

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Einschließung eines Plasmas im dynamischen
Gleichgewicht im toroidalen z-Pinch

(Confinement of a Plasma in Dynamic
Equilibrium in a Toroidal z-Pinch)

Omar Badr

IPP 6/35

März 1965

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

ABSTRACT:

The confinement of a plasma in a toroidal z-pinch is investigated. The plasma is described in terms of hydromagnetic equations, infinite conductivity being assumed and consideration limited to rotational symmetric steady-state solutions (dynamic equilibrium).

Of particular significance is the case where $\nabla \cdot \underline{u} \neq 0$ everywhere. It is shown that the toroidal component u_φ of the velocity is then everywhere equal to zero and solutions are obtained in the form of power series in accordance with the reciprocal aspect ratio of the torus. Numerical results are indicated for the zeroth and first orders. It is found that in the case of high pressure on certain discrete areas of the plasma nearly all physical quantities are constant, the velocity in particular being equal to zero (" Static Areas of Homogeneity "). Furthermore, the case $\nabla \cdot \underline{u} \equiv 0$ was considered. Here steady-state solutions were found, but these violate the confinement condition.

Zusammenfassung

Es wird die Einschließung eines Plasmas im toroidalen z - Pinch untersucht. Zur Beschreibung des Plasmas dienen die Gleichungen der Magnetohydrodynamik mit der Annahme unendlicher Leitfähigkeit und unter Beschränkung auf rotationssymmetrische stationäre Lösungen (dynamisches Gleichgewicht).

Von besonderem Interesse ist der Fall, in dem überall $\nabla \cdot \underline{u} \neq 0$. Es wird gezeigt, daß dann die toroidale Komponente u_φ der Geschwindigkeit identisch Null ist, und es werden Lösungen in der Form von Potenzreihen nach dem reziproken Aspektverhältnis des Torus ermittelt. Für die nullte und erste Ordnung werden numerische Ergebnisse mitgeteilt.

Es stellt sich heraus, daß für hohen Druck auf gewissen diskreten Flächen im Plasma nahezu alle physikalischen Größen konstant sind und insbesondere die Geschwindigkeit gleich Null ist ("Statische Flächen der Homogenität").

Des weiteren wurde der Fall $\nabla \cdot \underline{u} \equiv 0$ betrachtet. Hier wurden stationäre Lösungen gefunden, die allerdings die Einschließungs-Bedingung verletzen.

Bezeichnungen

- \underline{B} : Magnetfeld
- \underline{E} : Elektrisches Feld
- \underline{j} : Elektrische Stromdichte
- \underline{u} : Massgeschwindigkeit des Plasmas
- P : Gesamtdruck des Plasmas
- ρ : Massendichte des Plasmas
- V : Strömungsfunktion
- G, \bar{G} : Differentialoperatoren zweiter Ordnung
- s, φ, z : Zylinderische Koordinaten
- x, y, ξ, θ : Dimensionlosen Koordinaten
- n_e : Zahl der Elektronen pro cm^3
- n_i : Zahl der Ionen pro cm^3
- $J_\nu(\xi)$: Bessel-funktion ν -ter Ordnung

Teil 1

Einleitung

Vom makroskopischen Standpunkt aus kann ein Plasma , auf das magnetische Felder wirken , oft als ein elektrisch-leitendes ideales Gas angesehen werden ; alle Einflüsse des neutralen Gases sowie die Details der Wechselwirkung zwischen Ionen und Elektronen werden damit vernachlässigt .

Es ist zu erwarten , daß die magnetohydrodynamische Strömung eine grössere Zahl von Phänomenen zeigt als eine normalen Flüssigkeitsbewegung .

Zur theoretischen Untersuchung des Plasmas benutzt man häufig eines von zwei vereinfachten Modellen :

Das erste ist das hydromagnetische Modell , in dem das Plasma als eine kompressible leitende Flüssigkeit behandelt wird , die der Wirkung des elektro-magnetischen Feldes unterworfen ist .

Im zweiten , bekannt als das Einzelteilchen-Modell , wird das Verhalten des Systems durch die Annahme gegeben , daß jedes geladene Teilchen individuell unter der Wirkung des "äußeren" Feldes steht (zu dem auch alle anderen Teilchen beitragen) .

Ein wichtiges Problem der Plasmaphysik ist die Untersuchung der Einschließung des Plasmas mit Hilfe eines Magnetfeldes . Hierbei können alle beide Modelle - das hydromagnetische und das Einzelteilchen Modell - Ergebnisse von Interesse liefern .

Die Ausgangsgleichung ,aus der die beiden oben beschriebenen Modelle als Näherung gewonnen werden, ist die Boltzmann'sche Gleichung für die Verteilung der Teilchen im Phasenraum als Funktion der Lage und Geschwindigkeit.

Das erste Modell wird durch das Gleichungssystem der Magneto-hydrodynamik für eine Flüssigkeit beschrieben. Diese ihrerseits sind gültig , wenn die freie Weglänge bezüglich der gaskinetischen Stöße klein ist gegenüber den Abmessungen des Systems. Oder, anders gesagt, wenn die mittlere Dichte hoch und die mittlere Temperatur des Plasmas nicht zu hoch ist.

In dieser Arbeit betrachten wir das Plasma als ein nicht-relativistisches ideales Gas unter den folgenden physikalischen Voraussetzungen :

a.Im Plasma ist die Leitfähigkeit unendlich groß.

b.Das Plasma ist quasi-neutral.

$$\text{d.h. } \sum_i Z_i n_i = n_e$$

wobei Z_i die Ladung der Ionen ist .

c.Der Drucktensor ist isotrop. (3)

Wir werden uns beschäftigen mit dem Problem der Einschließung in toroidalen Z-Pinch ,wobei die Trägheitsterme mitgenommen werden.

Der toroidale Z-Pinch ist eine geometrische Anordnung in der Form eines Torus, in dem das Magnetfeld meridional und der Strom toroidal verläuft.

Man hat in diesem Fall zwei Fragen zu stellen :

1. Existiert zu einem Satz von physikalischen gegebenen Randbedingung eine Gleichgewichtslösung ?
2. Falls Ja, ist sie stabil ?

Wenn die Lösung instabil ist , so erhebt sich die Frage, welchen Bewegungszustand das System schließlich annimmt. Das Ziel dieser Arbeit ist , die erste Frage zu beantworten. Die zweite Frage wird nicht untersucht.

Die Aufgabe , die magnetohydrodynamischen Gleichungen mit Trägheitstermen zu lösen, ist schwierig.

Sogar in der statischen Fall sind Lösungen nur bekannt für das ein- dimensionale Problem (Annahme, daß die physikalischen Größe zylinder-symmetrisch sind ; linear Pinch, siehe z.b. Lit. (3)) ;

ferner für das zwei-dimensionale Problem (Annahme der Rotationssymmetrie ; Toroidaler Pinch).

Im zweiten Fall kennt man die Lösung in geschlossener Form ohne die Berücksichtigung der Randbedingung (1) , bzw, mit Berücksichtigung der Randbedingung näherungsweise (als Entwicklung nach Potenzen des reziproken Aspektverhältnisses des Torus) (2).

Diese Lösungen wurden einem linearen Ansatz für den Druck erhalten.

Im Teil 2 werden wir einen Satz über die Existenz des dynamischen Gleichgewichts in toroidalen Z- Pinch beweisen, unter der Voraussetzung, daß die physikalischen Größen rotationssymmetrisch sind.

In Teil 3 wird eine Methode angegeben, um die Lösung für den Torus um die zylinderischen Konfiguration entwickelt nach Potenzen von ϵ_0 -dem reziproken Aspektverhältnis des Torus- mit bestimmten Randbedingungen, die äquivalent zur Einschließungsforderung sind, zu finden.

In Teil 4 werden die Ergebnisse diskutiert.

Teil 2

Existenz Satz :

In diesem Teil nehmen wir an , daß alle Größen rotations-symmetrisch sind , daß die Einschließungsbedingung erfüllt ist und daß überall im Plasma $\nabla \cdot \underline{u} \neq 0$ gilt .

Wir beweisen dann :

Bei jeder stationären Lösung der magnetohydrodynamischen Gleichungen ist die toroidale Komponente der Geschwindigkeit

$$u_{\varphi} = 0$$

Im toroidalen Z- Pinch hat das Magnetfeld nur zwei Komponenten B_s und B_z und die elektrische Stromdichte eine Komponente j_{φ} (siehe Fig. I) .

Das Verhalten des Plasmas im dynamischen Gleichgewicht (d.h. $\frac{\delta}{\delta t} = 0$) wird durch das folgende Gleichungssystem⁽⁴⁾ beschrieben : *

$$\nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0$$

oder

$$1/\rho \underline{u} \cdot \nabla \rho + \nabla \cdot \underline{u} = 0$$

$$1/\gamma P \underline{u} \cdot \nabla P + \nabla \cdot \underline{u} = 0$$

$$(\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} + \nabla P - 1/c \underline{j} \wedge \underline{B} = 0$$

$$\nabla \wedge \underline{B} = 4 \pi /c \underline{j} \tag{A}$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0$$

$$\nabla \wedge \underline{E} = 0$$

$$\underline{E} + 1/c \underline{u} \wedge \underline{B} = 0$$

Die dritte ist die Zustandsgleichung des Gases unter der adiabatischen Bedingung . (Inkompressibilität und Isothermie entsprechen den speziellen Fällen $\gamma = \infty$ und $\gamma = 1$ in dieser Gleichung)

*) Wir benutzen die Gauß'schen Einheiten .

Die letzte ist das Ohm'sche Gesetz in einer vereinfachten Form für unendliche Leitfähigkeit .

Beweis des Satzes :

Angenommen , wir hätten eine Lösung mit :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{u} &\neq 0 \text{ überall im Plasma und} \\ u_{\varphi} &\neq 0 \text{ an einer Stelle .} \end{aligned}$$

Führen wir die zylinderischen Koordinaten (s , φ , z) ein , dann folgt aus dem Ohm'schen Gesetz

$$u_s / B_s = u_z / B_z = \chi (s, z) . \quad 2.1)$$

und

$$\begin{aligned} E_s &= - u_{\varphi} B_z \\ E_z &= u_{\varphi} B_s . \end{aligned} \quad 2.2)$$

Aus der 7ten Gleichung folgt

$$E_{\varphi} = 0 .$$

Die φ - Komponente der 4ten Gleichung ist :

$$u_s \frac{\partial}{\partial s} (s u_{\varphi}) + u_z \frac{\partial}{\partial z} (s u_{\varphi}) = 0 \quad 2.3)$$

Die 2ten und 3ten Gleichungen ergeben :

$$u_s \frac{\partial}{\partial s} (\ln (\rho P^{-1/6})) + u_z \frac{\partial}{\partial z} (\ln (\rho P^{-1/6})) = 0 \quad 2.4)$$

Aus 1) folgt

$$B_s \frac{\partial}{\partial s} (s u_{\varphi}) + B_z \frac{\partial}{\partial z} (s u_{\varphi}) = 0 \quad 2.3')$$

und

$$B_s \frac{\partial}{\partial s} (\ln (\rho P^{-1/6})) + B_z \frac{\partial}{\partial z} (\ln (\rho P^{-1/6})) = 0 \quad 2.4')$$

Die 7ten Gleichung ergibt

$$\frac{\partial}{\partial z} E_s - \frac{\partial}{\partial s} E_z = 0 \quad 2.5)$$

Aus 2) und 5) folgt

$$\begin{aligned} &B_s/s \frac{\partial}{\partial s} (s u_{\varphi}) + B_z/s \frac{\partial}{\partial z} (s u_{\varphi}) + \\ &+ s u_{\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial s} (B_s/s) + \frac{\partial}{\partial z} (B_z/s) \right) = 0 \end{aligned}$$

Mit Hilfe von 3') und der Annahme

$u_{\varphi} \neq 0$ haben wir :

$$\frac{\partial}{\partial s} (B_s / s) + \frac{\partial}{\partial z} (B_z / s) = 0 \quad (2.5')$$

Die 6ten Gleichung von (A) ist :

$$\frac{\partial}{\partial s} (s B_s) + \frac{\partial}{\partial z} (s B_z) = 0 \quad (2.6)$$

Führen wir die Strömungsfunktion V ein , wobei

$$\begin{aligned} B_s &= s \frac{\partial V}{\partial z} \\ B_z &= -s \frac{\partial V}{\partial s} \end{aligned} \quad (2.5'') \text{ ist ,}$$

so folgt dann aus 5'') und 6)

$$B_s = 0$$

$$V = V(s)$$

Aus 3') und 4') folgt

$$u_{\varphi} = f(s) \quad (2.3'')$$

$$p = g(s) P^{1/\gamma} \quad (2.4'')$$

mit gewissen Funktionen f und g .

Die Stromdichte \underline{j} ist gegeben durch

$$4 \pi / c \quad j = - \frac{\partial}{\partial s} B_z = V' + s V'' \quad (2.8)$$

(wir haben $j_{\varphi} \equiv j$ eingesetzt) ;

ferner

$$B_z = -s V'$$

(wobei ' Ableitung nach s bedeutet) .

Aus 1) folgt, daß

$$u_s = 0$$

$$u_z = \chi B_z$$

Die 1te Gleichung von (A) ergibt dann :

$$\frac{\partial}{\partial z} (s \rho u_\varphi) = 0 \quad (2.9)$$

Es folgt also :

$$\rho \chi = h(s)$$

mit einer Funktion h .

Die anderen zwei Komponenten der 4ten Gleichung von (A) lauten wie folgt :

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} u^2 - u_\varphi / s \frac{\partial}{\partial s} (s u_\varphi) + \right. \\ & + u_z \left(\frac{\partial}{\partial z} u_s - \frac{\partial}{\partial s} u_z \right) \left. \right) + \frac{\partial}{\partial s} P - \\ & - 1/c j B_z = 0 \quad (2.10) \end{aligned}$$

u.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} u^2 - u_\varphi / s \frac{\partial}{\partial z} (s u_\varphi) - \right. \\ & - u_s \left(\frac{\partial}{\partial z} u_s - \frac{\partial}{\partial s} u_z \right) \left. \right) + \frac{\partial}{\partial z} P + \\ & + 1/c j B_s = 0 \quad (2.11) \end{aligned}$$

Es folgt daraus dann, daß

$$\frac{\partial}{\partial z} P + \rho \chi B_z^2(s) \frac{\partial}{\partial z} \chi = 0 \quad (2.11') \quad \text{ist.}$$

Aus 9') folgt

$$P + h(s) B_z^2 \chi = \text{Funktion von } s \text{ allein.}$$

Mit Hilfe der Gleichungen 4") und 9') können wir χ eliminieren. Man erhält :

$$P + h^2(s) / g(s) B_z^2(s) P^{-1/g} = \text{Funktion von } s$$

Daraus folgt , daß

$$P = P(s) \quad \text{ist .}$$

d. h. der Druck ist eine Funktion von s allein .

Es folgt leicht , daß

$$\underline{u} \cdot \nabla P = 0$$

Aus der dritten Gleichung von (A) folgt nun , daß

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0$$

im Widerspruch zu unseren Annahme , daß überall

$$\nabla \cdot \underline{u} \neq 0 \quad \text{ist .}$$

Als Nächstes betrachten wir den Fall , daß :

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad \text{ist .}$$

Man kann dann 3 spezial Fällen betrachen :

a) $\gamma = \infty$ d.h. Inkompressibilität .

$$b) \quad \underline{u} \cdot \nabla P = 0$$

u.

$$\underline{u} \cdot \nabla \rho = 0$$

$$c) \quad u_s = u_z = 0$$

In den Fällen a) und b) erhält man :

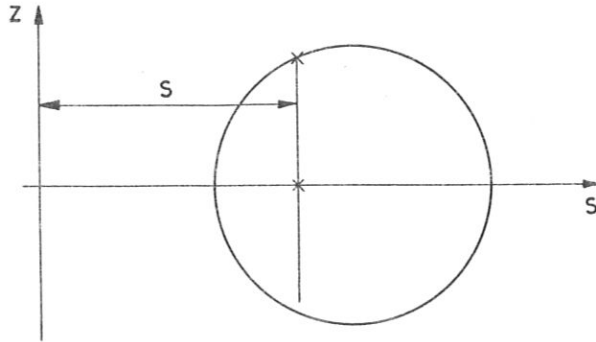
$$P = P(s) \quad (\text{ siehe Anhang I }) .$$

Das Plasma kann in diesem Fall nicht eingeschlossen

werden , weil der Druck P längs jeder Linie $s = \text{const.}$

einen festes Wert hat .

Er ist also im Zentrum des Torus ebenso groß wie an denjenigen Stellen der Wand , die zum selben Wert von s gehören .⁽²⁾



Im Fall c) reduziert sich das System von Gleichungen auf :

$$\rho (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} + \nabla P - 1/c \underline{j} \wedge \underline{B} = 0$$

$$\nabla \wedge \underline{B} = 4\pi/c \underline{j}$$

(B)

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0$$

$$\nabla \wedge \underline{E} = 0$$

$$\underline{E} + 1/c \underline{u} \wedge \underline{B} = 0$$

Dieses System ist jedoch unterbestimmt . Man braucht noch eine Beziehung zwischen ρ und P , welche in diesem Fall als phänomenologisch bekannt angesetzt werden muß .

(siehe Anhang II) .

Teil 2

In diesem Teil führen wir eine Methode ein, durch die man eine Gleichgewichtslösung erhält. Wir machen die Annahmen:

- 1) $u \varphi = 0$
- 2) Das Plasma ist kompressibel und füllt das Gefäß ganz aus.
- 3) Das Plasma ist eingeschlossen.
- 4) Glieder, die quadratisch in der Geschwindigkeit sind, werden vernachlässigt.

Es ist bequem, Polar-Koordinaten $(r, \theta)^*$ in der meridionalen Ebene einzuführen. Diese hängen mit den zylindrischen Koordinaten folgendermaßen zusammen:

$$\begin{aligned} s &= R + r \cos \theta \\ z &= r \sin \theta \\ \varphi &= \varphi \end{aligned}$$

(siehe Fig. II),

oder in dimensionloser Form:

$$\begin{aligned} x &= 1 + \xi_0 \zeta \cos \theta \\ y &= \xi_0 \zeta \sin \theta \end{aligned}$$

mit

$$\zeta = r/a$$

$\xi_0 = a/R$ ist die Inverse des Aspektverhältnisses des Torus.

Der Rand des Torus ist dann definiert durch:

$$\zeta = 1$$

und die Achse durch:

$$\zeta = 0$$

*) In diesen Koordinaten hatte ich auch den Beweis vom Satz formuliert.

In diesem Koordinatensystem haben \underline{B} und \underline{j} die folgende Komponenten-darstellung :

$$\underline{B} = (B_{\xi} , B_{\vartheta} , 0)$$

$$\underline{j} = (0 , 0 , j) .$$

Die Metrik für das neue Koordinatensystem ist :

$$d\overline{s}^2 = a^2 d\overline{\xi}^2 + a^2 \xi^2 d\overline{\vartheta}^2 + R^2(1 + \xi_0 \xi \cos \vartheta)^2 d\overline{\varphi}^2$$

Wir versuchen jetzt eine Gleichgewichtslösung als Potenzreihe in ξ_0 zu finden , die bestimmten Randbedingungen genügt , die wir später formulieren werden . Dabei werden die u's von 1ter Ordnung in ξ_0 angenommen .

Gleichung 2.3) ist identisch befriedigt .

Aus 2.2) folgt

$$\underline{E} = 0 .$$

Gleichung 2.1) ist noch gültig ,

$$\text{d.h.} \quad u_{\xi} / B_{\xi} = u_{\vartheta} / B_{\vartheta} = \xi_0 \chi(\xi, \vartheta) \quad 3.1)$$

Die 6te Gleichung von (A) kann man in der Form schreiben :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\xi (1 + \xi_0 \xi \cos \vartheta) B_{\xi}) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} ((1 + \xi_0 \xi \cos \vartheta) B_{\vartheta}) = 0$$

Wir führen die dimensionlose Strömungsfunktion $V (\quad , \quad)$;

wobei :

$$B_{\xi} = \frac{B_0}{\xi (1 + \xi_0 \xi \cos \vartheta)} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \quad 3.2)$$

$$B_{\vartheta} = - \frac{B_0}{(1 + \xi_0 \xi \cos \vartheta)} \frac{\partial V}{\partial \xi} .$$

B_0 ist konstanter Maßstabsfaktor .

Die Stromdichte j kann man durch diese Strömungsfunktion V ausdrücken :

$$4\pi/c j = -B_0/a \left(1/\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi}{(1+\xi_0 \xi \cos \vartheta)} \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) + \right. \\ \left. + 1/\xi^2 \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{1}{(1+\xi_0 \xi \cos \vartheta)} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right) \right) \quad (3.3)$$

Aus der erste Gleichung von (A) hat man :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\varrho \xi (1 + \xi_0 \xi \cos \vartheta) \chi_{B_\xi} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\varrho (1 + \xi_0 \xi \cos \vartheta) \chi_{B_\vartheta} \right) = 0$$

Es folgt daraus unter Berücksichtigung der Gleichung 2) , daß :

$$\varrho \chi = B_0 / 8\pi c_0 f(V) \quad (3.4)$$

ist .

(Die rechte Seite hängt allein von V ab ; c_0 ist wieder eine Skalenfaktor) .

Die dritten Gleichung (A) können wir schreiben :

$$1/a u_\xi \frac{\partial P}{\partial \xi} + 1/a \xi u_\vartheta \frac{\partial P}{\partial \vartheta} = \\ - \frac{\chi P}{a \xi (1 + \xi_0 \xi \cos \vartheta)} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi (1 + \xi_0 \xi \cos \vartheta) u_\xi \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left((1 + \xi_0 \xi \cos \vartheta) u_\vartheta \right) \right)$$

oder :

$$\chi \left(\sum B_{\xi} \frac{\partial P}{\partial \xi} + B_{\Theta} \frac{\partial P}{\partial \Theta} \right) = -\gamma P .$$

$$\cdot \left(\sum B_{\xi} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} + B_{\Theta} \frac{\partial \chi}{\partial \Theta} \right) .$$

Es ist leicht, mit einer Funktion $h(V)$ und mit Hilfe dieser Gleichung zu beweisen, daß

$$\chi P^{1/\gamma} = (B_0^2 / 8\pi)^{1/\gamma} c_0/B_0 h(V) \quad (3.5)$$

ist .

In der folgenden Diskussion beschränken wir uns auf den Fall, daß :

$$f(V) = V^{1-1/\gamma} h(V)$$

ist .

Mit dieser Auswahl haben ρ und χ die Form :

$$\rho = 1/c_0^2 (B_0^2 / 8\pi)^{1-1/\gamma} V^{1-1/\gamma} P^{1/\gamma}$$

und

$$\chi = c_0/B_0 (B_0^2 / 8\pi)^{1/\gamma} h(V) P^{-1/\gamma}$$

Diese Auswahl von f und h ist jedoch durch die Bedingung beschränkt, daß im Fall der Isothermie die Dichte ρ proportional dem Druck P sein muß .

Entwicklung um die zylindrische Konfiguration :

Jetzt setzen wir die folgende Reihenentwicklung nach Potenzen von ξ_0 (der Inversen des Aspektverhältnisses des Torus) für die physikalischen Größen \underline{B} , \underline{j} , \underline{u} und P an :

$$\begin{aligned}\underline{B} &= \underline{B}_0 + \xi_0 \underline{B}_1 + \xi_0^2 \underline{B}_2 + \dots \\ \underline{j} &= \underline{j}_0 + \xi_0 \underline{j}_1 + \xi_0^2 \underline{j}_2 + \dots \\ \underline{u} &= \xi_0 \underline{u}_1 + \xi_0^2 \underline{u}_2 + \dots \\ P &= P_0 + \xi_0 P_1 + \xi_0^2 P_2 + \dots\end{aligned}\tag{3.6}$$

Die erste Reihenentwicklung ist äquivalent der Reihenentwicklung für die Strömungsfunktion V :

$$V = V_0 + \xi_0 V_1 + \xi_0^2 V_2 + \dots$$

wobei die unteren Indices $0, 1, 2 \dots$ die Ordnung der Approximation angeben .

Für die Funktion $h(V)$ nehmen wir eine Taylor-Entwicklung um V_0 an :

$$\begin{aligned}h(V) &= h(V_0) + \xi_0 V_1 h'(V_0) + \xi_0^2 (V_2 h'(V_0) + \\ &+ 1/2 V_1^2 h''(V_0)) + \dots\end{aligned}\tag{3.7}$$

Setzen wir voraus , daß überall $P_0 \neq 0$ ist , so erhält man :

$$P^{1/\delta} = P_0^{1/\delta} \left(1 + \xi_0 \cdot 1/\delta \cdot P_1/P_0 + \xi_0^2 \left(1/\delta P_2/P_0 + \right. \right. \\ \left. \left. + 1/2 \delta (1/\delta - 1) P_1^2 / P_0^2 \right) + \dots \right) \quad 3.8)$$

und

$$P^{-1/\delta} = P_0^{-1/\delta} \left(1 - \xi_0 \cdot 1/\delta P_1/P_0 + \xi_0^2 \left(-1/\delta P_2/P_0 + \right. \right. \\ \left. \left. + 1/2 \delta (1/\delta + 1) P_1^2 / P_0^2 \right) + \dots \right) \quad 3.8')$$

Wir geben hier die endgültigen Ausdrücke für alle Größen in der Form von Reihenentwicklung :

$$B_\xi = B_0/\xi \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} V_0 + \xi_0 \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} V_1 - \xi \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} V_0 \right) + \right. \\ \left. + \xi_0^2 \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} V_2 - \xi \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} V_1 + \xi^2 \cos^2 \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} V_0 \right) + \right. \\ \left. + \dots \right) \quad 3.9)$$

$$B_\theta = -B_0 \left(\frac{\partial}{\partial \xi} V_0 + \xi_0 \left(\frac{\partial}{\partial \xi} V_1 - \xi \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \xi} V_0 \right) + \right. \\ \left. + \xi_0^2 \left(\frac{\partial}{\partial \xi} V_2 - \xi \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \xi} V_1 + \xi^2 \cos^2 \vartheta \frac{\partial}{\partial \xi} V_0 \right) + \right. \\ \left. + \dots \right) \quad 3.9')$$

$$V^{1-1/\delta} = V_0^{1-1/\delta} \left(1 + \xi_0 (1-1/\delta) V_1/V_0 + \right. \\ \left. + \xi_0 (1-1/\delta) \left(V_2/V_0 - 1/2 \delta V_1^2 / V_0^2 \right) + \dots \right) \quad 3.10)$$

$$\rho = 1/c_0^2 \left(B_0^2 / 8\pi \right)^{1/2} P_0^{-1/2} V_0^{1/2} \cdot \left(1 + \xi_0 \left(1/2 P_1 / P_0 + (1 - 1/2) V_1 / V_0 \right) + \dots \right) \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} 1/c_j &= -B_0 / 4\pi a \left(G V_0 + \xi_0 \left(G V_1 - \cos \vartheta / \xi \right) \right. \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial V_0}{\partial \xi} \right) + \xi_0^2 \left(G V_2 + \cos^2 \vartheta / \xi \right) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^3 \frac{\partial V_0}{\partial \xi} \right) - \xi \cos \vartheta G V_1 - \cos \vartheta \frac{\partial V_1}{\partial \xi} + \\ &\quad \left. + \sin \vartheta / \xi \frac{\partial V_1}{\partial \vartheta} \right) + \dots \quad (3.12) \end{aligned}$$

wobei

$$G \equiv 1/\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + 1/\xi^2 \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}$$

ist .

$$\begin{aligned} \chi &= c_0 / B_0 \left(B_0^2 / 8\pi \right)^{1/2} P_0^{-1/2} \left(h(V_0) + \right. \\ &\quad \left. + \xi_0 \left(V_1 h'(V_0) - 1/2 P_1 / P_0 h(V_0) \right) + \dots \right) \quad (3.13) \end{aligned}$$

Die Ausdrücke für die Komponenten der Geschwindigkeit

u_ξ und u_ϑ sind :

$$\begin{aligned}
 u_{\xi} = & c_0 (B_0^2/8\pi)^{1/2} P_0^{-1/2} / \xi (\xi_0 h(V_0) \frac{\partial}{\partial \vartheta} V_0 + \\
 & + \xi_0^2 (\frac{\partial}{\partial \vartheta} V_0 (V_1 h'(V_0) - 1/2 P_1/P_0 h(V_0)) + \\
 & + h(V_0) (\frac{\partial}{\partial \vartheta} V_1 - \xi \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} V_0)) + \dots)
 \end{aligned}$$

3.14)

und

$$\begin{aligned}
 u_{\vartheta} = & -c_0 (B_0^2/8\pi)^{1/2} P_0^{-1/2} (\xi_0 h(V_0) \frac{\partial}{\partial \xi} V_0 + \\
 & + \xi_0^2 (\frac{\partial}{\partial \xi} V_0 (V_1 h'(V_0) - 1/2 P_1/P_0 h(V_0)) + \\
 & + h(V_0) (\frac{\partial}{\partial \xi} V_1 - \xi \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \xi} V_0)) + \dots)
 \end{aligned}$$

3.15)

Die Randbedingungen .

Die Annahme , daß überall $P_0 \neq 0$ ist , zwingt uns zu der Randbedingung

$$P \Big|_{\xi=1} \neq 0$$

Die Randbedingung für ρ lautet dann ebenfalls :

$$\rho \Big|_{\xi=1} \neq 0$$

Um das Plasma einzuschließen müssen wir fordern , daß die Normalkomponente der Geschwindigkeit an der Wand verschwindet.

d.h.
$$u_{\xi} \Big|_{\xi=1} = 0$$

Diese Bedingung kann automatisch erfüllt werden , wenn man fordert , daß die Normalkomponente des Magnetfeldes an der Wand verschwindet .

d. h.
$$B_{\xi} \Big|_{\xi=1} = 0$$

Der letzten Bedingung aber wird durch die Randbedingung

$$V \Big|_{\xi=1} = \text{const.}$$

genügt , denn $V = \text{const.}$ sind die Flächen , auf denen die magnetischen Kraftlinien liegen .(2)

Die Randbedingung

$$j_{\xi} \Big|_{\xi=1} = 0$$

ist dann in jeder Ordnung erfüllbar , wie wir im folgenden sehen werden .

Die Gleichungen nullter Ordnung .

Wir schreiben die nullte Ordnung der vierten Gleichung von (A) auf , unter Berücksichtigung der obigen Entwicklungen für die physikalischen Größen , die in dieser Gleichung vorkommen .

Der erste Term gibt keinen Beitrag in dieser Ordnung .

Es folgt dann :

$$\nabla P_0 - 1/c \mathbf{j}_0 \wedge \underline{B}_0 = 0$$

oder :

$$\text{und } 1/a \frac{\partial}{\partial \xi} P_0 = - B_0^2 / 4\pi G V_0 \cdot 1/a \frac{\partial}{\partial \xi} V_0$$

$$1/a \xi \frac{\partial}{\partial \theta} P_0 = - B_0^2 / 4\pi G V_0 \cdot 1/a \xi \frac{\partial}{\partial \theta} V_0$$

Also ist :

$$\nabla P_0 = -B_0^2 / 4\pi G V_0 \nabla V_0 \quad (3.16')$$

Daraus folgt :

$$\nabla P_0 \wedge \nabla V_0 = 0 ,$$

was aber besagt , daß

$$P_0 = P_0(V_0) .$$

3.16') lautet dann :

$$G V_0 = - 4\pi / B_0^2 P_0' \quad (3.16)$$

wobei $P_0' = \frac{d P_0}{d V_0}$

Gleichung 3.16) ist dieselbe Gleichung , die man für den statischen Fall bekommt .

Linearer Ansatz .

Wie in (1 , 2) nehmen wir an , daß P_0 quadratisch in V_0 ist ; damit wird Gleichung 3.16) linear , und infolgedessen kann man die üblichen Methoden zur Lösung von linearen Differential-gleichungen anwenden .

Es ist also

$$\frac{d P_0}{d V_0} = B_0^2 / 4 \pi (l V_0 - m) \quad l \neq 0 .$$

Wir setzen eine Lösung der Gleichung 3.16) an in der Form :

$$V_0 = V_0 (\xi) ,$$

unabhängig von ϵ .

Die Lösung der homogenen Gleichung zu 3.16) ist :

$$V_0^h = J_0 (\sqrt{l} \xi)$$

Eine partikuläre Lösung von 3.16) ist :

$$V_0^{\text{inh.}} = m / l$$

Die allgemeine Lösung heißt also :

$$V_0 = \ell' / \ell J_0(\sqrt{\ell} \xi) + m / -\ell \quad 3.17)$$

ℓ' ist eine beliebige Konstante .

Wegen der Randbedingungen für V und j

$$\text{d.h. } V_0 \Big|_{\xi=1} = \text{const.} = 1 \text{ z.B.}$$

$$\text{und } j_0 \Big|_{\xi=1} = 0$$

muß :

$$m = -\ell$$

$$\text{und } J_0(\sqrt{\ell}) = 0 \quad \text{sein.} \quad 3.17')$$

Das bedeutet , daß nicht Druckverteilungen mit beliebigen Parametern ℓ und m für das dynamische Gleichgewicht in toroidalen Z- Pinch zulässig sind .

Insbesondere muß $\sqrt{\ell}$ eine Nullstelle der Bessel-Funktion J_0 sein .

Bei dieser Wahl von ℓ und m läßt sich übrigens stets

$P_0 > 0$ erreichen :

$$P_0 = \ell B_0^2 / 8\pi \left((V_0 - 1)^2 + 2 n / \ell - 1 \right) \quad 3.18)$$

(n ist die Integrationskonstante .)

P_0 ist also größer als Null , wenn

$$n > \ell / 2 \quad \text{ist .}$$

Auch nimmt P_0 sein Minimum auf der Wand an , wie man leicht verifizieren kann .

N.B. : Würde man versuchen , durch den Ansatz :

$$V_0 = S (\xi) \cdot Q (\Theta)$$

eine allgemeinere , auch von ϱ abhängige Lösung von 3.16) zu konstruieren , so würde man durch Einsetzen in die Differential-gleichung und in die Randbedingung

$$Q \equiv \text{const. erhalten .}$$

Das zeigt , daß die obige Lösung die allgemeinste ist , welche die vorgeschriebenen Randbedingungen erfüllt .

Das ist zu erwarten , denn V_0 muß zylindersymmetrisch sein .

Die Gleichungen erster Ordnung :

Das erste Term der vierten Gleichung von (A) liefert auch in dieser Ordnung keinen Beitrag , sodaß

$$\nabla P_1 - 1/c \underline{j}_0 \wedge \underline{B}_1 - 1/c \underline{j}_1 \wedge \underline{B}_0 = 0 ,$$

ausführlicher :

$$\begin{aligned} 1/a \frac{\partial}{\partial f} P_1 &= - B_0^2 / 4 \pi a \left(\frac{\partial}{\partial f} V_0 G V_1 + G V_0 \frac{\partial}{\partial f} V_1 \right) + \\ &+ \text{eine Funktion von } f \text{ und } \theta , \text{ die unabhängig} \\ &\text{von } V_1 \text{ ist .} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 1/a f \frac{\partial}{\partial \theta} P_1 &= - B_0^2 / 4 \pi a f G V_0 \frac{\partial}{\partial \theta} V_1 + \\ &+ \text{eine Funktion von } f \text{ und } \theta \text{ ohne } V_1\text{-Abhängigkeit.} \end{aligned}$$

Nach einigen Umformungen erhält man :

$$\begin{aligned} 1/a \frac{\partial}{\partial f} P_1 &= - B_0^2 / 4 \pi a G V_0 \left(\left(\frac{\partial}{\partial f} V_1 - f \cos \theta \frac{\partial}{\partial f} V_0 \right) + \right. \\ &+ \frac{\partial}{\partial f} V_0 \left(G V_1 - f \cos \theta G V_0 - \right. \\ &\left. \left. - \cos \theta \frac{\partial}{\partial f} V_0 \right) \right) \end{aligned}$$

und

$$1/a f \frac{\partial}{\partial \theta} P_1 = - B_0^2 / 4 \pi a f \cdot G V_0 \frac{\partial}{\partial \theta} V_1 ,$$

oder :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial f} P_1 &= - B_0^2 / 4 \pi \frac{f'}{\sqrt{f}} \left(-\sqrt{f} J_0(\sqrt{f}) \right) \frac{\partial}{\partial f} V_1 - \\ &- J_1(\sqrt{f}) G V_1 - 2 f' f \cdot \cos \theta J_0(\sqrt{f}) \cdot \\ &\cdot J_1(\sqrt{f}) - \frac{f'}{\sqrt{f}} \cos \theta J_1^2(\sqrt{f}) \right) . \end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} P_1 = - B_0^2 / 4 \pi \ell' J_0(\sqrt{\ell} f) \frac{\partial}{\partial \vartheta} V_1 \quad (3.19)$$

Um diese Gleichungen für V_1 und P_1 zu lösen, kann man erst P_1 eliminieren; dann bekommt man eine Gleichung dritter Ordnung in V_1 , die sehr kompliziert ist.

Jedoch wollen wir hier einen anderen Weg einschlagen; wir erhalten dann Lösungen, die die Randbedingungen:

$$\begin{array}{l} P_1 \\ j_1 \\ V_1 \\ \rho_1 \\ u \end{array} \Big|_{f=1} = 0$$

erfüllen.

Wir nehmen an, daß P_1 sich in der Form:

$$P_1(f, \vartheta) = P_1(V_1) + g(f, \vartheta) \quad (3.20)$$

schreiben läßt, wobei g zu bestimmen bleibt.

Es folgt aus der zweiten Gleichung von 19), daß

$$\left(\frac{d P_1}{d V_1} - B_0^2 / 4 \pi \ell' J_0(\sqrt{\ell} f) \right) \frac{\partial}{\partial \vartheta} V_1 = - \frac{\partial}{\partial \vartheta} g.$$

Wenn außerdem $P_1(V_1)$ linear in V_1 ist ,

$$\text{d.h.} \quad P_1(V_1) = m' \quad (m' = \text{const.} \neq 0)$$

so folgt , daß

$$g + (m' - B_0^2 / 4\pi \ell' J_0(\sqrt{\ell} f)) V_1 =$$

$$= \text{eine Funktion von } f .$$

Wir wählen g derart , daß

$$g + (m' - B_0^2 / 4\pi \ell' J_0(\sqrt{\ell} f)) V_1 = 0$$

ist .

Das entspricht der Annahme , daß V_1 die Form :

$$\cos \Theta \quad \text{mal einer Funktion von } f \text{ allein}$$

hat , wie aus der folgenden Gleichung für V_1 zu sehen ist :

$$G V_1 + \ell V_1 = - \frac{\ell'}{\sqrt{\ell}} \cos \Theta (J_1(\sqrt{\ell} f) + 2\sqrt{\ell} f J_0(\sqrt{\ell} f))$$

3.21)

Die allgemeine periodische Lösung⁽⁵⁾ der zugehörigen homogenen Gleichung lautet :

$$V_1^h = \sum_{\nu} J_{\nu}(\sqrt{\ell} f) (C_{\nu} \cos \nu \Theta + D_{\nu} \sin \nu \Theta) .$$

(C_{ν} und D_{ν} sind Konstante) .

Für die Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz :

$$V_1^{\text{inh.}} = - \frac{\ell'}{\sqrt{\ell}} \cos \Theta \quad q (f) .$$

Die Gleichung für q ist dann

$$\begin{aligned} & 1/\xi \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dq}{d\xi} \right) + \left(\ell - 1/\xi^2 \right) q = \\ & = J_1(\sqrt{\ell} \xi) + 2\sqrt{\ell} \xi J_0(\sqrt{\ell} \xi) . \end{aligned}$$

Man rechnet leicht nach, daß diese Gleichung gelöst wird durch

$$q = - \frac{\xi}{2\sqrt{\ell}} \left(J_0(\sqrt{\ell} \xi) - \sqrt{\ell} \xi J_1(\sqrt{\ell} \xi) \right) .$$

Daher ist eine partikuläre Lösung :

$$v_1^{\text{inh.}} = \frac{-\ell'}{2\ell} \left\{ \cos \vartheta \left(J_0(\sqrt{\ell} \xi) - \sqrt{\ell} \xi J_1(\sqrt{\ell} \xi) \right) \right\} .$$

Aus der Randbedingung

$$v_1 \Big|_{\xi=1} = 0$$

folgt endlich :

$$\begin{aligned} v_1 = & \frac{-\ell'}{2\sqrt{\ell}} \cos \vartheta J_1(\sqrt{\ell} \xi) + \frac{\ell'}{2\ell} \left\{ \cos \vartheta \right. \\ & \left. \cdot \left(J_0(\sqrt{\ell} \xi) - \sqrt{\ell} \xi J_1(\sqrt{\ell} \xi) \right) \right\} \end{aligned}$$

3.22) .

Teil 4

Diskussion :

Wir haben eine Klasse von dynamischen Gleichgewichtslösungen bekommen , bei denen die toroidale Komponente der Geschwindigkeit identisch verschwindet .

Das bedeutet physikalisch , daß im toroidalen Z- Pinch nur zwei-dimensionale Bewegungen stattfinden .

Diese Lösungen wurden näherungsweise bis zur ersten Ordnung in ξ . (die Inverse des Aspektverhältnisses des Torus) berechnet .

Sie hängen von 3 Parametern ℓ , ℓ' und n und einer beliebigen Funktion h (V) ab .

Man erhält auch noch eine große Klasse von dynamischen Lösungen , wenn man $\ell' = \ell$ setzt ; die gezeichneten Kurven stellen solche Lösungen dar .

Ein merkwürdiges Phänomen kann an diesen Kurven bei großen ℓ , d.h. bei hohen Plasmadruck , beobachtet werden .

Wenn ℓ zunimmt , bemerken wir , daß es Flächen

$$\xi = \text{const.} \quad (0 < \xi < 1)$$

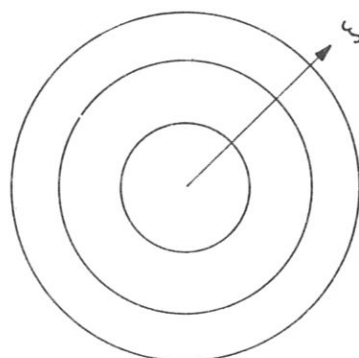
gibt , auf denen P , ρ , V , B_{ξ} in 1. Ordnung const. sind und die Geschwindigkeit praktisch Null ist .

Die Zahl dieser Flächen hängt von ℓ ab .

Z.B. gibt es für $\ell = 74,82$ zwei solche Flächen .

Wir wollen diese Flächen als " die statischen Flächen der Homogenität " im Plasma bezeichnen .

(siehe Abbildung !)



Man erhält sie allgemein in unserer Näherung aus den Wurzeln der transzendenten Gleichung

$$x J_0(x) + J_1(x) (\ell - x^2) = 0$$

wobei x im Intervall $[0, \sqrt{\ell}]$ liegen muß.

Die Lösung dieser Gleichung für $\ell = 74,82$ ist im Bild (1) graphisch durchgeführt. (auch für $\ell = 30,25$ im Bild (0)).

Bis zur 1. Ordnung zeigt sich auch, daß für $\gamma = 5/3$ die Geschwindigkeitsverteilung mit der linearen Annahme für $h(V)$ und für kleines ℓ eine Gestalt besitzt, die einer Gauß'schen Verteilung ähnlich ist.

Wenn ℓ wächst, d.h. P steigt, löst sich die Verteilungskurve in mehrere Maxima auf.

B_f , B_0 und u_3 wechseln für größere ℓ ihre Richtung mit wachsendem Abstand von der Torusachse.

Wir haben die Kurven für $\ell = 5,81$; $n = 5,81$ und

$$\ell = 74,82; n = 70 \quad \text{und} \quad \xi_0 = 1/4 \quad \text{in Bild 11 bis 26}$$

gezeichnet.

Die Geschwindigkeitskurven gehören zu $\gamma = 1$ (Isothermie) und $\gamma = 5/3$ (eiatomiges Gas).

Im Fall $\ell = 5,81$ geben wir die Geschwindigkeitsverteilung für zwei mögliche Formen der Funktion $h(V)$ wieder, und zwar:

$$h(V) = V - 1 \quad (\text{Bild 16})$$

$$h(V) = V^2 \quad (\text{Bild 17})$$

Die Werte des Parameters n müssen auf einen Bereich beschränkt werden , in dem sie zu physikalisch vernünftigen Lösungen führen . Für einen bestimmten Wert von n muß außerdem ϵ_0 genügend klein gewählt werden .

Als Grundlage für die numerischen ⁽⁶⁾Rechnungen stellen wir die Formeln für die Größen nullter und erster Ordnung zusammen :

$$V_0 = J_0(\sqrt{\ell} f) + 1 ; J_0(\sqrt{\ell}) = 0$$

$$P_0 = B_0^2 / 8 \pi \ell (J_0^2(\sqrt{\ell} f) + 2 n / \ell - 1)$$

$$\rho_0 = 1/c_0^2 (B_0^2 / 8 \pi)^{1-1/\gamma} P_0^{1/\gamma} V_0^{1-1/\gamma}$$

$$B_{\theta_0} = 0$$

$$B_{\theta_0} = B_0 \sqrt{\ell} J_1(\sqrt{\ell} f)$$

$$V_1 = \sqrt{\ell} / 2 \cos \theta J_1(\sqrt{\ell} f) (1 - f^2) + 1/2 f \cdot \cos \theta J_0(\sqrt{\ell} f)$$

$$P_1 = B_0^2 / 4 \pi (J_0(\sqrt{\ell} f) V_1$$

$$\rho_1 = 1/c_0^2 (B_0^2 / 8 \pi)^{1-1/\gamma} P_0^{1/\gamma} V_0^{1-1/\gamma} \cdot (1/\gamma P_1/P_0 + (1-1/\gamma) V_1/V_0)$$

$$B_{\theta_1} = -B_0 / f \tan \theta V_1$$

$$B_{\theta_1} = -B_0 \cos \theta (1/2 J_0(\sqrt{\ell} f) (\ell + 1 - \ell f^2) - \sqrt{\ell} / 2 J_1(\sqrt{\ell} f) (1/f + 2 f))$$

$$u_{f_1} = 0$$

$$u_{\theta_1} = c_0 \left(\frac{B_0^2}{8\pi} \right)^{1/8} P_0^{-1/8} h(V_0) \cdot \sqrt{t} J_1(\sqrt{t} f) ,$$

wobei

$$h(V_0) = V_0 - 1 = J_0(\sqrt{t} f) \quad \text{im ersten Fall}$$

$$= V_0^2 \quad \text{im zweiten Fall .}$$

Anhang I

Wir diskutieren hier die Voraussetzung :

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0$$

Wie im Text erwähnt, sind drei Spezialfälle von Interesse :

a) $\gamma = \infty$

d.h. das Plasma ist inkompressibel, so daß die Dichte konstant bleibt.

$$\rho = \rho_0 = \text{const.}$$

Aus 2.9') folgt, daß

$$\chi = \chi(s) \quad \text{ist.}$$

Gleichung 2.11) ist dann identisch befriedigt, und Gleichung 2.10) bestimmt P, so daß

$$P' = \rho_0 u_{\varphi}^2 / s - s/4\pi V' (V' + s V'')$$

Hieraus kann man ohne weiteres P als Funktion von s bestimmen.

b) In diesem Fall lautet das System der Gleichungen :

$$\rho (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} + \nabla P - 1/c \underline{j} \wedge \underline{B} = 0$$

$$\underline{u} \cdot \nabla P = 0$$

$$\underline{u} \cdot \nabla \rho = 0$$

$$\nabla \wedge \underline{B} = 4\pi/c \underline{j}$$

A.A)

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0$$

$$\nabla \wedge \underline{E} = 0$$

$$\underline{E} + 1/c \underline{u} \wedge \underline{B} = 0$$

In zylindrischen Koordinaten explizit ausgeschrieben :

$$B_s \frac{\partial}{\partial s} (s u_\varphi) + B_z \frac{\partial}{\partial z} (s u_\varphi) = 0 \quad \text{A.I.1)}$$

$$B_s \frac{\partial}{\partial s} P + B_z \frac{\partial}{\partial z} P = 0 \quad \text{A.I.2)}$$

$$B_s \frac{\partial}{\partial s} \rho + B_z \frac{\partial}{\partial z} \rho = 0 \quad \text{A.I.3)}$$

Aus der 5ten Gleichung von A.A) kann man das Magnetfeld mit Hilfe einer Strömungsfunktion V herleiten :

$$B_s = 1/s \frac{\partial}{\partial z} V \quad \text{A.I.4)}$$

$$B_z = -1/s \frac{\partial}{\partial s} V$$

Aus der 6ten Gleichung folgt mit Hilfe der Gleichung A.1) , daß

$$V = V(s) \quad \text{A.I.4')}$$

ist , und aus 1 ,2 und 3 folgt :

$$\begin{aligned} u_\varphi &= u_\varphi(s) \\ P &= P(s) \\ \rho &= \rho(s) \\ \chi &= \chi(s) \end{aligned} \quad \text{A.I.5)}$$

Die Stromdichte j ist durch

$$4\pi/c j = 1/s^2 (s V'' - V')$$

gegeben .

Die Geschwindigkeits-komponenten u_s und u_z sind

$$\begin{aligned} u_s &= 0 \\ u_z &= \chi B_z = -\chi /s V' . \end{aligned}$$

Die Komponenten des elektrischen Feldes sind :

$$E_s = u \varphi / c \cdot s \quad V'$$

$$E_z = 0$$

Der Druck P kann dann durch Integration der Gleichung :

$$P' = \rho u \varphi^2 / s + 1/4\pi \cdot s^3 V' (V' - s V'')$$

bestimmt werden .

Anhang II

c) Der dritte Fall , $u_s = u_z = 0$, ergibt das im Teil 2 mit B) bezeichnete Gleichungssystem .

In dem Koordinaten-system , das wir im Teil 3 (Seite 10) verwenden , haben die Größen B_{ξ} , B_{ϑ} , und u die folgenden Darstellungen :

$$\underline{B} = (B_{\xi} , B_{\vartheta} , 0)$$

$$\underline{j} = (0 , 0 , j)$$

$$\underline{u} = (0 , 0 , u) .$$

Die 3.Gleichung des Systems(B) (Seite 9) wird durch die Einführung einer rotationssymmetrischen Strömungsfunktion $V (\xi , \vartheta)$ erfüllt , und zwar ist

$$\begin{aligned} B_{\xi} &= B_0 / \xi \cdot x \frac{\partial}{\partial \vartheta} V \\ B_{\vartheta} &= - B_0 / x \frac{\partial}{\partial \xi} V \end{aligned} \quad \text{A.II.1)}$$

wobei V/x die toroidale Komponente eines Vektorpotentials ist .

Die 4. und 5.ten Gleichung sind erfüllt , wenn nur u/x eine Funktion von V ist .

Das sieht man leicht durch Einsetzen der Ausdrücke

$$E_{\xi} = 1/c \cdot u \cdot B_{\vartheta}$$

$$E_{\vartheta} = -1/c \cdot u \cdot B_{\xi}$$

in der 4.ten Gleichung von(B) und mit Hilfe der Gleichung II.1) .

D.h.

$$u = x \cdot f (V) \quad \text{mit beliebigen } f .$$

Für die Stromdichte j gilt :

$$4\pi/c j = -B_0/a \bar{G} V$$

wobei

$$\bar{G} = 1/\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi}{(1 + \epsilon_0 \xi \cos \theta)} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + 1/\xi^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{(1 + \epsilon_0 \xi \cos \theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) .$$

Jetzt kann man die zwei anderen Komponenten der ersten Gleichung von (B) hinschreiben :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} P = \epsilon_0 \rho u^2 \cos \theta /x - B_0^2/4\pi \cdot 1/x \bar{G} V \frac{\partial}{\partial \xi} V$$

und

$$1/\xi \frac{\partial}{\partial \theta} P = -\epsilon_0 \rho u^2 \sin \theta /x - B_0^2/4\pi \cdot 1/x \cdot \xi \bar{G} V \frac{\partial}{\partial \theta} V .$$

Literatur

1. Schlüter, A. Z. Naturforschung 12a, 850 (1957)
2. Laing, E.W. ; Roberts, S.J. ; Whipple, R.T.P.
AERE - R 2895 (1959)
Whiteman, K.J. UKAEA ; CLM - P14 (1962)
3. Spitzer, L. jr. Physics of fully ionized gases
Interscience Publishers, Inc. , N.Y. 3th edition (1961) 19; 42
4. DeWitt, C. ; Detoeuf, J.F. the theory of neutral and
ionized gases , Hermann, Paris (1960) 256
Symposium on Plasma Physics , Pergamon Press (1960) 188
5. Watson, G.N. the theory of Bessel functions, 2nd edition
C.U.P. (1952)
6. Chistova, E.A. Tables of Bessel functions of the true
argument and of the integrals derived from them ,
Pergamon Press (1959)

Erläuterung der Abbildungen

In sämtlichen Diagrammen bedeutet die Abszisse ξ den Abstand von der Torusachse . $\xi_0 = 1/4$ ist ein für allemal fest gewählt . θ ist der Polarwinkel im Torusquerschnitt (vgl. Skizze auf Seite 39) .

Bild 0 bis 1 : graphische Lösung der Gleichungen :

$$\begin{aligned} x J_0 + (74,82 - x^2) J_1 &= 0 \\ ; \quad x J_0 + (30,25 - x^2) J_1 &= 0 \end{aligned}$$

Bild 11 bis 17 : Darstellung von Lösungen in 1. Ordnung nach ξ_0 zu den Parameterwerten $\ell = 5,81$ und $n = 5,81$.

Für die willkürliche Funktion $h(V)$ wurde $V - 1$ bzw. V^2 gewählt ; ebenso wurde $\gamma = 5/3$ und $\gamma = 1$ verwendet . Dies wirkt sich nur auf die Geschwindigkeit aus ; siehe Bild 16 und 17

Bild 21 bis 25 : Wie Bild 11 bis 17 , jedoch $\ell = 74,82$ und $n = 70$.

Man beachte hier die " statischen Flächen der Homogenität " bei $\xi \approx 0,44$ und $\xi \approx 0,8$.

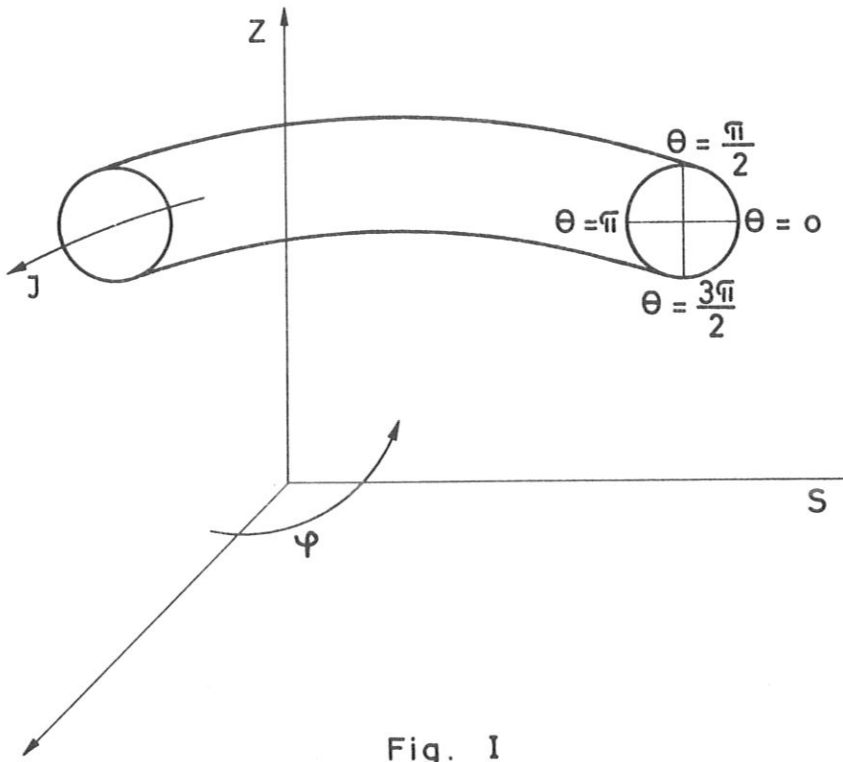


Fig. I

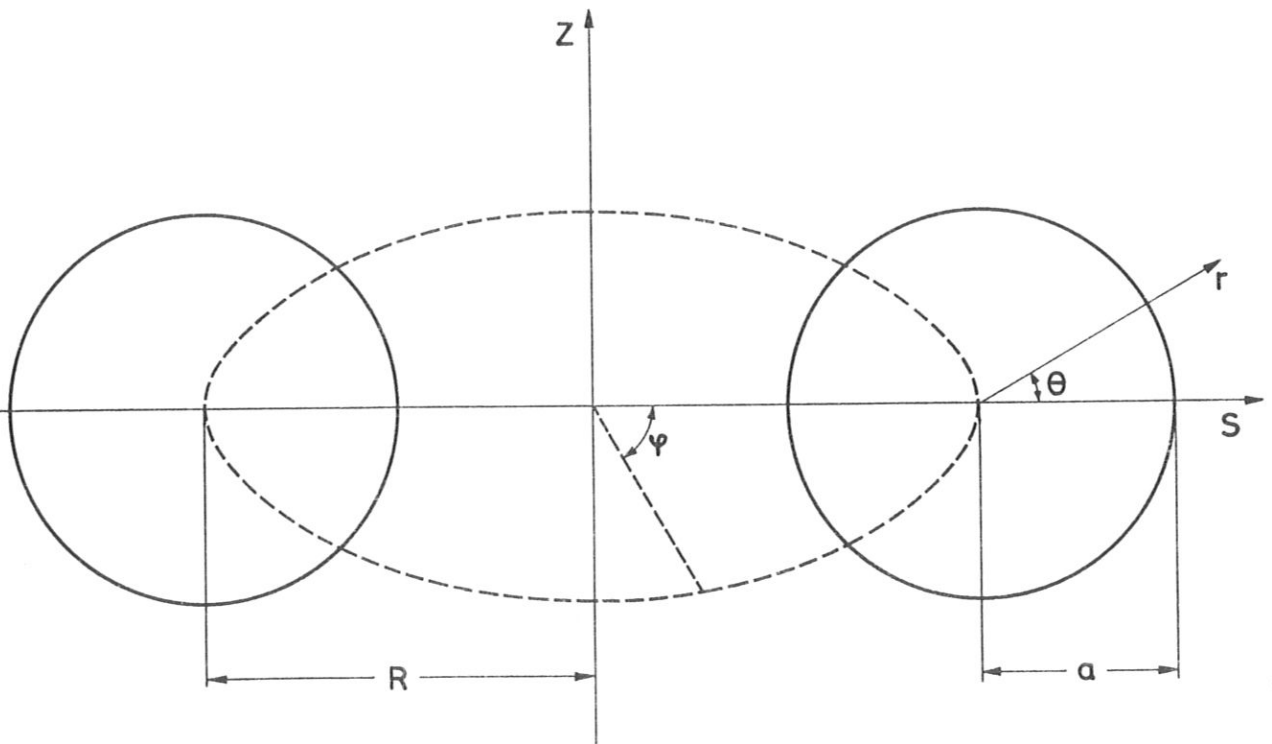
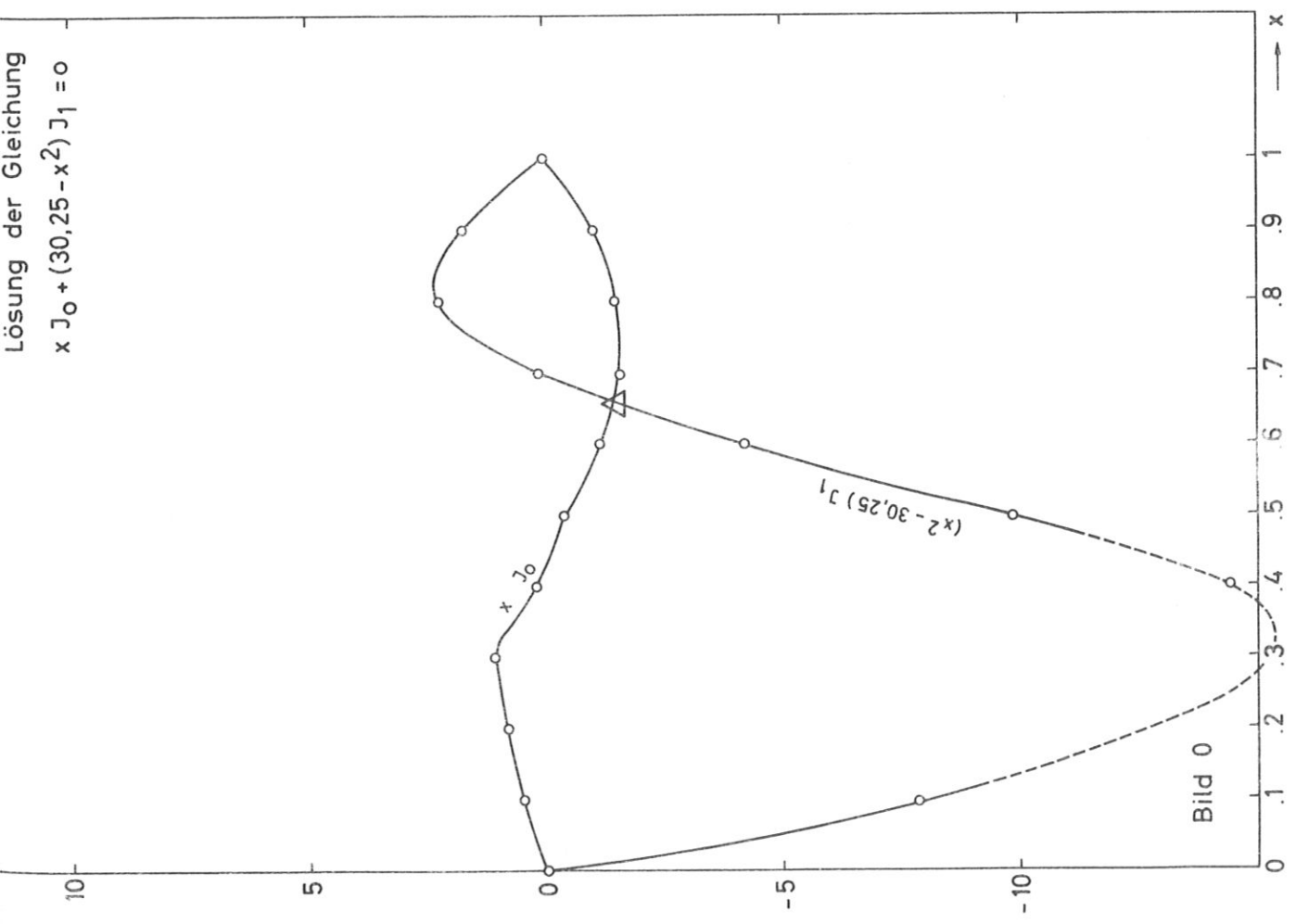


Fig. II

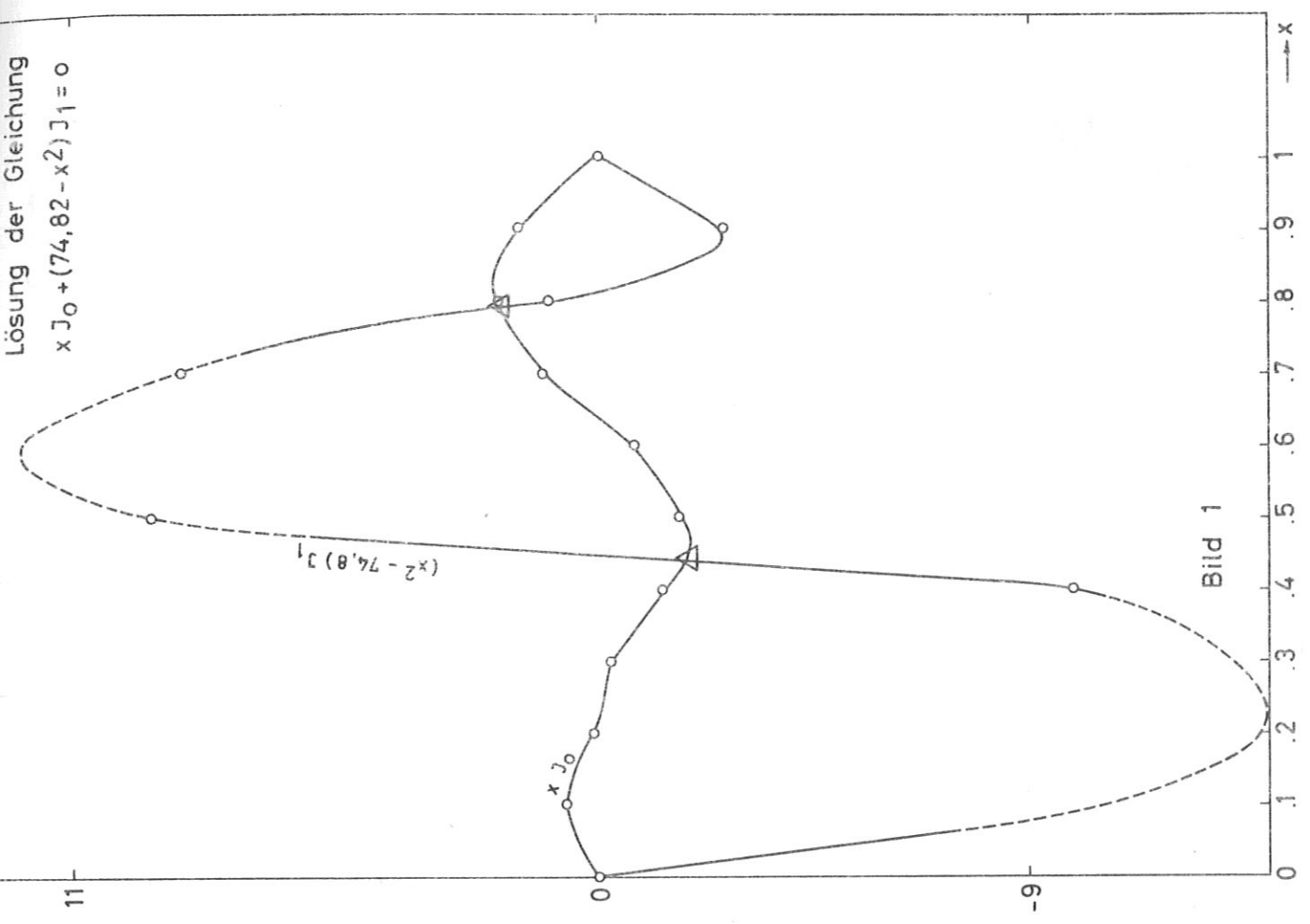
Lösung der Gleichung

$$x J_0 + (30,25 - x^2) J_1 = 0$$



Lösung der Gleichung

$$x J_0 + (74,82 - x^2) J_1 = 0$$



$l = 5,81; n = 5,81$

↑
(V)

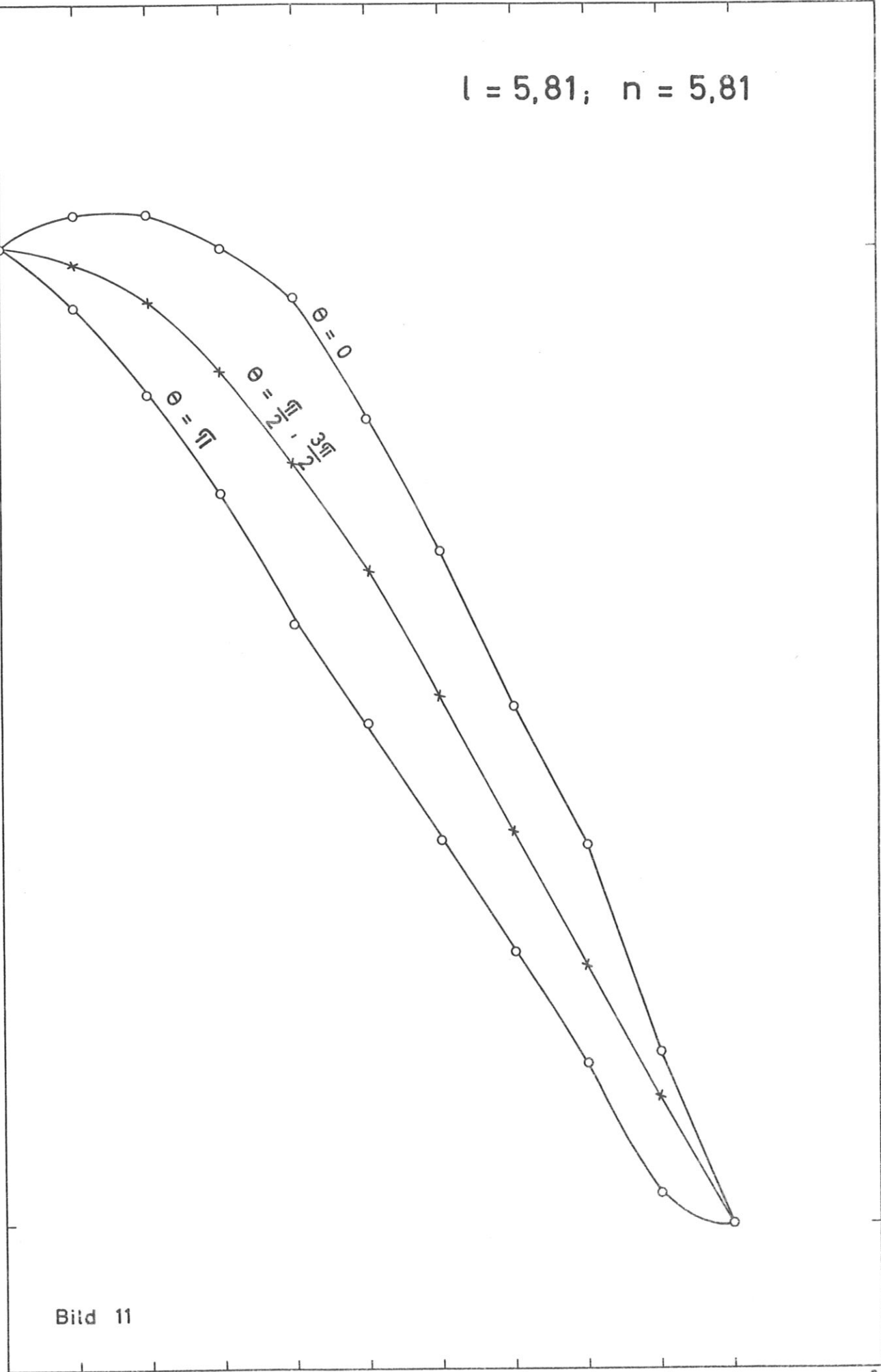
2

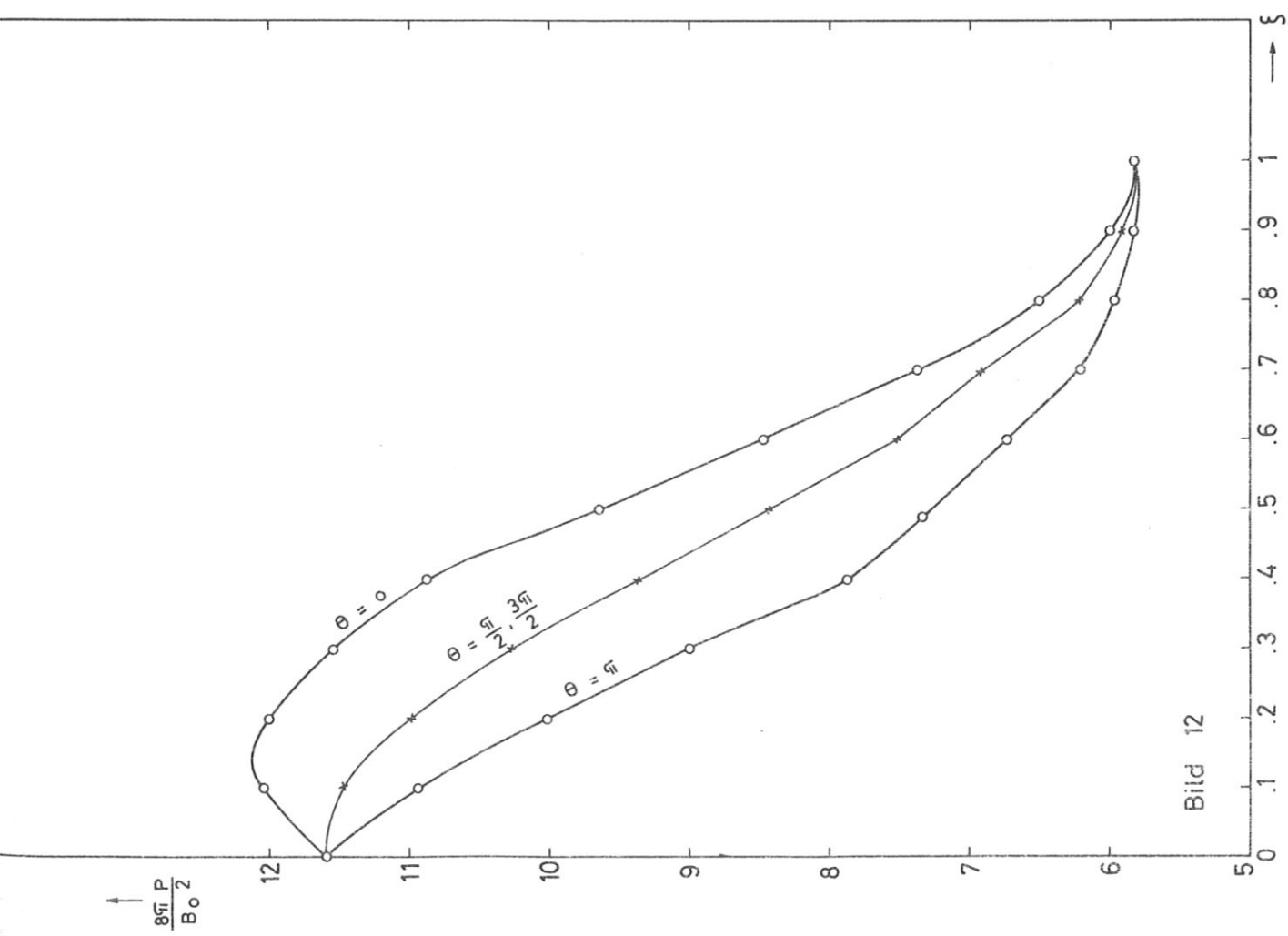
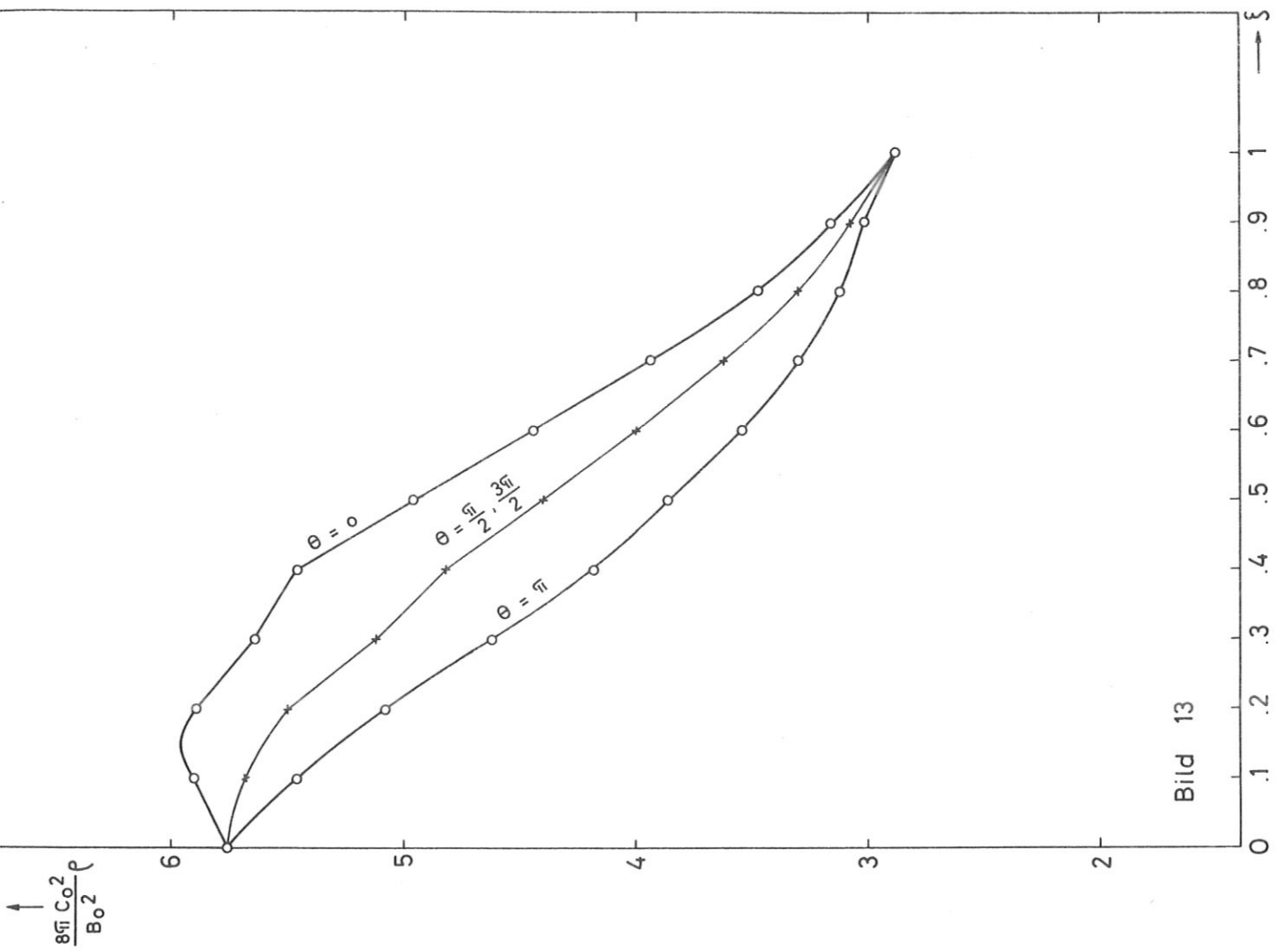
1

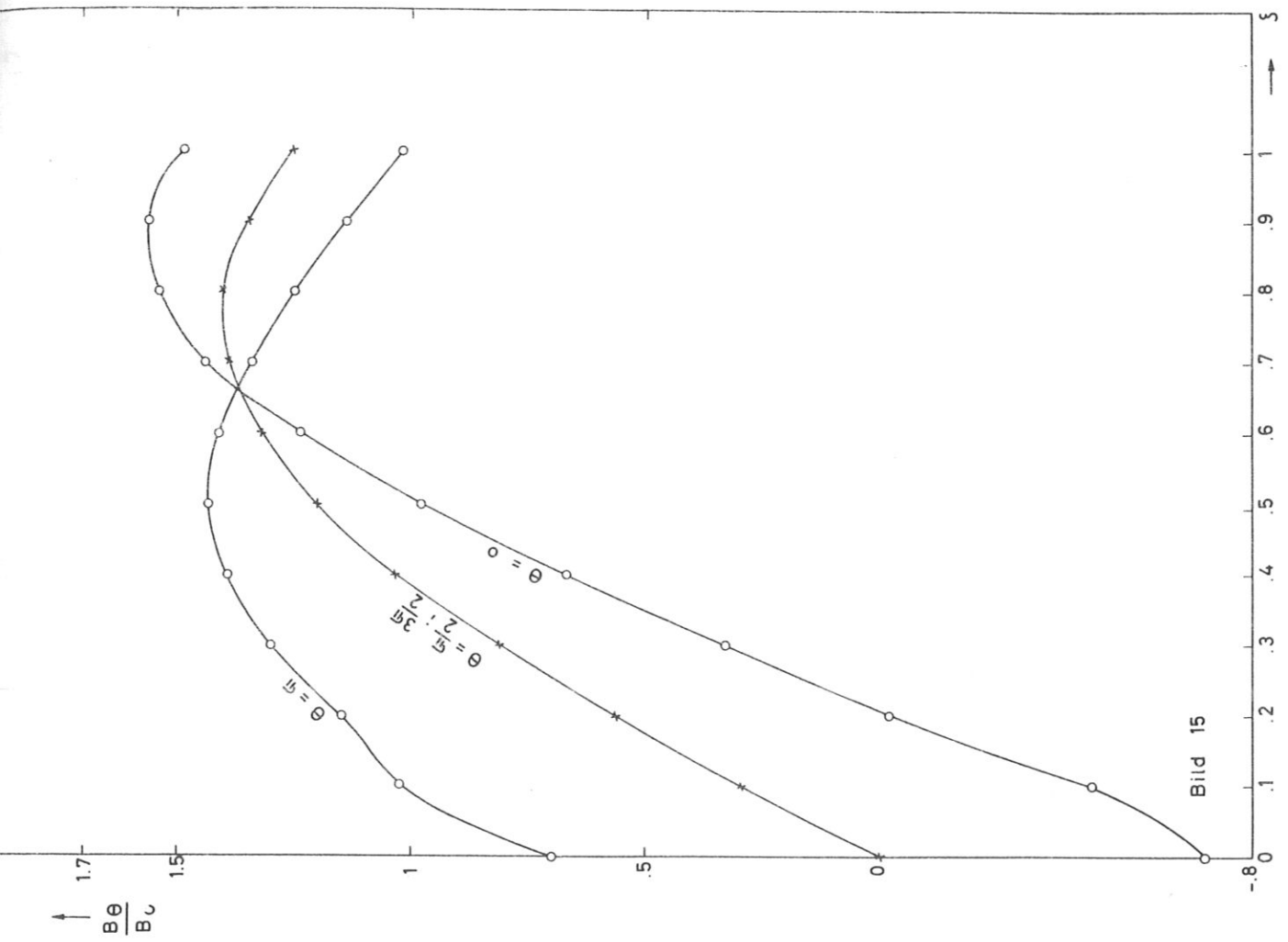
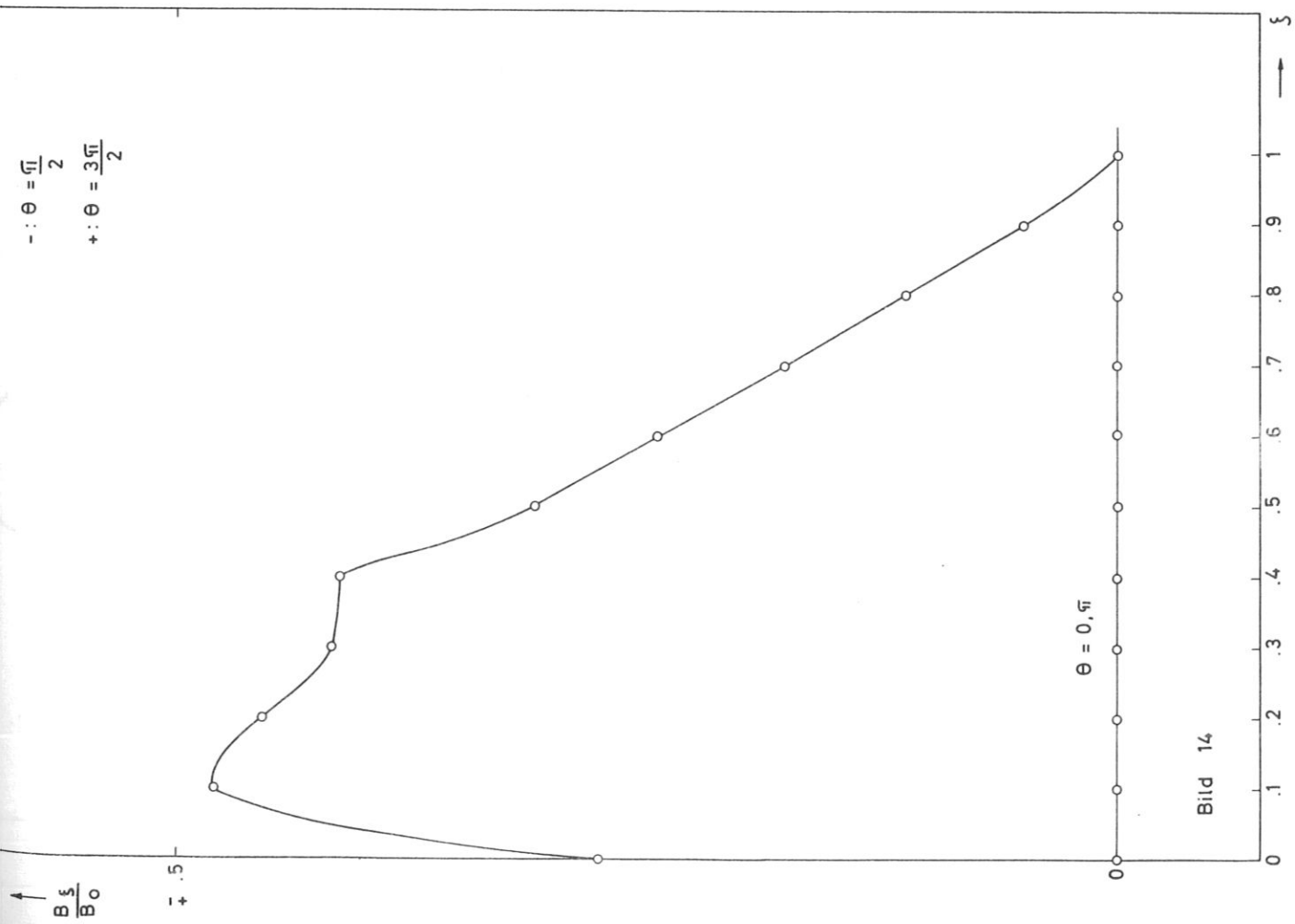
Bild 11

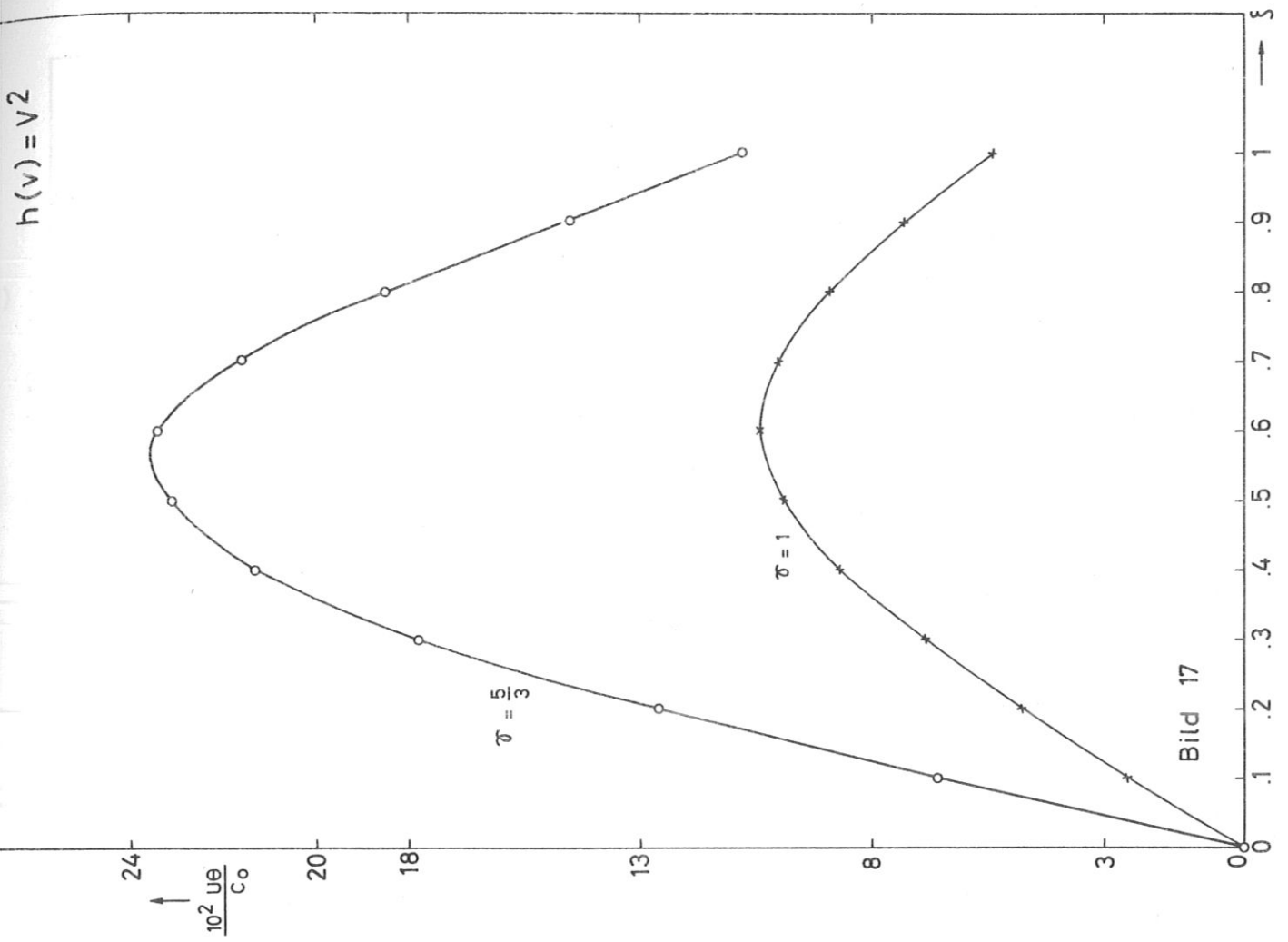
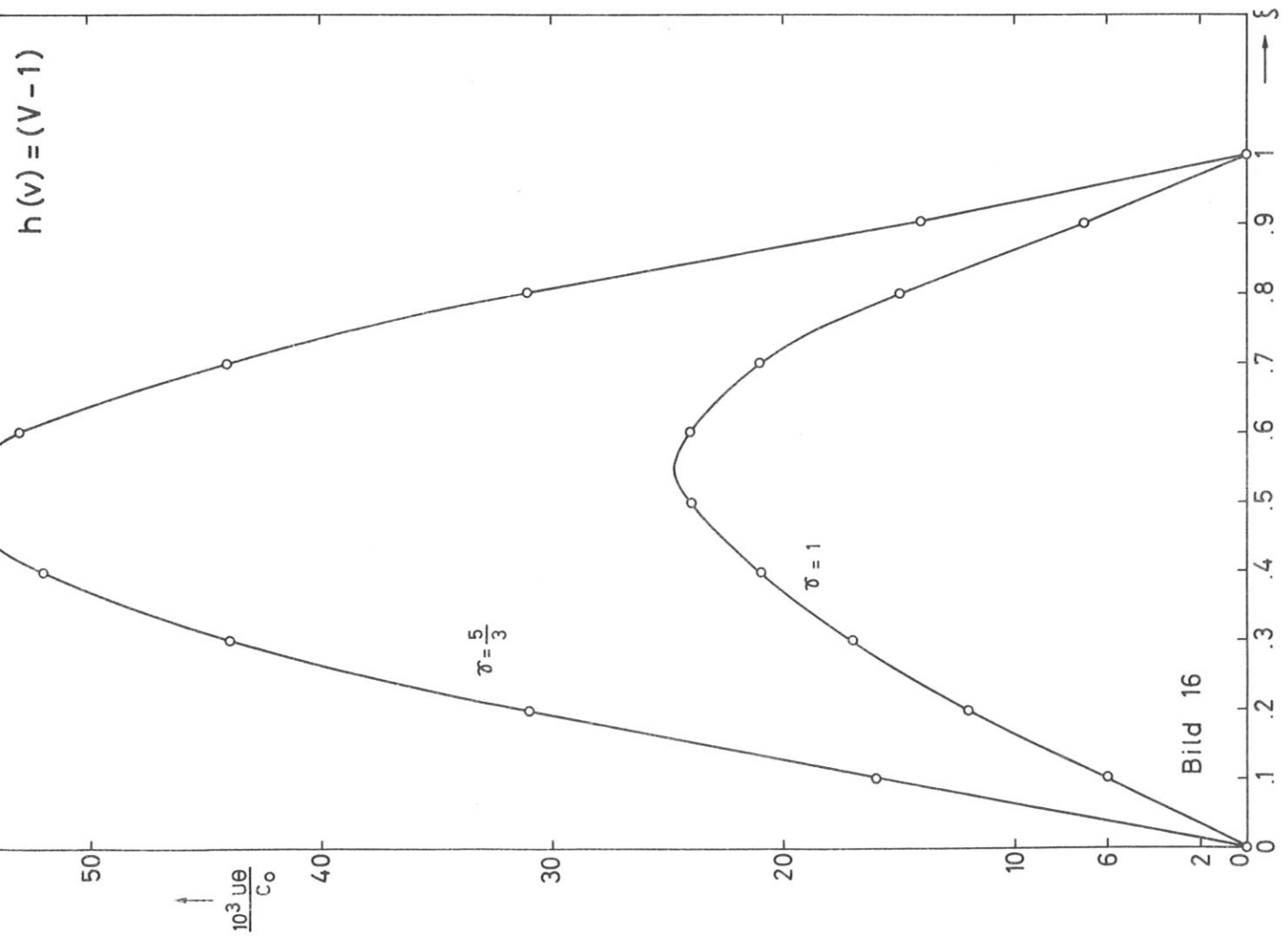
0 .1 .2 .3 .4 .5 .6 .7 .8 .9 1 → ξ

$\theta = 0$
 $\theta = \frac{2}{3}\pi$
 $\theta = \frac{4}{3}\pi$









$l = 74,82$

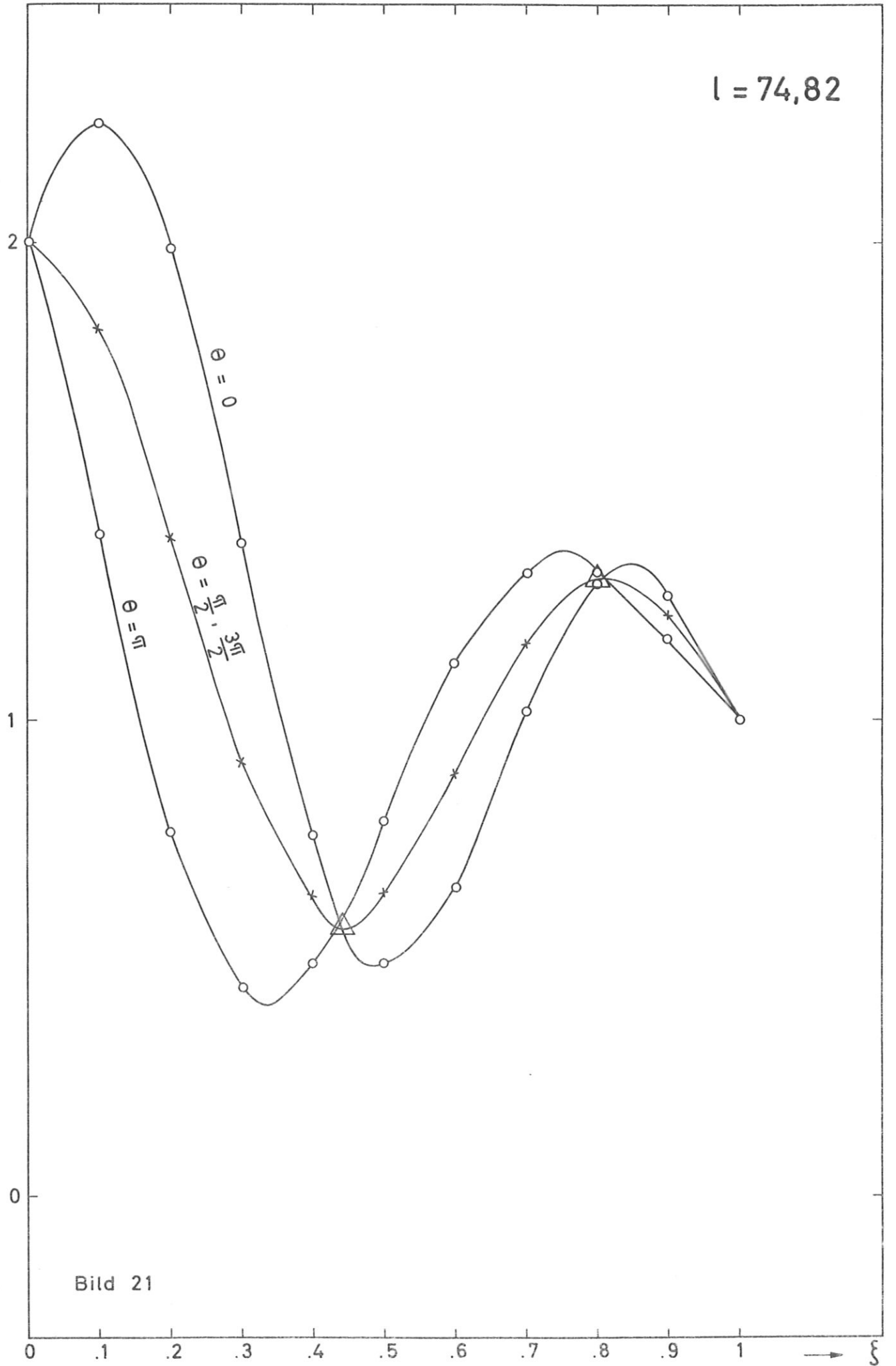


Bild 21

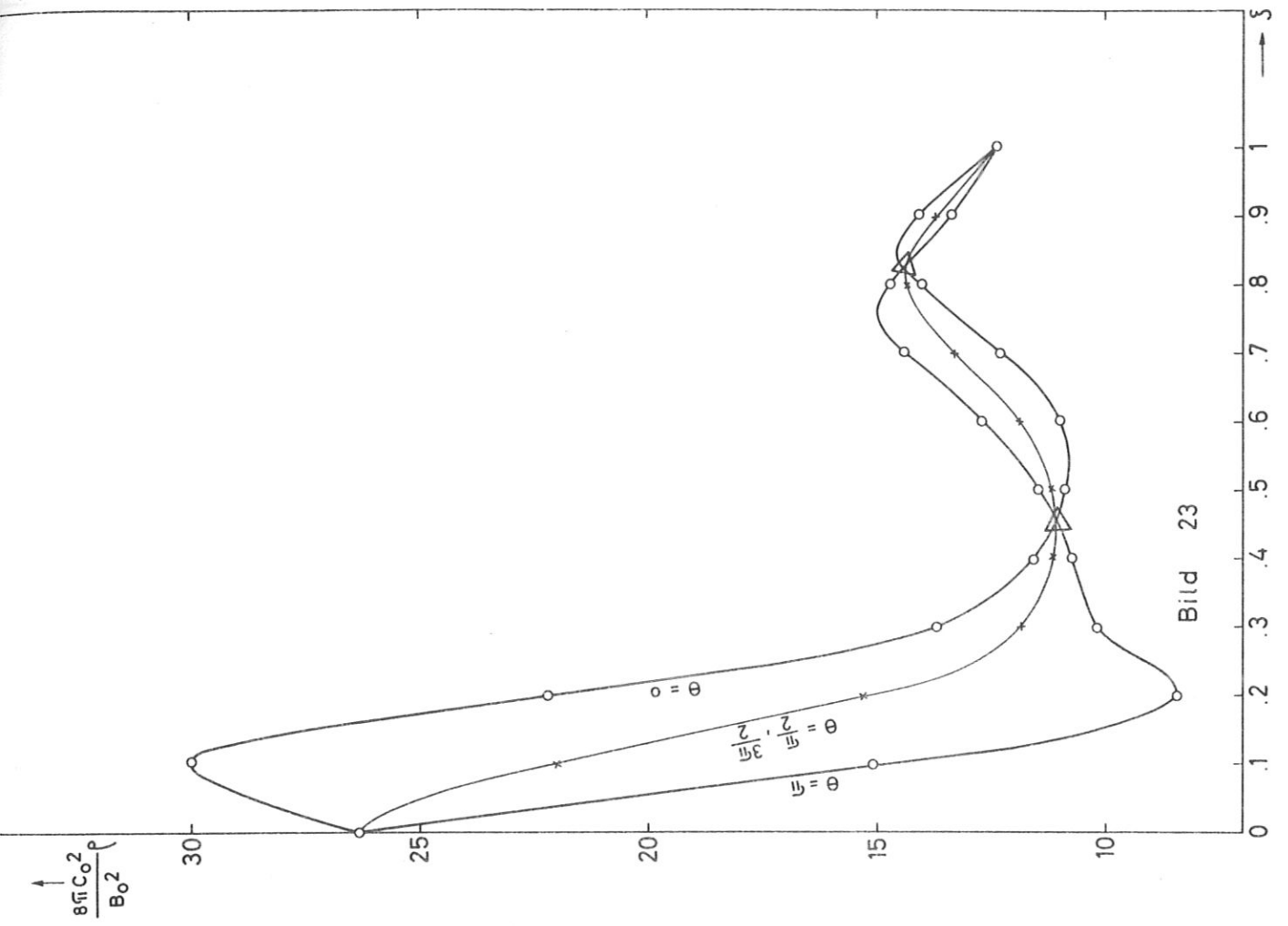


Bild 23

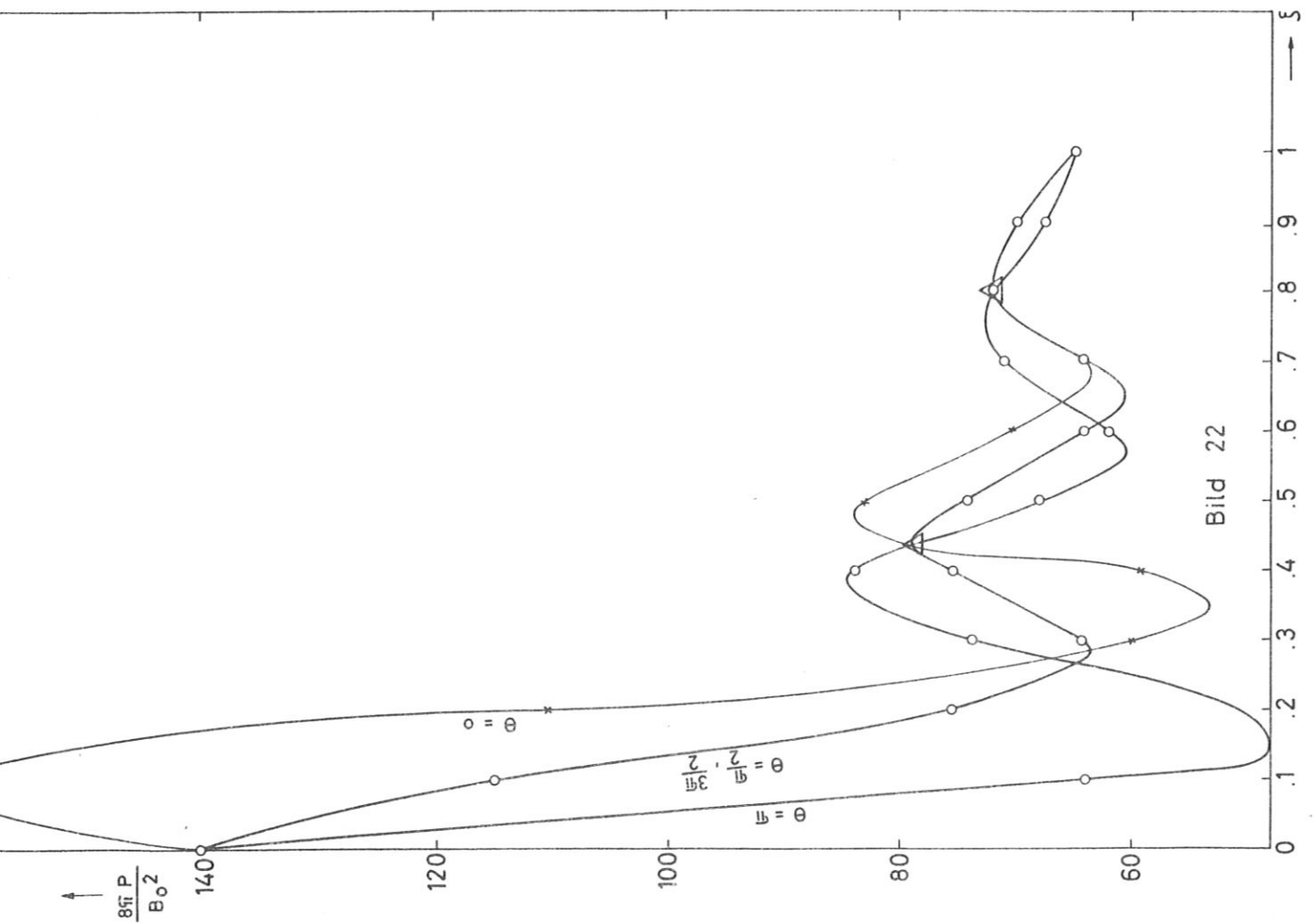


Bild 22

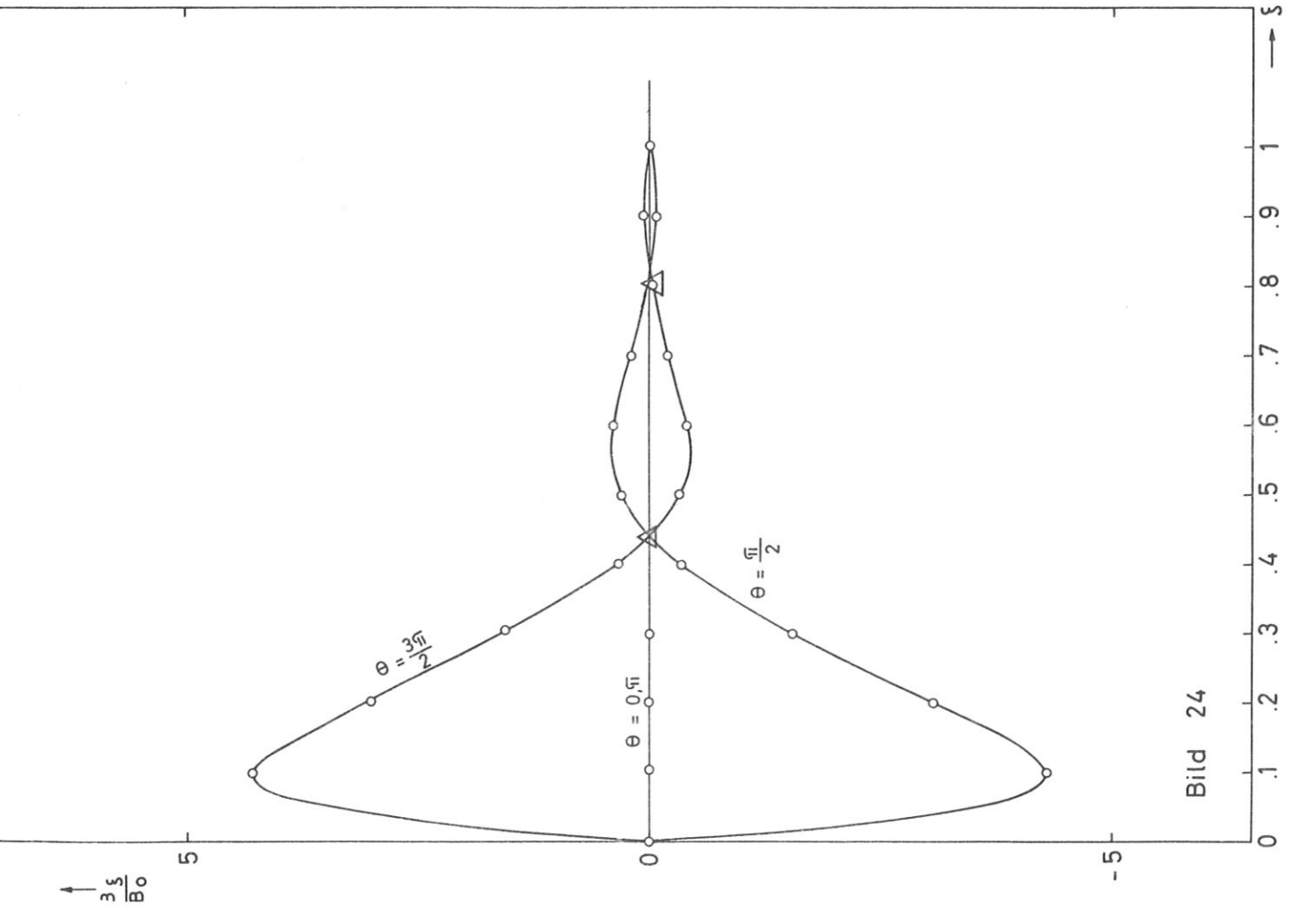


Bild 24

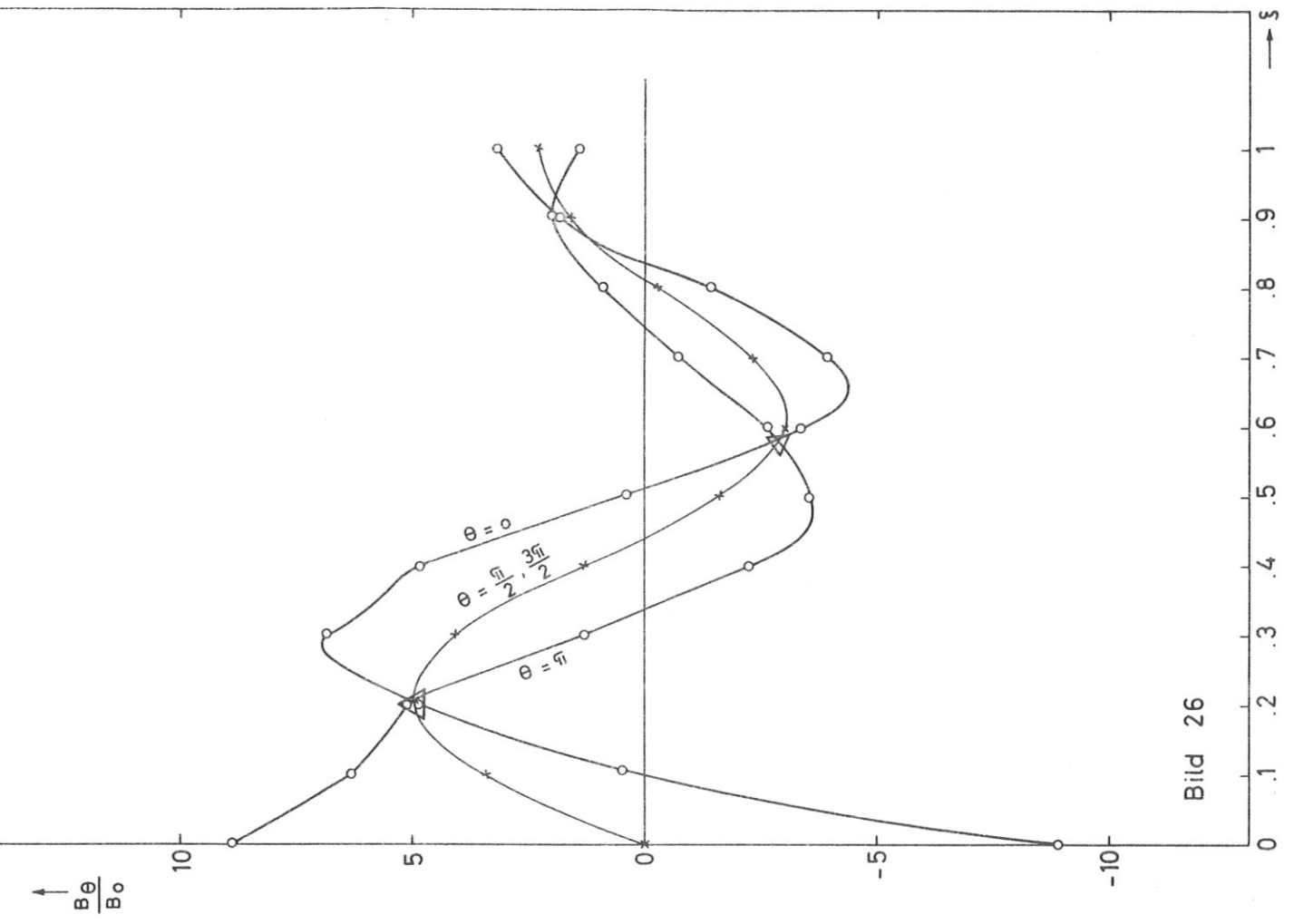
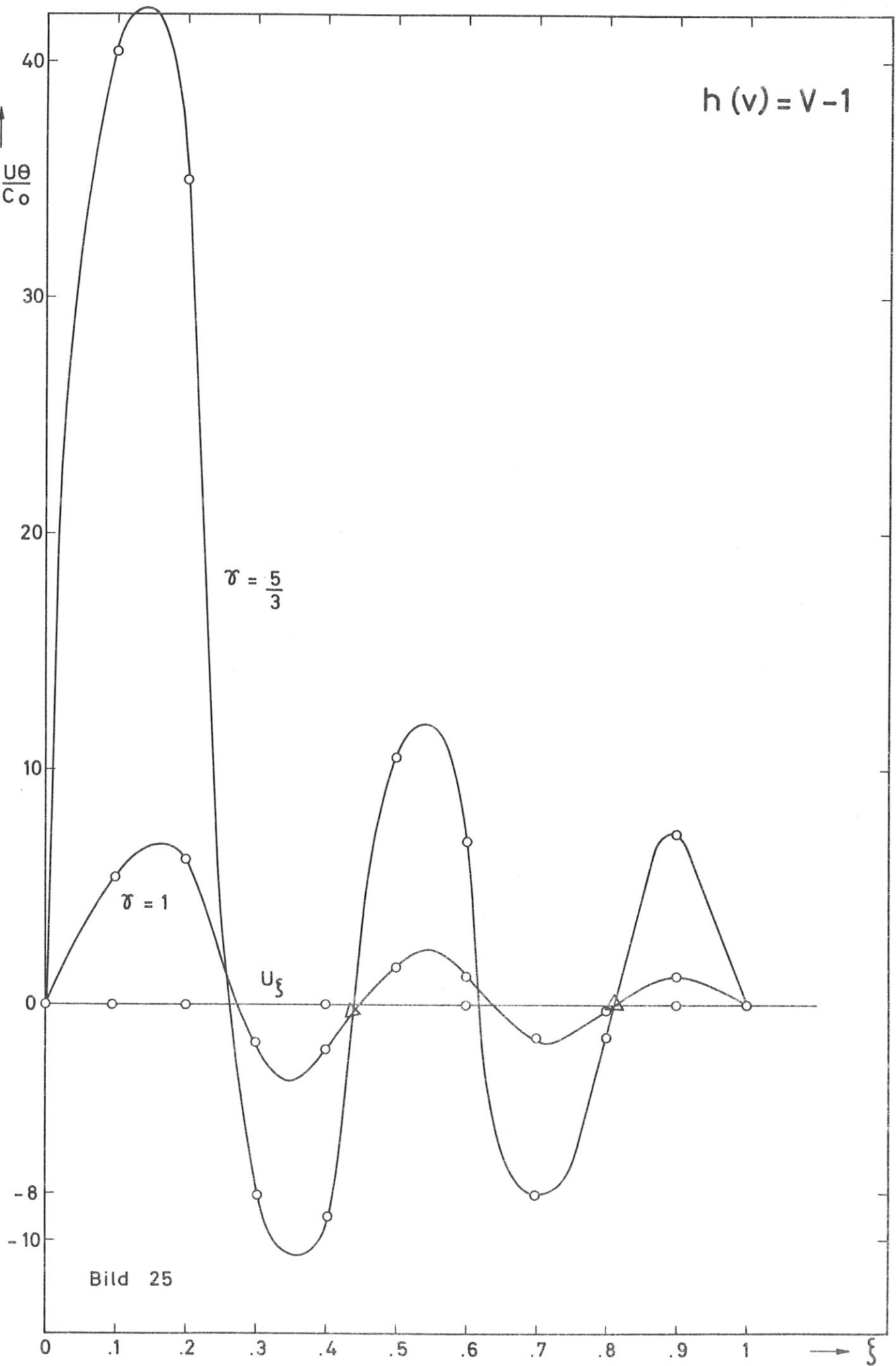


Bild 26



Herrn Prof. Dr. A. Schlüter bin ich sehr dankbar für die Anregung zu dieser Arbeit. Herrn Dr. D. Pfirsch danke ich für mehrere Hinweise und Herrn Dr. H. Bergold für die Hilfe bei der Abfassung des Manuskriptes in deutscher Sprache.

This report is to be treated as strictly confidential.

The 'Institut für Plasmaphysik' holds the exclusive rights of publication, mimeographing, propagation and translation into foreign languages of the original text, inclusive of the drawings, wholly or partially; also of excerpts or résumés, as well as of the technical or scientific contents of this report. Exceptions to these restrictions require written permission.

Furthermore, the 'Institut für Plasmaphysik' reserves the right of exclusive exploitation of the information contained in this report, for the purpose of obtaining protective industrial rights, particularly patent and utility patent rights at home and abroad. Actions of exploitation taken on the basis of the knowledge gained from this report cannot be regarded as grounds for obtaining the right of prior use ('Vorbenutzungsrecht') according to article 7 paragraph 1, first sentence of the German Patent Law. The reader is referred to article 5 of the Patent Law. For reasons stipulated by the Patent Law, the report must not be exhibited in public libraries, or lent out indiscriminately.

The Institute does not guarantee that the information given in this report is free from protective rights, such as patent rights, utility patent rights or trade-mark rights.

No guarantee is given in respect of the accuracy, completeness or usefulness of the information contained in this report. Thus, no liability can be accepted for damage resulting from use of the information, or of the apparatus, methods and procedures described.