INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Ebene magnetohydrostatische Gleich-
gewichte mit Innenfeld

(Plane magnetohydrostatic equilibria
with interior field)

Rudolf Gorenflo und Arnulf Schlüter

IPP 6/41

August 1965

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
§ 1 Bezeichnungen und Hilfsmittel aus der Funktionentheorie	2
§ 2 Gleichgewichtsbedingungen und Lösungs- methoden	4
§ 3 Der Grenzfall verschwindenden, konstanten Druckes $(0 < p \ll B^2)$	7
§ 4 Der Fall variablen, speziell gegen B^2 sehr kleinen Druckes	17
§ 5 Anhang 1. Detail-Rechnungen zum kon- struierten Gleichgewichtsfeld	23
§ 6 Anhang 2. Beweis der Hilfssätze 1 und 2	28

IPP 6/41

R. Gorenflo
A. SchlüterPlane magnetohydrostatic
equilibria with interior
field,
August, 1965 (in German).

ABSTRACT:

Two-dimensional analogues of toroidal plasma equilibrium configurations with purely meridional electric currents are discussed. The given plane is taken as a cross-sectional plane of a doubly connected cylinder (limiting case of a torus) perpendicular to the plane; all currents flow perpendicular to the plane. Two cases are considered:

- (1) Inside the plasma no currents flow and the pressure p is constant, but $\ll B^2$
- (2) Currents flow inside the plasma as well, the pressure being variable.

In both cases equilibrium is possible when

$q(\psi) = \int \frac{ds}{r(\psi) B}$ has an extremum inside the plasma ($r(\psi)$ being the field line belonging to the value ψ of the flux function of the field B). In case (2) a further condition is that inside the plasma p depends only on q .

§ 1 Bezeichnungen und Hilfsmittel aus der Funktionentheorie.

Ein ebenes Magnetfeld $\mathcal{B}$ läßt sich funktionentheoretisch behandeln. Es sei - in üblicher Bezeichnung - $z = x + iy = re^{i\varphi}$, ein Querstrich über einer Zahl bezeichne das Konjugiert-Komplexe zu ihr. Ein zur z -Ebene paralleles ebenes Magnetfeld $\mathcal{B}$ wird erzeugt durch elektrische Ströme, die die z -Ebene senkrecht durchsetzen und geradlinig vom Unendlichen ins Unendliche fließen. In einem Gebiet, in dem kein Strom fließt, ist das Feld harmonisch, also ¹⁾

$$b(z) = \overline{\mathcal{B}(z)} = \omega'(z)$$

holomorph. Die nicht notwendig eindeutige Funktion $\omega(z)$ ist das komplexe Potential, $u(z) = \operatorname{Re} \omega(z)$ das skalare Potential, $v(z) = \operatorname{Im} \omega(z)$ die Flußfunktion oder einzige, zur z -Ebene senkrechte, Komponente des Vektorpotentials des Feldes $\mathcal{B}$. Die Aequipotentiallinien sind durch $u(z) \equiv \text{const}$, die Feldlinien durch $v(z) \equiv \text{const}$ gegeben. Statt $|\mathcal{B}|$ schreiben wir B .

Wir benötigen zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 1: Γ_0 und Γ_1 seien zwei geschlossene analytische JORDAN-Kurven ²⁾, die ein zweifach zusammenhängendes Gebiet G beranden. Dann gibt es ein harmonisches Vektorfeld $\mathcal{B}(z)$, das Γ_0 und Γ_1 als Feldlinien hat. $\mathcal{B}(z)$ ist auf $G \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ harmonisch und $\neq 0$, kann also über den Rand $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ hinaus harmonisch fortgesetzt werden. Alle Feldlinien sind den Rändern topologisch äquivalent. $\mathcal{B}(z)$ ist bis auf einen Proportionalitätsfaktor eindeutig bestimmt. ³⁾

- 1) Je nach Kontext fassen wir $\mathcal{B}$ als Vektor oder komplexe Zahl auf.
- 2) Eine geschlossene analytische JORDAN-Kurve läßt sich darstellen in der Form $z = z(t)$, t reell, $z(t)$ holomorph, $\dot{z}(t) \neq 0$, $z(t+2\pi) = z(t)$, $z(t_1) \neq z(t_2)$ für $0 < t_2 - t_1 < 2\pi$.
- 3) Felder von der in Hilfssatz 1 angegebenen Art nennen wir "zweifach zusammenhängende Felder".

Hilfssatz 2: H sei eine geschlossene analytische JORDAN-Kurve in der Parameterdarstellung der Fußnote 2). Auf H sei gegeben $\mathcal{L}(z) = k(t) \dot{z}(t)$ mit reellem holomorphen $k(t) \neq 0$. Dann kann $\mathcal{L}(z)$ eindeutig und harmonisch in die Umgebung von H fortgesetzt werden; es gibt also ein zweifach zusammenhängendes Gebiet G , das H im Innern als Feldlinie mit der vorgegebenen Feldstärke $k(t) \dot{z}(t)$ enthält.

Anmerkung zu Hilfssatz 1

Wir nehmen an, der Feldvektor $\mathcal{L}$ zeige längs der Feldlinien in die Richtung positiven Umlaufs und Γ_1 sei der äußere Rand von G . Dann ist die in G von σ unabhängige Zirkulation

$$K = \oint_{\Gamma(\sigma)} du$$

positiv. $\Gamma(\sigma)$ bezeichnet eine beliebige Feldlinie in G .

Wählt man $\sigma=0$ auf Γ_0 und identifiziert man topologisch $\omega+K$ mit ω , so bildet $\omega(z)$ das Gebiet G in $v_1 < v < 0$ ab. Dabei ist $\Gamma_1 = \Gamma(\sigma_1)$. Man vgl. Figur 1.

Die Beweise der beiden Hilfssätze werden im Anhang 2 (§ 6) gebracht.

Figur 1

§ 2 Gleichgewichtsbedingungen und Lösungsmethoden.

MEYER und SCHMIDT behandelten torusartige Plasma-Konfigurationen ohne Innenfeld, GORENFLO, MERKEL und STUNTZ entsprechende ebene Analoga ([2], [3], [4], [5], [6], [7]). Hier sollen ebenfalls ebene Konfigurationen betrachtet werden, es wird aber zugelassen, daß auch im Plasma ein Magnetfeld existiert.

Im zweifach-zusammenhängenden Plasmagebiet G soll konstanter Druck p herrschen, Ströme sollen nur an den analytischen Rändern Γ_0 und Γ_1 fließen, und zwar die z -Ebene senkrecht durchsetzend. Die Analogie zu torusartigen Anordnungen besteht darin, daß man sich die Plasma-Oberfläche in unendlicher Entfernung von der z -Ebene geschlossen zu denken hat. Es gibt zwei

Figur 2

plasmafreie Außengebiete, nämlich G_0 , berandet von Γ_0 , und G_1 , berandet von Γ_1 . Der Punkt $z = \infty$ soll im Innern von G_1 liegen. Man vergleiche Figur 2. In G_0 und G_1 herrscht der Druck $p = 0$.

Wenn $p > 0$ in G , so hat man drei Felder, nämlich

$\mathcal{L}(z)$ in G , $\mathcal{L}_0(z)$ in G_0 , $\mathcal{L}_1(z)$ in G_1 .
 Γ_0 ist Feldlinie von $\mathcal{L}_0$ und $\mathcal{L}$, Γ_1 ist Feldlinie von $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}_1$. Wir nehmen an, daß die Feldvektoren an den Rändern in die Richtung mathematisch-positiven Umlaufs zeigen. Mit $\Gamma(\sigma)$ sei die zum Wert σ der Flußfunktion gehörende Feldlinie von $\mathcal{L}$ bezeichnet. Der elektrische Strom durch Γ_1 fließt nach oben, der durch Γ_0 nach unten (in Bezug auf die z -Ebene).

Damit Gleichgewicht herrscht, muß die Sprungbedingung für das Magnetfeld am Plasma-Rand erfüllt sein.

Damit der betrachtete ebene Fall als Modell für einen Torus im früher besprochenen Sinn dienen kann, muß ferner der gesamte auf Γ_0 fließende Oberflächenstrom genau durch den entgegengesetzten Strom auf Γ_1 kompensiert werden. In Formeln:

$$(S)^* \quad \frac{1}{2} (B_m^2 - B^2) = p \quad \text{längs } \Gamma_m, \quad m=0, 1,$$

$$(B) \quad \int_{\Gamma_1} B_1 ds = \int_{\Gamma_0} B_0 ds.$$

Mit s wird die Bogenlänge, wachsend in positivem Umlaufsinn, bezeichnet. (B) ergibt sich daraus, daß die Oberflächenstromdichte proportional zur Differenz der Tangentialfeldstärken ist, also aus

$$\int_{\Gamma_1} (B_1 - B) ds = \int_{\Gamma_0} (B_0 - B) ds,$$

wenn man beachtet, daß $\int_{\Gamma(\sigma)} B ds$ von σ unabhängig ist.

Gleichgewichtskonfigurationen erhält man für solche einschließenden Feldlinien Γ_0 und Γ_1 , für die (S) und (B) sich erfüllen lassen. Aus (S) ergeben sich die Randfeldstärken B_m der Außenfelder, die sich nach Hilfssatz 2

*) Unser p entspricht in nichtrationalen elektrostatischen Einheiten $4\pi p$ und in MKSA-Einheiten $\mu_0 p$.

harmonisch fortsetzen lassen. Die Singularitäten und Verzweigungsschnitte in G_m oder auch passende Feldlinien, längs derer man das Feld "abschneidet", bestimmen die Außenströme, die, zusammen mit den Oberflächenströmen, die gesamte Feldkonfiguration $\{\mathcal{L}_0, \mathcal{L}, \mathcal{L}_1\}$ bestimmen.

Da längs des Randes $B = du/ds$ ist, folgt aus (S) und (B) die notwendige Bedingung

$$(B1) \quad \int_{\Gamma_1} \sqrt{(du)^2 + 2p(ds)^2} = \int_{\Gamma_0} \sqrt{(du)^2 + 2p(ds)^2}.$$

Um einzusehen, daß (B1) auch hinreichend ist, braucht man nur $B_m = \sqrt{2p + B^2}$ längs Γ_m zu nehmen.

(B1) ist eine rein geometrische Bedingung. Nach Hilfssatz 1 ist ja $\mathcal{B}(z)$ durch die Gestalt des Gebiets G bis auf einen Proportionalitätsfaktor λ eindeutig bestimmt. Ist (B1) für gegebenes G erfüllbar, so hängt dieser Faktor λ von p ab: bei Ersetzung von p durch αp ist λ durch $\sqrt{\alpha} \lambda$ zu ersetzen.

(B1) ist entartet erfüllbar, wenn Γ_0 und Γ_1 gleiche Länge haben. Man kann dann $u \equiv 0$, also $\mathcal{L} \equiv 0$, $B_m = \sqrt{2p}$ nehmen. Dies ist der von GORENFLO, STUNTZ und MERKEL behandelte Fall innenfeldfreien Plasmas.

Physikalisch interessant ist auch der andere Grenzfall $p \rightarrow 0$, $0 < p \ll B^2$, der in § 3 behandelt werden soll.

Durch Angabe eines Beispiels zeigen wir, daß (B1) im Falle $p > 0$ nicht für jedes beliebige Paar $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ erfüllbar ist. Ist

$$\Gamma_m = \{|z| = R_m\}, \quad 0 < R_0 < R_1,$$

so ist auf Γ_m mit $K > 0$

$$\sqrt{2p + B^2} = \sqrt{2p + (K/(2\pi R_m))^2},$$

die Integrale in (B1) haben also die voneinander verschiedenen Werte $\sqrt{2p(2\pi R_m)^2 + K^2}$.

§ 3 Der Grenzfall verschwindenden, konstanten Druckes ($0 < p \ll B^2$)

Wir betrachten noch einmal den Fall zweier konzentrischer Kreise als Plasma-Rand. Sei also

$$\Gamma_0 = \{|z|=1\}, \quad \Gamma_1 = \{|z|=R\}, \quad R > 1, \quad \mathcal{L}(z) = \frac{ie^{i\varphi}}{r} = i/\bar{z},$$

also

$$B = 1 \text{ längs } \Gamma_0, \quad B = 1/R \text{ längs } \Gamma_1.$$

Gemäß (5) ist längs Γ_1 bzw. Γ_0

$$B_1 = \sqrt{R^{-2} + 2p} \quad \text{bzw.} \quad B_0 = \sqrt{1 + 2p}.$$

In passenden Einheiten gemessen ist also

$$j_1 = \sqrt{R^{-2} + 2p} - R^{-1} \quad \text{die Stromdichte längs } \Gamma_1,$$

$$j_0 = 1 - \sqrt{1 + 2p} \quad \text{die Stromdichte längs } \Gamma_0.$$

Mithin sind

$$I_1 = 2\pi R j_1 = (\sqrt{1 + 2p R^2} - 1) 2\pi,$$

$$|I_0| = 2\pi |j_0| = (\sqrt{1 + 2p} - 1) 2\pi$$

die entsprechenden Gesamtströme. Man sieht, daß durch Γ_0 zu wenig Strom fließt. Nur mit $p = j_m = 0$ sind die Bedingungen erfüllt. Es gibt auch keine zu Γ_0 und Γ_1 benachbarten Feldlinien des Feldes $\mathcal{L}$, mit denen bei zwar sehr kleinem, aber immer noch positivem p die Bedingung (B1) erfüllt wäre.

Plausibel ist, daß man durch geeignete Verbeulung der inneren Kurve Γ_0 und entsprechende Veränderung des Feldes $\mathcal{L}$ das Erfülltsein von (B1) für $p > 0$ erzwingen kann. Dadurch wird nämlich, bei Festhalten der Zirkulation $\int_{\Gamma(v)} du$, das Stückchen ds auf Γ_0 , auf dem u

um du wächst, i.a. größer, während sich auf Γ_1 im Mittel nichts ändert. Die explizite Durchführung dieser Idee ist aber wohl ziemlich schwierig.

An dieser Stelle sei bemerkt, daß trivialerweise (B1) im Falle $p = 0$ für jedes Paar von Feldlinien eines zweifach zusammenhängenden Feldes erfüllt ist. Dieser Fall ist aber uninteressant. Wir fragen vielmehr, ob in der positiven Nachbarschaft von $p = 0$ die Bedingung (B1) erfüllbar ist. Das Beispiel zweier konzentrischer Kreise zeigt, daß es Felder gibt, für die zwar (B1) mit $p = 0$, aber mit keinem $p > 0$ erfüllbar ist.

Wir beweisen deshalb durch Konstruktion konkreter Felder den

Existenz-Satz: Es gibt zweifach zusammenhängende Gebiete G^* mit analytischen Randkurven derart, daß gilt: Zu festem Feld $\mathcal{L}$ in G^* mit den Randkurven als Feldlinien gibt es zu hinreichend kleinem positivem

$$p \ll \inf_{z \in G^*} B^2$$

ein Paar geschlossener Feldlinien Γ_0 und Γ_1 , mit denen die notwendige und hinreichende Bedingung (B1) erfüllt ist.

Zum Beweis betrachten wir auf Feldlinien $\Gamma(v)$ eines zweifach zusammenhängenden Feldes $\mathcal{L}$ das Differential

$$d\tau := \left((du)^2 + 2p (ds)^2 \right)^{1/2}.$$

Es ist

$$\frac{d\tau}{ds} = (B^2 + 2p)^{1/2} = B + \frac{p}{B} + c_2 p^2 B^{-3} + \dots,$$

also

$$F(v, p) := \int_{\Gamma(v)} d\tau = \int_{\Gamma(v)} B ds + p \int_{\Gamma(v)} \frac{ds}{B} + \dots$$

Da $\int_{\Gamma(\sigma)} B \, ds \equiv K$, müssen wir zeigen, daß es zweifach zusammenhängende Felder gibt, in denen

$$q(\sigma, p) := \frac{1}{p} \{ F(\sigma, p) - K \} = q(\sigma) + a_1(\sigma)p + a_2(\sigma)p^2 + \dots$$

für zwei verschiedene Werte σ den gleichen Wert annimmt. $q(\sigma, p)$ ist in der Umgebung von $p=0$ holomorph in p , ferner holomorph in einem Intervall der reellen Variablen σ . Es ist

$$q(\sigma) := q(\sigma, 0) = \int_{\Gamma(\sigma)} \frac{ds}{B}.$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen (z.B. [8], Seite 362) gilt nun:

Ist $q(\sigma_0) = A$ und $q'(\sigma_0) \neq 0$, so existiert in der Umgebung von $p=0$ eine eindeutige stetige Lösung $\sigma = \sigma(p)$ der Gleichung $q(\sigma, p) = A$. Für $p \rightarrow 0$ geht $\sigma \rightarrow \sigma_0$. In anderen Worten: Ist $\Gamma(\sigma_0)$ eine Feldlinie, auf der $\int_{\Gamma(\sigma_0)} \frac{ds}{B} = A$ ist, so liegt unter der Bedingung

$$\frac{d}{d\sigma} \int_{\Gamma(\sigma)} \frac{ds}{B} \neq 0, \quad \sigma = \sigma_0,$$

in der Nachbarschaft von $\Gamma(\sigma_0)$ eine Feldlinie $\Gamma(\sigma)$, auf der $\int_{\Gamma(\sigma)} d\tau = pA + K$ ist, sofern

nur p hinreichend klein ist.

Wesentlich für die Anwendbarkeit des Satzes über implizite Funktionen ist die Abspaltung des konstanten Gliedes

$$F(\sigma, 0) = \int_{\Gamma(\sigma)} B \, ds = K.$$

Wegen $\partial F(\sigma, 0) / \partial \sigma = 0$ ist er auf $F(\sigma, p)$ nicht anwendbar. Zwar ist jedes Paar von Feldlinien eines zweifach zusammenhängenden Feldes Lösung von (B1) für $p=0$, es gibt aber (wie im Fall zweier konzentrischer Kreise gezeigt wurde) in der Umgebung solcher Feldlinien

nicht notwendigerweise Feldlinien als Gleichgewichtsränder für irgendein $p > 0$.

Der ausgesprochene Existenz-Satz verlangt nun noch den Nachweis, daß es zweifach zusammenhängende Felder gibt, für die es ein Paar $\{\sigma_0, \sigma_1\}$ gibt derart, daß

$$(B2) \quad q(\sigma_0) = q(\sigma_1), \quad \sigma_0 \neq \sigma_1, \quad q'(\sigma_0) \neq 0, \quad q'(\sigma_1) \neq 0$$

erfüllbar ist. Wir nennen (B2) die linearisierte Gleichgewichtsbedingung. Ein Feld dieser Art ist aber jedes zweifach zusammenhängende Feld, in dessen Innerem $q(\sigma)$ ein relatives Extremum (das auch ∞ sein darf) annimmt. Wir geben ein solches Feld an.

$\mathcal{G}$ sei erzeugt durch n gerade, stromdurchflossene Drähte, die die z -Ebene in den Punkten

$$z_k = e^{2\pi i k/n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

senkrecht durchsetzen. Es sei $n \geq 2$. Die n Ströme seien gleich stark und positiv. Das zugehörige komplexe Potential ist (in passenden Einheiten)

$$\omega(z) = -i \sum_{k=0}^{n-1} \log(z - z_k) = -i \log(z^n - 1).$$

Daraus folgt

$$\overline{\mathcal{G}}(z) = b(z) = -\frac{i n z^{n-1}}{z^n - 1},$$

$$\sigma(z) = -\log |z^n - 1|.$$

Dieses Feld ist $(n+1)$ -fach zusammenhängend, außerhalb der Nullfeldlinie $\sigma=0$ zweifach zusammenhängend. Die Nullfeldlinie enthält den neutralen Punkt $z=0$, in dem $\mathcal{G}$ verschwindet; sie hat dort die $2n$ Tangentenrichtungen $\varphi = \pm \frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi k}{n}$. Für $\sigma < 0$

Figur 3
Der Fall $n=4$ des Gleichgewichtsfeldes

sind die Feldlinien geschlossen, für $v \rightarrow -\infty$ werden sie immer kreisartiger, bei $|z| \rightarrow \infty$ geht $v \rightarrow -\infty$. Für $v > 0$ zerfallen die Feldlinien in n getrennte geschlossene Kurven, deren jede einen Draht umschlingt. Die Teilkurven werden für $v \rightarrow +\infty$ immer kreisartiger und ziehen sich auf die Drähte als Zentren zusammen.

Auf der Nullfeldlinie $v=0$ gilt bei $z \rightarrow 0$

$$B \sim n r^{n-1}, \quad ds \sim dr, \quad \frac{ds}{B} \sim \frac{dr}{n r^{n-1}}, \quad r \rightarrow 0.$$

Also ist $q(0) = \infty$. Für $0 < |v| < \infty$ ist

$$0 < q(v) < \infty. \quad \text{Bei } v \rightarrow -\infty \text{ ist } B \sim n/r(v),$$

also $q(v) \sim \frac{2\pi}{n} r^2(v) \rightarrow \infty$; bei $v \rightarrow +\infty$ ist

$$B \sim 1/g(v) \text{ mit } g = g(v) \rightarrow 0, \text{ also } q(v) \sim n \cdot 2\pi g^2 \rightarrow 0.$$

Figur 4

Skizze der Funktion $q(v)$ für $n=4$

Bei $\nu=0$ hat $q(\nu)$ das Maximum ∞ , zwischen 0 und $-\infty$ liegt ein relatives positives Minimum. Figur 4 gibt qualitativ den Verlauf. Am Ende dieses Paragraphen zeigen wir, daß stets $q''(\nu) > 0$, $q(\nu)$ also überall (außer an Unendlichkeitsstellen) konvex ist.

Für $A > \min_{\nu < 0} q(\nu)$ hat die Gleichung $q(\nu) = A$ stets 3 Lösungen ν_1, ν_0, ν_2 , und es ist für diese $q'(\nu) \neq 0$. Sie seien gemäß $\nu_1 < \nu_0 < 0 < \nu_2$ geordnet.

Figur 5
Feldlinien für $n=4$, $q(\nu)=3$;
 $\nu_1 \approx -1,18$, $\nu_0 \approx -0,24$, $\nu_2 \approx 0,114$

Im Grenzfall $p \rightarrow 0$ kommt als zweifach zusammenhängendes Plasmagebiet G in Frage das Gebiet $v_0 > v > v_1$. Damit ist der Beweis des Existenzsatzes vollständig erbracht. Man könnte aber auch das $(n+1)$ -fach zusammenhängende Gebiet $v_2 > v > v_0$ nehmen, da die bisher durchgeführten Überlegungen sich auf diesen komplizierteren Fall übertragen lassen. Im Innern dieses Gebiets hat $q(v)$ ein relatives Maximum (nämlich ∞), was aus Stabilitätsgründen erwünscht ist. Man vergleiche Figur 5.

Einige Detail-Rechnungen zu diesem Modell sind ausführlich im Anhang (§ 5) durchgeführt.

Anmerkung 1: Die linearisierte Gleichgewichtsbedingung (B2) läßt sich auch so gewinnen:

Macht man, für $0 < p \ll B^2$, den Ansatz $B_m = B + b_m$ mit den kleinen Zusatzfeldern b_m auf den Γ_m , so gilt dort nach (S) mit $b_m = |b_m|$ die Beziehung

$$2p = B_m^2 - B^2 = (B + b_m)^2 - B^2 = 2B b_m + b_m^2 \sim 2B b_m,$$

also

$$B_m - B = b_m \sim p/B \quad \text{längs } \Gamma_m.$$

Die Strombilanzbedingung

$$\int_{\Gamma_0} b_0 ds = \int_{\Gamma_1} b_1 ds$$

liefert in der gleichen Näherung

$$\int_{\Gamma_0} \frac{ds}{B} \sim \int_{\Gamma_1} \frac{ds}{B}.$$

Leider liefern die Zusatzfelder b_0 und b_1 ebenfalls Singularitäten in G_0 und G_1 , die i.a. von den Singularitäten der harmonischen Fortsetzung von B verschieden sind. Dies ist unangenehm im Fall des konstruierten Beispielfeldes, in dem B nur isolierte

Wirbel (gerade stromdurchflossene Drähte) hat. Die durch die zusätzlichen Singularitäten fließenden Ströme nehmen wir bei $p \ll B^2$ und damit $|t_m| \ll B$ als vernachlässigbar an.

Anmerkung 2: Aus Stabilitätsgründen wäre es wünschenswert, ein zweifach zusammenhängendes Feld zu haben, in dessen Innerem $q(r)$ ein relatives Maximum annähme.

Daß dies leider unmöglich ist, besagt der folgende

Satz: Es gibt kein zweifach zusammenhängendes harmonisches Feld $\mathcal{L}$, in dessen Innerem

$$q(r) = \int_{\Gamma(r)} \frac{ds}{B}$$

ein relatives Maximum annimmt.

Den folgenden Beweis dieses Satzes hat uns Herr H. Wobig^{*)} mitgeteilt.

Da $\mathcal{L}(z)$ nach Hilfssatz 1 im Inneren eines zweifach zusammenhängenden Feldes nirgends verschwindet, ist dort $q(r)$ überall endlich. Ein vorhandenes relatives Maximum müßte also endlich sein. Wie wir sehen werden, ist aber im Innern stets $q''(r) \geq 0$, also $q(r)$ stets konvex; ein endliches relatives Maximum kann also nicht existieren.

Zunächst formen wir $q(r)$ um. Längs $\Gamma(r)$ ist

$$\frac{ds}{B} = \frac{|dz|}{|w'(z)|} = \frac{|dw|}{|w'(z)|^2} = \frac{du}{|w'(z)|^2}, \text{ also}$$

$$q(r) = \int_{\Gamma(r), u=0}^K \frac{du}{|w'(z)|^2} \quad \text{mit} \quad K = \int_{\Gamma(r)} du.$$

Da im Innern stets $w'(z) = \overline{\mathcal{L}(z)} \neq 0$ ist, ist

$\log |w'(z)| = \operatorname{Re} \log w'(z)$ dort harmonisch, also

$$\omega(u, r) := \log |w'(z(w))|$$

^{*)} Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München. Diskussionen, die einer der Verfasser (Gorenflo) im Plasma Physics Laboratory, Princeton, N.J., USA, und im Culham Laboratory in England führte, ergaben, daß auch dort unabhängig voneinander und von Garching-München Beweise gefunden worden waren.

eine harmonische Funktion in u, v mit

$\omega(u+K, v) = \omega(u, v)$, also mit der Periode K in u , solange v nur Werte der Flußfunktion im Feldgebiet annimmt.

Aus

$$q(v) = \int_{\Gamma(v), u=0}^K e^{-2\omega(u, v)} du$$

folgt nun

$$q'(v) = -2 \int_0^K \frac{\partial \omega}{\partial v} e^{-2\omega} du,$$

$$q''(v) = -2 \int_0^K \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} - 2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial v} \right)^2 \right\} e^{-2\omega} du.$$

Wegen $\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} q''(v) &= 2 \int_0^K \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + 2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial v} \right)^2 \right\} e^{-2\omega} du \\ &= 4 \int_0^K \left(\frac{\partial \omega}{\partial v} \right)^2 e^{-2\omega} du + 2T \end{aligned}$$

mit

$$T = \int_0^K \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} e^{-2\omega} du = \frac{\partial \omega}{\partial u} e^{-2\omega} \Big|_0^K + 2 \int_0^K \left(\frac{\partial \omega}{\partial u} \right)^2 e^{-2\omega} du.$$

Aus der Periodizität folgt, daß $\frac{\partial \omega}{\partial u} e^{-2\omega} \Big|_0^K = 0$ ist, und man erhält also

$$q''(v) = 4 \int_{u=0}^K \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial v} \right)^2 \right\} e^{-2\omega} du \geq 0.$$

§ 4 Der Fall variablen, speziell gegen B^2 sehr kleinen Druckes.

$\mathcal{L}$ sei ein zweifach zusammenhängendes Magnetfeld in einem zweifach zusammenhängenden Gebiet G , dessen analytische Randkurven Feldlinien seien. Es ist $\nabla \cdot \mathcal{L} = 0$, wir lassen aber $\nabla \times \mathcal{L} \neq 0$ zu. Wir fragen, unter welchen Bedingungen ein nicht notwendig innenstromfreies Plasma in G sich mit einem äußeren Magnetfeld im Gleichgewicht befindet. Wie bisher sollen alle Ströme senkrecht zur z -Ebene fließen, die Stromdichte sei $\vec{j}$. Mit $\psi(z)$ bezeichnen wir die Flußfunktion des Feldes; $\psi(z)$ ist nun natürlich nicht notwendig harmonisch. Aus der Gleichgewichtsbedingung $\vec{j} \times \mathcal{L} = \nabla p$ folgt, daß p nur von ψ abhängt: $p = p_1(\psi)$ ist längs der Feldlinie $\Gamma(\psi)$ konstant. Der von der z -Ebene senkrecht nach oben zeigende Einheitsvektor sei mit n_3 bezeichnet.

Bei einem ebenen divergenzfreien Vektorfeld $\mathcal{L}$ ist $\mathcal{W} = \psi n_3$ ein Vektorpotential, es ist also

$$\mathcal{L} = \nabla \times (\psi n_3) = -n_3 \times \nabla \psi.$$

Wir nehmen $p = p_1(\psi)$ als stetig differenzierbar an, und es sei

$$p = 0 \quad \text{in} \quad \psi \leq \psi_0 \quad \text{und in} \quad \psi \geq \psi_1, \\ p(\psi) \geq 0 \quad \text{in} \quad \psi_0 \leq \psi \leq \psi_1.$$

Ferner sei $\vec{j} = j n_3$. Aus

$$\vec{j} = - \frac{\nabla p \times \mathcal{L}}{B^2} = \frac{1}{B^2} (\nabla p \cdot \nabla \psi) n_3 = \frac{\nabla p \cdot \nabla \psi}{|\nabla \psi|^2} n_3$$

folgt nun

$$(1) \quad j = \frac{dp_1(\psi)}{d\psi} = j(\psi).$$

Also ist $j(\psi)$ längs der Feldlinie $\Gamma(\psi)$ konstant. Weiter

$$\text{ist} \quad \vec{j} = \nabla \times \mathcal{L} = \nabla \times (\nabla \times \psi n_3) = -(\Delta \psi) n_3,$$

also

$$(2) \quad j = -\Delta \psi.$$

Wir leiten noch eine weitere Beziehung her. Es sei

$$(3) \quad I(\sigma) = \int_{\Gamma(\sigma)} B \, ds, \quad q(\sigma) = \int_{\Gamma(\sigma)} \frac{ds}{B}.$$

Figur 6

Sind $\Gamma(\sigma)$ und $\Gamma(\sigma+h)$ zwei benachbarte Feldlinien, so ist (man vgl. Figur 6)

$$dI \approx I(\sigma+h) - I(\sigma) = \int_{\Gamma(\sigma+h)} B \, ds - \int_{\Gamma(\sigma)} B \, ds.$$

Nach dem Satz von STOKES ist also

$$dI \approx - \iint_{(\sigma, \sigma+h)} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n}_3 \, dx \, dy = - \iint_{(\sigma, \sigma+h)} j \, dx \, dy$$

$$\approx - j(\sigma) \iint_{(\sigma, \sigma+h)} dx \, dy = - j(\sigma) \iint_{(\sigma, \sigma+h)} dn \, ds.$$

Da aber $d\sigma = B \, dn$ ist (mit s seien die Bogenlängen der Feldlinien, mit n die Bogenlängen ihrer Orthogonaltrajektorien bezeichnet), so hat man

$$dI \approx -j \iint_{(\sigma, \sigma+h)} \frac{d\sigma}{B} \, ds = -j \int_{(\sigma, \sigma+h)} \left(\int_{\Gamma(\sigma)} \frac{ds}{B} \right) d\sigma$$

$$\approx -j \, h \, q(\sigma).$$

Der Grenzübergang $h \rightarrow 0$ liefert hieraus

$$(4) \quad \frac{dI(\sigma)}{d\sigma} = -j(\sigma) q(\sigma) = - \frac{dp}{d\sigma} q(\sigma),$$

also auch

$$(5) \quad \frac{dI}{dp} = -q(\sigma).$$

Aus der Forderung, daß die Konfiguration Grenzfall eines Torus im Sinne von Seite 4 sein soll, ergeben sich nun noch einige Bedingungen.

Bei toroidaler Konfiguration sind die Flächen konstanten Drucks geschlossen, und in ihnen fließt der Strom; ferner sind sie aus lauter Feldlinien zusammengesetzt. Im hier vorliegenden Grenzfall gehört zu jeder Feldlinie $\Gamma(\sigma)$ eines bestimmten Druckes p , auf der der Strom in einer Richtung (z.B. nach oben) fließt, eine andere Feldlinie $\Gamma(\sigma^*)$ gleichen Druckes, auf der der Strom in entgegengesetzter Richtung fließt. Die Zylinderflächen, die senkrecht auf der z -Ebene stehen und sie in $\Gamma(\sigma)$ und $\Gamma(\sigma^*)$ schneiden, sind als Teile einer geschlossenen Fläche gleichen Druckes und entgegengesetzter Stromrichtung zu denken.*)

Gehören σ_2 und σ_2^* sowie σ_3 und σ_3^* in diesem Sinne zusammen, und ist etwa $\sigma_2 < \sigma_3$, so ist $\sigma_3^* < \sigma_2^*$ (und entweder $\sigma_3 \leq \sigma_3^*$ oder $\sigma_2^* \leq \sigma_2$). Aus Bilanzgründen muß durch das Gebiet $\sigma_3^* \leq \sigma \leq \sigma_2^*$ der gleiche Gesamtstrom, aber in entgegengesetzter Richtung fließen wie durch das Gebiet $\sigma_2 \leq \sigma \leq \sigma_3$.

Diese Bedingung ist für jedes Paar $\{\sigma_2, \sigma_3\}$ erfüllt, wenn die Gleichungen

$$(6) \quad p = p_2(q)$$

) $j(\sigma)$ und $j(\sigma^)$ brauchen nicht gleich zu sein, da sich beim Umbiegen des Stromes in einer toroidalen Anordnung die Stromdichte ändern kann.

Wir merken an, daß folgende funktionalen Abhängigkeiten bestehen:

$$I = I_1(p), \quad I = I_2(q), \quad p = p_2(q).$$

Wir haben das

Resultat: Eine zweifach zusammenhängende ebene Plasmakonfiguration befindet sich im Gleichgewicht, wenn $q(\varphi)$ auf ihren Rändern den gleichen Wert und in ihrem Innern ein Extremum hat und wenn außerdem der Druck im Plasma eine Funktion von q allein ist.

Figur 7

Bei allen Überlegungen dieses Paragraphen wurde die Kleinheit von p nirgends benutzt. Wenn p und $\dot{j}$ sehr klein sind, also $\dot{j} = \nabla \times \mathcal{L} \approx 0$ und

$$p(\sigma) = \int_{\sigma_1}^{\sigma} \dot{j} \, d\sigma \ll B^2, \quad \text{kann man näherungs-}$$

weise $\sigma = \sigma(z)$ als harmonisch und die Existenz eines komplexen Potentials $w(z)$ voraussetzen. Näherungsweise kann man z.B. das in § 3 betrachtete komplexe Potential

$$w(z) = -i \log(z^n - 1), \quad n \geq 2,$$

verwenden und im zugehörigen Feld ein Plasma eingelagert denken gemäß der Bedingung (6).

§ 5 Anhang 1. Detail-Rechnungen zum konstruierten Gleichgewichtsfeld

Zu dem in § 3 behandelten speziellen Feld sollen einige Detail-Rechnungen dargestellt werden.

Senkrecht zur z -Ebene sind n gerade, unendlich lange Drähte angebracht, die von gleich starken positiven Strömen durchflossen sind. Die Drähte durchstoßen die z -Ebene in den Punkten $z_k = e^{2\pi i k/n}$, $k=0, 1, 2, \dots, n-1$, $n \geq 2$.

Die Anordnung geht bei Drehung um den Winkel $2\pi/n$ in sich über und ist, bei Nichtbeachtung der Feldrichtung, spiegelsymmetrisch zu den Strahlen $\varphi = \lambda\pi/n$, $\lambda=0, 1, \dots$. Nach dem BIOT-SAVART'schen Gesetz ist durch

$$b(z) = -i \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z - z_k} = -i \frac{n z^{n-1}}{z^n - 1}$$

das zugehörige Magnetfeld $\mathcal{G}(z) = \overline{b(z)}$ gegeben;

$$w(z) = u(z) + i v(z) = -i \log(z^n - 1)$$

ist das komplexe Potential,

$$v(z) = -\log |z^n - 1|$$

ist die Flußfunktion.

Anstatt durch die Werte der Flußfunktion v können wir die Feldlinien auch durch $C = e^{-v}$ numerieren. Die Feldlinienschar ist dann gegeben durch $|z^n - 1| = C$.

Das Intervall $\infty > v > -\infty$ entspricht umkehrbar eindeutig dem Intervall $0 < C < \infty$. Wir untersuchen die Struktur des Feldes.

Die Nullfeldlinie ist gegeben durch $C=1$. Sie entsteht aus dem Kreis $|\zeta - 1| = 1$ der ζ -Ebene durch die Abbildung $z = \zeta^{1/n}$; diese Abbildung liefert n jeweils um den Winkel $2\pi/n$ gegeneinander verdrehte Bilder dieses Kreises; außer in $z = \zeta = 0$

ζ - Ebene z - Ebene

Figur 8

Die Nullfeldlinie im Falle $n = 4$

herrscht überall Konformität, der Winkel τ bei $\zeta = 0$ geht über in Winkel τ/n bei $z = 0$. Äußerste Punkte sind die Punkte $z = 2^{1/n} e^{2\pi i k/n}$ als Bilder von $\zeta = 2$. Die Nullfeldlinie sieht also aus wie der Rand eines n -blättrigen Kleeblatts; in ihrem Symmetriezentrum $z = 0$ ist $\mathcal{L} = 0$, sie hat dort die Öffnungswinkel π/n und als Nullpunktstangenten die Strahlen

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Die zu $0 < C < 1$ gehörenden Feldlinien zerfallen in je n getrennte geschlossene Teilkurven, deren jede je einen "Draht" z_k umschlingt (konforme Bilder von $|\zeta - 1| = C$). Jede dieser Kurven verläuft ganz in einem Gebiet

$$-\frac{\pi}{2n} < \varphi - \frac{2k\pi}{n} < \frac{\pi}{2n}.$$

Für $C \rightarrow +0$ ziehen sich diese Kurven auf die Punkte z_k zusammen. Für $1 < C < \infty$ sind die Feldlinien geschlossene Kurven $\tau = \tau(\varphi)$ derart, daß zu jedem Wert φ genau ein Wert τ gehört.

Man kann die Gleichungen der Feldlinien in Polarkoordinaten explizit anschreiben. Aus

$$|z^n - 1|^2 = r^{2n} - 2r^n \cos n\varphi + 1 = C^2$$

folgt

$$(F) \quad r = (\cos n\varphi \pm \sqrt{\cos^2 n\varphi + C^2 - 1})^{1/n} \\ = (\cos n\varphi \pm \sqrt{C^2 - \sin^2 n\varphi})^{1/n}.$$

Im Falle $C > 1$ ist das Zeichen + vor der Quadratwurzel zu nehmen, da andernfalls r^n negativ wäre. Im Falle $0 < C < 1$ sind beide Vorzeichen zulässig, $r = r(\varphi)$ hat dann jeweils 2 Werte für

$$\left| \varphi - \frac{2k\pi}{n} \right| < \frac{1}{n} \arcsin C, \text{ einen Wert für}$$

$$\left| \varphi - \frac{2k\pi}{n} \right| = \frac{1}{n} \arcsin C, \text{ und existiert nicht für}$$

alle anderen Werte φ . Mit $C=1$ erhält man die Nullfeldlinie

$$(F0) \quad r = (\cos n\varphi + |\cos n\varphi|)^{1/n},$$

$$\text{also} \quad r = (2 \cos n\varphi)^{1/n} \text{ in } \left| \varphi - \frac{2k\pi}{n} \right| \leq \frac{\pi}{2n},$$

$r=0$ sonst. Das negative Vorzeichen würde in den Intervallen $\left| \varphi - \frac{2k\pi}{n} \right| \leq \frac{\pi}{2n}$ für r den Wert 0 liefern, überall sonst wäre r^n negativ. Mithin braucht man nur das Zeichen + zu berücksichtigen.

Sei nun $C > 1$. Dann nimmt r seine Maxima

$$r_{\max} = (1 + C)^{1/n} \quad \text{bei } \varphi = 2k\pi/n, \quad \text{seine Minima}$$

$$r_{\min} = (-1 + C)^{1/n} \quad \text{bei } \varphi = (2k+1)\pi/n \quad \text{an. Setzt}$$

man nämlich $r^n = f(t)$ mit $t = \cos n\varphi$, so variiert t in $-1 \leq t \leq 1$, und da dort $f(t) = t + \sqrt{t^2 + C^2 - 1}$ monoton wächst, liegen die Extremwerte bei $t = -1$ und $t = +1$, den Entsprechungen der angegebenen Argumente φ .

$$\text{Wegen } \sqrt{t^2 + C^2 - 1} > |t| \text{ ist } f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + C^2 - 1}} > 0.$$

Man sieht nun auch, daß für $C \rightarrow +\infty$ gilt

$$r(\varphi) = r(\varphi; C) \sim C^{1/n} = e^{-\sigma/n}$$

Längs der Feldlinien $\Gamma(\sigma)$ soll berechnet werden

$$q^*(C) := q(\sigma) = \int_{\Gamma(\sigma)} \frac{ds}{B} = \int_{|z^n-1|=C} \frac{|dz|}{|b(z)|}$$

Längs der Feldlinie $\Gamma(\sigma)$ ist $|b(z)| = \frac{n r^{n-1}}{|z^n-1|} = \frac{n}{C} r^{n-1}$,

mit $r' = \frac{dr}{d\varphi}$ also

$$q^*(C) = \int_{|z^n-1|=C} \frac{C \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}}{n r^{n-1}(\varphi)} d\varphi.$$

r' berechnen wir aus der impliziten Gleichung der Feldlinien:

$$r^{2n} - 2 r^n \cos n\varphi + 1 - C^2 = 0.$$

Aus ihr folgt

$$2n r^{2n-1} r' - 2n r^{n-1} r' \cos n\varphi - 2n r^n \sin n\varphi = 0,$$

also

$$r' = \frac{r \sin n\varphi}{r^n - \cos n\varphi},$$

$$\begin{aligned} r^2 + r'^2 &= r^2 \left\{ 1 + \frac{\sin^2 n\varphi}{r^{2n} - 2 r^n \cos n\varphi + \cos^2 n\varphi} \right\} \\ &= r^2 \cdot \frac{r^{2n} - 2 r^n \cos n\varphi + 1}{r^{2n} - 2 r^n \cos n\varphi + 1 - \sin^2 n\varphi} = \frac{r^2 C^2}{C^2 - \sin^2 n\varphi}, \end{aligned}$$

$$\sqrt{r^2 + r'^2} = \frac{C r}{\sqrt{C^2 - \sin^2 n\varphi}}$$

Also ist

$$q^*(C) = \int_{|z^n-1|=C} \frac{C^2 d\varphi}{n r^{n-2}(\varphi) \sqrt{C^2 - \sin^2 n\varphi}}$$

Hieraus folgt, bei Beachtung der Symmetrien und der Periodizität von $r(\varphi)$,

$$q^*(1) = 2n \int_0^{\pi/(2n)} \frac{d\varphi}{n(2 \cos n\varphi)^{1-\frac{2}{n}} \cos n\varphi}$$

$$= 2^{2/n} \int_0^{\pi/(2n)} \cos^{\frac{2}{n}-2} n\varphi \, d\varphi = \infty,$$

da der Integrand bei $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2n} - 0$ wie $\left(\frac{\pi}{2n} - \varphi\right)^{\frac{2}{n}-2}$ gegen ∞ geht und $\frac{2}{n}-2 \leq -1$ ist (wegen $n \geq 2$)

Im Falle $\infty > C > 1$ ergibt sich

$$q^*(C) = 2C^2 \int_{\varphi=0}^{\pi/n} \frac{d\varphi}{r^{n-2}(\varphi) \sqrt{C^2 - \sin^2 n\varphi}}$$

mit

$$r(\varphi) = \left(\cos n\varphi + \sqrt{C^2 - \sin^2 n\varphi} \right)^{1/n}$$

Im Falle $0 < C < 1$ erhält man

$$q^*(C) = 2C^2 \int_{\varphi=0}^{\frac{1}{n} \arcsin C} \left(\frac{1}{r_-^{n-2}(\varphi)} + \frac{1}{r_+^{n-2}(\varphi)} \right) \frac{d\varphi}{\sqrt{C^2 - \sin^2 n\varphi}}$$

mit

$$r_{\pm}(\varphi) = \left(\cos n\varphi \pm \sqrt{C^2 - \sin^2 n\varphi} \right)^{1/n}$$

Die Substitution $n\varphi = t$ gibt

$$q^*(C) = \frac{2C^2}{n} \int_{t=0}^{\pi} \frac{dt}{g_{\pm}^{n-2}(t) \sqrt{C^2 - \sin^2 t}} \quad \text{für } 1 < C < \infty,$$

$$q^*(C) = \frac{2C^2}{n} \int_{t=0}^{\arcsin C} \left\{ \frac{1}{g_{+}^{n-2}(t)} + \frac{1}{g_{-}^{n-2}(t)} \right\} \frac{dt}{\sqrt{C^2 - \sin^2 t}}$$

für $0 < C < 1$.

In diesen Formeln ist

$$g_{\pm}(t) = \left(\cos t \pm \sqrt{C^2 - \sin^2 t} \right)^{1/n}$$

Mittels der Substitution $x = \cos t$ erhält man

$$q^*(C) = \frac{2C^2}{n} \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sigma_+(x) \sqrt{x^2 + C^2 - 1} \sqrt{1 - x^2}}$$

für den Fall $1 < C < \infty$,

$$q^*(C) = \frac{2C^2}{n} \int_{\sqrt{1-C^2}}^1 \left\{ \frac{1}{\sigma_+(x)} + \frac{1}{\sigma_-(x)} \right\} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + C^2 - 1} \sqrt{1-x^2}}$$

für den Fall $0 < C < 1$.

Dabei ist

$$\sigma_{\pm}(x) = \left(x \pm \sqrt{x^2 + C^2 - 1} \right)^{\frac{n-2}{n}}$$

§ 6 Anhang 2. Beweis der Hilfssätze 1 und 2.

Beweis von Hilfssatz 1: G ist konform äquivalent einem

Kreisringgebiet $G_{\xi} = \{1 < |\xi| < R\}$ mit

durch G bestimmtem R . In der ξ -Ebene gibt es ein harmonisches Vektorfeld, nämlich das Potentialwirbelfeld mit $\xi=0$ und $\xi=\infty$ als Singularitäten, welches $|\xi|=1$ und $|\xi|=R$ als Feldlinien hat. Die Abbildung $z = z(\xi)$ führt Feldlinien in Feldlinien über. Da alle Ränder analytische Kurven sind, ist die Abbildung im Innern und auf den Rändern konform, also dort $\mathcal{L}(z) \neq 0$. Man vgl. [1], Seite 175.

Daß $\mathcal{L}(z)$ bis auf einen Faktor eindeutig bestimmt ist, sieht man so ein: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß Γ_1 der äußere Rand von G ist und dort $\mathcal{L}(z)$ in die Richtung mathematisch positiven Umlaufs zeigt. Wie in der Anmerkung zu Hilfssatz 1 schon erwähnt, entspricht dann G dem Gebiet $v_1 < v < 0$ der w -Ebene, in der $w+k$ mit w topologisch zu identifizieren ist, und die Zirkulation $K = \int_{\Gamma(v)} du$ ist

positiv. Ferner ist $\Gamma_1 = \Gamma(\sigma_1)$.

$\zeta = e^{i\omega - 2\pi/K}$ bildet G konform ab auf den Kreisring $1 < |\zeta| < R = e^{-2\pi\sigma_1/K}$. Nach [1], Seite 176, ist eine beliebige konforme Abbildung, die G auf einen Kreisring mit 0 als Zentrum und dem äußeren Kreis als Bild von Γ_1 abbildet, bis auf eine Drehstreckung bestimmt. Jede solche Abbildung ist mithin gegeben durch

$$\zeta^*(z) = A e^{i\alpha} \zeta(z) = e^{i\omega^*(z) - 2\pi/K^*}.$$

Dabei ist $A > 0$ und α reell. Es folgt

$$\frac{2\pi}{K^*} \omega^* = \frac{2\pi}{K} \omega + \alpha - i \log A,$$

also, durch Differentiation hieraus

$$\mathcal{L}^*/K^* = \mathcal{L}/K.$$

Durch Vorgabe der Zirkulation K ist also das Feld bestimmt.

Beweis des Hilfssatzes 2: Die Funktion $z(t)$ kann in die komplexe Umgebung der reellen t -Achse analytisch fortgesetzt werden und ist dann dort lokal umkehrbar zu einer im Kleinen holomorphen (im Großen aber mehrdeutigen) Funktion $t(z)$.

Mit $\lambda(t)$ sei die in der Umgebung der reellen t -Achse holomorphe Funktion bezeichnet, die für reelle t mit $\dot{z}(t)$ übereinstimmt ($\lambda(t)$ existiert, da $\dot{z}(t)$ holomorph von der reellen Variablen t abhängt). Die analytische Fortsetzung von $\lambda(t)$ auf komplexe t bezeichnen wir ebenfalls mit $\lambda(t)$.

Dann ist $b(z) = \lambda(t(z)) \lambda(t(z))$ holomorph in der Umgebung von H , dort ist also $\overline{b(z)}$ harmonische Fortsetzung des zunächst nur auf H gegebenen Feldes $\mathcal{L}(z)$.

Für Programmierungsarbeiten und Durchführung numerischer Rechnungen auf der Garching IBM 7090 danken wir Frau I. Kullak.

Literatur

- [1] G.M. Golusin, Geometrische Funktionentheorie. Übersetzung aus dem Russischen, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1957
- [2] F. Meyer und H.U. Schmidt, Torusartige Plasmakonfigurationen ohne Gesamtstrom durch ihren Querschnitt im Gleichgewicht mit einem Magnetfeld. Zeitschrift für Naturforschung 13a, 1005-1015 (1958)
- [3] R. Gorenflo, Zweidimensionale innenfeldfreie Plasmakonfigurationen im Gleichgewicht mit einem äußeren Magnetfeld. Bericht IPP/6/14, Institut für Plasma-physik, Garching bei München, Januar 1964
- [4] R. Gorenflo, Eine Anwendung der Funktionentheorie in der Magnetohydrostatik. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 44, T31 - T32 (1964)
- [5] R. Gorenflo, Funktionentheoretische Bestimmung des Außenfeldes zu einer zweidimensionalen magnetohydrostatischen Konfiguration. ZAMP 16, 279-290 (1965)
- [6] P. Merkel, Feldfreie Plasmakonfigurationen im Gleichgewicht mit ebenen Magnetfeldern. Dissertation Universität München 1965
- [7] G. Stuntz, Zweidimensionale Plasmakonfigurationen ohne inneres Feld im statischen Gleichgewicht. Diplomarbeit Universität München, Dezember 1964
- [8] H. v. Mangoldt/K. Knopp, Einführung in die Höhere Mathematik, zweiter Band, 11. Auflage, S. Hirzel-Verlag Stuttgart 1958

This report is to be treated as strictly confidential.

The 'Institut für Plasmaphysik' holds the exclusive rights of publication, mimeographing, propagation and translation into foreign languages of the original text, inclusive of the drawings, wholly or partially; also of excerpts or résumés, as well as of the technical or scientific contents of this report. Exceptions to these restrictions require written permission.

Furthermore, the 'Institut für Plasmaphysik' reserves the right of exclusive exploitation of the information contained in this report, for the purpose of obtaining protective industrial rights, particularly patent and utility patent rights at home and abroad. Actions of exploitation taken on the basis of the knowledge gained from this report cannot be regarded as grounds for obtaining the right of prior use ('Vorbenutzungsrecht') according to article 7 paragraph 1, first sentence of the German Patent Law. The reader is referred to article 5 of the Patent Law. For reasons stipulated by the Patent Law, the report must not be exhibited in public libraries, or lent out indiscriminately.

The Institute does not guarantee that the information given in this report is free from protective rights, such as patent rights, utility patent rights or trade-mark rights.

No guarantee is given in respect of the accuracy, completeness or usefulness of the information contained in this report. Thus, no liability can be accepted for damage resulting from use of the information, or of the apparatus, methods and procedures described.