 \text{ GHz}$   
 $g = 1,0 \text{ cm}$

Abb. 18

$$R_0 = \begin{cases} 18,25 \text{ cm} & \text{strahlenoptisch} \\ \rightarrow \infty & \text{wellenoptisch} \end{cases}$$

$$R = 10,75 \text{ cm}$$

$$A = 0,6 \text{ cm}$$

$$\omega = 2\pi \cdot 68,3 \text{ GHz}$$

$$\phi = 180^\circ$$

$$\rho = 10 \text{ cm}$$

$$\beta_0 = \text{Parameter}$$

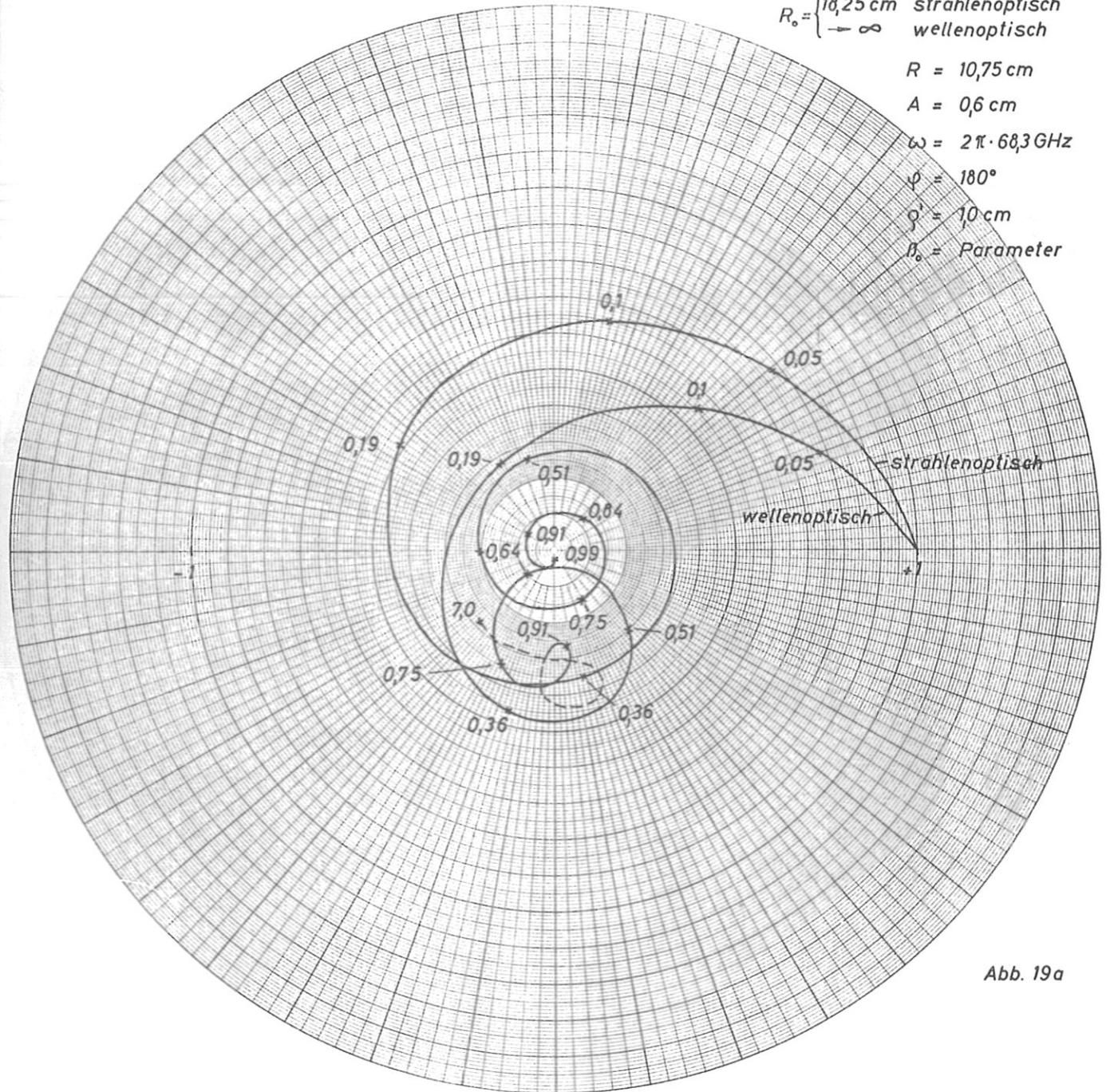


Abb. 19a

$$R_0 = \begin{cases} 18,25 \text{ cm} & \text{strahlenoptisch} \\ \rightarrow \infty & \text{wellenoptisch} \end{cases}$$

- $R = 10,75 \text{ cm}$
- $A = 0,6 \text{ cm}$
- $\omega = 2\pi \cdot 68,3 \text{ GHz}$
- $\varphi = 180^\circ$
- $\varphi' = 0,5 \text{ cm}$
- $\beta_0 = \text{Parameter}$

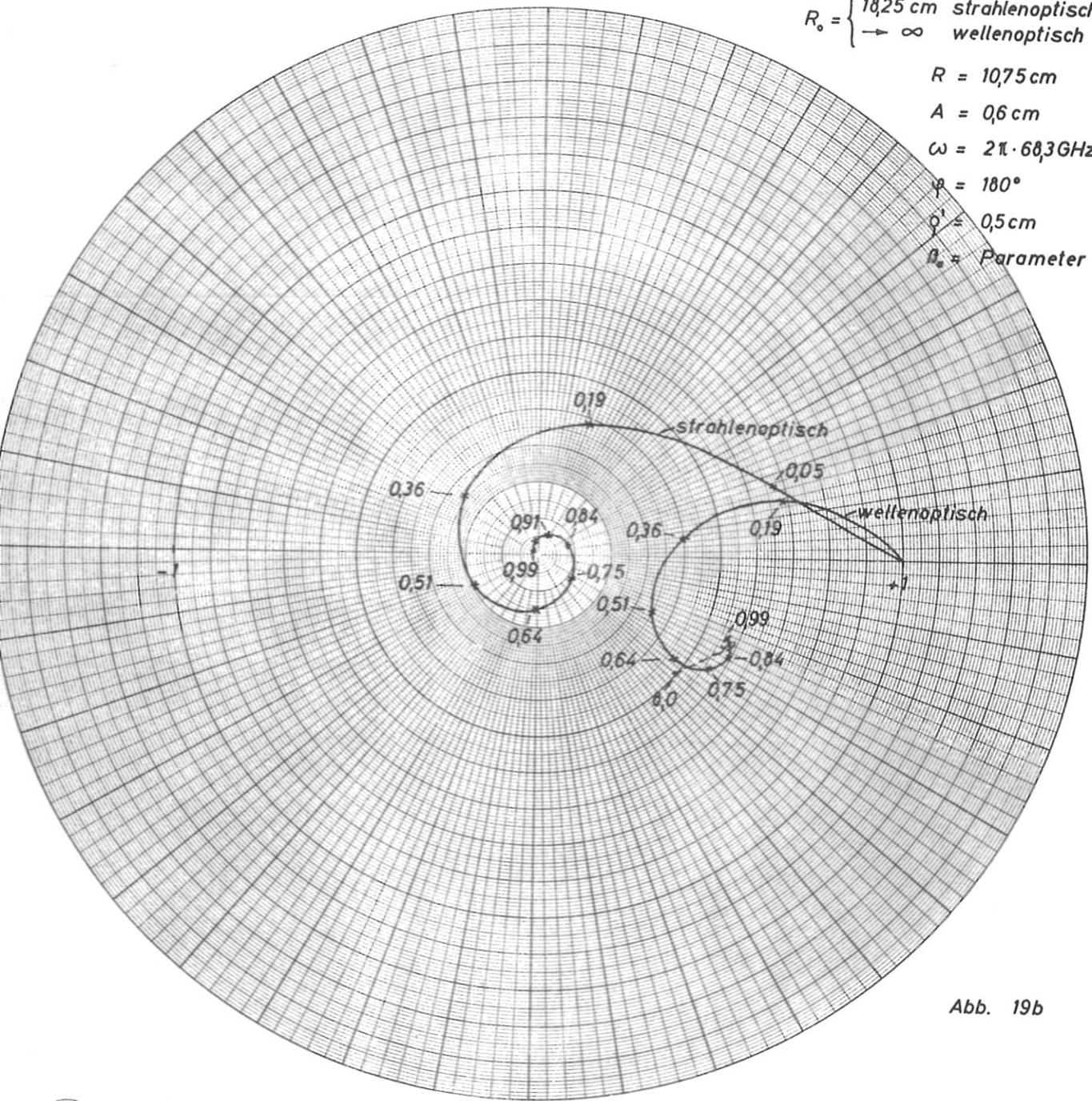


Abb. 19b

$$R_0 = \begin{cases} 10,25 \text{ cm} & \text{strahlenoptisch} \\ \rightarrow \infty & \text{wellenoptisch} \end{cases}$$

$$R = 10,75 \text{ cm}$$

$$A = 0,6 \text{ cm}$$

$$\omega = 2\pi \cdot 60,3 \text{ GHz}$$

$$\psi = 180^\circ$$

$$g' = 0,2 \text{ cm}$$

$$B_0 = \text{Parameter}$$

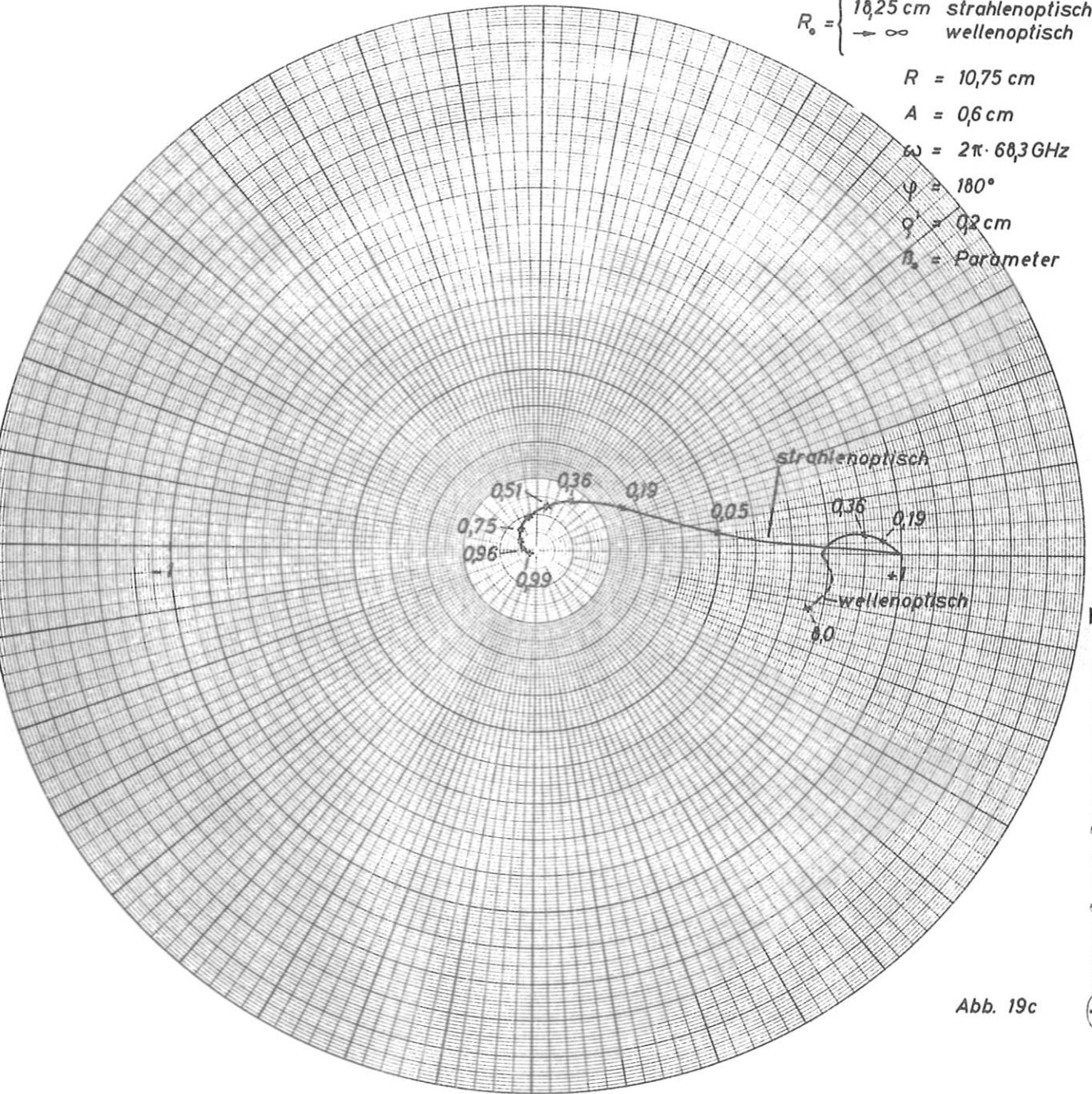


Abb. 19c

$R_0 \rightarrow \infty$   
 $R = 10,75 \text{ cm}$   
 $\omega = 2\pi \cdot 68,3 \text{ GHz}$   
 $Q' = 1,0 \text{ cm}$   
 $\beta_0 = \text{Parameter}$

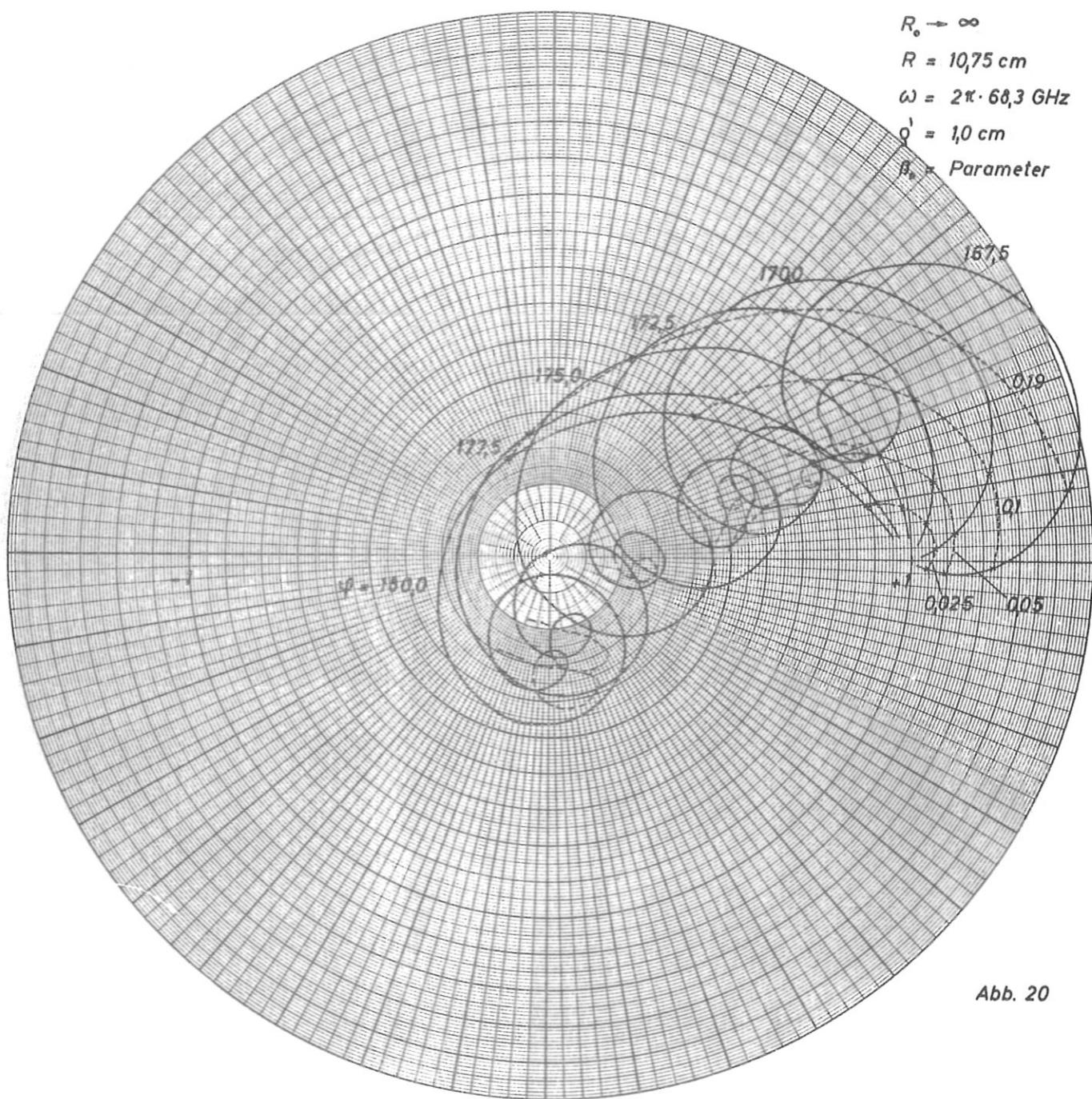


Abb. 20

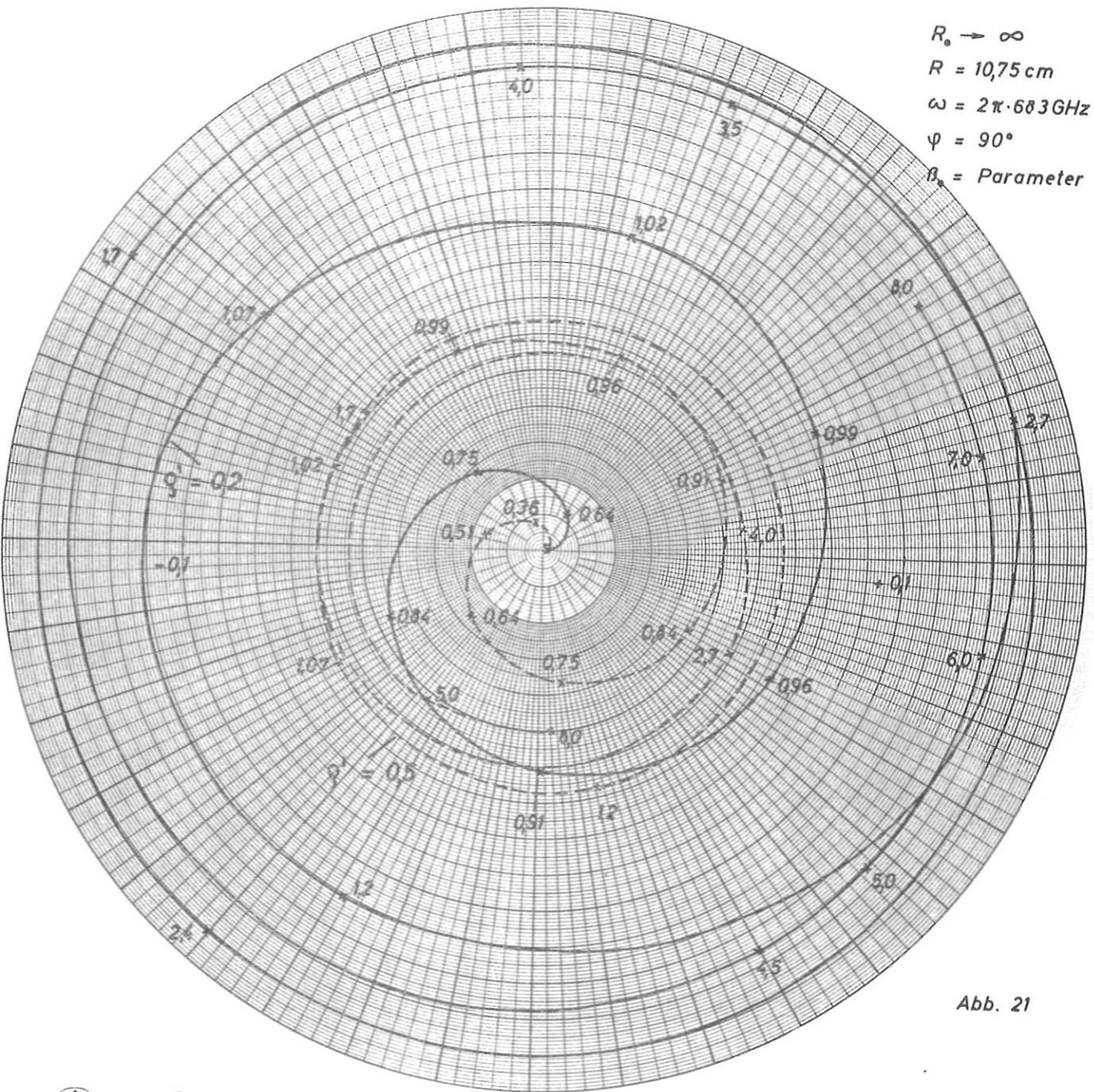


Abb. 21

$R_0 \rightarrow \infty$   
 $R = 10,75 \text{ cm}$   
 $\omega = 2\pi \cdot 68,3 \text{ GHz}$   
 $\varphi = 0^\circ$   
 $q' = 0,5 \text{ cm}$   
 $\Pi_0 = \text{Parameter}$

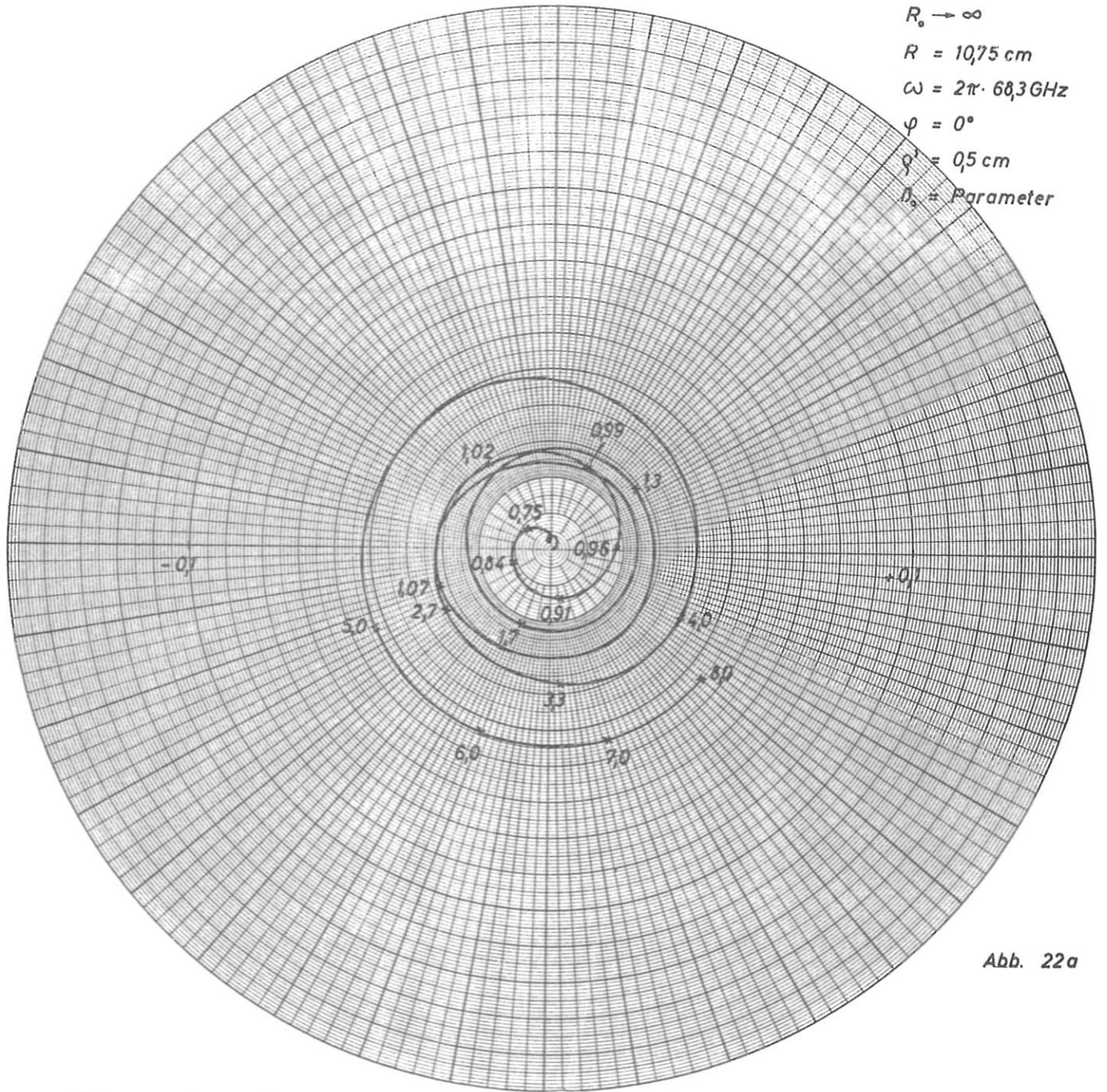


Abb. 22a

$R_0 \rightarrow \infty$   
 $R = 10,75 \text{ cm}$   
 $\omega = 2\pi \cdot 68,3 \text{ GHz}$   
 $\psi = 0^\circ$   
 $\varphi' = 0,2 \text{ cm}$   
 $\beta_0 = \text{Parameter}$

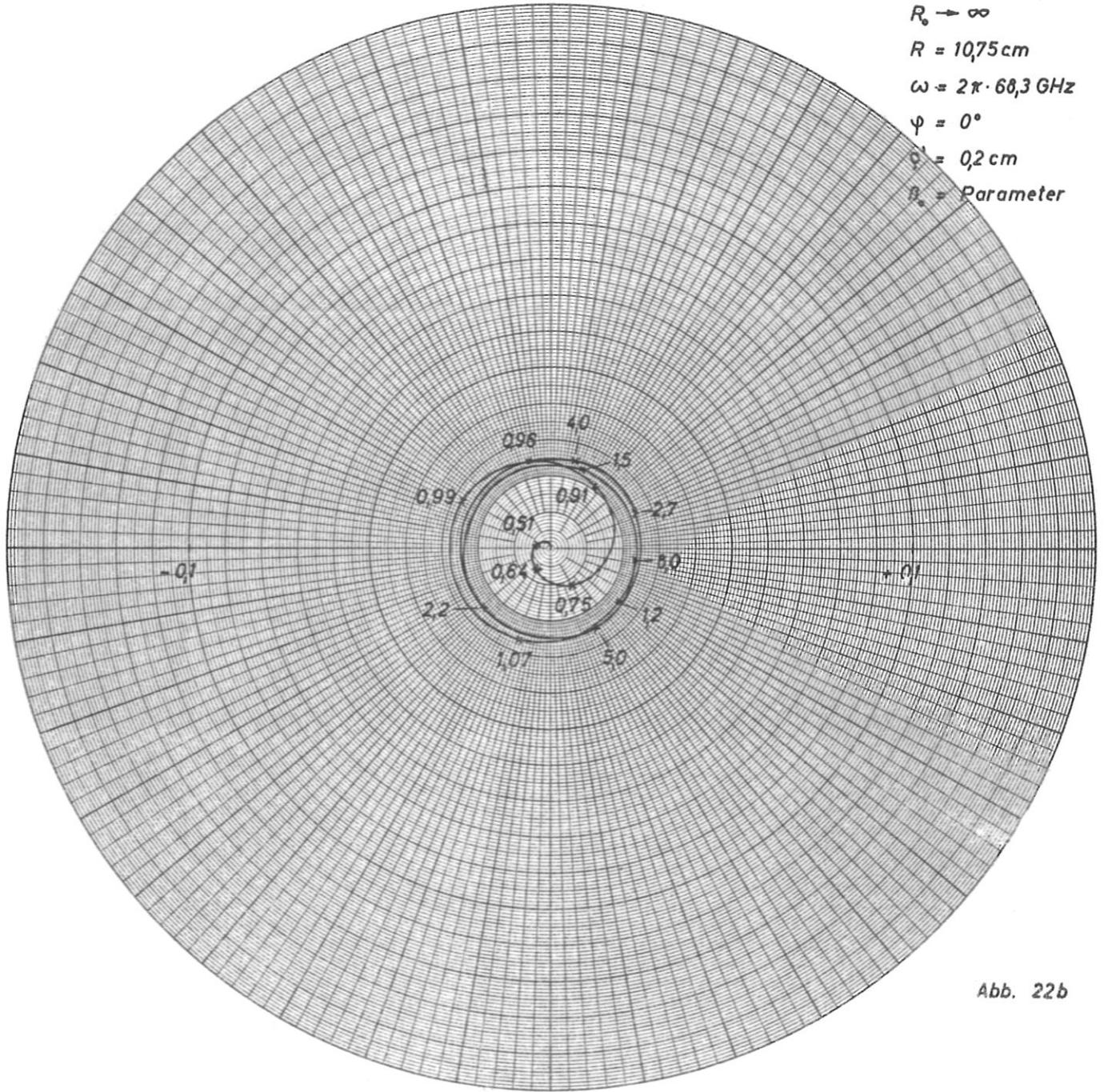


Abb. 22b

$R_0 \rightarrow \infty$   
 $R = 1075 \text{ cm}$   
 $\omega = 2\pi \cdot 68,3 \text{ GHz}$   
 $Q' = 1,0 \text{ cm}$

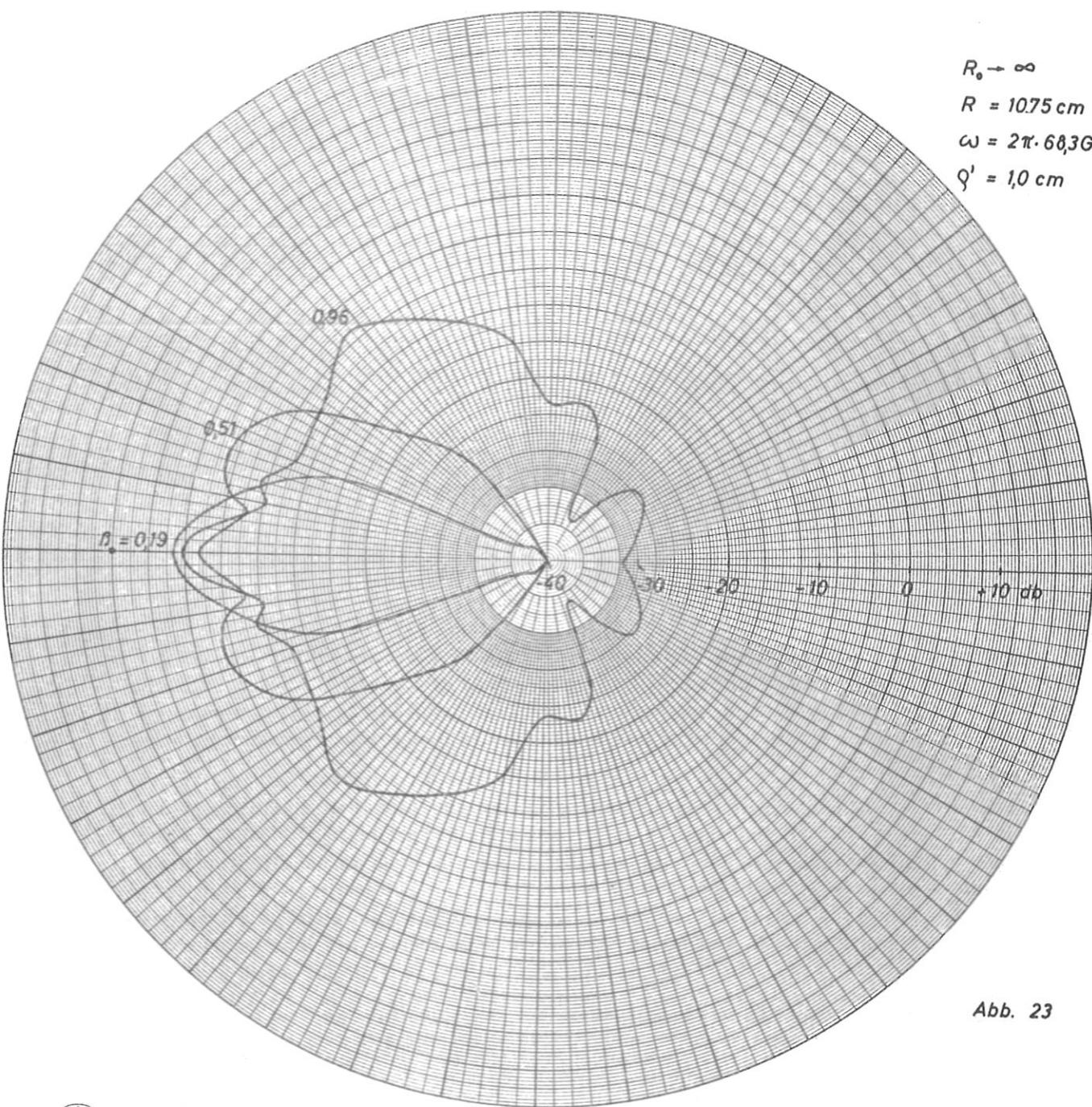


Abb. 23

This report is to be treated as strictly confidential.

The 'Institut für Plasmaphysik' holds the exclusive rights of publication, mimeographing, propagation and translation into foreign languages of the original text, inclusive of the drawings, wholly or partially; also of excerpts or résumés, as well as of the technical or scientific contents of this report. Exceptions to these restrictions require written permission.

Furthermore, the 'Institut für Plasmaphysik' reserves the right of exclusive exploitation of the information contained in this report, for the purpose of obtaining protective industrial rights, particularly patent and utility patent rights at home and abroad. Actions of exploitation taken on the basis of the knowledge gained from this report cannot be regarded as grounds for obtaining the right of prior use ('Vorbenutzungsrecht') according to article 7 paragraph 1, first sentence of the German Patent Law. The reader is referred to article 5 of the Patent Law. For reasons stipulated by the Patent Law, the report must not be exhibited in public libraries, or lent out indiscriminately.

The Institute does not guarantee that the information given in this report is free from protective rights, such as patent rights, utility patent rights or trade-mark rights.

No guarantee is given in respect of the accuracy, completeness or usefulness of the information contained in this report. Thus, no liability can be accepted for damage resulting from use of the information, or of the apparatus, methods and procedures described.