

# INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Der Einfluß von Rotation und Magnetfeldern  
auf die Wärmeinstabilität einer Flüssigkeits-  
kugel

(The Influence of Rotation and Magnetic  
Fields on The Thermal Instability of A  
Fluid Sphere)

Attay Kovetz

IPP/6/33

Januar 1965

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

IPP 6/33    A. Kovetz    The Influence of Rotation and Magnetic  
Fields on The Thermal Instability of A  
Fluid Sphere  
January 1965 (in German)

ABSTRACT: The effects of rotation and magnetic fields on the thermal instability of a homogeneous fluid sphere are examined. It is assumed that there is a constant distribution of heat sources throughout the sphere, and that the convection pattern possesses axial symmetry. The determination of conditions for the onset of convection leads to a characteristic value problem for the critical Rayleigh number, as a function of other non-dimensional parameters (the Taylor, Hartmann and Prandtl numbers). The solutions are carried out with the aid of variational principles. Stationary convection and overstability are both treated.

# I n h a l t

1.	Die Wärmeinstabilität einer Flüssigkeitskugel in einem homogenen Magnetfeld	1
1.1	Die Grundgleichungen	1
1.2	Die Randbedingungen	4
1.3	Das Eigenwertproblem	5
1.4	Die toroidalen Felder	9
1.5	Das Variationsprinzip	12
1.6	Stationäre Konvektion	18
1.7	Überstabilität	30
2.	Die Wärmeinstabilität einer Flüssigkeitskugel in einem toroidalen Magnetfeld	34
2.1	Der Grundzustand	34
2.2	Wärmeinstabilität	35
3.	Die Wärmeinstabilität einer rotierenden Flüssigkeitskugel	37
3.1	Grundgleichungen und Eigenwertproblem	37
3.2	Stationäre Konvektion	39
3.3	Überstabilität	44
4.	Die Wärmeinstabilität einer rotierenden Flüssig- keitskugel in einem homogenen Magnetfeld	47
4.1	Grundgleichungen und Eigenwertproblem	47
4.2	Das Variationsprinzip	50
4.3	Stationäre Konvektion	52
4.4	Überstabilität	61
	Anhang	41

1. Die Wärmeinstabilität einer Flüssigkeitskugel in einem homogenen Magnetfeld.

1.1 Die Grundgleichungen.

Wir betrachten eine Kugel, deren Schwerkraftfeld durch  $g$  mit

$$g = \frac{4\pi}{3} G \rho \quad (1)$$

gegeben ist. In (1) bedeutet  $G$  die Gravitationskonstante, während  $\rho$  die als konstant vorausgesetzte Dichte bezeichnet. Wir setzen weiter eine kontinuierliche konstante Verteilung von Wärmequellen  $\varepsilon$  voraus, die ein radiales Temperaturgefälle aufrecht erhält. Die Temperatur  $T$  wird dann durch

$$\kappa \nabla^2 T = -\varepsilon \quad (2)$$

bestimmt, wobei  $\kappa$  die (konstante) thermometrische Leitfähigkeit ist. Die im Kugelzentrum beschränkte Lösung von (2) ist dann durch

$$T = \beta_0 - \beta r^2 \quad (3)$$

mit

$$\beta = \frac{\varepsilon}{6\kappa} \quad (4)$$

gegeben.  $\beta_0$  wird durch den Temperaturrandwert bestimmt.

Hat die Flüssigkeit eine endliche konstante Leitfähigkeit  $\sigma$  so wird das Verhalten des Systems bei Anwesenheit von elektromagnetischen Feldern durch die magnetohydrodynamischen Gleichungen

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\text{grad } p + \rho g + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{L} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (5)$$

$$\text{rot } \mathbf{L} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (6)$$

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{L}) \quad (7)$$

$$\operatorname{rot} \mathcal{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad , \quad (8)$$

$$\operatorname{div} \mathcal{L} = 0 \quad , \quad (9)$$

$$\frac{d\mathcal{T}}{dt} = \kappa \nabla^2 \mathcal{T} + \mathcal{E} \quad , \quad (10)$$

zusammen mit der Kontinuitätsgleichung und einer Zustandsgleichung bestimmt. Aus (6) - (9) folgt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \operatorname{rot} (\mathcal{M} \times \mathcal{L}) + \gamma \nabla^2 \mathcal{L} \quad (11)$$

mit

$$\gamma = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \quad .$$

Mit Hilfe von (6) und (9) kann man die Lorenzkraft in der Form

$$\frac{1}{c} (\mathcal{J} \times \mathcal{L})_i = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\mathcal{B}^2}{8\pi} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\mathcal{B}_i \mathcal{B}_k}{4\pi} \right) \quad (12)$$

schreiben.

Wir nehmen jetzt an, daß die Kugel sich im Ausgangszustand im statischen Gleichgewicht mit einem homogenen Magnetfeld  $\mathcal{H}$  (in der  $\mathcal{Z}$ -Richtung) befindet. Diese Annahme ist mit den Gleichungen (5) - (9) verträglich.

Für die Abweichung von diesem Gleichgewichtszustand erhält man in der Boussinesqschen Näherung das folgende Gleichungssystem:

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} = - \operatorname{grad} \left( \frac{\mathcal{P}}{\rho} + \frac{\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}}{4\pi\rho} \right) + \gamma \nabla^2 \mathcal{M} - \nu \operatorname{rot}^2 \mathcal{M} + \frac{H}{4\pi\rho} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{Z}} \quad , \quad (13)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = H \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathcal{Z}} - \gamma \operatorname{rot}^2 \mathcal{L} \quad , \quad (14)$$

$$\operatorname{div} \mathcal{M} = 0 \quad , \quad \operatorname{div} \mathcal{L} = 0 \quad , \quad (15)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \kappa \nabla^2 \vartheta + 2\beta \kappa \cdot \kappa \quad (16)$$

Hierin ist  $\mathcal{L}$  die Magnetfeldstörung,  $\vartheta$  die Temperaturabweichung von (3), während, mit dem thermischen Volumenausdehnungskoeffizienten  $\alpha$ ,

$$\gamma = \alpha g = \frac{4\pi}{3} G \alpha \rho \quad (17)$$

ist.

### 1.2 Die Randbedingungen.

Für die Gleichungen (13) - (16) kommen verschiedene Randbedingungen in Frage. Das Medium außerhalb der Kugel kann ein Vakuum, eine Atmosphäre oder ein starrer Mantel sein. Im letzterwähnten Fall kann es beliebige thermische bzw. elektrische Leitfähigkeiten haben. Die Behandlung von so vielen möglichen Randbedingungen ist recht mühsam. Andererseits hat es sich bei den Berechnungen zur Bestimmung der Wärmeinstabilität einer ebenen Schicht (Chandrasekhar, 1961) gezeigt, daß bei der Berücksichtigung solcher verschiedener Randbedingungen keine wesentlichen Unterschiede im allgemeinen Verhalten der Lösungen auftreten. Wir können daher erwarten, daß die Wahl eines bestimmten einfachen Falles zu keiner wesentlichen Einschränkung führen wird. Wir werden annehmen, daß die Flüssigkeitskugel durch einen starren Mantel, der einen unendlich großen Widerstand hat, eingeschlossen ist; dieser Mantel soll eine sehr große Wärmekapazität besitzen, sodaß die Temperatur der Flüssigkeitsoberfläche konstant bleibt. Dadurch ergibt sich für die Geschwindigkeit die Randbedingung

$$\kappa = 0 \quad \text{für} \quad r = R, \quad (18)$$

wobei  $R$  der Kugelradius ist.

Für das elektromagnetische Feld fordern wir, daß kein Strom aus der Kugel fließt, also

$$\lambda_r = 0 \quad \text{für} \quad r = R, \quad (19)$$

daß das Magnetfeld  $\mathcal{L}$  stetig in ein wirbelfreies Feld übergeht, und daß  $r^3 \mathcal{L}$  außerhalb der Kugel beschränkt ist.

Weiterhin erhalten wir für die Temperaturabweichung die Bedingung

$$g = 0 \quad \text{für} \quad r = R. \quad (20)$$

### 1.3 Das Eigenwertproblem.

Im folgenden wollen wir nur rotationssymmetrische Störungen betrachten. Um die Quellfreiheit von  $\mathcal{W}$  und  $\mathcal{L}$  zu berücksichtigen, stellen wir diese Felder in der Form (Chandrasekhar, 1961)

$$\mathcal{W} = \mathbf{1}_z \times \nabla V + \text{rot}(\mathbf{1}_z \times \nabla U) \quad (21)$$

$$\mathcal{L} = \mathbf{1}_z \times \nabla T + \text{rot}(\mathbf{1}_z \times \nabla P) \quad (22)$$

dar.  $U, V, P, T$  sind hier rotationssymmetrische Ortsfunktionen.

$\mathbf{1}_z$  ist der Einheitsvektor in der  $z$ -Richtung. Damit ist (15) identisch erfüllt.

Die Komponenten von  $\mathcal{W}$  sind in Zylinderkoordinaten  $(s, \varphi, z)$  gegeben durch

$$\mathcal{W} = -s \frac{\partial U}{\partial s} \mathbf{1}_s + s V \mathbf{1}_\varphi + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s^2 U) \mathbf{1}_z, \quad (23)$$

in Polarkoordinaten  $(r, \varphi, \mu = \cos \theta)$  durch

$$\mathcal{W} = -\frac{\partial}{\partial \mu} [(1-\mu^2)U] \mathbf{1}_r - \frac{(1-\mu^2)^{1/2}}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U) \mathbf{1}_\theta + r^2 (1-\mu^2)^{1/2} V \mathbf{1}_\varphi. \quad (24)$$

$\mathbf{1}_z \times \nabla V$  ist der toroidale,  $\text{rot}(\mathbf{1}_z \times \nabla U)$  der poloidale (oder meridionale) Anteil von  $\mathcal{W}$ . Die Bildung der Rotation liefert

$$\text{rot} \mathcal{W} = -\mathbf{1}_z \times \nabla_\theta U + \text{rot}(\mathbf{1}_z \times \nabla V) \quad (25)$$

mit 
$$\Delta_5 = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{3}{s} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu^2} - \frac{4\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} . \quad (26)$$

Durch Rotationsbildung von (13) erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{w} = \gamma \text{grad } \mathbf{g} \times \mathbf{w} - \nu \text{rot}^2 \mathbf{w} + \frac{H}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{g} \quad (27)$$

Setzen wir jetzt (21) - (22) in (14), (16) und (27) ein, so folgt unter Berücksichtigung von (24), (25) und der Orthogonalität der poloidalen und toroidalen Felder das Gleichungssystem

$$-\Delta_5 \frac{\partial U}{\partial t} = \gamma \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \mu} - \nu \Delta_5^2 U - \frac{H}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial z} \Delta_5 T, \quad (28)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \nu \Delta_5 V + \frac{H}{4\pi r} \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (29)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = H \frac{\partial V}{\partial z} + \gamma \Delta_5 T, \quad (30)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = H \frac{\partial U}{\partial z} + \gamma \Delta_5 P, \quad (31)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \kappa \nabla^2 g - 2\beta r \frac{\partial}{\partial \mu} [(1-\mu^2)U]. \quad (32)$$

Wir suchen jetzt Lösungen von (28), die das zeitliche Verhalten  $e^{\lambda t}$  haben, transformieren

$$g \rightarrow \frac{2\beta R^3}{\kappa} \theta, \quad V \rightarrow \frac{1}{R} V, \quad (U \rightarrow U),$$

$$T \rightarrow \frac{H}{\gamma} T, \quad P \rightarrow \frac{HR}{\gamma} P, \quad (33)$$

und messen alle Längen in Einheiten von  $R$ . Das System (28) - (32) reduziert sich dann auf das System



$$(\Delta_5 - \sigma) \Delta_5 U = C \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - Q \frac{\partial}{\partial z} \Delta_5 P, \quad (34)$$

$$(\Delta_5 - \sigma) V = -Q \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (35)$$

$$(\Delta_5 - \sigma p_2) T = -\frac{\partial V}{\partial z}, \quad (36)$$

$$(\Delta_5 - \sigma p_2) P = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad (37)$$

$$(\nabla^2 - \sigma p_1) \theta = r \frac{\partial}{\partial r} [(1 - \mu^2) U], \quad (38)$$

wobei wir mit  $C = 2\beta_1 R^6 / \kappa \nu$  die Rayleighzahl, mit  $Q = H^2 R^2 / 4\pi r \nu \gamma$  die Hartmannzahl, mit  $p_1 = \nu / \kappa$  und  $p_2 = \nu / \gamma$  die Prandtlzahlen und mit  $\sigma = \lambda R^2 / \nu$  eine dimensionslose Frequenz bezeichnen.

Die Randbedingungen, die man mit Hilfe von (24) - (25) erhält, sind

$$U = \frac{\partial U}{\partial r} = V = \vartheta = T = 0 \quad \text{für} \quad r = 1; \quad (39)$$

$$P \quad \text{und} \quad \frac{\partial P}{\partial r} \quad \text{stetig bei} \quad r = 1,$$

$$\Delta_5 P = 0, \quad r^3 P \quad \text{beschränkt für} \quad r > 1. \quad (40)$$

Für gegebene  $Q, p_1, p_2$  und  $\sigma$  stellen die Gleichungen (34) - (38), zusammen mit den Randbedingungen (39) und (40), ein Eigenwertproblem zwölfter Ordnung für die Rayleighzahl dar. Dabei unterscheidet man bei der Untersuchung des kritischen Zustandes zwischen stationärer Konvektion, die dem Fall  $\sigma = 0$  entspricht, und nichtstationärer oder oszillatorischer Konvektion (Überstabilität), die einem rein imaginären  $\sigma$  entspricht.

Da nur positive Eigenwerte  $C$  von physikalischer Bedeutung sind, stellt die Untersuchung der Überstabilität ein Doppelseigenwertproblem dar, in dem man diejenigen Frequenzen  $\sigma = i\sigma_1$  mit reellem  $\sigma_1$  bestimmen muß, die einen positiven Eigenwert liefern.

### 1.4 Die toroidalen Felder

Betrachten wir zunächst den stationären Fall  $\sigma = 0$ , so erkennen wir, daß die Eigenwerte  $C$  von den toroidalen Feldern  $V$  und  $T$  unabhängig sind:  $V$  und  $T$  treten nur in den Gleichungen (35) und (36) auf, die weder die poloidalen Felder noch den Eigenwert  $C$  enthalten; und die Randbedingungen für die verschiedenen Felder sind nicht gekoppelt. Wir wollen nun zeigen, daß das auch im nichtstationären Fall gilt.

Zu diesem Zweck leiten wir zwei Formeln ab, von denen wir im folgenden oft Gebrauch machen.

Es seien  $F$  und  $G$  zwei rotationssymmetrische Funktionen, die innerhalb der Einheitskugel hinreichend oft stetig differenzierbar sind. Dann ist

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dr r^4 \int_{-1}^{+1} d\mu (1-\mu^2) F \Delta_5 G = \\ & = \int_0^1 dr \int_{-1}^{+1} d\mu F \left\{ (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial r} \left( r^4 \frac{\partial G}{\partial r} \right) + r^2 \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1-\mu^2)^2 \frac{\partial G}{\partial \mu} \right] \right\}, \quad (41) \end{aligned}$$

und durch partielle Integrationen auf der rechten Seite erhält man

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dr r^4 \int_{-1}^{+1} d\mu (1-\mu^2) F \Delta_5 G = \\ & = - \int_0^1 \int_{-1}^{+1} \text{grad } F \cdot \text{grad } (r^4 (1-\mu^2)) dr d\mu + \int_{r=1}^{+1} \left( F \frac{\partial G}{\partial r} \right) (1-\mu^2) d\mu. \quad (42) \end{aligned}$$

Ähnlich ergibt sich eine zweite Formel

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_{-1}^{+1} F \Delta_5 (r^4 (1-\mu^2)) dr d\mu = \\ & = \int_0^1 \int_{-1}^{+1} \Delta_5 F \Delta_5 (r^4 (1-\mu^2)) dr d\mu + \int_{r=1}^{+1} \left( F \frac{\partial \Delta_5 (r^4 (1-\mu^2))}{\partial r} - \Delta_5 (r^4 (1-\mu^2)) \frac{\partial F}{\partial r} \right) d\mu. \quad (43) \end{aligned}$$

Wie von Chandrasekhar (1961) bemerkt wurde, ist  $\Delta_5$  der Laplacesche Operator für rotationssymmetrische Funktionen im fünfdimensionalen Raum.  $(1-\mu^2) r^4 dr d\mu$  ist (bis auf den Faktor  $2\pi$ ) das entsprechende Volumenelement. In diesem Sinne sind (41) - (42) Greensche Formeln. Wir benutzen im folgenden die Bezeichnungen

$$d\mathcal{E}_5 = r^4 (1-\mu^2) dr d\mu,$$

$$d\mathcal{E}_3 = r^2 dr d\mu.$$

Um den kritischen Zustand zu untersuchen, schreiben wir

$\sigma = i\sigma_1$  mit reellem  $\sigma_1$ . Multiplizieren wir (35) mit  $r^4(\epsilon - \mu^2)V^*$  und integrieren, so liefert die Formel (42) mit der Randbedingung (39)

$$-\int |grad V|^2 d\bar{\tau}_5 - i\sigma_1 \int |V|^2 d\bar{\tau}_5 = -Q \int V^* \frac{\partial T}{\partial z} d\bar{\tau}_5. \quad (44)$$

Wegen  $\int_0^1 dr \int_{-1}^+ d\mu r^4 (\epsilon - \mu^2) = \int_0^1 ds \int_{-1}^+ dz s^3$  läßt sich (44) auch in der Form

$$\int (|grad V|^2 + i\sigma_1 |V|^2) d\bar{\tau}_5 = -Q \int T \frac{\partial V^*}{\partial z} d\bar{\tau}_5 \quad (45)$$

schreiben. Addition von (45) und der entsprechenden Gleichung, die sich aus (36) ergibt, liefert

$$\int d\bar{\tau}_5 \left\{ |grad V|^2 + Q |grad T|^2 + i\sigma_1 (|V|^2 + Q |T|^2) \right\} = 0. \quad (46)$$

Hieraus schließen wir, daß  $V$  und  $T$  identisch verschwinden:

Im kritischen Zustand sind Geschwindigkeit und Magnetfeld

rein poloidal. Damit ist das Eigenwertproblem auf die Ordnung 8 reduziert.

### 1.5 Das Variationsprinzip.

Wir bemerken zunächst, daß in jeder der Gleichungen

$$(\Delta_5 - i\sigma_1) \Delta_5 U = C \frac{\partial g}{\partial \mu} - Q \frac{\partial}{\partial z} \Delta_5 P, \quad (34)'$$

$$(\Delta_5 - i\sigma_1 p_2) P = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad (37)'$$

$$(\nabla^2 - i\sigma_1 p_1) g = r \frac{\partial}{\partial \mu} [(\epsilon - \mu^2) U], \quad (38)'$$

die auf der linken Seite auftretende Funktion durch die rechte Seite und die Randbedingungen eindeutig bestimmt ist (das kann man mit Hilfe von (42) - (43) leicht zeigen). Daraus läßt sich sofort schließen, daß es keine Eigenlösungen von

(34') - (38') gibt, in denen eine der Funktionen verschwindet. Eine weitere Vereinfachung im Sinne des Ergebnisses von Abschn. 1.4 ist also nicht möglich.

Wir multiplizieren jetzt (38)' mit  $\mathcal{G}$ , integrieren über das Volumen der Einheitskugel, und führen auf der rechten Seite eine partielle Integration durch. Mit Hilfe des Gaußschen Satzes erhalten wir

$$\int [(\text{grad } \vartheta)^2 + i\sigma_1 p_1 \vartheta^2] d\tau_3 = \int \mathcal{U} \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mu} d\tau_3 \quad (47)$$

Wegen der Randbedingung (40) können wir, analog zu (42), durch Integration außerhalb der Kugel, die Formel

$$0 = \int_{\lambda}^{\infty} \int_{-1}^{+1} \mathcal{P}_{\Delta_1} \mathcal{P} r^4 (\gamma \mu^2) dr d\mu = - \int_{\lambda}^{\infty} \int_{-1}^{+1} (\text{grad } \mathcal{P})^2 d\tau_3 - \int_{-1}^{+1} \left( \mathcal{P} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial r} \right)_{r=\lambda} (\gamma \mu^2) d\mu \quad (48)$$

gewinnen. Die Multiplikation von (37)' mit  $r^4 (\gamma \mu^2) \mathcal{A}_3 \mathcal{P}$  und eine Integration liefern dann, zusammen mit (48), die Gleichung

$$\int (\mathcal{A}_3 \mathcal{P})^2 d\tau_3 + i\sigma_1 p_2 \int_0^{\infty} (\text{grad } \mathcal{P})^2 d\tau_3 = \int \mathcal{U} \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{A}_3 \mathcal{P} d\tau_3 \quad (49)$$

Eine weitere Gleichung erhalten wir durch Multiplikation von (34)' mit  $r^4 (\gamma \mu^2) \mathcal{U}$  und Integration:

$$\int [(\mathcal{A}_3 \mathcal{U})^2 + i\sigma_1 (\text{grad } \mathcal{U})^2] d\tau_3 = C \int \mathcal{U} \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mu} d\tau_3 - Q \int \mathcal{U} \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{A}_3 \mathcal{P} d\tau_3 \quad (50)$$

Durch Kombination von (47), (49) und (50) erhalten wir das Ergebnis

$$C \int [(\text{grad } \vartheta)^2 + i\sigma_1 p_1 \vartheta^2] d\tau_3 = \int [(\mathcal{A}_3 \mathcal{U})^2 + i\sigma_1 (\text{grad } \mathcal{U})^2 + Q (\mathcal{A}_3 \mathcal{P})^2] d\tau_3 + Q i\sigma_1 p_2 \int_0^{\infty} (\text{grad } \mathcal{P})^2 d\tau_3 \quad (51)$$

Die Variation von (51) liefert jetzt das folgende Variationsprinzip: es sei  $U$  eine beliebige (Versuchs-) Funktion, die die Randbedingungen (39) erfüllt.  $\vartheta$  und  $\rho$  seien die (eindeutigen) Lösungen von (37)' bzw. (38)' mit den Randbedingungen (39) und (40) für diese Funktion  $U$ . Die durch (51) definierte Zahl  $C$  ist dann ein Funktional von  $U$ . Bezeichnen wir die Variation dieses Funktionals bezüglich einer Variation  $\delta U$  von  $U$  mit  $\delta C$ , so ist  $\delta C = 0$  genau dann, wenn (34)' erfüllt ist. Die Tatsache, daß die Variation von  $C$  von zweiter Ordnung in  $\delta U$  ist, ist wesentlich für die numerische Durchführung dieses Verfahrens.

Wir wollen jetzt zeigen, daß das oben als Rechenverfahren vorgegebene Variationsprinzip zusätzlich auch eine thermodynamische Bedeutung hat.

Die Leistung der Trägheitskraft ist durch

$$e_g = \int m \cdot u_j g_j dV \quad (52)$$

gegeben, wobei über das Volumen der Kugel zu integrieren ist. Mit Hilfe der Wärmeleitungsgleichung erhalten wir

$$e_g = -r \frac{\partial}{\partial \beta} \int \vartheta \left( \kappa \nabla^2 \vartheta - \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right) dV. \quad (53)$$

Mit der Annahme der Zeitabhängigkeit  $e^{\lambda t}$  und der Transformation und Bezeichnungen, die in Abschn. 1.4 eingeführt wurden, kann dies auch in der Gestalt

$$e_g = 2\pi R \rho v C \int \left[ (g_{\text{real}} \vartheta)^2 + i \sigma_1 \rho_1 \vartheta^2 \right] d\tau_3 \quad (54)$$

geschrieben werden.

Die Wachstumsrate der kinetischen Energie ist

$$e_k = \frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \rho v^2 dV = i \sigma_1 \rho \int v^2 dV \quad (55)$$

oder, wegen der Zerlegung (21),

$$e_k = 2\pi R\rho v : \sigma_1 \int [(\text{grad } U)^2 + V^2] d\bar{t}_5. \quad (56)$$

Hierbei haben wir wieder die in Abschn. 1.4 eingeführten Bezeichnungen benutzt.

Die Wachstumsrate der magnetischen Energie ist

$$e_m = \frac{d}{dt} \int \frac{(\mathcal{L} + \mathcal{L}_z)^2}{8\pi} dV \quad (57)$$

mit dem ganzen Raum als Integrationsbereich. Obwohl das Integral  $\int H^2 dV$  divergiert, muß es nach den für das statische Modell gemachten Annahmen als eine konstante Größe vorausgesetzt werden. Weiter ist

$$\int \mathcal{L} \cdot \mathcal{L}_z dV = H \int B_z dV = 2\pi H \int \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s^2 \rho) s ds dz = 0. \quad (58)$$

Aus (57) bleibt also nur der Beitrag

$$e_m = \frac{d}{dt} \int \frac{B_z^2}{8\pi} dV = 2\pi : \sigma_1 \rho_2 R\rho v \left\{ \int_0^\infty (\text{grad } P)^2 d\bar{t}_5 + \int T^2 d\bar{t}_5 \right\}. \quad (59)$$

Auf der rechten Seite sind hier wieder die neuen Bezeichnungen eingeführt.

Eine ähnliche Rechnung ergibt für die durch Reibung dissipierte Energie,

$$e_v = \rho v \int \omega \cdot \text{rot}^2 \omega dV \quad (60)$$

den Ausdruck

$$e_v = 2\pi R\rho v \int [(\Delta_s U)^2 + (\text{grad } V)^2] d\bar{t}_5. \quad (61)$$

Für die Ohmsche Dissipation

$$e_\sigma = \int \frac{j^2}{\sigma} dV = \frac{\gamma}{4\pi} \int (\text{rot } \mathcal{L})^2 dV = \frac{\gamma}{4\pi} \int \mathcal{L} \cdot \text{rot}^2 \mathcal{L} dV \quad (62)$$

erhält man

$$e_{\sigma} = 2\pi R r \nu Q \int [(\Delta_S P)^2 + (\text{grad} T)^2] d\tau_S \quad (63)$$

Da die toroidalen Felder im kritischen Zustand überall verschwinden, kann die Gleichung (51) auch in der Form

$$e_{g.} = e_k + e_m + e_r + e_{\sigma} \quad (64)$$

geschrieben werden und erhält dadurch eine einfache thermodynamische Bedeutung: die Wärmeinstabilität tritt dann auf, wenn eine Bilanz zwischen der Trägheitskraft einerseits und den Wachstumsraten der kinetischen und magnetischen Energien sowie der Energiedissipation (durch Ohmsche Heizung und durch Reibung) andererseits möglich wird.

### 1.6 Stationäre Konvektion.

Nach dem im Abschn. 1.5 gewonnenen Variationsprinzip erhält man im stationären Fall die zu einem gegebenen  $Q$  gehörigen Eigenwerte  $C$  dadurch, daß man Extremalwerte des Funktionals

$$C[U] = \frac{\int [(\Delta_S U)^2 + Q (\Delta_S P)^2] d\tau_S}{\int (\text{grad} \vartheta)^2 d\tau_S} \quad (65)$$

sucht;  $\vartheta$  und  $P$  sind hierin durch die Nebenbedingungen

$$\nabla^2 \vartheta = -r \frac{\partial}{\partial \mu} [(1-\mu^2)U], \quad (66)$$

$$\Delta_S P = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (67)$$

und die Randbedingungen (39) - (40) zu bestimmen.

Wir zeigen zunächst, daß der kleinste Eigenwert - also die kritische Rayleighzahl - durch das absolute Minimum des Funktionals (65) gegeben ist und monoton mit  $Q$  wächst.

Für den Beweis der ersten Behauptung bezeichnen wir mit  $C_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , die der Größe nach geordneten Eigenwerte, und mit  $U_j, \vartheta_j, P_j$  die entsprechenden Lösungen. Es gilt also

$$\Delta_S^2 U_j = C_j \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_j}{\partial \mu} - Q \frac{\partial}{\partial z} \Delta_S P_j, \quad (68)$$

$$\nabla^2 \theta_j = r \frac{\partial}{\partial r} \left[ (1-\mu^2) U_j \right] , \quad (69)$$

$$\Delta_S^2 P_j = - \frac{\partial U_j}{\partial z} . \quad (70)$$

Durch Multiplikation von (68) mit  $r^4 (1-\mu^2) U_j$  und Integration erhält man unter Berücksichtigung von (69) - (70)

$$C_j \int \text{grad } \theta_i \cdot \text{grad } \theta_j \, d\bar{E}_3 = \quad (71)$$

$$\int (\Delta_S U_i \cdot \Delta_S U_j + Q \Delta_S P_i \cdot \Delta_S P_j) \, d\bar{E}_S .$$

Infolge der Symmetrie der rechten Seite in (71) ist

$$\int \text{grad } \theta_i \cdot \text{grad } \theta_j \, d\bar{E}_3 = 0 \quad \text{für} \quad i \neq j . \quad (72)$$

Wir führen jetzt die Normierung

$$\int (\text{grad } \theta_j)^2 \, d\bar{E}_3 = 1 \quad (73)$$

ein. Dann ist

$$\int (\Delta_S U_i \cdot \Delta_S U_j + Q \Delta_S P_i \cdot \Delta_S P_j) \, d\bar{E}_S = C_j \delta_{ij} . \quad (74)$$

Nehmen wir jetzt an, daß die Lösungen  $U_j$  ein abgeschlossenes System darstellen, so können wir jede Versuchsfunktion in der Gestalt

$$U = \sum_j A_j U_j \quad (75)$$

schreiben. Die entsprechenden Lösungen von (66) - (67) sind durch

$$\theta = \sum A_j \theta_j , \quad (76)$$

$$P = \sum A_j P_j , \quad (77)$$

gegeben. Setzen wir (75) - (77) in (65) ein, so erhalten wir nach (72) - (74)

$$\begin{aligned} C[U] - C_A &= (\sum A_j^2)^{-1} \sum A_j^2 C_j - C_A \\ &= (\sum A_k^2)^{-1} \sum A_j^2 (C_j - C_A) \end{aligned} \quad (78)$$



und daher  $C[U] \geq C_1$  (79)

Hier gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn  $A_j = 0$  für  $j > 1$ , d.h., wenn die Versuchsfunktion mit  $U_1$  (bis auf den Koeffizienten  $A_1$ ) übereinstimmt.

Zum Beweis der zweiten Behauptung variieren wir die Gleichung

$$C_1 = \frac{\int [(\Delta_5 U_1)^2 + Q(\Delta_5 P_1)^2] d\bar{t}_3}{\int (\text{grad } \vartheta_1)^2 d\bar{t}_3} \quad (80)$$

nach  $Q$ , und erhalten mit Hilfe von (68) - (70)

$$\delta C_1 \int (\text{grad } \vartheta_1)^2 d\bar{t}_3 = \delta Q \int (\Delta_5 P_1)^2 d\bar{t}_3 \quad (81)$$

$\delta C_1$  und  $\delta Q$  haben also das gleiche Vorzeichen.

Zur numerischen Lösung des Eigenwertproblems verwenden wir das Ritzsche Verfahren und entwickeln die Versuchsfunktion  $U$  nach dem durch das Eigenwertproblem

$$\Delta_5^2 U = \lambda^4 U, \quad U = \frac{\partial U}{\partial r} = 0 \quad \text{für} \quad r = 1 \quad (82)$$

definierten Funktionssystem. Die Eigenfunktionen sind durch

$$U_{nj} = \left[ \frac{J_{n+3/2}(\alpha_{nj} r)}{J_{n+3/2}(\alpha_{nj})} - \frac{I_{n+3/2}(\alpha_{nj} r)}{I_{n+3/2}(\alpha_{nj})} \right] \frac{C_n^{3/2}(\mu)}{r^{3/2}} \quad (83)$$

gegeben.  $J_{n+3/2}$  und  $I_{n+3/2}$  sind die Besselfunktionen der Ordnung  $n+3/2$  mit reellem bzw. imaginärem Argument,  $C_n^{3/2}(\mu)$  die durch

$$(1 - 2h\mu + h^2)^{-3/2} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n C_n^{3/2}(\mu) \quad (84)$$

definierten Gegenbauerschen Polynome;  $\alpha_{nj}$  ist die  $j$ -te positive Wurzel von

$$J_{n+3/2}(\alpha) I'_{n+3/2}(\alpha) - I_{n+3/2}(\alpha) J'_{n+3/2}(\alpha) = 0. \quad (85)$$

Die Funktionen  $U_{nj}$  besitzen die Orthogonalitätseigenschaft

$$\int U_{nk} U_{nj} d\bar{r}_j = \frac{2(n+1)(n+2)}{2n+3} \delta_{mn} \delta_{kj}. \quad (86)$$

Wir machen also für  $U$  den Ansatz

$$U = \sum_{n=0} \sum_{j=1} A_{nj} U_{nj} \quad (87)$$

mit den  $A_{nj}$  als Variationsparametern, bezüglich welcher das Minimum des Funktionals (65) gesucht wird.

Um die entsprechende Funktion  $\vartheta$  zu bestimmen, machen wir von der Operatoridentität

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} \nabla^2 = \Delta_j - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} \quad (88)$$

Gebrauch und erhalten die Gleichung

$$\Delta_j - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} = \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} [(1-\mu^2) U] \quad (89)$$

Für  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \mu}$ . Die entsprechende Randbedingung ist

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} = 0 \quad \text{für} \quad r = 1. \quad (90)$$

Wir führen jetzt die Bezeichnungen

$$f_{m/n}(\alpha r) = \frac{J_{m+3/2}(\alpha r)}{J_{n+3/2}(\alpha)} - \frac{I_{m+3/2}(\alpha r)}{I_{n+3/2}(\alpha)} \quad (91)$$

$$g_{m/n}(\alpha r) = \frac{J_{m+3/2}(\alpha r)}{J_{n+3/2}(\alpha)} + \frac{I_{m+3/2}(\alpha r)}{I_{n+3/2}(\alpha)} \quad (92)$$

ein, mit deren Hilfe

$$U_{nj} = f_{n/n}(\alpha y_j^n) \frac{C_n^{3/2}(\mu)}{r^{3/2}} \quad (93)$$

wird. Die Lösung von (89) läßt sich in der Form

$$\vartheta = \sum A_{nj} \vartheta_{nj} \quad (94)$$

$$\text{mit } \frac{1}{r} \frac{\partial g_{ij}}{\partial \mu} = \frac{(n+1)(n+2)}{d_{ij}^2} \left[ g_{hln} (d_{ij}^n) - 2r^{n+3/2} \right] \frac{C_n^{3/2}(\mu)}{r^{3/2}} \quad (95)$$

schreiben.

Anstatt nach dem Minimum des Funktionals (65) zu suchen, betrachten wir  $C$  als einen Lagrange-Multiplikator und untersuchen die Größe

$$J[U] = \int [(\Delta_5 U)^2 + Q(\Delta_5 P)^2] d\bar{t}_5 - C \int (\text{grad } g)^2 d\bar{t}_3 \quad (96)$$

Da die Funktionen  $g$  und  $P$  durch (66) - (67) definiert sind, können wir  $J$  auch in der Gestalt

$$J[U] = \int U \left[ \Delta_5^2 U - C \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \mu} - Q \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right] d\bar{t}_5 \quad (97)$$

schreiben. Mit  $U$  und  $\frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \mu}$  gemäß (87), (91) und (95) wird hieraus

$$J[U] = \sum_{mknj} \left[ \langle mkn | U U | mkn \rangle - C \langle mkn | U T | mkn \rangle - Q \langle mkn | U D D U | mkn \rangle \right] \cdot A_{mk} A_{nj} \quad (98)$$

Die in (99) auftretenden Matrixelemente sind durch folgende Formeln definiert:

$$\langle mkn | U U | mkn \rangle = \int U_{mk} \Delta_5^2 U_{nj} d\bar{t}_5, \quad (99)$$

$$\langle mkn | U T | mkn \rangle = \int U_{mk} \frac{1}{r} \frac{\partial g_{ij}}{\partial \mu} d\bar{t}_5, \quad (100)$$

$$\langle mkn | U D D U | mkn \rangle = \int U_{mk} \frac{\partial^2 U_{nj}}{\partial z^2} d\bar{t}_5. \quad (101)$$

Für die explizite Form der Matrixelemente verweisen wir auf den Anhang. Hier machen wir nur auf ihre Symmetrieeigenschaften aufmerksam:

$$\begin{aligned} \langle mkn | U U | mkn \rangle &= \langle nj | U U | mkn \rangle, \\ \langle mkn | U T | mkn \rangle &= \langle nj | U T | mkn \rangle, \end{aligned} \quad (102)$$

$$\langle mkn | U D D U | mkn \rangle = \langle nj | U D D U | mkn \rangle.$$

Die Bedingung

$$\frac{\partial J}{\partial A_{mk}} = 0 \quad (103)$$

für das Extremum führt mit Berücksichtigung von (102) auf das lineare homogene Gleichungssystem

$$\sum_{ij} [\langle \mathbf{u}_i | \mathbf{U} | \mathbf{u}_j \rangle - Q \langle \mathbf{u}_i | \mathbf{U} | \mathbf{u}_j \rangle - C \langle \mathbf{u}_i | \mathbf{U} | \mathbf{u}_j \rangle] A_{ij} = 0. \quad (104)$$

Die Eigenwerte werden durch das Verschwinden der Koeffizientendeterminante bestimmt. Wir machen darauf aufmerksam, daß in der Herleitung von (104) die elektromagnetischen Randbedingungen nicht benutzt wurden. Das Eintreten der stationären Konvektion ist also unabhängig von den elektromagnetischen Eigenschaften des außerhalb der Kugel befindlichen Mediums.

Da die Matrixelemente (vgl. Anhang) stets die Faktoren  $\delta_{m, k}$ ,  $\delta_{m, k \pm 2}$  enthalten, spaltet sich das System (104) in zwei voneinander unabhängige Lösungsklassen auf, nämlich in die geraden Lösungen mit  $A_{2n+1, k} = 0$  und die ungeraden Lösungen mit  $A_{2m, k} = 0$ . Die durchgeführten numerischen Rechnungen zeigen, daß sich das Minimum des Funktionals (65) immer durch die geraden Lösungen ergibt; dies ist auch zu erwarten, da diese Lösungen die kleinste Anzahl von Knoten besitzen.

Aus der Minimumeigenschaft von (65) folgt auch, daß man sich der kritischen Rayleighzahl von oben annähert, wenn man die Ordnung des Säkularsystems erhöht. Für die Bestimmung der kritischen Rayleighzahlen wurden die folgenden Ordnungen gewählt: 1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20, 25, 30, 36. Eine relative Änderung der kritischen Rayleighzahl um weniger als 5 % beim Übergang von einer Ordnung zur nächsten wurde als eine befriedigende Konvergenz betrachtet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 zusammengefaßt und in Abb. 1 graphisch dargestellt. Für  $Q > 10^8$  ergibt sich folgende asymptotische Relation zwischen der kritischen Rayleighzahl und der Hartmannzahl:

$$C = 26.3 Q \quad (105)$$

Nach den Definitionen von  $C$  und  $Q$  ist die für die kritische Wärme-  
produktion  $\varepsilon_c$  äquivalente Gleichung

$$\varepsilon_c = 26.3 \times \frac{g}{4\pi G} \left( \frac{\kappa H}{\rho c R} \right)^2 \frac{\sigma}{\alpha} \quad (106)$$

Q	C
0 10	3 8.1087X10
1 10	3 8.5283X10
2 10	4 1.2281X10
3 10	4 4.3705X10
4 10	5 2.8558X10
5 10	6 2.6563X10
6 10	7 2.6346X10
7 10	8 2.6325X10
8 10	9 2.6322X10
9 10	10 2.6322X10
10 10	11 2.6322X10
11 10	12 2.6322X10

Tabelle 1: Kritische Rayleighzahlen für das Eintreten stationärer Konvektion bei verschiedenen Werten der Hartmannzahl.

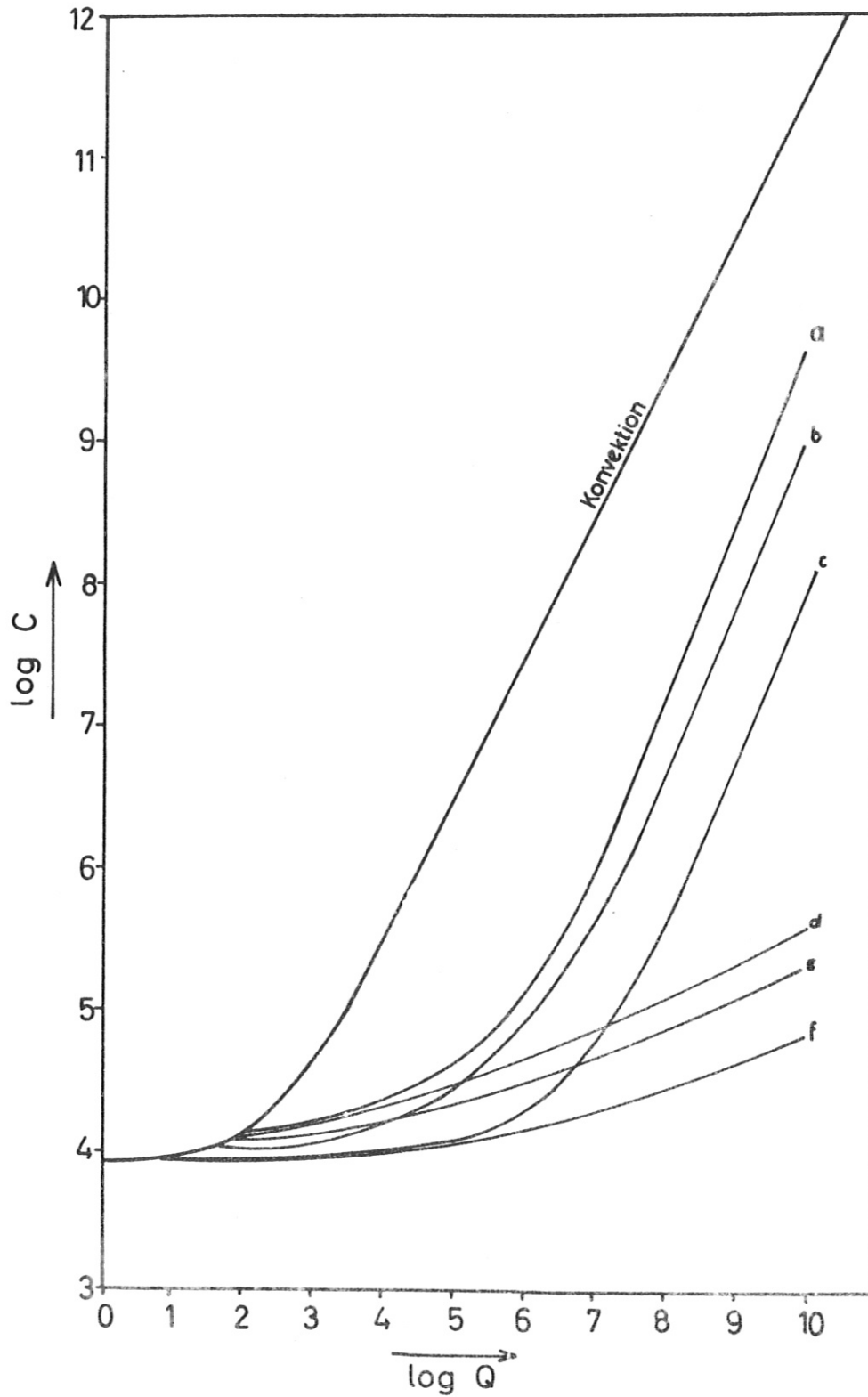


Abb. 1: Die kritische Rayleighzahl als Funktion von  $Q$ . Die Kurven a bis f beschreiben das Verhalten bei Überstabilität für die folgenden Werte der Prandtlzahlen:

- |                            |                           |
|----------------------------|---------------------------|
| (a) $p_1 = .01, p_2 = 1.$  | (b) $p_1 = .01, p_2 = 2.$ |
| (c) $p_1 = .01, p_2 = 10.$ | (d) $p_1 = 0., p_2 = 1.$  |
| (e) $p_1 = 0., p_2 = 2.$   | (f) $p_1 = 0., p_2 = 10.$ |

Die Abhängigkeit von der Leitfähigkeit  $\sigma$  ist eine Folge des magnetohydrodynamischen Analogons zu dem Proudman-Taylor'schen Satz, nach dem eine hohe Leitfähigkeit bei Anwesenheit eines homogenen Magnetfeldes eine Zweidimensionalität der Strömung erzwingt. Eine solche Einschränkung erschwert das Eintreten der Konvektion und erfordert deshalb eine höhere Wärmeproduktion.

Durch die Lösung des Systems (104) lassen sich unter einer Normierungsbedingung die Koeffizienten  $A_{nj}$  bestimmen. Daraus ergibt sich auf folgender Weise auch die Form der Konvektionszellen.

Die Gleichung für die Stromlinien lautet

$$\frac{dr}{-\frac{\partial}{\partial \mu} [(1-\mu^2)U]} = \frac{r d\mu}{\frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U)} \quad (107)$$

Mit  $U = \sum A_{nj} f_{n/2}(\alpha_{nj} r) C_n(\mu) / r^{3/2}$  erhält man für (107) sofort das Integral

$$\sum_{nj} A_{nj} r^{1/2} f_{n/2}(\alpha_{nj} r) C_n^{3/2}(\mu) \cdot (1-\mu^2) = \text{const.} \quad (108)$$

Die entsprechende Form der Stromlinien ist in den Abbildungen 2 und 3 dargestellt.

Für die Bestimmung der Magnetfeldlinien muß mit den Randbedingungen (40) für  $P$  die Gleichung

$$\Delta_3 P = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (109)$$

gelöst werden. Man erhält

$$P = \sum A_{nj} P_{nj}$$

mit  $P_{nj} = \frac{1}{\alpha_{nj}} \left\{ \frac{n+2}{2n+3} \left[ g_{n+1/2}(\alpha_{nj} r) - \left( \frac{2(2n+3)}{\alpha_{nj}} - f_{n+1/2}(\alpha_{nj}) \right) r^{n+1/2} \right] \right\} \quad (110)$

$$\cdot \left. \frac{C_{n-1}}{r^{3/2}} - \frac{n+1}{2n+3} f_{n+1/2}(\alpha_{nj} r) \frac{C_{n+1}}{r^{3/2}} \right\} \quad \text{für } r \leq 1,$$

$$P_{nj} = -\frac{n+1}{2n+3} \frac{f_{n+1/2}(\alpha_{nj})}{\alpha_{nj}} \frac{C_{n+1}}{r^{n+4}} \quad \text{für } r \geq 1. \quad (111)$$

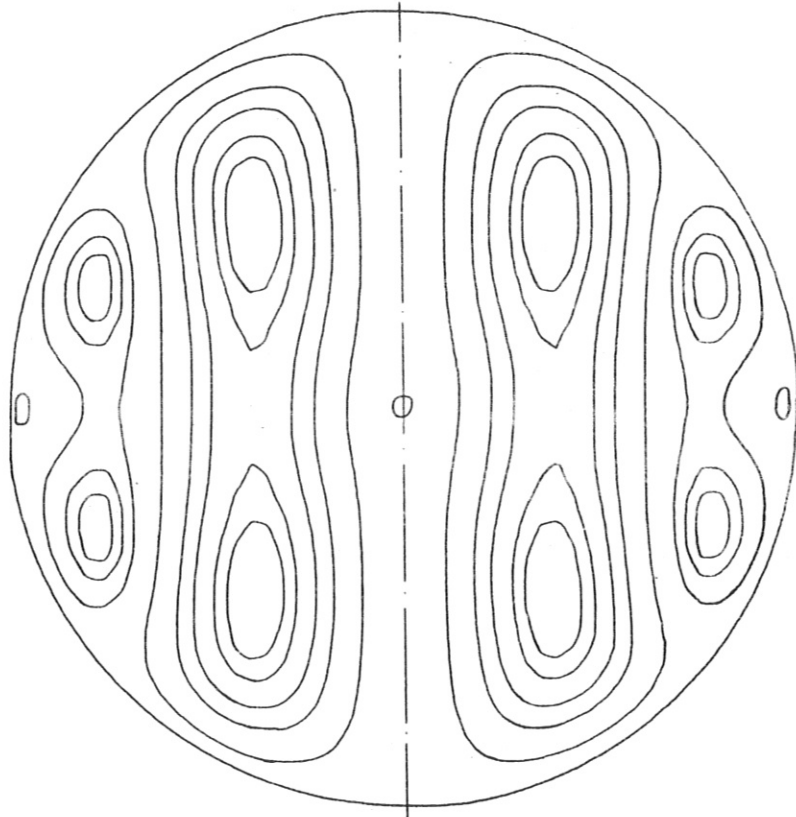


Abb. 2: Stromlinien in der Meridionalebene für  $Q = 10^4$ .

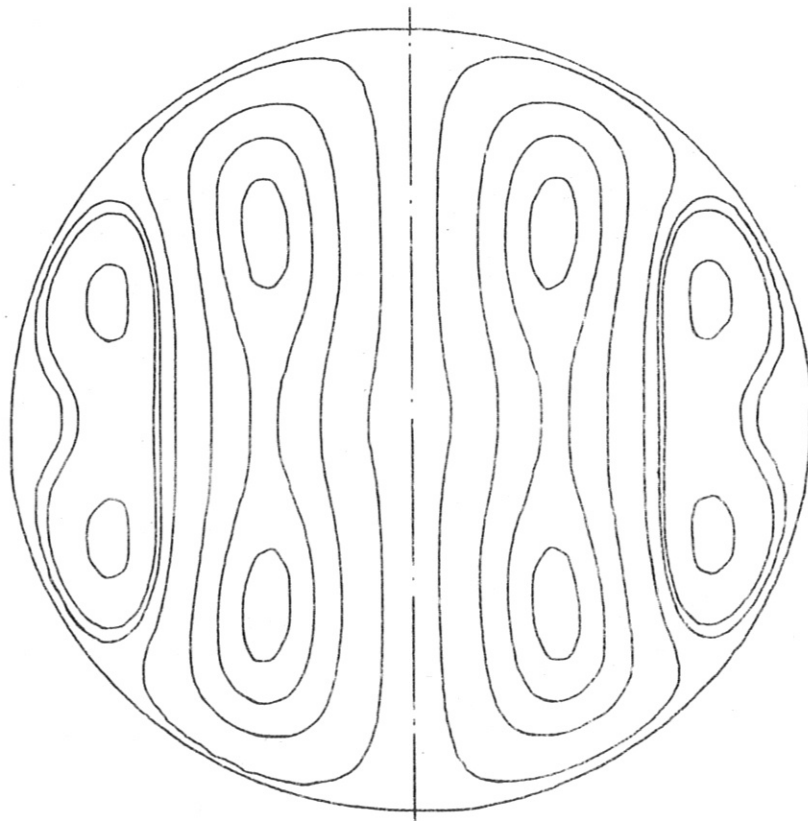


Abb. 3: Stromlinien in der Meridionalebene für  $Q = 10^{10}$ .



Die Magnetfeldlinien sind nach (107) - (108) durch

$$\sum_{nj} A_{nj} r^2 (1-\mu^2) P_{nj} = \text{const.} \quad (112)$$

gegeben und in den Abbildungen 4 und 5 dargestellt.

Die Temperaturabweichung ergibt sich durch Integration von (95) oder durch direkte Lösung von (66) als

$$\vartheta = \sum A_{nj} \vartheta_{nj} \quad (113)$$

mit 
$$\vartheta_{nj} = \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} \cdot \frac{1}{a_{nj}^2} \left[ \frac{g_{nj}(a_{nj}r)}{r^{1/2}} - 2r^{n+1} \right] (C_{n+1} - C_{n-1}) \quad (114)$$

In den Abbildungen 6 und 7 sind die Temperaturabweichungen skizziert.

### 1.7 Überstabilität.

Wie schon im Abschn. 1.5 bemerkt wurde, stellt die Bestimmung des kritischen Zustandes im nichtstationären Fall ein Doppelp-eigenwertproblem dar. Für gegebene Werte von  $Q$ ,  $p_1$  und  $p_2$  sind diejenigen reellen Frequenzen  $\sigma_1$  zu bestimmen, für die es ein positives Extremum des Funktionals

$$C[U] = \frac{\int [(\Delta_{\sigma} U)^2 + i\sigma_1 (\text{grad } U)^2 + Q(\Delta_{\sigma} P)^2] d\tau_3 + Q i\sigma_1 p_2 \int_0^{\infty} (\text{grad } P)^2 d\tau_3}{\int [(\text{grad } \vartheta)^2 + i\sigma_1 p_1 \vartheta^2] d\tau_3} \quad (115)$$

gibt. Im Unterschied zum stationären Fall kann man hier nicht von einem Minimum sprechen, weil  $C$  im allgemeinen komplex ist. In (115) sind  $\vartheta$  und  $P$  Lösungen von

$$(\nabla^2 - i\sigma_1 p_1) \vartheta = r \frac{\partial}{\partial \mu} [(1-\mu^2) U] \quad (116)$$

$$(\Delta_{\sigma} - i\sigma_1 p_2) P = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (117)$$

mit den Randbedingungen (39) - (40).

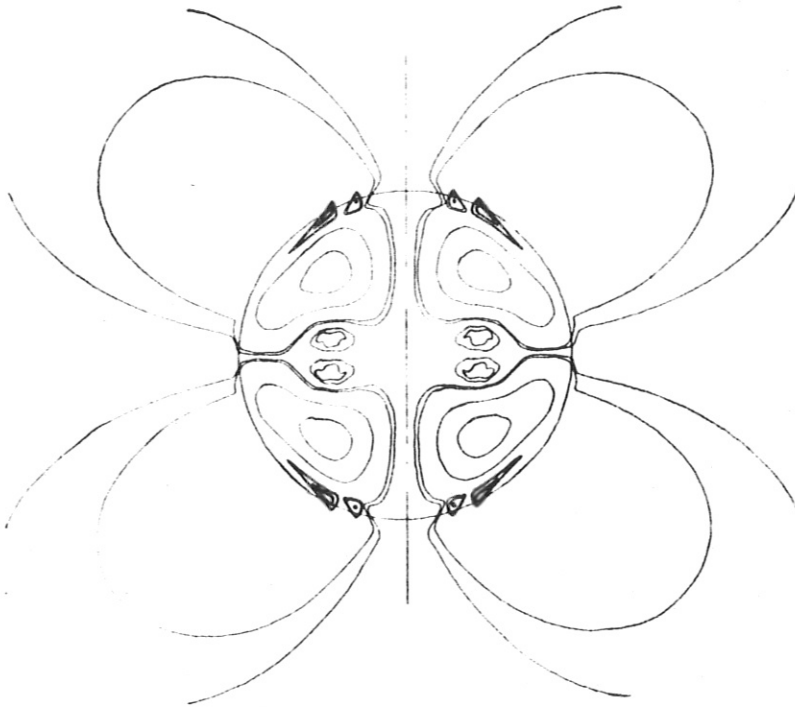


Abb. 4: Magnetfeldlinien in der Meridionalebene für  $Q = 10^4$ .

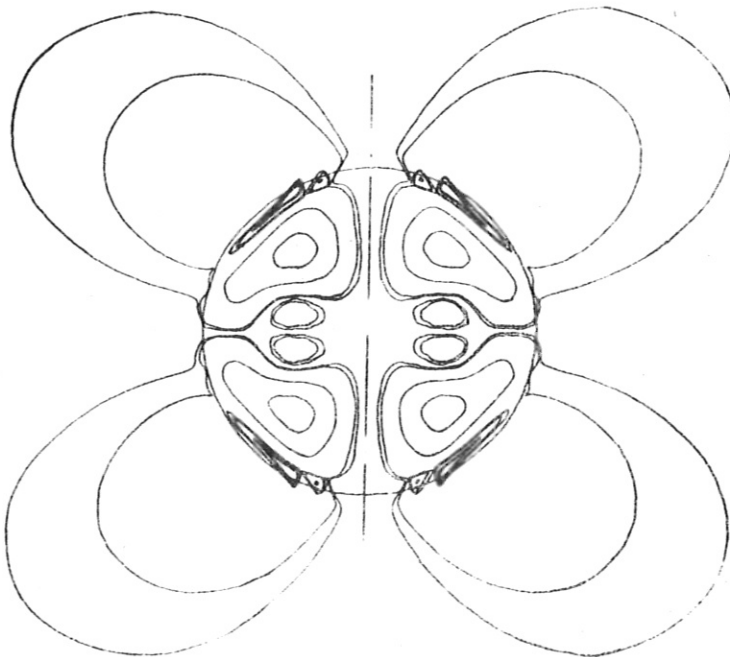


Abb. 5: Magnetfeldlinien in der Meridionalebene für  $Q = 10^{10}$ .

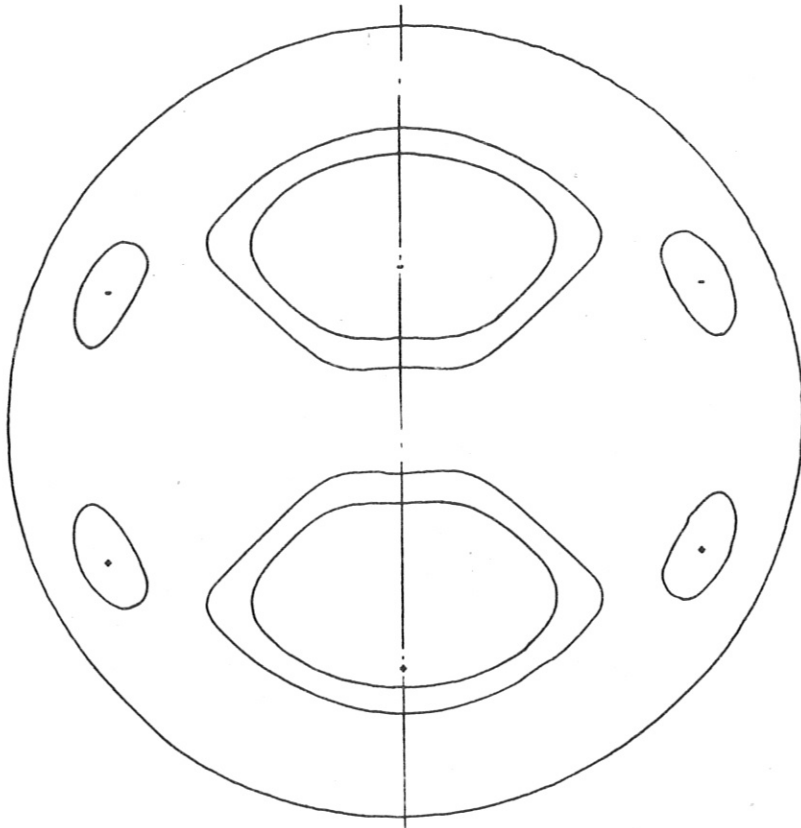


Abb. 6: Linien gleicher Temperaturschwankung für  $Q = 10^4$ .

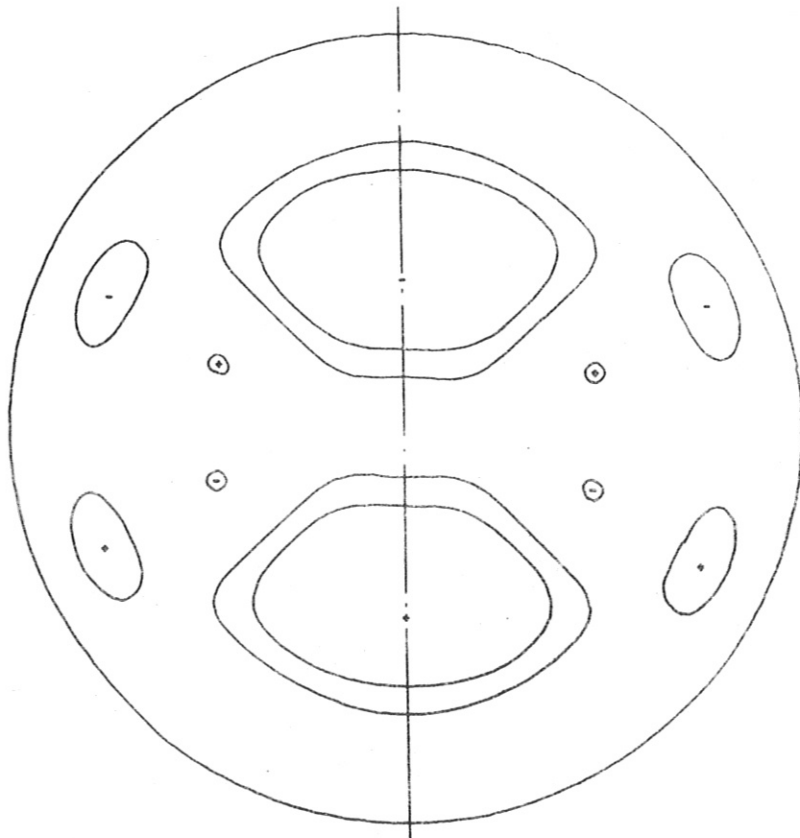


Abb. 7: Linien gleicher Temperaturschwankung für  $Q = 10^{10}$ .

Betrachtet man  $C$  als Lagrange-Multiplikator, so läßt sich das Problem wie in Abschn. 1.6 auf die Untersuchung des Funktionals

$$J[U] = \int U \left[ (\Delta_{\mathcal{S}} - i\sigma_1) \Delta_{\mathcal{S}} U - C \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \mu} + Q \frac{\partial}{\partial z} \Delta_{\mathcal{S}}^{-1} P \right] d\mathcal{E}_{\mathcal{S}} \quad (118)$$

reduzieren. Die Lösungen von (116) - (117) sind durch folgende Formeln gegeben:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \mu} = \sum A_{nj} \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_{nj}}{\partial \mu}, \quad P = \sum A_{nj} P_{nj}, \quad (119)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_{nj}}{\partial \mu} = \frac{(n+1)(n+2)}{d_{nj}^4 + (\sigma_1 p_2)^2} \left\{ d_{nj}^2 g_{n/n} (d_{nj} \cdot r) - i\sigma_1 p_2 f_{n/n} (d_{nj} \cdot r) - 2 d_{nj}^2 \frac{I_{n+3/2}(\sqrt{|\sigma_1 p_2})}{I_{n+1/2}(\sqrt{|\sigma_1 p_2})} \right\} \frac{C_n}{r^{3/2}}, \quad (120)$$

$$P_{nj} = \frac{d_{nj}}{d_{nj}^4 + (\sigma_1 p_2)^2} \left\{ \frac{n+2}{2n+3} \left[ d_{nj}^2 g_{n-1/n} (d_{nj} \cdot r) - i\sigma_1 p_2 f_{n-1/n} (d_{nj} \cdot r) - \overset{(1)}{D}_{nj} \frac{I_{n+1/2}(\sqrt{|\sigma_1 p_2})}{I_{n-1/2}(\sqrt{|\sigma_1 p_2})} \right] \right. \\ \left. - \frac{C_{n-1}}{r^{3/2}} - \frac{n+1}{2n+3} \left[ d_{nj}^2 f_{n+1/n} (d_{nj} \cdot r) - i\sigma_1 p_2 g_{n+1/n} (d_{nj} \cdot r) - \overset{(2)}{D}_{nj} \frac{I_{n+5/2}(\sqrt{|\sigma_1 p_2})}{I_{n+3/2}(\sqrt{|\sigma_1 p_2})} \right] \right. \\ \left. - \frac{C_{n+1}}{r^{3/2}} \right\} \quad \text{für} \quad r \leq 1, \quad (121)$$

$$D_{nj}^{(1)} = d_{nj} \left[ d_{nj}^2 g_{n-2/n} (d_{nj}) - i\sigma_1 p_2 f_{n-2/n} (d_{nj}) \right] / \left[ \sqrt{|\sigma_1 p_2} \frac{I_{n-1/2}(\sqrt{|\sigma_1 p_2})}{I_{n-3/2}(\sqrt{|\sigma_1 p_2})} \right], \quad (122)$$

$$D_{nj}^{(2)} = d_{nj} \left[ d_{nj}^2 f_{n/n} (d_{nj}) - i\sigma_1 p_2 g_{n/n} (d_{nj}) \right] / \left[ \sqrt{|\sigma_1 p_2} \frac{I_{n+3/2}(\sqrt{|\sigma_1 p_2})}{I_{n+1/2}(\sqrt{|\sigma_1 p_2})} \right]. \quad (123)$$

Die Extremalbedingung für  $J[U]$  ergibt die Gleichung

$$\det \left| \langle mk | U U | nj \rangle + Q \langle mk | U P | nj \rangle - C \langle mk | U T | nj \rangle \right| = 0. \quad (124)$$

Die hier auftretenden Matrixelemente sind durch folgende Gleichungen definiert:

$$\langle mk | U U | nj \rangle = \int U_{mk} (\Delta_{\mathcal{S}} - i\sigma_1) \Delta_{\mathcal{S}} U_{nj} d\mathcal{E}_{\mathcal{S}}, \quad (125)$$

$$\langle mk | U T | nj \rangle = \int U_{mk} \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_{nj}}{\partial \mu} d\mathcal{E}_{\mathcal{S}}, \quad (126)$$

$$\langle mk | U P | nj \rangle = \int U_{mk} \frac{\partial}{\partial z} \Delta_{\mathcal{S}}^{-1} P_{nj} d\mathcal{E}_{\mathcal{S}}. \quad (127)$$

Für die explizite Form der Matrixelemente verweisen wir auf

den Anhang. Sie sind von  $\sigma_1$  abhängig und besitzen die Symmetrieeigenschaften (103), sind aber nicht hermitesch.

Wegen des großen Aufwands, der durch Rechnungen mit komplexen Zahlen einerseits und mit den zwei zusätzlichen Parametern andererseits anstünde, beschränken wir uns auf die Lösung von (124) in erster Ordnung. Eine Anzahl von Proben, in denen die Rechnung bis zur Ordnung 36 durchgeführt wurde, hat gezeigt, daß die Genauigkeit dieser Näherung viel größer als bei der stationären Konvektion ist. Die Stabilitätskurven im  $(\log Q, \log C)$ -Diagramm ändern sich kaum, weil sie sich bei höheren Näherungen im wesentlichen geringfügig parallel zu sich selbst verschieben.

Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 zusammengefaßt. Die Größe  $\Gamma$  ist durch

$$\Gamma = \sigma_1 \left( \frac{P_2}{Q} \right)^{1/2} = \frac{\lambda}{\left( \frac{H}{4\pi\rho} \right) / R} \quad (128)$$

definiert. Sie gibt also das Verhältnis der Frequenz zur "natürlichen" Frequenz des Systems, die durch die Durchlaufzeit einer Alfvén'schen Welle gegeben ist.

Aus der numerischen Rechnung geht hervor, daß für die Möglichkeit der Überstabilität die Bedingung

$$P_2 > P_1 \quad \text{oder} \quad \gamma < \kappa \quad (130)$$

notwendig ist. Diese Bedingung ist nicht im Erdkern, wohl aber in den heißen Sternen erfüllt.

Das Verhalten der Wärmeinstabilität ist anhand der Abb. 1 leicht zu übersehen. Für jedes Paar von Prandtlzahlen  $p_1 < p_2$  gibt es eine Hartmannzahl  $\bar{Q}(p_1, p_2)$  derart, daß für  $Q < \bar{Q}$  die Instabilität als Konvektion, für  $Q > \bar{Q}$  als Überstabilität auftritt. Im Falle  $p_1 \geq p_2$  tritt die Instabilität nur in der Form stationärer Konvektion auf.

Tabelle 2: Kritische Rayleighzahlen und Frequenzen für das Eintreten der Überstabilität bei verschiedenen Werten der Hartmann- und Prandtlzahlen.

P1 = 0.		P2 = 1.000				
SIGMA	Q	C	G	LOG Q	LOG C	
1.E 00	1.1409E 02	1.3488E 04	0.094	2.06	4.13	
1.E 01	1.4017E 02	1.3613E 04	0.845	2.15	4.13	
1.E 02	2.1504E 03	1.7350E 04	2.156	3.33	4.24	
1.E 03	1.6245E 05	3.1678E 04	2.481	5.21	4.50	
1.E 04	1.5214E 07	7.7630E 04	2.564	7.18	4.89	
1.E 05	1.4917E 09	2.2335E 05	2.589	9.17	5.35	
1.E 06	1.4825E 11	6.8429E 05	2.597	11.17	5.84	
1.E 07	1.4797E 13	2.1420E 06	2.600	13.17	6.33	
1.E 08	1.4788E 15	6.7515E 06	2.600	15.17	6.83	
1.E 09	1.4785E 17	2.1328E 07	2.601	17.17	7.33	
1.E 10	1.4784E 19	6.7424E 07	2.601	19.17	7.83	

P1 = 0.001		P2 = 1.000				
SIGMA	Q	C	G	LOG Q	LOG C	
1.E 00	1.1407E 02	1.3487E 04	0.094	2.06	4.13	
1.E 01	1.4057E 02	1.3629E 04	0.843	2.15	4.13	
1.E 02	2.1581E 03	1.7383E 04	2.153	3.33	4.24	
1.E 03	1.6351E 05	3.1909E 04	2.473	5.21	4.50	
1.E 04	1.5459E 07	9.7709E 04	2.543	7.19	4.99	
1.E 05	1.5584E 09	5.3744E 06	2.533	9.19	6.73	
1.E 06	1.6967E 11	1.6455E 09	2.428	11.23	9.22	
1.E 07	2.4425E 13	7.4071E 11	2.023	13.39	11.87	
2.E 07	1.3348E 14	5.7175E 12	1.731	14.13	12.76	
3.E 07	4.1779E 14	2.1907E 13	1.468	14.62	13.34	
4.E 07	1.1083E 15	6.7086E 13	1.202	15.04	13.83	
5.E 07	3.0580E 15	2.0691E 14	0.904	15.49	14.32	
6.E 07	1.4319E 16	1.0611E 15	0.501	16.16	15.03	

P1 = 0.010		P2 = 1.000				
SIGMA	Q	C	G	LOG Q	LOG C	
1.E 00	1.1728E 02	1.3640E 04	0.092	2.07	4.13	
1.E 01	1.4414E 02	1.3771E 04	0.833	2.16	4.14	
1.E 02	2.2285E 03	1.7730E 04	2.118	3.35	4.25	
1.E 03	1.7353E 05	4.1301E 04	2.401	5.24	4.62	
1.E 04	1.7830E 07	2.0668E 06	2.368	7.25	6.32	
1.E 05	2.5136E 09	7.8032E 08	1.995	9.40	8.89	
2.E 05	1.3726E 10	5.9499E 09	1.707	10.14	9.77	
3.E 05	4.3050E 10	2.2733E 10	1.446	10.63	10.36	
4.E 05	1.1477E 11	6.9765E 10	1.181	11.06	10.84	
5.E 05	3.2077E 11	2.1754E 11	0.883	11.51	11.34	
6.E 05	1.6141E 12	1.1973E 12	0.472	12.21	12.06	

P1 = 0.		P2 = 2.000				
SIGMA	Q	C	G	LOG Q	LOG C	
1.E 00	5.7446E 01	1.0777E 04	0.187	1.76	4.03	
1.E 01	1.0823E 02	1.1005E 04	1.359	2.03	4.04	
1.E 02	3.7443E 03	1.4075E 04	2.311	3.57	4.15	
1.E 03	3.1568E 05	2.4254E 04	2.517	5.50	4.38	
1.E 04	3.0170E 07	5.6797E 04	2.575	7.48	4.75	
1.E 05	2.9755E 09	1.5985E 05	2.593	9.47	5.20	
1.E 06	2.9626E 11	4.8579E 05	2.598	11.47	5.69	
1.E 07	2.9586E 13	1.5165E 06	2.600	13.47	6.18	
1.E 08	2.9573E 15	4.7760E 06	2.601	15.47	6.68	
1.E 09	2.9569E 17	1.5083E 07	2.601	17.47	7.18	
1.E 10	2.9568E 19	4.7678E 07	2.601	19.47	7.68	

P1 = 0.001 P2 = 2.000

SIGMA	Q	C	G	LOG Q	LOG C
1.E 00	5.7437E 01	1.0776E 04	0.187	1.76	4.03
1.E 01	1.0847E 02	1.1012E 04	1.358	2.04	4.04
1.E 02	3.7551E 03	1.4092E 04	2.308	3.57	4.15
1.E 03	3.1726E 05	2.4394E 04	2.511	5.50	4.39
1.E 04	3.0525E 07	7.1180E 04	2.560	7.48	4.85
1.E 05	3.0696E 09	3.7982E 06	2.553	9.49	6.58
1.E 06	3.2542E 11	1.1212E 09	2.479	11.51	9.05
1.E 07	4.1040E 13	4.4069E 11	2.208	13.61	11.64
1.E 08	2.4420E 16	8.2609E 14	0.905	16.39	14.92

P1 = 0.010 P2 = 2.000

SIGMA	Q	C	G	LOG Q	LOG C
1.E 00	5.8721E 01	1.0837E 04	0.185	1.77	4.03
1.E 01	1.1069E 02	1.1072E 04	1.344	2.04	4.04
1.E 02	3.8539E 03	1.4285E 04	2.278	3.59	4.15
1.E 03	3.3190E 05	3.1125E 04	2.455	5.52	4.49
1.E 04	3.3799E 07	1.4454E 06	2.433	7.53	6.16
1.E 05	4.1966E 09	4.6745E 08	2.183	9.62	8.67
1.E 06	2.5166E 12	8.5309E 11	0.891	12.40	11.93

P1 = 1.000 P2 = 2.000

SIGMA	Q	C	G	LOG Q	LOG C
1.E 00	3.4491E 02	2.4425E 04	0.076	2.54	4.39
1.E 01	7.2316E 02	3.4408E 04	0.526	2.86	4.54
2.E 01	2.1468E 03	7.3643E 04	0.610	3.33	4.87
3.E 01	5.5501E 03	1.7206E 05	0.569	3.74	5.24
4.E 01	1.3366E 04	4.0749E 05	0.489	4.13	5.61
5.E 01	3.4557E 04	1.0615E 06	0.380	4.54	6.03
6.E 01	1.4794E 05	4.6278E 06	0.221	5.17	6.67

P1 = 0. P2 = 5.000

SIGMA	Q	C	G	LOG Q	LOG C
1.E 00	2.4093E 01	9.1528E 03	0.456	1.38	3.96
1.E 01	1.3779E 02	9.5240E 03	1.905	2.14	3.98
1.E 02	8.4818E 03	1.1551E 04	2.428	3.93	4.06
1.E 03	7.6999E 05	1.8031E 04	2.548	5.89	4.26
1.E 04	7.4865E 07	3.8633E 04	2.584	7.87	4.59
1.E 05	7.4214E 09	1.0382E 05	2.596	9.87	5.02
1.E 06	7.4011E 11	3.0996E 05	2.599	11.87	5.49
1.E 07	7.3947E 13	9.6185E 05	2.600	13.87	5.98
1.E 08	7.3927E 15	3.0233E 06	2.601	15.87	6.48
1.E 09	7.3920E 17	9.5422E 06	2.601	17.87	6.98
1.E 10	7.3918E 19	3.0157E 07	2.601	19.87	7.48

P1 = 0.001 P2 = 5.000

SIGMA	Q	C	G	LOG Q	LOG C
1.E 00	2.4093E 01	9.1521E 03	0.456	1.38	3.96
1.E 01	1.3806E 02	9.5269E 03	1.903	2.14	3.98
1.E 02	8.5023E 03	1.1560E 04	2.425	3.93	4.06
1.E 03	7.7205E 05	1.8112E 04	2.544	5.89	4.26
1.E 04	7.5461E 07	4.8235E 04	2.574	7.88	4.68
1.E 05	7.5721E 09	2.4398E 06	2.570	9.88	6.39
1.E 06	7.8499E 11	6.9076E 08	2.524	11.89	8.84
1.E 07	8.9853E 13	2.4484E 11	2.359	13.95	11.39
1.E 08	1.6664E 16	1.4275E 14	1.732	16.22	14.15
2.E 08	1.3829E 17	1.6740E 15	1.203	17.14	15.22
3.E 08	1.7744E 18	2.6298E 16	0.504	18.25	16.42

P1 = 0.010 P2 = 5.000

SIGMA	Q	C	G	LOG Q	LOG C
1.E 00	2.4545E 01	9.1733E 03	0.451	1.39	3.96
1.E 01	1.4050E 02	9.5529E 03	1.886	2.15	3.98
1.E 02	8.6845E 03	1.1663E 04	2.399	3.94	4.07
1.E 03	7.9903E 05	2.2838E 04	2.502	5.90	4.36
1.E 04	8.0762E 07	9.4675E 05	2.488	7.91	5.98
1.E 05	9.1506E 09	2.6541E 08	2.338	9.96	8.42
1.E 06	1.6934E 12	1.4661E 11	1.718	12.23	11.17
2.E 06	1.4072E 13	1.7097E 12	1.192	13.15	12.23
3.E 06	1.8339E 14	2.7196E 13	0.495	14.26	13.43

P1 = 1.000 P2 = 5.000

SIGMA	Q	C	G	LOG Q	LOG C
1.E 00	8.2468E 01	1.1826E 04	0.246	1.92	4.07
1.E 01	5.2173E 02	1.6874E 04	0.979	2.72	4.23
1.E 02	6.5446E 04	8.0720E 05	0.874	4.82	5.91
2.E 02	7.2382E 05	9.8376E 06	0.526	5.86	6.99

P1 = 0. P2 = 10.000

SIGMA	Q	C	G	LOG Q	LOG C
1.E 00	1.4017E 01	8.6163E 03	0.845	1.15	3.94
1.E 01	2.1504E 02	8.9900E 03	2.156	2.33	3.95
1.E 02	1.6245E 04	1.0423E 04	2.481	4.21	4.02
1.E 03	1.5214E 06	1.5018E 04	2.564	6.18	4.18
1.E 04	1.4917E 08	2.9590E 04	2.589	8.17	4.47
1.E 05	1.4825E 10	7.5684E 04	2.597	10.17	4.88
1.E 06	1.4797E 12	2.2145E 05	2.600	12.17	5.35
1.E 07	1.4788E 14	6.8241E 05	2.600	14.17	5.83
1.E 08	1.4785E 16	2.1401E 06	2.601	16.17	6.33
1.E 09	1.4784E 18	6.7496E 06	2.601	18.17	6.83
1.E 10	1.4784E 20	2.1326E 07	2.601	20.17	7.33

P1 = 0.001 P2 = 10.000

SIGMA	Q	C	G	LOG Q	LOG C
1.E 00	1.4016E 01	8.6158E 03	0.845	1.15	3.94
1.E 01	2.1544E 02	8.9917E 03	2.154	2.33	3.95
1.E 02	1.6280E 04	1.0428E 04	2.478	4.21	4.02
1.E 03	1.5261E 06	1.5076E 04	2.560	6.18	4.18
1.E 04	1.5008E 08	3.6876E 04	2.581	8.18	4.57
1.E 05	1.5044E 10	1.7689E 06	2.578	10.18	6.25
1.E 06	1.5427E 12	4.8511E 08	2.546	12.19	8.69
1.E 07	1.6912E 14	1.6349E 11	2.432	14.23	11.21
1.E 08	2.4390E 16	7.3953E 13	2.025	16.39	13.87
2.E 08	1.3329E 17	5.7091E 14	1.732	17.12	14.76
3.E 08	4.1713E 17	2.1871E 15	1.469	17.62	15.34
4.E 08	1.1060E 18	6.6944E 15	1.203	18.04	15.83
5.E 08	3.0480E 18	2.0622E 16	0.906	18.48	16.31
6.E 08	1.4180E 19	1.0508E 17	0.504	19.15	17.02

P1 = 0.010 P2 = 10.000

SIGMA	Q	C	G	LOG Q	LOG C
1.E 00	1.4265E 01	8.6261E 03	0.837	1.15	3.94
1.E 01	2.1902E 02	9.0074E 03	2.137	2.34	3.95
1.E 02	1.6595E 04	1.0499E 04	2.455	4.22	4.02
1.E 03	1.5689E 06	1.8902E 04	2.525	6.20	4.28
1.E 04	1.5801E 08	7.1202E 05	2.516	8.20	5.85
1.E 05	1.7194E 10	1.8199E 08	2.412	10.24	8.26
1.E 06	2.4752E 12	7.6580E 10	2.010	12.39	10.88
2.E 06	1.3526E 13	5.8547E 11	1.720	13.13	11.77
3.E 06	4.2337E 13	2.2336E 12	1.458	13.63	12.35
4.E 06	1.1231E 14	6.8224E 12	1.194	14.05	12.83
5.E 06	3.0989E 14	2.1005E 13	0.898	14.49	13.32
6.E 06	1.4510E 15	1.0758E 14	0.498	15.16	14.03

P1 = 1.000 P2 = 10.000

SIGMA	Q	C	G	LOG Q	LOG C
1.E 00	4.2015E 01	9.7488E 03	0.488	1.62	3.99
1.E 01	7.0420E 02	1.3775E 04	1.192	2.85	4.14
1.E 02	7.5688E 04	4.3978E 05	1.149	4.88	5.64
2.E 02	4.0522E 05	2.5051E 06	0.994	5.61	6.40
3.E 02	1.2988E 06	8.5193E 06	0.832	6.11	6.93
4.E 02	3.6999E 06	2.5497E 07	0.658	6.57	7.41
5.E 02	1.2681E 07	9.1127E 07	0.444	7.10	7.96



## 2. Wärmeinstabilität einer Flüssigkeitskugel in einem toroidalen Magnetfeld.

### 2.1 Der Grundzustand.

In einem statischen Modell muß die Lorenkraft durch den Druckgradienten und die Schwerkraft kompensiert werden. Im inkompressiblen Fall folgt dann, daß die Bedingung

$$\text{rot } 4\pi \mathcal{L} = \text{rot}(\text{rot } \mathcal{J} \times \mathcal{J}) = 0 \quad (1)$$

erfüllt sein muß. Wird das Magnetfeld als toroidal und rotationssymmetrisch vorausgesetzt, so kann man unter der Bedingung (1) das Feld eindeutig bestimmen.

Mit dem Ansatz

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \times 4\pi T \quad (2)$$

folgt aus dem Verschwinden der  $\mathcal{J}$ -Komponente von  $\text{rot } \mathcal{L}$ , daß eine Funktion nur des Abstandes  $s$  von der Symmetrieachse ist. Eine weitere Bedingung für ein statisches Modell mit endlicher Leitfähigkeit ist die Gültigkeit der Gleichung

$$\nabla^2 \mathcal{J} = -\text{rot}^2 \mathcal{J} = 0 \quad (3)$$

innerhalb der Flüssigkeit. Nach (1.2.21) - (25) bedeutet das hier für  $T = T(s)$ , daß

$$\Delta_s T = \left( \frac{d^2}{ds^2} + \frac{3}{s} \frac{d}{ds} \right) T = 0 \quad (4)$$

ist. Die einzige im Kugelzentrum nichtsinguläre Lösung von (4) ist  $T = \text{const.}$  Daher ist bis auf einen konstanten Intensitätsfaktor

$$\mathcal{J} = \left( 0, \frac{1}{2} s, 0 \right), \quad \frac{c}{4\pi} \mathcal{J} = (0, 0, 1). \quad (5)$$

Das Magnetfeld wird also durch eine konstante Stromdichte in Richtung der Achse erzeugt, und seine Intensität ist proportional dem Abstand von der Achse.

## 2.2 Wärmeinstabilität.

Bei der Untersuchung der linearisierten magnetohydrodynamischen Gleichungen für rotationssymmetrische Störungen kommt man zu dem Ergebnis, daß der induzierte magnetische Fluß rot ( $\omega \times \xi$ ) verschwindet ( $\xi$  ist durch (5) gegeben). Das Modell ist also stabil in Bezug auf rotationssymmetrische Störungen.

Die folgende geometrische Betrachtung ergibt eine weitere einleuchtende Erklärung für diese Stabilität <sup>+)</sup> : wegen der Rotationssymmetrie muß man bei der Untersuchung der Bewegung eines Flüssigkeitselements immer die Bewegung eines Ringes betrachten. Da das Magnetfeld von der  $z$ -Koordinate unabhängig ist, genügt es, eine Ausdehnung bzw. eine Schrumpfung eines solchen Ringes zu untersuchen. Wegen der Inkompressibilität ändert sich dann der Querschnitt des Ringes wie  $r^{-1}$ . Da das Magnetfeld sich wie  $r^1$  ändert, bleibt der magnetische Fluß durch die Ringoberfläche konstant.

## 3. Die Wärmeinstabilität einer rotierenden Flüssigkeitskugel.

Der Einfluß der Rotation auf die Wärmeinstabilität einer Flüssigkeitskugel wurde von Chandrasekhar (1952, 1961) und von Bisshopp (1958) untersucht. Diese Untersuchungen sollen im folgenden erweitert werden, und wir wollen der Vollständigkeit halber die wesentlichen Züge der obengenannten Arbeiten hier wiedergeben.

### 3.1 Grundgleichungen und Eigenwertproblem.

Es sei  $\vec{\Omega}$  die Rotationsgeschwindigkeit der Kugel (wir nehmen im Grundzustand eine starre Rotation an). In einem mitrotierenden Koordinatensystem lautet die Bewegungsgleichung

$$\rho \frac{d\omega}{dt} = -\text{grad} \left( p - \frac{1}{2} \rho |\omega \times \vec{\Omega}|^2 \right) + \rho g \omega + \rho v \nabla^2 \omega + 2 \omega \times \vec{\Omega} \quad (1)$$

Macht man die gleichen Annahmen wie in Abschn. 1.1 über den thermischen Zustand der Kugel, so erhält man für rotationssymmetrische Störungen bei Benutzung der Darstellung (1.3.21) für  $\omega$  das Gleichungssystem

<sup>+)</sup>  Herrn Professor A. Schlüter bin ich für diese Erklärung zu Dank verpflichtet.

$$(\Delta_{\mathcal{J}} - \frac{\lambda}{\nu}) \Delta_{\mathcal{J}} U = \frac{\gamma}{\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \mu} + \frac{2\Omega}{\nu} \frac{\partial V}{\partial z}, \quad (2)$$

$$(\Delta_{\mathcal{J}} - \frac{\lambda}{\nu}) V = - \frac{2\Omega}{\nu} \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (3)$$

$$(\nabla^2 - \frac{\lambda}{\kappa}) \vartheta = \frac{2\beta}{\kappa} r \frac{\partial}{\partial \mu} [(1-\mu^2)U] \quad (4)$$

Die Transformation

$$u \rightarrow R u, \quad \vartheta \rightarrow \frac{2\beta R^3}{\kappa} \vartheta, \quad v \rightarrow \frac{2\Omega R}{\nu} v \quad (5)$$

führt auf das System

$$(\Delta_{\mathcal{J}} - \sigma) \Delta_{\mathcal{J}} U = C \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \mu} + A \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (6)$$

$$(\Delta_{\mathcal{J}} - \sigma) v = - \frac{\partial U}{\partial z} \quad (7)$$

$$(\nabla^2 - \sigma p_1) \vartheta = r \frac{\partial}{\partial \mu} [(1-\mu^2)U] \quad (8)$$

in dem  $C = 2\beta \gamma R^6 / (\kappa \nu)$  die Rayleighzahl,  $A = 4\Omega^2 R^4 / \nu^2$  die Taylorzahl,  $p_1 = \nu / \kappa$  die Prandtlzahl und  $\sigma = \lambda R^2 / \nu$  die dimensionslose Frequenz bezeichnen.

Die Randbedingungen sind durch

$$U = \frac{\partial U}{\partial r} = v = \vartheta = 0 \quad \text{für} \quad r = 1 \quad (9)$$

gegeben (vgl. Abschn. 1.3).

Bei gegebenem  $A$  und  $p_1$  stellt das System (6) - (9) ein Eigenwertproblem der Ordnung 8 dar. Wie Chandrasekhar gezeigt hat, läßt sich das Problem auch durch das folgende Variationsprinzip ersetzen:  $U$  sei eine Funktion, die den Bedingungen (8) genügt,  $v$  und  $\vartheta$  die entsprechenden, zu einem bestimmten gehörigen Lösungen von (7) - (8). Unter diesen Voraussetzungen hat das Funktional

$$C[U] = \frac{\int \{ (\Delta_{\mathcal{J}} U)^2 + \sigma (\text{grad} U)^2 + A [(\text{grad} v)^2 + \sigma v^2] \} d\tau_{\mathcal{J}}}{\int [(\text{grad} \vartheta)^2 + \sigma p_1 \vartheta^2] d\tau_3} \quad (10)$$

ein Extremum bezüglich  $U$  genau dann, wenn (6) erfüllt ist.

### 3.2 Stationäre Konvektion.

Wir setzen in (6) - (8) und in (10)  $\bar{\sigma} = 0$  ein. Die Eigenwerte  $C_j$  sind dann nach (10) stets positiv, und wir können wie in Abschn. 1.6 zeigen, daß der kleinste Eigenwert  $C_1$  (die kritische Rayleighzahl) folgende Eigenschaften hat:

- a)  $C_1$  ist das absolute Minimum des Funktionals (10) (mit  $\bar{\sigma} = 0$ ) bezüglich  $U$ .
- b)  $C_1$  ist eine monoton wachsende Funktion von  $A$ .

Für die Durchführung des Variationsverfahrens machen wir für  $U$  den Ansatz

$$U = \sum A_{nj} U_{nj}$$

mit 
$$U_{nj} = f_{n|n} (d_{nj} r) C_n^{3/2}(\mu) / r^{3/2} . \quad (11)$$

(Die von Bisshopp eingeführten Funktionen  $f_{n|n}, g_{n|n}$  wurden in Abschn. 1.6 definiert). Die entsprechenden Lösungen von (6) - (8) sind

$$\theta = \sum A_{nj} \vartheta_{nj} , \quad (12)$$

$$v = \sum A_{nj} \chi_{nj} . \quad (13)$$

Die  $g_{nj}$  sind durch (1.6.95) und (1.6.114) gegeben, und es ist

$$\begin{aligned} \chi_{nj} = \frac{1}{d_{nj}} \left\{ \frac{n+2}{2n+3} \left[ g_{n-1|n} (d_{nj} r) - g_{n-1|n} (d_{nj}) r^{n+1/2} \right] C_{n-1} / r^{3/2} \right. \\ \left. - \frac{n+1}{2n+3} \left[ f_{n+1|n} (d_{nj} r) - f_{n+1|n} (d_{nj}) r^{n+1/2} \right] C_{n+1} / r^{3/2} \right\} . \end{aligned} \quad (14)$$

Betrachtet man  $C$  als Lagrange-Multiplikator, so kann man das Problem auf die Untersuchung der Extrema von

$$J[U] = \int U \left[ \Delta_r^2 U - C \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \mu} - A \frac{\partial v}{\partial z} \right] d\tau_5 \quad (15)$$

reduzieren. Die Bedingung

$$\frac{\partial J}{\partial A_{mk}} = 0 \quad (16)$$

führt dann auf das lineare homogene System

$$\sum_{nj} \left( \langle mk | U U | nj \rangle - A \langle mk | U D X | nj \rangle - C \langle mk | U T | nj \rangle \right) A_{nj} = 0 \quad (17)$$

mit

$$\langle mk | U D X | nj \rangle = \int U_{mk} \frac{\partial X_{nj}}{\partial z} d\tau_5 \quad (18)$$

(Die übrigen Matrixelemente wurden in Abschn. 1.6 definiert.)  
Der explizite Ausdruck für das durch (18) definierte Matrixelement wird im Anhang gegeben <sup>+)</sup> .

Die Lösung von (17) wurde von Bisshopp für Werte von  $A$  zwischen 1 und  $10^6$  durchgeführt. Da die Näherung auf die Ordnung 9 beschränkt wurde, ist die kritische Rayleighzahl für  $A=10^6$  schon mit einer Ungenauigkeit von mehr als 10 % behaftet. Eine abschließende Bemerkung Bisshopps lautet: "Since the only self-gravitating spheres we can observe are of astronomical dimensions and (because of the dependence of  $A$  on the fourth power of the radius) have rather large Taylor numbers (e.g.  $\sim 10^{26}$  for the earth's core), it is evident that an asymptotic relation giving the dependence of  $C$  on  $A$  when  $A$  is very large is needed."

Eine Erweiterung von Bisshopp's Untersuchungen wurde in dieser Arbeit durch die Anwendung höherer Näherungen erreicht. Die Gleichungen (17) wurden nach dem im Abschn. 1.6 diskutierten Schema bis zur Ordnung 36 gelöst, und die kritischen Rayleighzahlen wurden nach dem dort erwähnten 5 %-Konvergenzkriterium bestimmt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 3 zusammengefaßt.

Um eine asymptotische Relation zu gewinnen, betrachten wir das Funktional

$$C[U] = \frac{\int [(\omega_j - U)^2 + A (g \text{ grad } V)^2] d\tau_5}{\int (g \text{ grad } \theta)^2 d\tau_3} \quad (19)$$

<sup>+)</sup>  Es sei hier angemerkt, daß Bisshopps Formel für  $\langle mk | U T | nj \rangle$  einen Fehler enthält.

A	C
$10^0$	$8.0626 \times 10^3$
$10^1$	$8.0754 \times 10^3$
$10^2$	$8.2028 \times 10^3$
$10^3$	$9.3855 \times 10^3$
$10^4$	$1.6895 \times 10^4$
$10^5$	$5.1527 \times 10^4$
$10^6$	$2.1660 \times 10^5$
$10^7$	$1.2002 \times 10^6$
$10^8$	$8.1328 \times 10^6$
$10^9$	$7.9394 \times 10^7$
$10^{10}$	$7.9196 \times 10^8$
$10^{11}$	$7.9177 \times 10^9$

Tabelle 3: Kritische Rayleighzahlen für das Eintreten stationärer Konvektion bei verschiedenen Werten der Taylorzahl.

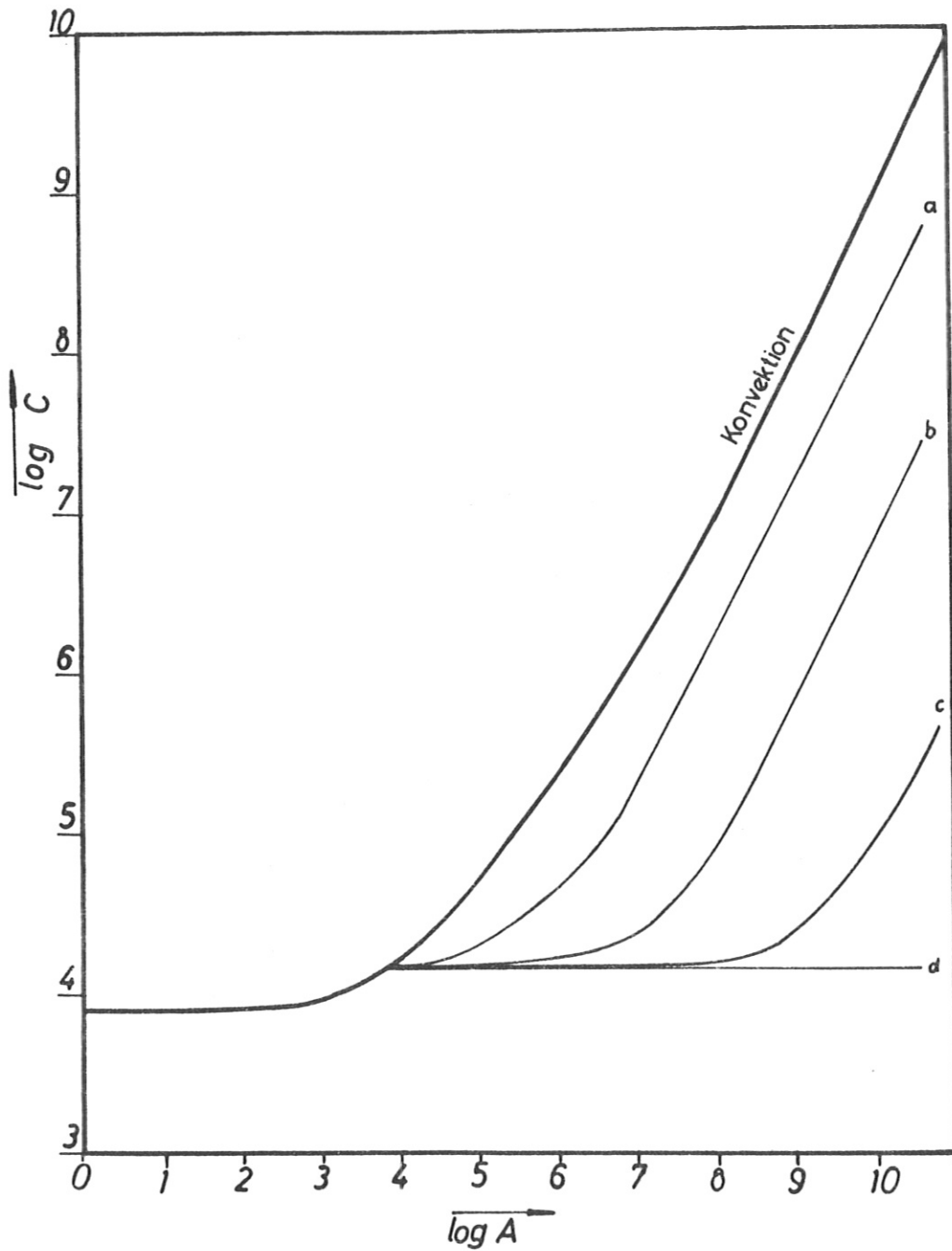


Abb. 8: Die kritische Rayleighzahl als Funktion von  $A$ . Die Kurven a bis d beschreiben das Verhalten bei Überstabilität für die folgenden Werte der Prandtlzahl:  
(a)  $p_1 = .05$ ; (b)  $p_1 = .01$ ; (c)  $p_1 = .001$ ; (d)  $p_1 = 0$ .

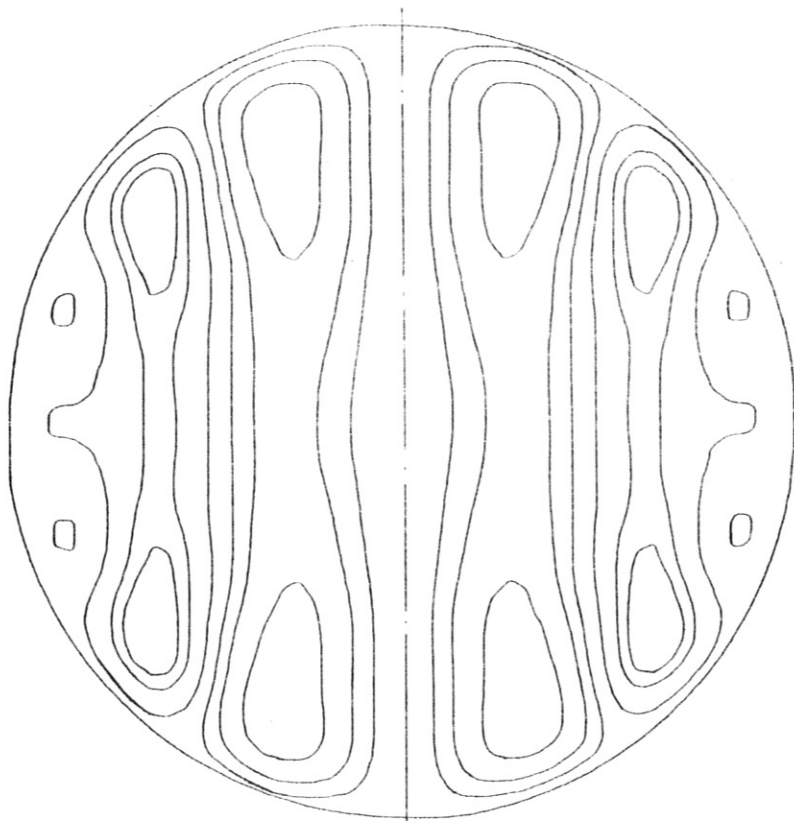


Abb. 9: Stromlinien in der Meridionalebene für  $A = 10^5$ .

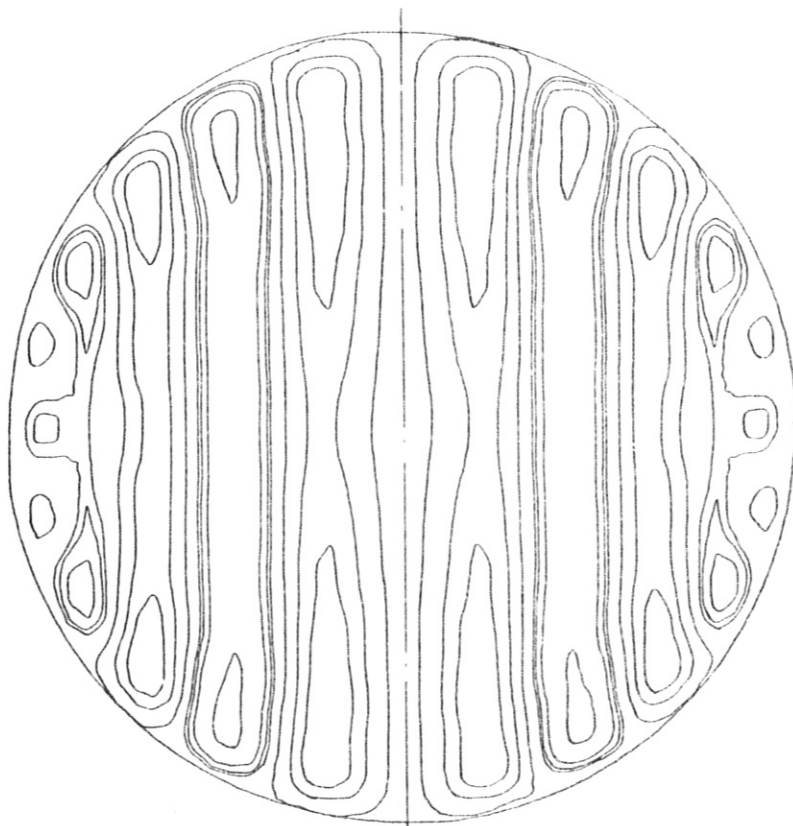


Abb. 10: Stromlinien in der Meridionalebene für  $A \rightarrow \infty$ .



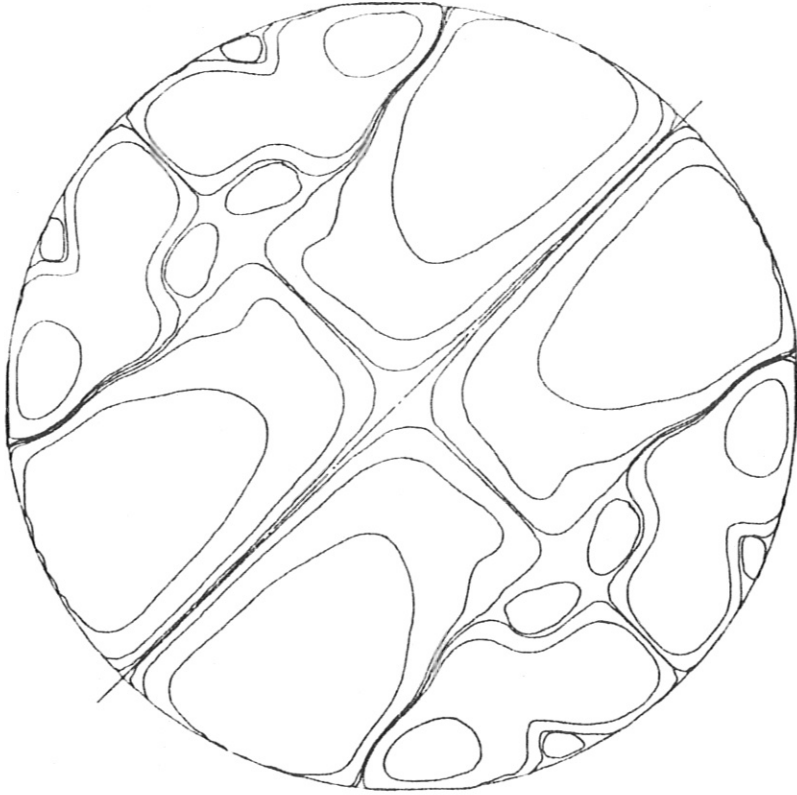


Abb. 11: Wirbellinien in der Meridionalebene für  $A = 10^5$ .



Abb. 12: Wirbellinien in der Meridionalebene für  $A \rightarrow \infty$ .

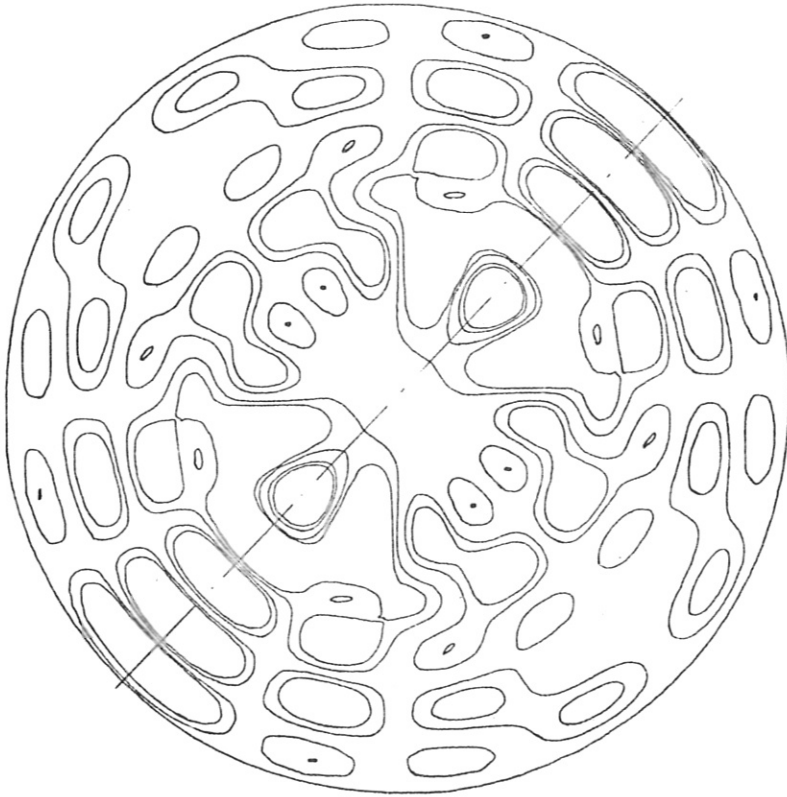


Abb. 13: Linien gleicher Temperaturschwankungen für  $A = 10^5$ .

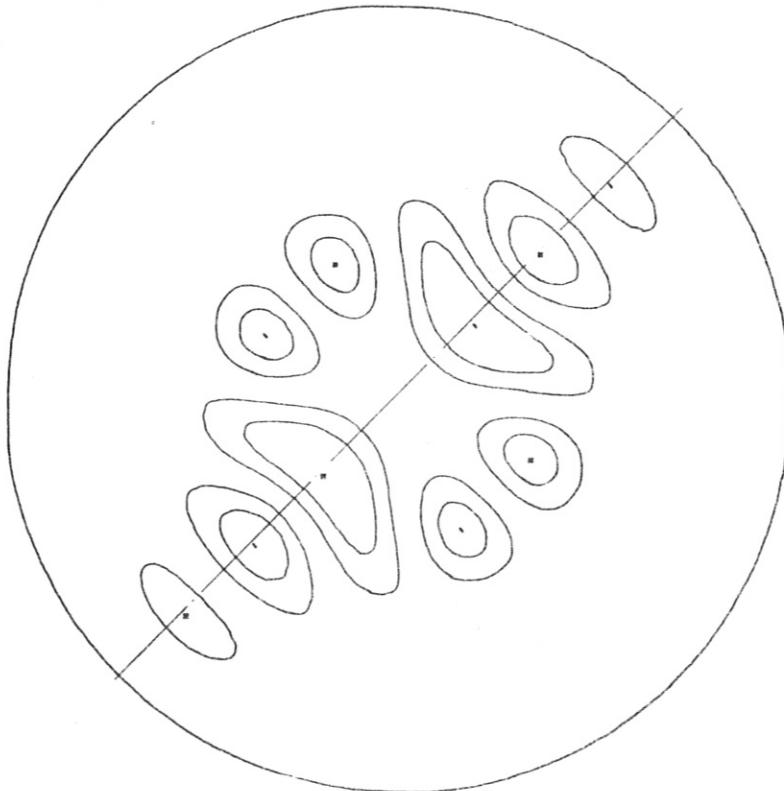


Abb. 14: Linien gleicher Temperaturschwankungen für  $A \rightarrow \infty$

Nehmen wir an, daß auch bei sehr großen Werten von  $A$  die Funktion  $U$  einigermaßen glatt bleibt, so können wir den Beitrag des ersten Summanden im Zähler von (19) vernachlässigen.  $C$  wird dann proportional zu  $A$ , und der Proportionalitätsfaktor ist das absolute Minimum des Funktionals

$$(C/A)[U] = \frac{\int (g \operatorname{grad} V)^2 d\tau_j}{\int (g \operatorname{grad} \vartheta)^2 d\tau_j} \quad (20)$$

Dies führt auf das Säkularsystem

$$\sum_{ij} \left( \langle m k_i U_j \rangle - \frac{C}{A} \langle m k_i U_T \rangle \right) A_{ij} = 0. \quad (21)$$

Seine Lösung ergibt die Relation

$$C = .079 A \quad (A \rightarrow \infty) \quad (22)$$

Die entsprechende asymptotische Relation für die kritische Wärmeproduktion ist

$$E_c = .079 \times \frac{g}{\pi G} \left( \frac{\alpha \Omega}{R} \right)^2 (\alpha \rho \nu)^{-1} \quad (23)$$

Dabei ist die  $\nu$ -Abhängigkeit eine Folge des Taylor-Proudman-schen Satzes.

Die Abhängigkeit der kritischen Rayleighzahl von der Taylorzahl ist in Abb. 8 graphisch dargestellt. Die Abb. 9 - 14 zeigen das Verhalten der Meridionalen Komponenten der Strom- und Wirbellinien sowie der Temperaturabweichungen.

### 3.3 Überstabilität

Wenn wir in (10)  $\sigma = i\sigma_1$  einsetzen ( $\sigma_1$  reell) und  $C$  als Lagrange-Multiplikator betrachten, wird die Möglichkeit der Überstabilität auf die Untersuchung der reellen Extrema des Funktionals

$$J[U] = \int U \left[ (\Delta_j - i\sigma_1) \Delta_j U - A \frac{\partial V}{\partial z} - C \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right] d\tau_j \quad (24)$$

reduziert. Hier sind  $V$  und  $\vartheta$  die Lösungen von

$$(\Delta_r - i\sigma_r) V = - \frac{\partial U}{\partial z}, \quad V = 0 \quad \text{für} \quad r = 1, \quad (25)$$

$$(\nabla^2 - i\sigma_r p_r) \vartheta = r \frac{\partial}{\partial \mu} [(1-\mu^2)U], \quad \vartheta = 0 \quad \text{für} \quad r = 1. \quad (26)$$

Mit dem Ansatz

$$U = \sum A_{nj} U_{nj} \quad (27)$$

erhält man die Lösungen

$$\vartheta = \sum A_{nj} \vartheta_{nj}, \quad V = \sum A_{nj} X_{nj}, \quad (28)$$

in denen  $\vartheta_{nj}$  durch (1.7.120) gegeben und

$$X_{nj} = \frac{\alpha_{nj}}{\alpha_{nj}^2 + \sigma_r^2} \left\{ \frac{n+2}{2n+3} \left[ \alpha_{nj}^2 g_{n-1/4}(\alpha_{nj} r) - i\sigma_r f_{n-1/4}(\alpha_{nj} r) - \alpha_{nj}^2 g_{n+1/4}(\alpha_{nj} r) \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \frac{\Gamma_{n+1/2}(\sqrt{v}\sigma_r)}{\Gamma_{n+1/2}(\sqrt{v}\sigma_r)} \right] C_{n-1}/r^{3/2} - \frac{n+1}{2n+3} \left[ \alpha_{nj}^2 f_{n+1/4}(\alpha_{nj} r) - i\sigma_r g_{n+1/4}(\alpha_{nj} r) \right. \right. \\ \left. \left. - \alpha_{nj}^2 f_{n+1/4}(\alpha_{nj} r) \frac{\Gamma_{n+5/2}(\sqrt{v}\sigma_r)}{\Gamma_{n+5/2}(\sqrt{v}\sigma_r)} \right] C_{n+1}/r^{3/2} \right\}. \quad (29)$$

ist. Wir führen die Matrixelemente (1.7.125-126), und

$$\langle m_k | U \rangle X | n_j \rangle = \int U_{mk} \frac{\partial X_{nj}}{\partial z} d\tau_s \quad (30)$$

ein (für die explizite Form des letzten Matrixelements verweisen wir auf den Anhang), und erhalten somit für die Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial A_{mk}} = 0 \quad (31)$$

das Gleichungssystem

$$\sum_{nj} \left( \langle m_k | U U | n_j \rangle - A \langle m_k | U \rangle X | n_j \rangle - C \langle m_k | U \Gamma | n_j \rangle \right) A_{nj} = 0. \quad (32)$$

Das System (32) wurde in erster Näherung gelöst; die Ergebnisse sind in Tabelle 4 gegeben (s. auch Abb. 8). Die in der Tabelle vorkommende Größe  $F$  ist durch

$$F = 2\sigma_r A^{-1/2} = \lambda/\mu \quad (33)$$

Tabelle 4: Kritische Rayleighzahlen und Frequenzen für das Eintreten der Überstabilität bei verschiedenen Werten der Taylor- und Prandtlzahlen.

$P_1 = 0.001$

SIGMA	A	C	F	LOG A	LOG C
1.E 00	5.5629E 03	1.5992E 04	0.027	3.75	4.20
1.E 01	6.0823E 03	1.6021E 04	0.256	3.78	4.20
1.E 02	5.5898E 04	1.6076E 04	0.846	4.75	4.21
1.E 03	5.0226E 06	1.6182E 04	0.892	6.70	4.21
1.E 04	5.0166E 08	2.0036E 04	0.893	8.70	4.30
1.E 05	5.0155E 10	3.7249E 05	0.893	10.70	5.57
1.E 06	5.0149E 12	3.3976E 07	0.893	12.70	7.53
1.E 07	5.0149E 14	3.3875E 09	0.893	14.70	9.53
1.E 08	5.0149E 16	3.3872E 11	0.893	16.70	11.53
1.E 09	5.0149E 18	3.3872E 13	0.893	18.70	13.53
1.E 10	5.0149E 20	3.3872E 15	0.893	20.70	15.53

ASYMPTOTICALLY  $C/A = 6.7543E-06$   $F = 0.893$

$P_1 = 0.002$

SIGMA	A	C	F	LOG A	LOG C
1.E 00	5.5969E 03	1.6041E 04	0.027	3.75	4.21
1.E 01	6.1024E 03	1.6048E 04	0.256	3.79	4.21
1.E 02	5.6083E 04	1.6103E 04	0.845	4.75	4.21
1.E 03	5.0393E 06	1.6326E 04	0.891	6.70	4.21
1.E 04	5.0330E 08	3.1613E 04	0.891	8.70	4.50
1.E 05	5.0304E 10	1.4043E 06	0.892	10.70	6.15
1.E 06	5.0298E 12	1.3584E 08	0.892	12.70	8.13
1.E 07	5.0298E 14	1.3569E 10	0.892	14.70	10.13
1.E 08	5.0298E 16	1.3569E 12	0.892	16.70	12.13
1.E 09	5.0298E 18	1.3569E 14	0.892	18.70	14.13
1.E 10	5.0298E 20	1.3569E 16	0.892	20.70	16.13

ASYMPTOTICALLY  $C/A = 2.6977E-05$   $F = 0.892$

$P_1 = 0.005$

SIGMA	A	C	F	LOG A	LOG C
1.E 00	5.6559E 03	1.6125E 04	0.027	3.75	4.21
1.E 01	6.1628E 03	1.6127E 04	0.255	3.79	4.21
1.E 02	5.6640E 04	1.6191E 04	0.840	4.75	4.21
1.E 03	5.0895E 06	1.7231E 04	0.887	6.71	4.24
1.E 04	5.0805E 08	1.0965E 05	0.887	8.71	5.04
1.E 05	5.0753E 10	8.5932E 06	0.888	10.71	6.93
1.E 06	5.0749E 12	8.5210E 08	0.888	12.71	8.93
1.E 07	5.0748E 14	8.5187E 10	0.888	14.71	10.93
1.E 08	5.0748E 16	8.5186E 12	0.888	16.71	12.93
1.E 09	5.0748E 18	8.5186E 14	0.888	18.71	14.93
1.E 10	5.0748E 20	8.5186E 16	0.888	20.71	16.93

ASYMPTOTICALLY  $C/A = 1.6786E-04$   $F = 0.888$

$P_1 = 0.010$

SIGMA	A	C	F	LOG A	LOG C
1.E 00	5.7495E 03	1.6258E 04	0.026	3.76	4.21
1.E 01	6.2649E 03	1.6261E 04	0.253	3.80	4.21
1.E 02	5.7581E 04	1.6356E 04	0.833	4.76	4.21
1.E 03	5.1741E 06	2.0331E 04	0.879	6.71	4.31
1.E 04	5.1572E 08	3.7775E 05	0.881	8.71	5.58
1.E 05	5.1512E 10	3.4438E 07	0.881	10.71	7.54
1.E 06	5.1508E 12	3.4335E 09	0.881	12.71	9.54
1.E 07	5.1508E 14	3.4332E 11	0.881	14.71	11.54
1.E 08	5.1508E 16	3.4332E 13	0.881	16.71	13.54
1.E 09	5.1508E 18	3.4332E 15	0.881	18.71	15.54
1.E 10	5.1508E 20	3.4332E 17	0.881	20.71	17.54

ASYMPTOTICALLY  $C/A = 6.6653E-04$   $F = 0.881$

P1 = 0.020

SIGMA	A	C	F	LOG A	LOG C
1.E 00	5.9421E 03	1.6533E 04	0.026	3.77	4.22
1.E 01	6.4741E 03	1.6536E 04	0.249	3.81	4.22
1.E 02	5.9511E 04	1.6753E 04	0.820	4.77	4.22
1.E 03	5.3456E 06	3.2565E 04	0.865	6.73	4.51
1.E 04	5.3123E 08	1.4437E 06	0.868	8.73	6.16
1.E 05	5.3065E 10	1.3958E 08	0.868	10.72	8.14
1.E 06	5.3062E 12	1.3943E 10	0.868	12.72	10.14
1.E 07	5.3062E 14	1.3943E 12	0.868	14.72	12.14
1.E 08	5.3062E 16	1.3943E 14	0.868	16.72	14.14
1.E 09	5.3062E 18	1.3943E 16	0.868	18.72	16.14
1.E 10	5.3062E 20	1.3943E 18	0.868	20.72	18.14

ASYMPTOTICALLY C/A = 2.6276E-03 F = 0.868

P1 = 0.050

SIGMA	A	C	F	LOG A	LOG C
1.E 00	6.5591E 03	1.7413E 04	0.025	3.82	4.24
1.E 01	7.1465E 03	1.7425E 04	0.237	3.85	4.24
1.E 02	6.5710E 04	1.8536E 04	0.780	4.82	4.27
1.E 03	5.8736E 06	1.1816E 05	0.825	6.77	5.07
1.E 04	5.8077E 08	9.2177E 06	0.830	8.76	6.96
1.E 05	5.8026E 10	9.1365E 08	0.830	10.76	8.96
1.E 06	5.8024E 12	9.1339E 10	0.830	12.76	10.96
1.E 07	5.8024E 14	9.1339E 12	0.830	14.76	12.96
1.E 08	5.8024E 16	9.1339E 14	0.830	16.76	14.96
1.E 09	5.8024E 18	9.1339E 16	0.830	18.76	16.96
1.E 10	5.8024E 20	9.1339E 18	0.830	20.76	18.96

ASYMPTOTICALLY C/A = 1.5741E-02 F = 0.830

P1 = 0.100

SIGMA	A	C	F	LOG A	LOG C
1.E 00	7.7477E 03	1.9108E 04	0.023	3.89	4.28
1.E 01	8.4416E 03	1.9155E 04	0.218	3.93	4.28
1.E 02	7.7618E 04	2.3808E 04	0.718	4.89	4.38
1.E 03	6.8377E 06	4.3976E 05	0.765	6.83	5.64
1.E 04	6.7497E 08	3.9860E 07	0.770	8.83	7.60
1.E 05	6.7451E 10	3.9727E 09	0.770	10.83	9.60
1.E 06	6.7449E 12	3.9723E 11	0.770	12.83	11.60
1.E 07	6.7449E 14	3.9723E 13	0.770	14.83	13.60
1.E 08	6.7449E 16	3.9723E 15	0.770	16.83	15.60
1.E 09	6.7449E 18	3.9723E 17	0.770	18.83	17.60
1.E 10	6.7449E 20	3.9723E 19	0.770	20.83	19.60

ASYMPTOTICALLY C/A = 5.8893E-02 F = 0.770

P1 = 0.200

SIGMA	A	C	F	LOG A	LOG C
1.E 00	1.0987E 04	2.3728E 04	0.019	4.04	4.38
1.E 01	1.1970E 04	2.3957E 04	0.183	4.08	4.38
1.E 02	1.0965E 05	4.6477E 04	0.604	5.04	4.67
1.E 03	9.3516E 06	2.0067E 06	0.654	6.97	6.30
1.E 04	9.2327E 08	1.9275E 08	0.658	8.97	8.28
1.E 05	9.2275E 10	1.9249E 10	0.658	10.97	10.28
1.E 06	9.2274E 12	1.9248E 12	0.658	12.97	12.28
1.E 07	9.2274E 14	1.9248E 14	0.658	14.97	14.28
1.E 08	9.2274E 16	1.9248E 16	0.658	16.97	16.28
1.E 09	9.2274E 18	1.9248E 18	0.658	18.97	18.28
1.E 10	9.2274E 20	1.9248E 20	0.658	20.97	20.28

ASYMPTOTICALLY C/A = 2.0859E-01 F = 0.658

P1 = 0.500

SIGMA	A	C	F	LOG A	LOG C
1.E 00	5.4868E 04	8.6341E 04	0.009	4.74	4.94
1.E 01	5.9641E 04	9.1313E 04	0.082	4.78	4.96
1.E 02	4.7810E 05	5.1687E 05	0.289	5.68	5.71
1.E 03	3.4533E 07	3.3660E 07	0.340	7.54	7.53
1.E 04	3.3908E 09	3.2906E 09	0.343	9.53	9.52
1.E 05	3.3884E 11	3.2878E 11	0.344	11.53	11.52
1.E 06	3.3884E 13	3.2878E 13	0.344	13.53	13.52
1.E 07	3.3884E 15	3.2878E 15	0.344	15.53	15.52
1.E 08	3.3884E 17	3.2878E 17	0.344	17.53	17.52
1.E 09	3.3884E 19	3.2878E 19	0.344	19.53	19.52
1.E 10	3.3884E 21	3.2878E 21	0.344	21.53	21.52

ASYMPTOTICALLY C/A = 9.7031E-01 F = 0.344

P1 = 0.600

SIGMA	A	C	F	LOG A	LOG C
1.E 00	4.9444E 05	7.1363E 05	0.003	5.69	5.85
1.E 01	5.2165E 05	7.5077E 05	0.028	5.72	5.88
1.E 02	1.8363E 06	2.4924E 06	0.148	6.26	6.40
1.E 03	9.0292E 07	1.1657E 08	0.210	7.96	8.07
1.E 04	8.7189E 09	1.1227E 10	0.214	9.94	10.05
1.E 05	8.7074E 11	1.1211E 12	0.214	11.94	12.05
1.E 06	8.7070E 13	1.1210E 14	0.214	13.94	14.05
1.E 07	8.7070E 15	1.1210E 16	0.214	15.94	16.05
1.E 08	8.7070E 17	1.1210E 18	0.214	17.94	18.05
1.E 09	8.7070E 19	1.1210E 20	0.214	19.94	20.05
1.E 10	8.7070E 21	1.1210E 22	0.214	21.94	22.05

ASYMPTOTICALLY C/A = 1.2875E 00 F = 0.214

P1 = -0.

SIGMA	A	C	F	LOG A	LOG C
1.E 00	5.5642E 03	1.5994E 04	0.027	3.75	4.20
1.E 01	6.0624E 03	1.5995E 04	0.257	3.78	4.20
1.E 02	5.5714E 04	1.6049E 04	0.847	4.75	4.21
1.E 03	5.0060E 06	1.6116E 04	0.894	6.70	4.21
1.E 04	5.0001E 08	1.6122E 04	0.894	8.70	4.21
1.E 05	5.0000E 10	1.6122E 04	0.894	10.70	4.21
1.E 06	5.0000E 12	1.6122E 04	0.894	12.70	4.21
1.E 07	5.0000E 14	1.6122E 04	0.894	14.70	4.21
1.E 08	5.0000E 16	1.6122E 04	0.894	16.70	4.21
1.E 09	5.0000E 18	1.6122E 04	0.894	18.70	4.21
1.E 10	5.0000E 20	1.6122E 04	0.894	20.70	4.21

ASYMPTOTICALLY C = 1.6122E 04 F = 0.894

P1 = -0.

SIGMA	A	C	F	LOG A	LOG C
1.E 00	5.5642E 03	1.5994E 04	0.027	3.75	4.20
1.E 01	6.0624E 03	1.5995E 04	0.257	3.78	4.20
1.E 02	5.5714E 04	1.6049E 04	0.847	4.75	4.21
1.E 03	5.0060E 06	1.6116E 04	0.894	6.70	4.21
1.E 04	5.0001E 08	1.6122E 04	0.894	8.70	4.21
1.E 05	5.0000E 10	1.6122E 04	0.894	10.70	4.21
1.E 06	5.0000E 12	1.6122E 04	0.894	12.70	4.21
1.E 07	5.0000E 14	1.6122E 04	0.894	14.70	4.21
1.E 08	5.0000E 16	1.6122E 04	0.894	16.70	4.21
1.E 09	5.0000E 18	1.6122E 04	0.894	18.70	4.21
1.E 10	5.0000E 20	1.6122E 04	0.894	20.70	4.21

ASYMPTOTICALLY C = 1.6122E 04 F = 0.894

definiert, ist also gleich dem Verhältnis der Frequenz zur Rotationsgeschwindigkeit.

Das System (32) hat in erster Näherung nur dann Lösungen, wenn die Prandtlzahl die Bedingung

$$Pr < .67 \quad (34)$$

erfüllt. Eine ähnliche Einschränkung ( $Pr < .677$ ) ist bei der Untersuchung der Wärmeinstabilität einer ebenen Schicht festgestellt worden (Chandrasekhar, 1961). Man beachte jedoch, daß dies Ergebnisse einer ersten Näherung sind.

Das Verhalten der Wärmeinstabilität kann so zusammengefaßt werden (s. Abb. 8): Wenn  $Pr \geq .67$  ist, tritt die Instabilität stets durch stationäre Konvektion auf. Wenn  $Pr < .67$  ist, gibt es eine Zahl  $\bar{A}(Pr)$  mit welcher die Instabilität für  $A < \bar{A}$  durch Konvektion, für  $A > \bar{A}$  durch Überstabilität eintritt.

#### 4. Wärmeinstabilität einer rotierenden Flüssigkeitskugel in einem homogenen Magnetfeld.

##### 4.1 Grundgleichungen und Eigenwertproblem.

Die magnetohydrodynamischen Gleichungen in einem mit der Rotationsgeschwindigkeit  $\vec{\Omega}$  rotierenden System (vgl. 1.1 und 3.1) lauten:

$$\rho \frac{d\mathbf{w}}{dt} = -\text{grad} \left( p + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{w} \times \vec{\Omega}|^2 \right) + \rho \mathbf{g} + \frac{1}{2} \mathbf{j} \times \vec{L} + \rho \nu \nabla^2 \mathbf{w} + 2\mathbf{w} \times \vec{\Omega} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{L}}{\partial t} = \text{rot} (\mathbf{w} \times \vec{L}) + \gamma \nabla^2 \vec{L}, \quad \gamma = c^2 / 4\pi\sigma, \quad (2)$$

$$\text{div} \vec{L} = 0. \quad (3)$$

Die Gln. (1) - (3) haben die Lösung  $\mathbf{w} = 0, \vec{L} = \vec{L}_0$  mit homogenem  $\vec{L}_0$ . Mit den in Abschn. 1.1 gemachten Annahmen über das ungestörte Temperaturfeld und der Voraussetzung, daß  $\vec{\Omega}$  und  $\vec{L}_0$  beide in Richtung der z-Achse zeigen, erhält man aus (1) - (3) und der



Wärmeleitungsgleichung in der Boussinesgschen Näherung das Gleichungssystem

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -g \operatorname{grad} \left( \frac{\delta p}{\rho} + \frac{z \cdot z}{4\pi\rho} \right) + \gamma \theta - \nu \operatorname{rot}^2 \omega + 2\Omega \omega \times \mathbf{1}_z + \frac{H}{4\pi\rho} \frac{\partial z}{\partial z}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = H \frac{\partial \omega}{\partial z} - \gamma \operatorname{rot}^2 z, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \nabla^2 \theta + 2\beta \omega \cdot \mathbf{u}, \quad (6)$$

$$\operatorname{div} \omega = 0, \quad \operatorname{div} z = 0. \quad (7)$$

( $z$  = Störung des Magnetfeldes,  $\theta$  = Störung der Temperatur; alle anderen Symbole haben die gleiche Bedeutung wie in Abschn. 1).

Wir benutzen (7), um die Ausdrücke (1.3.21-22) in (4) - (5) einzusetzen, führen die Transformation

$$\theta \rightarrow \frac{2\beta R^3}{\kappa} \vartheta, \quad v \rightarrow \frac{2\Omega R}{\nu} V, \quad (U \rightarrow U), \quad (8)$$

$$T \rightarrow \frac{HR}{\gamma} \cdot \frac{2\Omega R}{\nu} T, \quad P \rightarrow \frac{HR}{\gamma} P, \quad u \rightarrow R u$$

ein, und erhalten für Störungen mit der Zeitabhängigkeit  $e^{\lambda t}$  das Gleichungssystem

$$(\Delta_j - \sigma) \Delta_j U = C \frac{\partial \vartheta}{\partial \mu} + A \frac{\partial V}{\partial z} - Q \frac{\partial}{\partial z} \Delta_j P, \quad (9)$$

$$(\Delta_j - \sigma) V = -\frac{\partial U}{\partial z} - Q \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (10)$$

$$(\sigma^2 - \sigma \beta_1) \vartheta = \nu \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) U], \quad (11)$$

$$(\Delta_j - \sigma \beta_2) T = -\frac{\partial V}{\partial z}, \quad (12)$$

$$(\Delta_j - \sigma \beta_2) P = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad (13)$$

in dem die Bezeichnungen für die dimensionslosen Größen die gleichen wie in Abschn. 1 und 3 sind.

Die Randbedingungen wurden schon in 1. und in 3. hergeleitet und lauten

$$U = \frac{\partial U}{\partial r} = v = \theta = \tau = 0 \quad \text{für} \quad r = 1, \quad (14)$$

$$P \quad \text{und} \quad \frac{\partial P}{\partial r} \quad \text{stetig für} \quad r = 1,$$

$$\Delta_j P = 0, \quad r^3 P \quad \text{beschränkt für} \quad r > 1. \quad (15)$$

Im Gegensatz zu dem in Abschn. 1. betrachteten Fall gibt es für (9) - (15) keine Lösungen, in denen eine oder mehr als eine der auftretenden Funktionen identisch verschwinden. Sind die Taylorzahl  $A$ , die Hartmannzahl  $Q$  und die Prandtlzahlen  $P_1, P_2$  gegeben, so stellt das System (9) - (15) ein Eigenwertproblem der Ordnung 12 für die Rayleighzahl  $C$  dar. Im nichtstationären Fall ( $\sigma \neq 0$ ) liegt eigentlich ein Doppelseigenwertproblem vor.

Angesichts der Kompliziertheit des Problems hätte man natürlich gern ein Variationsverfahren zur Verfügung: ein solches soll nun hergeleitet werden.

#### 4.2 Das Variationsprinzip.

Falls es überhaupt ein Variationsprinzip für das Problem (9) - (15) gibt, so muß es mathematisch die Tatsache ausdrücken, daß die Instabilität dann eintritt, wenn eine Bilanz zwischen der Energieleistung und der Energiedissipation möglich ist. Mit Hilfe der in Abschn. 1.5 ausgerechneten Größen läßt sich eine solche Bilanz in der Form

$$e_g = e_k + e_m + e_v + e_\sigma \quad (16)$$

schreiben. Wenn die Gln. (1.5.52) - (63), die unter Berücksichtigung der Transformation (1.3.33) hergeleitet wurden, für die durch (8) gegebene Transformation korrigiert werden, erhält man durch Substitution in (16) die Gleichung

$$\begin{aligned}
 C \int [(g \operatorname{grad} \theta)^2 + \sigma p_1 \theta^2] d\tau_3 = & \int \left\{ (\Delta_3 U)^2 + \sigma (g \operatorname{grad} U)^2 \right. \\
 & + A [(g \operatorname{grad} V)^2 + \sigma V^2] + AQ [(g \operatorname{grad} T)^2 + \sigma p_2 T^2] \\
 & \left. + Q (\Delta_3 P)^2 \right\} d\tau_3 + Q \sigma p_2 \int_0^\infty (g \operatorname{grad} P)^2 d\tau_3. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Zur Rechtfertigung dieser Gleichung, auf die wir durch energetische Überlegungen gekommen sind, sei erwähnt, daß man sie auch mit Hilfe der Integrationsformeln von Abschn. 1.4 direkt aus (9) - (15) gewinnen kann.

Bei dem Versuch, aus (17) ein Variationsprinzip zu gewinnen, taucht folgende Schwierigkeit auf. Die durch die Coriolis- und Lorenzkkräfte erzeugte Kopplung zwischen  $U$  und  $V$  macht es un Zweckmäßig, eine der in (9) - (13) auftretenden Funktionen als Versuchsfunktion zu betrachten und die vier übrigen Funktionen genau auszurechnen. Wählen wir zum Beispiel  $U$  als Versuchsfunktion, so können wir die entsprechenden Funktionen  $\theta$  und  $P$  aus (11), (13) und (14) bestimmen: die Berechnung von  $V$  und  $T$  aus (10) bzw. (12) wäre jedoch mühsam, und diese Funktionen enthielten darüberhinaus die Hartmannzahl in komplizierter Weise. Da in diesem Problem die Hartmannzahl ein Parameter ist, für den wir in einem möglichst weiten Bereich die Rayleighzahl bestimmen wollen, ist ein solches Verfahren nicht zu empfehlen. Auf die gleiche Schwierigkeit stößt man bei jeder anderen Wahl der Versuchsfunktion.

Ein sich anbietender Ausweg ist der, zwei der fünf Funktionen als Versuchsfunktionen zu betrachten. Wir wollen dafür  $U$  und  $T$  wählen, und die entsprechenden Funktionen  $\theta, V$  und  $P$  aus (10), (11) und (13) bestimmen. Damit wäre "eine Hälfte" des ursprünglichen Problems (3 Gleichungen der Ordnung 2 aus einem System der Ordnung 12) exakt gelöst. Wir können dann (17) benutzen, um  $C$  als ein Funktional des Paares  $(U, T)$  zu definieren. Die Variation dieses Funktionals bezüglich der Variationen  $\delta U, \delta T$  liefert das Ergebnis

$$\begin{aligned}
 \delta C \int [(g \operatorname{grad} \theta)^2 + \sigma p_1 \theta^2] d\tau_3 = & 2 \int \delta U [(\Delta_3 - \sigma) \Delta_3 U - C \frac{\partial \theta}{\partial \mu} \\
 & - A \frac{\partial V}{\partial z} + Q \frac{\partial}{\partial z} \Delta_3 P] d\tau_3 - 2AQ \int \delta T [( \Delta_3 - \sigma p_2 ) T + \frac{\partial V}{\partial z}] d\tau_3. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Da  $\delta U$  und  $\delta T$  als voneinander unabhängig vorausgesetzt sind, ist die Bedingung  $\delta C = 0$  mit den Gln. (9) und (12) äquivalent und führt zu dem gewünschten Variationsprinzip.

#### 4.3 Stationäre Konvektion.

Im stationären Fall ( $\sigma = 0$ ) erhalten wir die Eigenwerte durch Untersuchung der Extrema des Funktionals

$$C[U, T] = \frac{\int [(\Delta_j U)^2 + A(\text{grad } V)^2 + AQ(\text{grad } T)^2 + Q(\Delta_j P)^2] d\tau_j}{\int (\text{grad } \theta)^2 d\tau_j} \quad (19)$$

$U$  und  $T$  sind Funktionen, die die Randbedingungen (14) erfüllen und vom Variationsparameter abhängig sind.  $V, \theta$  und  $P$  sind die entsprechenden Lösungen von

$$\Delta_j V = -\frac{\partial U}{\partial z} - Q \frac{\partial T}{\partial z} \quad (20)$$

$$\nabla^2 \theta = \nu \frac{\partial}{\partial \mu} [(1-\mu^2)U] \quad (21)$$

$$\Delta_j P = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (22)$$

mit den Bedingungen (14) - (15). Bei der Ermittlung des Extremums  $C[U, T]$  sollen die in  $U$  bzw.  $T$  enthaltenen Parameter als voneinander unabhängig behandelt werden.

Bezeichnen wir die der Größe nach geordneten Eigenwerte mit  $C_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ), so ist  $C_1$  die kritische Rayleighzahl. Wir zeigen jetzt, daß diese folgende Eigenschaften hat:

- $C_1$  ist das absolute Minimum von  $C[U, T]$ .
- $C_1$  ist eine monoton wachsende Funktion von  $A$  (aber nicht von  $Q$ ).

Zum Beweis der ersten Behauptung bezeichnen wir mit  $U_j, V_j, \theta_j, T_j, P_j$  die zum Eigenwert  $C_j$  gehörigen Eigenfunktionen. Aus (8) - (15) - mit  $\sigma = 0$  - erhält man dann (vergl. Abschn. 1.6) durch Integration

$$C_j \int \nabla \vartheta_i \cdot \nabla \vartheta_j \, d\bar{\tau}_3 = \int [\Delta_j U_i \Delta_j U_j + A \nabla V_i \cdot \nabla V_j + A Q \nabla \bar{T}_i \cdot \nabla \bar{T}_j + Q \Delta_j P_i \Delta_j P_j] d\bar{\tau}_3, \quad (\nabla = \text{grad}) . \quad (23)$$

mithin, bei geeigneter Normierung,

$$\int \nabla \vartheta_i \cdot \nabla \vartheta_j \, d\bar{\tau}_3 = \delta_{ij} . \quad (24)$$

Für die Versuchsfunktionen  $U, \bar{T}$  machen wir den Ansatz

$$U = \sum A_j U_j, \quad \bar{T} = \sum B_k \bar{T}_k . \quad (25)$$

Aus (21) - (22) folgt dann (vgl. 1.6)

$$\vartheta = \sum A_j \vartheta_j, \quad \rho = \sum A_j \rho_j . \quad (26)$$

Definieren wir die Funktionen  $X_j, Y_j$  durch

$$\Delta_j X_j = -\frac{\partial U_j}{\partial z}, \quad X_j = 0 \quad \text{für} \quad r=1, \quad (27)$$

$$\Delta_j Y_j = -\frac{\partial \bar{T}_j}{\partial z}, \quad Y_j = 0 \quad \text{für} \quad r=1, \quad (28)$$

So ist

$$V_j = X_j + Q \bar{T}_j \quad (29)$$

$$V = \sum A_j X_j + Q \sum B_k \bar{T}_k \quad (30)$$

Wir setzen jetzt (25) - (30) in (19) ein und erhalten mit Hilfe von (23) - (24)

$$C[U, \bar{T}] \sum A_j^2 = \int d\bar{\tau}_3 \left\{ \sum A_i A_j \Delta_j U_i \Delta_j U_j + A \left[ \sum A_i A_j \nabla X_i \cdot \nabla X_j + 2Q \sum A_i B_k \nabla X_i \cdot \nabla \bar{T}_k + Q^2 \sum B_k B_l \nabla \bar{T}_k \cdot \nabla \bar{T}_l \right] + Q \sum A_i A_j \Delta_j P_i \Delta_j P_j + A Q \sum B_k B_l \nabla \bar{T}_k \cdot \nabla \bar{T}_l \right\} = \sum A_j^2 C_j + \int d\bar{\tau}_3 \left\{ 2A Q \sum (A_i B_k - A_i A_k) \nabla X_i \cdot \nabla \bar{T}_k + A Q \sum (B_k B_l - A_k A_l) (Q \nabla \bar{T}_k \cdot \nabla \bar{T}_l + \nabla \bar{T}_k \cdot \nabla \bar{T}_l) \right\} . \quad (31)$$

Wir benutzen weiter die Beziehung

$$\int \nabla \tau_k \cdot \nabla \tau_l \, d\bar{E}_j = - \int (\nabla \tau_k \cdot \nabla \tau_k + Q \nabla \tau_k \cdot \nabla \tau_l) \, d\bar{E}_j, \quad (32)$$

die man aus (10), (12) und (27) - (29) gewinnen kann, und erhalten

$$(C[u, \tau] - C_1) \sum A_j^2 = \sum A_j^2 (C_j - C_1) + \int d\bar{E}_j \left\{ A Q \left[ \sum (A_k - B_k) \nabla \tau_k \right]^2 + A Q^2 \left[ \sum (A_k - B_k) \nabla \tau_k \right]^2 \right\}. \quad (33)$$

Alle Summanden auf der rechten Seite von (33) sind positiv (oder null); es ist also

$$C[u, \tau] \geq C_1. \quad (34)$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn  $A_1 = B_1$  und  $A_j = B_j = 0$  für  $j > 1$ , d.h., wenn  $u$  und  $\tau$  die zu  $C_1$  gehörigen Eigenfunktionen sind.

Um die zweite Behauptung zu beweisen, variieren wir demgemäß (23) - (24) gegebenen Eigenwert  $C_1$  nach  $A$  und  $Q$ . Nach einigen partiellen Integrationen ergibt sich

$$\delta C_1 = \int d\bar{E}_j \left\{ \delta A (\text{grad } V_1)^2 + \delta Q (A_j \tau_1)^2 + (Q \delta A - A \delta Q) (\text{grad } \tau_1)^2 \right\}. \quad (35)$$

Bei fester Hartmannzahl ( $\delta Q = 0$ ) ist also  $C_1$  eine monoton wachsende Funktion von  $A$ . Dies gilt nicht für Änderungen von  $Q$  bei festem  $A$ , und es ist nach (35) sogar zu vermuten, daß bei hinreichend hohen Werten von  $A$  die Größe  $C_1$  mit wachsendem  $Q$  abnehmen kann. Numerische Ergebnisse bestätigen diese Aussagen.

Bei der Durchführung des Variationsverfahrens betrachten wir  $C$  als Lagrange-Multiplikator. Aus (19) erhalten wir dann nach passender Umformung das Funktional

$$J[u, \tau] = \int \left\{ u \left[ A_j^2 u - C \frac{\partial \rho}{\partial \mu} - A \frac{\partial V}{\partial z} + Q \frac{\partial}{\partial z} A_j \tau \right] - A Q \tau \left[ A_j \tau + \frac{\partial V}{\partial z} \right] \right\} d\bar{E}_j. \quad (36)$$

Wir machen für  $U$  den Ansatz

$$U = \sum A_{ij} U_{ij} \quad (37)$$

und erhalten, wie in 1.6, für  $\theta$  den Ausdruck (1.6.95). Für  $\Delta_S P$  können wir in (37) die Ableitung  $\frac{\partial U}{\partial z}$  einsetzen (der explizite Ausdruck für  $P$  wird nur für die Darstellung der Feldlinien benötigt und ist durch (1.6.110) - (111) gegeben).

Für die Darstellung der zweiten Versuchsfunktion  $T$  benutzen wir das System der Eigenfunktionen, welches durch das Problem

$$\Delta_S T = -\beta^2 T, \quad T=0 \quad \text{für} \quad r=1 \quad (38)$$

erzeugt wird. Die für  $r=0$  regulären Lösungen von (38) sind durch

$$T_{pl}(r, \mu) = J_{p+3/2}(\beta_{pl} r) C_p(\mu) / r^{3/2} \quad (39)$$

gegeben.  $\beta_{pl}$  ist die  $l$ -te positive Wurzel von

$$J_{p+3/2}(\beta) = 0. \quad (40)$$

Der Ansatz für  $T$  lautet also

$$T = \sum_{pl} \beta_{pl} T_{pl} \quad (41)$$

mit dem die Randbedingung  $T=0$  für  $r=1$  erfüllt ist.

Zur Bestimmung von  $V$  definieren wir eine Funktion  $Y_{pl}$  durch das Problem

$$\Delta_S Y_{pl} = -\frac{\partial T_{pl}}{\partial z}, \quad Y_{pl} = 0 \quad \text{für} \quad r=1. \quad (42)$$

Die Lösung ist gegeben durch

$$Y_{pl} = \frac{1}{\beta_{pl}} \left\{ \frac{p+2}{2p+3} \left[ J_{p+1/2}(\beta_{pl} r) - J_{p+3/2}(\beta_{pl} r) r^{p+1/2} \right] C_{p-1} / r^{3/2} \right. \\ \left. - \frac{p+1}{2p+3} \left[ J_{p+3/2}(\beta_{pl} r) - J_{p+5/2}(\beta_{pl} r) r^{p+3/2} \right] C_{p+1} / r^{3/2} \right\}. \quad (43)$$

Aus (41) - (43) sowie aus (3.2.13) - (14) erhalten wir für den Ausdruck

$$V = \sum A_{nj} X_{nj} + Q \sum B_{pl} Y_{pl} \quad (44)$$

mit diesen Überlegungen ergibt sich für das Funktional (36) die Formel

$$\begin{aligned} J[U, T] = & \sum_{mknj} \left( \langle mkiUUVinj \rangle - C \langle mkiUTinj \rangle - A \langle mkiUDXinj \rangle \right. \\ & \left. - R \langle mkiUDDUinj \rangle \right) A_{mk} A_{nj} - A Q \sum_{mkpl} \left( \langle mkiUDYipl \rangle \right. \\ & \left. + \langle plTDXimk \rangle \right) A_{mk} B_{pl} - A Q \sum_{qspk} \left( \langle qsiTTipl \rangle \right. \\ & \left. + R \langle qsiTDYipl \rangle \right) B_{qs} B_{pl} \end{aligned} \quad (45)$$

mit den Bezeichnungen

$$\langle mkiUDYipl \rangle = \int U_{mk} \frac{\partial Y_{pl}}{\partial z} d\tau_s', \quad (46)$$

$$\langle plTDXimk \rangle = \int T_{pl} \frac{\partial X_{mk}}{\partial z} d\tau_s', \quad (47)$$

$$\langle qsiTTipl \rangle = \int T_{qs} A_{s'} T_{pl} d\tau_s', \quad (48)$$

$$\langle qsiTDYipl \rangle = \int T_{qs} \frac{\partial Y_{pl}}{\partial z} d\tau_s'. \quad (49)$$

Die anderen in (46) auftretenden Matrixelemente sind in 1.6 und 3.2 definiert. Mit Ausnahme von  $UDY$  und  $TDX$  sind alle Matrixelemente symmetrisch bezüglich der zwei Indexpaare. Für die soeben erwähnte Ausnahme gilt dagegen die Beziehung

$$\langle mkiUDYipl \rangle = \langle plTDXimk \rangle. \quad (50)$$

Mit Berücksichtigung dieser Symmetrieeigenschaften liefern die Bedingungen



$$\frac{\partial J}{\partial A_{mk}} = \frac{\partial J}{\partial B_{pl}} = 0 \quad (51)$$

das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sum_{nj} (\langle mkiUUinj \rangle - C \langle mkiUTinj \rangle - A \langle mkiUUXinj \rangle \\ - Q \langle mkiUDDUinj \rangle) A_{nj} - \sum_{pl} A Q \langle mkiUYipl \rangle B_{pl} = 0, \quad (52) \\ \sum_{nj} A Q \langle njUYi9s \rangle A_{nj} + \sum_{pl} (A Q \langle 9sITipl \rangle + A Q^2 \langle 9sITDYipl \rangle) B_{pl} = 0. \end{aligned}$$

Dieses wurde für eine steigende Anzahl von Parametern  $A_{nj}$  und  $B_{pl}$  gelöst. Dabei wurde stets die Anzahl der  $B$ -Parameter gleich der Anzahl der  $A$ -Parameter genommen. (52) wurde gelöst für die Ordnungen 2, 4, 8, 12, 18, 24, 32, 40, 50, 60, 72. Für die Bestimmung der kritischen Rayleighzahl wurde ein 5 %-Konvergenzkriterium benutzt.

Die Ergebnisse sind in Tabelle 5 zusammengefaßt und in Abb. 15 dargestellt. Bemerkenswert ist, daß die Stabilitätskurven ( $C$  über  $Q$  bei festem  $A \geq 10^9$ ) nicht monoton sind. Zur Erklärung dieses Verhaltens bemerken wir, daß die Größenordnung des Verhältnisses der Lorenzkraft zur Reibungskraft durch die Hartmannzahl  $Q$ , die des Verhältnisses der Corioliskraft zur Reibungskraft aber durch  $A^{1/2}$  gegeben ist. Die Rayleighzahl gibt das Verhältnis der Trägheitskraft zur Reibungskraft. Die wesentlichen Wirkungen dieser Kräfte sind, daß die Corioliskraft die toroidale Bewegung beschleunigt, während die Lorenzkraft, zusammen mit dem Induktionseffekt, eine solche Bewegung bremst (in Abschn. 1.4 wurde gezeigt, daß  $V$  im Falle einer nichtrotierenden Kugel verschwindet). Der Unterschied in den Anisotropieeffekten der beiden Kräfte wird durch das Verhalten der Stabilitätskurven wiedergegeben. Der Grund dafür, daß  $C$  (bei festem  $A \geq 10^9$ ) mit wachsendem  $Q$  abnimmt, ist der, daß die Anwesenheit der Lorenzkraft es der Trägheitskraft erleichtert, die durch die Corioliskraft bedingte Einschränkung der Bewegung aufzuheben. Der Konflikt zwischen den beiden Kräften erreicht seinen Höhepunkt, wenn diese von gleicher Größenordnung sind, d.h., wenn  $Q = \sqrt{A}$ . Die Lage der Minima in Abb. 15 bestätigt dies.

Tabelle 5: Kritische Rayleighzahlen für das Eintreten stationärer Konvektion bei verschiedenen Werten der Taylor- und Hartmannzahlen.

$\frac{1000}{\tau} \cdot Q$	0	1	2	3	4	5
0	$8.1101 \times 10^3$	$8.5299 \times 10^3$	$1.2282 \times 10^4$	$4.3705 \times 10^4$	$2.8558 \times 10^5$	$2.6563 \times 10^6$
3	$9.4185 \times 10^3$	$9.7210 \times 10^3$	$1.2841 \times 10^4$	$4.3880 \times 10^4$	$2.8562 \times 10^5$	$2.6563 \times 10^6$
6	$2.1650 \times 10^5$	$2.1559 \times 10^5$	$2.0696 \times 10^5$	$1.6229 \times 10^5$	$3.1616 \times 10^5$	$2.6616 \times 10^6$
9	$7.9381 \times 10^7$	$7.9265 \times 10^7$	$7.8112 \times 10^7$	$6.7583 \times 10^7$	$2.4397 \times 10^7$	$6.2703 \times 10^6$
12	$7.9162 \times 10^{10}$	$7.9046 \times 10^{10}$	$7.7896 \times 10^{10}$	$6.7398 \times 10^{10}$	$2.3456 \times 10^{10}$	$2.9345 \times 10^9$
15	$7.9162 \times 10^{13}$	$7.9046 \times 10^{13}$	$7.7896 \times 10^{13}$	$6.7397 \times 10^{13}$	$2.3456 \times 10^{13}$	$2.9195 \times 10^{12}$
18	$7.9162 \times 10^{16}$	$7.9046 \times 10^{16}$	$7.7896 \times 10^{16}$	$6.7397 \times 10^{16}$	$2.3456 \times 10^{16}$	$2.9195 \times 10^{15}$
21	$7.9162 \times 10^{19}$	$7.9046 \times 10^{19}$	$7.7896 \times 10^{19}$	$6.7397 \times 10^{19}$	$2.3456 \times 10^{19}$	$2.9195 \times 10^{18}$
24	$7.9162 \times 10^{22}$	$7.9046 \times 10^{22}$	$7.7896 \times 10^{22}$	$6.7397 \times 10^{22}$	$2.3456 \times 10^{22}$	$2.9195 \times 10^{21}$
27	$7.9162 \times 10^{25}$	$7.9046 \times 10^{25}$	$7.7896 \times 10^{25}$	$6.7397 \times 10^{25}$	$2.3456 \times 10^{25}$	$2.9195 \times 10^{24}$
30	$7.9162 \times 10^{28}$	$7.9046 \times 10^{28}$	$7.7896 \times 10^{28}$	$6.7397 \times 10^{28}$	$2.3456 \times 10^{28}$	$2.9195 \times 10^{27}$
33	$7.9162 \times 10^{31}$	$7.9046 \times 10^{31}$	$7.7896 \times 10^{31}$	$6.7397 \times 10^{31}$	$2.3456 \times 10^{31}$	$2.9195 \times 10^{30}$

109.0 109.A	6	7	8	9	10	11
0	2.6346x10 <sup>7</sup>	2.6325x10 <sup>8</sup>	2.6322x10 <sup>9</sup>	2.6322x10 <sup>10</sup>	2.6322x10 <sup>11</sup>	
3	2.6346x10 <sup>7</sup>	2.6325x10 <sup>8</sup>	2.6322x10 <sup>9</sup>	2.6322x10 <sup>10</sup>	2.6322x10 <sup>11</sup>	2.6322x10 <sup>12</sup>
6	2.6346x10 <sup>7</sup>	2.6325x10 <sup>8</sup>	2.6322x10 <sup>9</sup>	2.6322x10 <sup>10</sup>	2.6322x10 <sup>11</sup>	2.6322x10 <sup>12</sup>
9	2.4115x10 <sup>7</sup>	2.6459x10 <sup>8</sup>	2.6336x10 <sup>9</sup>	2.6324x10 <sup>10</sup>	2.6322x10 <sup>11</sup>	2.6322x10 <sup>12</sup>
12	4.2397x10 <sup>8</sup>	3.1322x10 <sup>8</sup>	2.2547x10 <sup>9</sup>	2.3543x10 <sup>10</sup>	2.6452x10 <sup>11</sup>	2.6336x10 <sup>12</sup>
15	3.5556x10 <sup>11</sup>	3.6212x10 <sup>10</sup>	8.9269x10 <sup>9</sup>	2.2034x10 <sup>10</sup>	2.1833x10 <sup>11</sup>	2.2477x10 <sup>12</sup>
18	3.5549x10 <sup>14</sup>	3.5125x10 <sup>13</sup>	3.8541x10 <sup>12</sup>	—	7.1912x10 <sup>11</sup>	—
21	3.5549x10 <sup>17</sup>	3.5125x10 <sup>16</sup>	3.8487x10 <sup>15</sup>	—	—	—
24	3.5549x10 <sup>20</sup>	3.5125x10 <sup>19</sup>	3.8487x10 <sup>18</sup>	—	—	—
27	3.5549x10 <sup>23</sup>	3.5125x10 <sup>22</sup>	3.8487x10 <sup>21</sup>	—	—	—
30	3.5549x10 <sup>26</sup>	3.5125x10 <sup>25</sup>	3.8487x10 <sup>24</sup>	—	—	—
33	3.5549x10 <sup>29</sup>	3.5125x10 <sup>28</sup>	3.8487x10 <sup>27</sup>	—	—	—

109.0 109.A	12	13	14	15	16	17
0	2.6322X10 <sup>13</sup>	2.6322X10 <sup>14</sup>	—	2.6322X10 <sup>16</sup>	2.6322X10 <sup>17</sup>	2.6322X10 <sup>18</sup>
3	2.6322X10 <sup>13</sup>	2.6322X10 <sup>14</sup>	2.6322X10 <sup>15</sup>	2.6322X10 <sup>16</sup>	2.6322X10 <sup>17</sup>	2.6322X10 <sup>18</sup>
6	2.6322X10 <sup>13</sup>	2.6322X10 <sup>14</sup>	2.6322X10 <sup>15</sup>	2.6322X10 <sup>16</sup>	2.6322X10 <sup>17</sup>	2.6322X10 <sup>18</sup>
9	2.6322X10 <sup>13</sup>	2.6322X10 <sup>14</sup>	2.6322X10 <sup>15</sup>	2.6322X10 <sup>16</sup>	2.6322X10 <sup>17</sup>	2.6322X10 <sup>18</sup>
12	2.6324X10 <sup>13</sup>	2.6322X10 <sup>14</sup>	2.6322X10 <sup>15</sup>	2.6322X10 <sup>16</sup>	2.6322X10 <sup>17</sup>	2.6322X10 <sup>18</sup>
15	2.3542X10 <sup>13</sup>	2.6452X10 <sup>14</sup>	2.6336X10 <sup>15</sup>	2.6324X10 <sup>16</sup>	2.6322X10 <sup>17</sup>	2.6322X10 <sup>18</sup>
18	2.7910X10 <sup>13</sup>	2.1865X10 <sup>14</sup>	2.2477X10 <sup>15</sup>	2.3542X10 <sup>16</sup>	2.6452X10 <sup>17</sup>	2.6335X10 <sup>18</sup>
21	—	6.7841X10 <sup>14</sup>	—	2.0973X10 <sup>16</sup>	2.1869X10 <sup>17</sup>	2.2477X10 <sup>18</sup>
24	—	—	—	—	6.7835X10 <sup>17</sup>	—

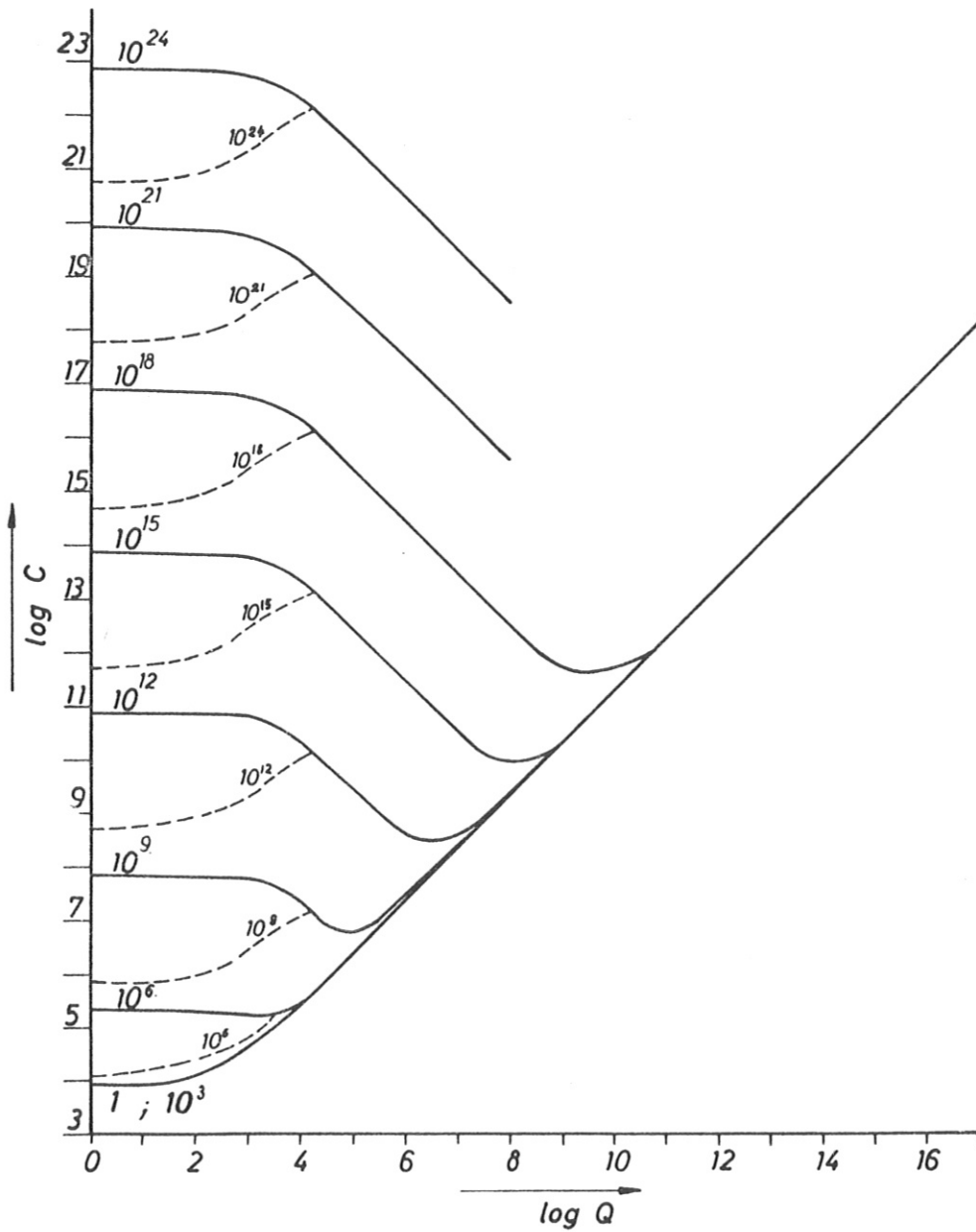


Abb. 15: Die kritische Rayleighzahl als Funktion von  $Q$  für verschiedene Wert von  $A$ . Die durchgehend gezeichneten Kurven beschreiben das Verhalten beim Eintreten der stationären Konvektion, die gestrichelten das Verhalten beim Eintreten der Überstabilität für  $p_1 = .01$ ,  $p_2 = 0$ . Die Kurven sind mit den Werten von  $A$  markiert.

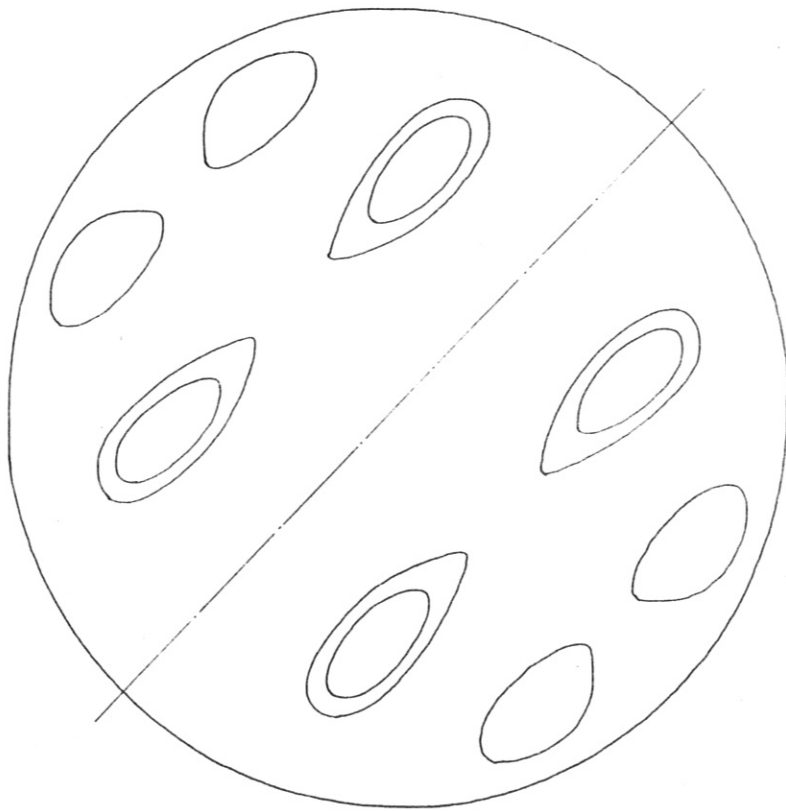


Abb. 16: Stromlinien in der Meridionalebene für  $A = 10^3$ ,  $Q = 10^4$ .

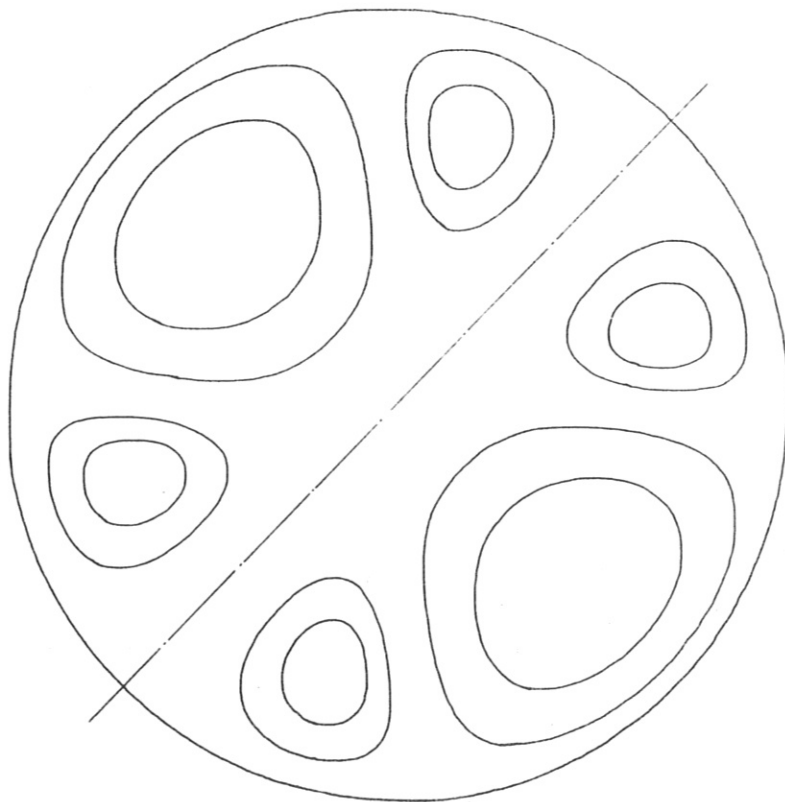


Abb. 17: Stromlinien in der Meridionalebene für  $A = 10^{12}$ ,  $Q = 10^4$ .

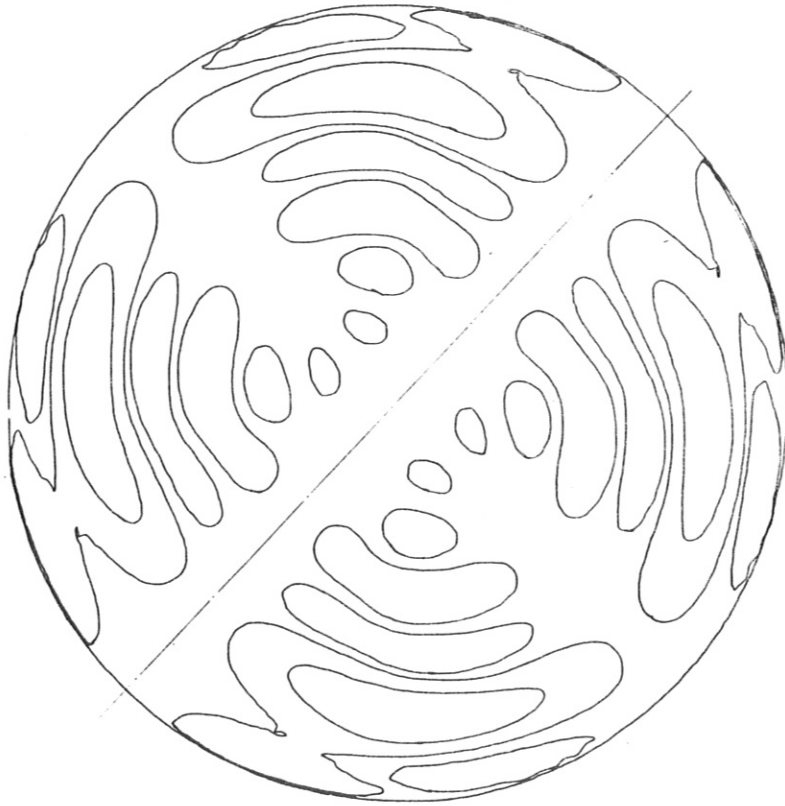


Abb. 18: Wirbellinien in der Meridionalebene für  $A = 10^3$ ,  $Q = 10^4$ .

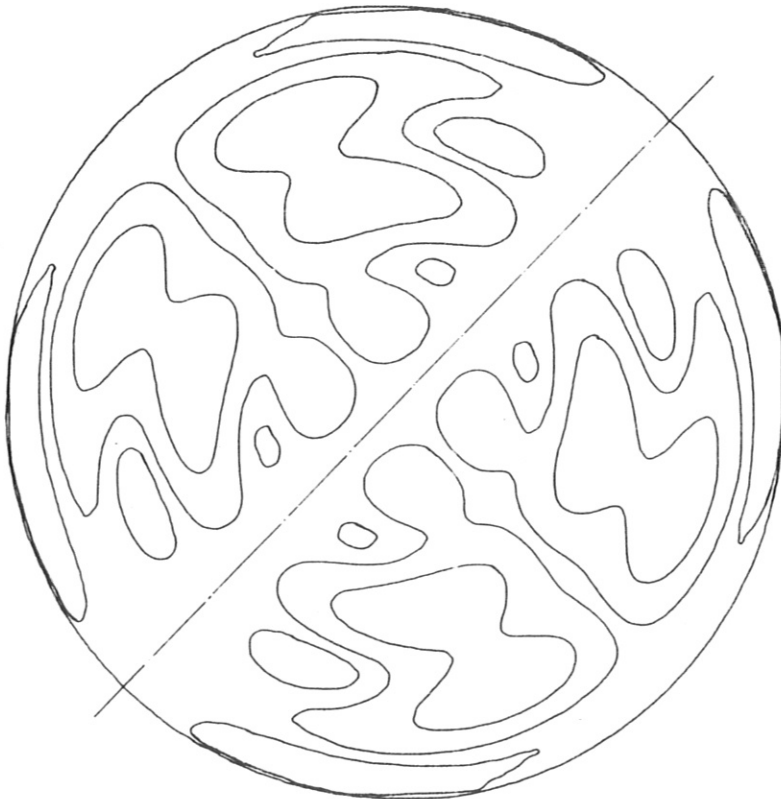


Abb. 19: Wirbellinien in der Meridionalebene für  $A = 10^{12}$ ,  $Q = 10^4$ .

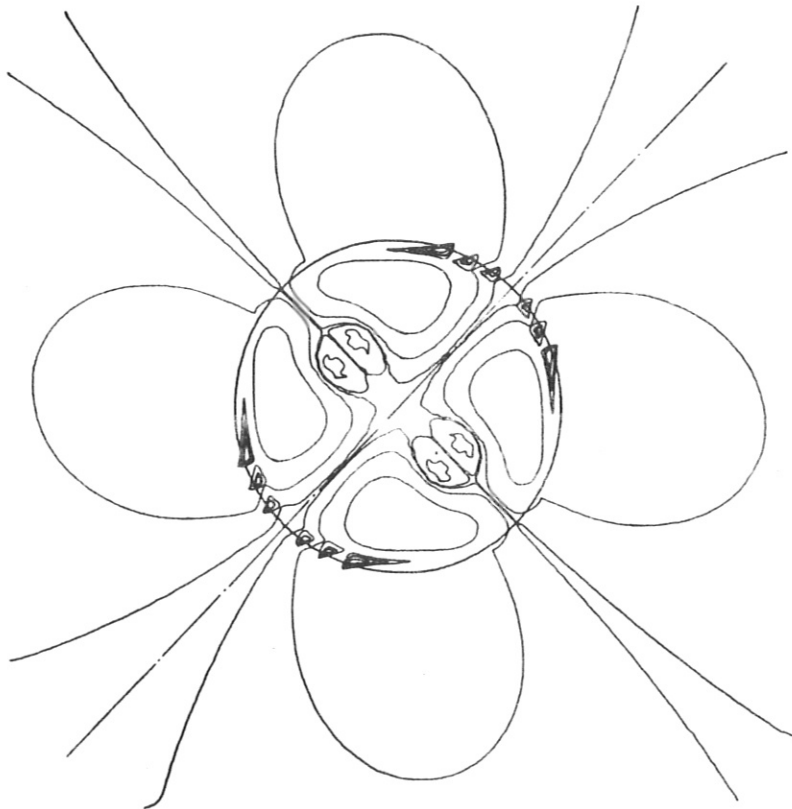


Abb. 20: Magnetfeldlinien in der Meridionalebene  $A = 10^3$ ,  $Q = 10^4$ .

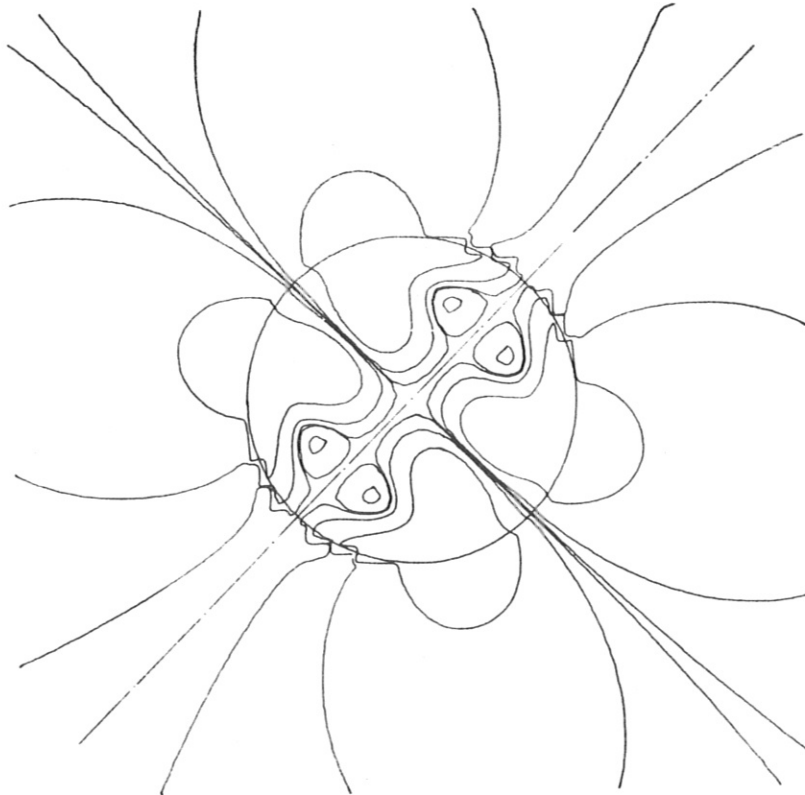


Abb. 21: Magnetfeldlinien in der Meridionalebene  $A = 10^{12}$ ,  $Q = 10^4$ .



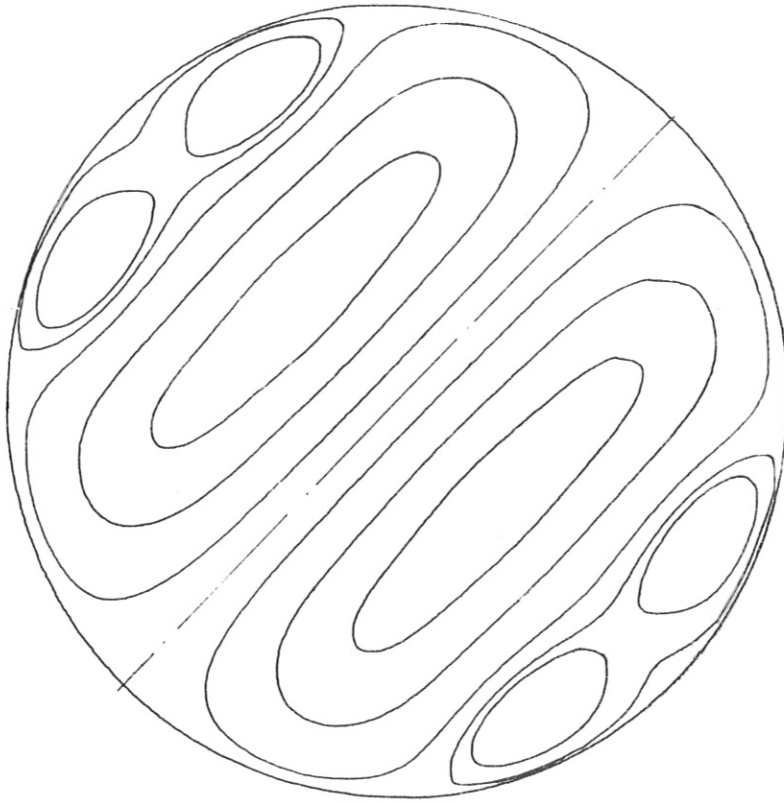


Abb. 22: Stromlinien in der Meridionalebene  $A = 10^3$ ,  $Q = 10^4$ .

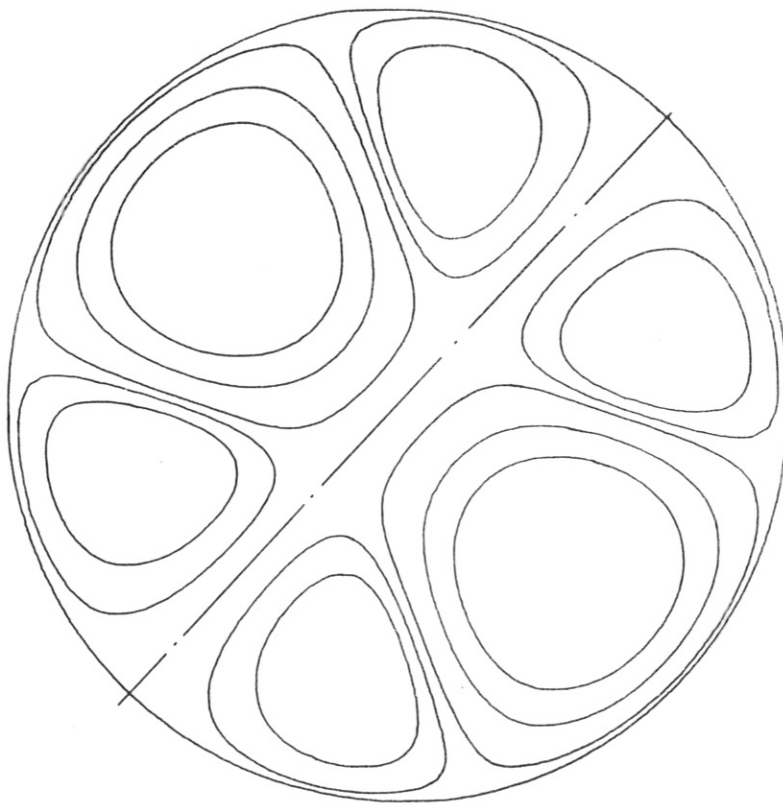


Abb. 23: Stromlinien in der Meridionalebene  $A = 10^{12}$ ,  $Q = 10^4$ .

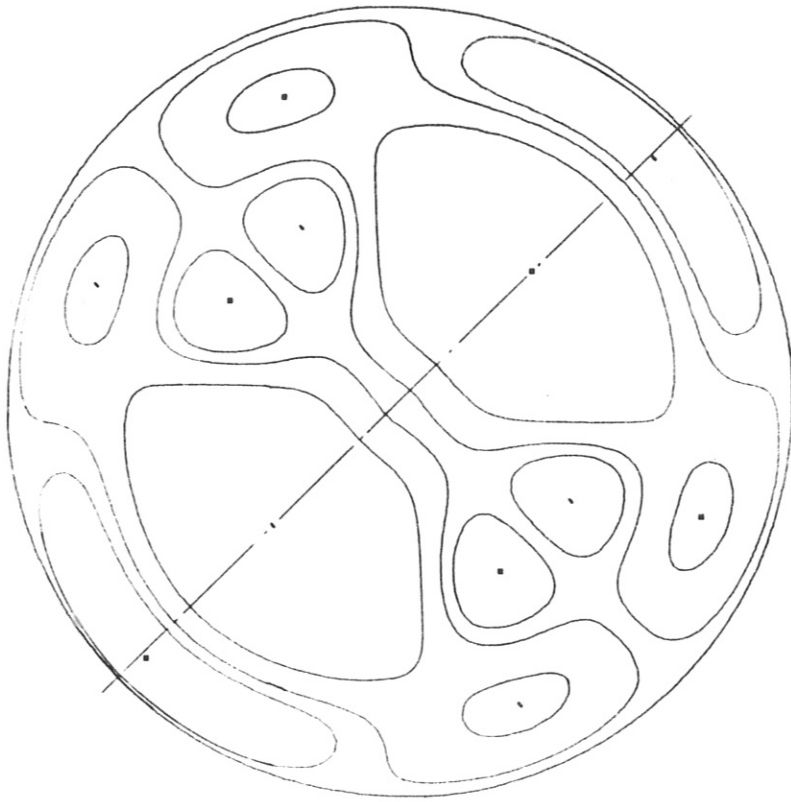


Abb. 24: Linien gleicher Temperaturschwankung für  $A = 10^3$ ,  $Q = 10^4$ .

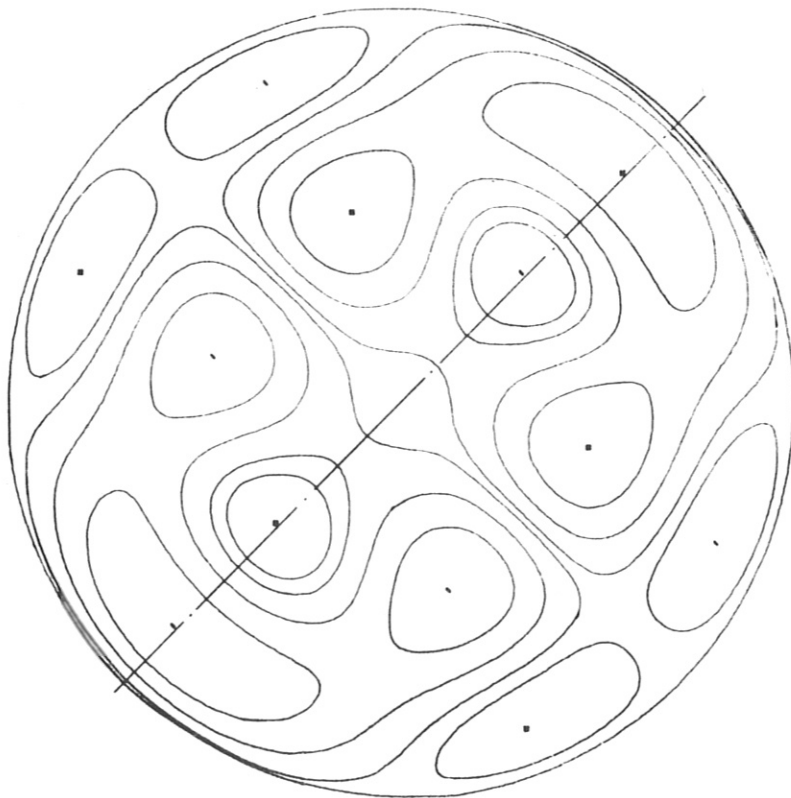


Abb. 25: Linien gleicher Temperaturschwankung für  $A = 10^{12}$ ,  $Q = 10^4$ .

Die Abbildungen 16 - 25 zeigen die Form der Konvektionszellen für verschiedene Fälle.

#### 4.4 Überstabilität.

Betrachtet man die Rayleighzahl als Lagrange-Multiplikator, so reduziert sich das Problem der Bestimmung des überstabilen Zustandes auf die Untersuchung der Extrema des Funktionals

$$J[U, T] = \int \left\{ U \left[ (\Delta_{\sigma} - i\sigma_1) \Delta_{\sigma} U - C \frac{i}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \mu} - A \frac{\partial V}{\partial z} + Q \frac{\partial}{\partial z} (q \cdot P) \right] - AQ \cdot T \left[ (q - i\sigma_1 P_2) T + \frac{\partial V}{\partial z} \right] \right\} d\bar{c}_j \quad (53)$$

$\vartheta, V$  und  $P$  sind hier die Lösungen von (10), (11) und (13) (mit  $\sigma = i\sigma_1, \sigma_2$  reell). Mit den Ansätzen (37), (42) für  $U$  und  $T$  erhalten wir für  $\vartheta$  und  $P$  die Lösungen (1.7.119) - (123) und für  $V$  den Ausdruck

$$V = \sum A_{nj} X_{nj} + Q \sum B_{pl} Y_{pl} \quad (54)$$

in dem die  $X_{nj}$  durch (3.2.29), die  $Y_{pl}$  durch

$$Y_{pl} = \frac{\beta_{pl}}{\beta_{pl}^2 + i\sigma_1} \left\{ \frac{p+2}{2p+3} \left[ J_{p+1/2}(\beta_{pl} r) - J_{p+1/2}(\beta_{pl}) \frac{\bar{I}_{p+1/2}(r\sqrt{i\sigma_1})}{\bar{I}_{p+1/2}(\sqrt{i\sigma_1})} \right] \cdot C_{p-1} / r^{3/2} - \frac{p+1}{2p+3} \left[ J_{p+3/2}(\beta_{pl} r) - J_{p+3/2}(\beta_{pl}) \frac{\bar{I}_{p+3/2}(r\sqrt{i\sigma_1})}{\bar{I}_{p+3/2}(\sqrt{i\sigma_1})} \right] \cdot C_{p+1} / r^{3/2} \right\} \quad (55)$$

gegeben sind.

Die Bedingung

$$\frac{\partial J}{\partial A_{nj}} = \frac{\partial J}{\partial B_{pl}} = 0 \quad (56)$$

führt auf das Gleichungssystem

$$\sum_{nj} \left( \langle \Delta_{\sigma} U U | \Delta_{\sigma} U \rangle - C \langle \Delta_{\sigma} U T | \Delta_{\sigma} U \rangle - A \langle \Delta_{\sigma} U \Delta_{\sigma} X | \Delta_{\sigma} U \rangle + Q \langle \Delta_{\sigma} U P | \Delta_{\sigma} U \rangle \right) A_{nj} - \sum_{pl} AQ \langle \Delta_{\sigma} U \Delta_{\sigma} Y | \Delta_{\sigma} U \rangle B_{pl} = 0, \\ \sum_{nj} \langle \Delta_{\sigma} U \Delta_{\sigma} Y | \Delta_{\sigma} U \rangle A_{nj} + \sum_{qs} \left( \langle P | \Delta_{\sigma} T T | \Delta_{\sigma} U \rangle + Q \langle P | \Delta_{\sigma} T \Delta_{\sigma} Y | \Delta_{\sigma} U \rangle \right) B_{qs} = 0. \quad (57)$$

Tabelle 6: Kritische Rayleighzahlen und Frequenzen für das Eintreten stationärer Konvektion bei verschiedenen Werten der Taylor- und Hartmannzahlen und

A = 1.E 06

SIGMA	Q	C	F	LG Q	LG C
3.00E 02	1.1655E 04	5.9388E 05	0.610	4.07	5.77
4.00E 02	2.0622E 03	1.2182E 05	0.809	3.32	5.09
4.10E 02	1.4655E 03	9.1960E 04	0.820	3.17	4.96
4.20E 02	9.3053E 02	6.4094E 04	0.840	2.97	4.81
4.30E 02	4.1350E 02	3.8042E 04	0.869	2.62	4.58
4.31E 02	3.6375E 02	3.5530E 04	0.862	2.56	4.55
4.32E 02	3.1434E 02	3.3035E 04	0.864	2.51	4.52
4.33E 02	2.6527E 02	3.0555E 04	0.866	2.42	4.49
4.34E 02	2.1654E 02	2.8092E 04	0.868	2.34	4.45
4.35E 02	1.6813E 02	2.5645E 04	0.870	2.23	4.41
4.36E 02	1.2006E 02	2.3213E 04	0.872	2.08	4.37
4.37E 02	7.2318E 01	2.0797E 04	0.874	1.86	4.22
4.38E 02	2.4893E 01	1.8396E 04	0.876	1.40	4.26

A = 1.E 09

SIGMA	Q	C	F	LG Q	LG C
5.00E 03	7.2665E 04	2.3861E 07	0.316	4.86	7.38
6.00E 03	4.7570E 04	2.1316E 07	0.379	4.68	7.23
7.00E 03	3.2504E 04	1.9029E 07	0.443	4.51	7.20
8.00E 03	2.2309E 04	1.6781E 07	0.506	4.35	7.22
9.00E 03	1.5401E 04	1.4463E 07	0.569	4.19	7.16
1.00E 04	1.0422E 04	1.2019E 07	0.622	4.02	7.08
1.10E 04	6.7139E 03	9.4140E 06	0.696	3.83	6.97
1.20E 04	3.8758E 03	6.6289E 06	0.759	3.59	6.82
1.30E 04	1.6550E 03	3.6501E 06	0.822	3.22	6.56
1.31E 04	1.4599E 03	3.3412E 06	0.829	3.16	6.52
1.32E 04	1.2691E 03	3.0303E 06	0.835	3.10	6.48
1.33E 04	1.0825E 03	2.7173E 06	0.841	3.03	6.43
1.34E 04	8.9998E 02	2.4023E 06	0.847	2.95	6.38
1.35E 04	7.2141E 02	2.0852E 06	0.854	2.86	6.32
1.36E 04	5.4668E 02	1.7661E 06	0.860	2.74	6.25
1.37E 04	3.7568E 02	1.4449E 06	0.866	2.57	6.16
1.38E 04	2.0831E 02	1.1216E 06	0.873	2.32	6.05
1.39E 04	4.4459E 01	7.9628E 05	0.879	1.65	5.90

A = 1.E 11

SIGMA	Q	C	F	LG Q	LG C
1.00E 05	2.1221E 05	2.1642E 10	0.200	5.33	10.34
2.00E 05	4.4476E 04	1.8216E 10	0.400	4.65	10.26
3.00E 05	1.3360E 04	1.2522E 10	0.600	4.13	10.10
4.00E 05	2.4642E 03	4.5533E 09	0.800	3.39	9.66
4.10E 05	1.7891E 03	3.6313E 09	0.820	3.25	9.56
4.20E 05	1.1616E 03	2.6864E 09	0.840	3.07	9.43
4.30E 05	5.7728E 02	1.7189E 09	0.860	2.76	9.24
4.40E 05	3.2376E 01	7.2853E 08	0.880	1.51	8.86

A = 1.E 14

SIGMA	Q	C	F	LG Q	LG C
7.00E 06	3.4218E 04	1.7188E 13	0.443	4.53	13.24
8.00E 06	2.3491E 04	1.5481E 13	0.506	4.37	13.15
9.00E 06	1.6136E 04	1.3545E 13	0.569	4.21	13.10
1.00E 07	1.0675E 04	1.1583E 13	0.632	4.04	13.06
1.10E 07	6.9831E 03	8.9924E 12	0.696	3.84	12.95
1.20E 07	4.0226E 03	6.3742E 12	0.759	3.60	12.80
1.30E 07	1.7187E 03	3.5287E 12	0.822	3.24	12.55
1.31E 07	1.5169E 03	3.2316E 12	0.829	3.16	12.51
1.32E 07	1.3156E 03	2.9322E 12	0.835	3.12	12.47
1.33E 07	1.1268E 03	2.6306E 12	0.841	3.05	12.42
1.34E 07	9.3828E 02	2.3266E 12	0.847	2.97	12.37
1.35E 07	7.5952E 02	2.0204E 12	0.854	2.88	12.31
1.36E 07	5.7362E 02	1.7120E 12	0.860	2.76	12.25
1.37E 07	3.9725E 02	1.4012E 12	0.866	2.60	12.15
1.38E 07	2.2471E 02	1.0862E 12	0.873	2.35	12.04
1.39E 07	5.5069E 01	7.7259E 11	0.879	1.75	11.89

A = 10.E 17

SIGMA	Q	C	F	LG Q	LG C
2.00E 08	4.4516E 04	1.8212E 16	0.470	4.65	16.26
3.00E 08	1.3367E 04	1.2521E 16	0.600	4.13	16.10
4.00E 08	2.4652E 03	4.5531E 15	0.800	3.39	15.66
4.10E 08	1.7898E 03	3.6311E 15	0.820	3.25	15.56
4.20E 08	1.1620E 03	2.6863E 15	0.840	3.07	15.43
4.30E 08	5.7756E 02	1.7188E 15	0.860	2.76	15.24
4.40E 08	3.2485E 01	7.2850E 14	0.880	1.51	14.86

A = 10.E 20

SIGMA	Q	C	F	LG Q	LG C
8.00E 09	2.3491E 04	1.5481E 19	0.506	4.37	19.19
9.00E 09	1.6136E 04	1.3545E 19	0.569	4.21	19.13
1.00E 10	1.0675E 04	1.1383E 19	0.632	4.04	19.06
1.10E 10	6.9831E 03	8.9924E 18	0.696	3.84	18.95
1.20E 10	4.6226E 03	6.3743E 18	0.759	3.60	18.80
1.30E 10	1.7187E 03	3.5287E 18	0.822	3.24	18.55
1.31E 10	1.5169E 03	3.2316E 18	0.829	3.18	18.51
1.32E 10	1.3196E 03	2.9322E 18	0.835	3.12	18.47
1.33E 10	1.1268E 03	2.6306E 18	0.841	3.05	18.42
1.34E 10	9.3828E 02	2.3266E 18	0.847	2.97	18.37
1.35E 10	7.5393E 02	2.0204E 18	0.854	2.88	18.31
1.36E 10	5.7362E 02	1.7120E 18	0.860	2.76	18.23
1.37E 10	3.9725E 02	1.4012E 18	0.866	2.60	18.15
1.38E 10	2.2471E 02	1.0882E 18	0.873	2.35	18.04
1.39E 10	5.5870E 01	7.7289E 17	0.879	1.75	17.89

A = 10.E 23

SIGMA	Q	C	F	LG Q	LG C
2.00E 11	4.4516E 04	1.8212E 22	0.470	4.65	22.26
3.00E 11	1.3367E 04	1.2521E 22	0.600	4.13	22.10
4.00E 11	2.4652E 03	4.5531E 21	0.800	3.39	21.66
4.10E 11	1.7898E 03	3.6311E 21	0.820	3.25	21.56
4.20E 11	1.1620E 03	2.6863E 21	0.840	3.07	21.43
4.30E 11	5.7756E 02	1.7188E 21	0.860	2.76	21.24
4.40E 11	3.2485E 01	7.2850E 20	0.880	1.51	20.86

A = 10.E 26

SIGMA	Q	C	F	LG Q	LG C
8.00E 12	2.3491E 04	1.5481E 25	0.506	4.37	25.19
9.00E 12	1.6136E 04	1.3545E 25	0.569	4.21	25.13
1.00E 13	1.0675E 04	1.1383E 25	0.632	4.04	25.06
1.10E 13	6.9831E 03	8.9924E 24	0.696	3.84	24.95
1.20E 13	4.6226E 03	6.3743E 24	0.759	3.60	24.80
1.30E 13	1.7187E 03	3.5287E 24	0.822	3.24	24.55
1.31E 13	1.5169E 03	3.2316E 24	0.829	3.18	24.51
1.32E 13	1.3196E 03	2.9322E 24	0.835	3.12	24.47
1.33E 13	1.1268E 03	2.6306E 24	0.841	3.05	24.42
1.34E 13	9.3828E 02	2.3266E 24	0.847	2.97	24.37
1.35E 13	7.5393E 02	2.0204E 24	0.854	2.88	24.31
1.36E 13	5.7362E 02	1.7120E 24	0.860	2.76	24.23
1.37E 13	3.9725E 02	1.4012E 24	0.866	2.60	24.15
1.38E 13	2.2471E 02	1.0882E 24	0.873	2.35	24.04
1.39E 13	5.5870E 01	7.7289E 23	0.879	1.75	23.89

A = 1 .E 29

SIGMA	Q	C	F	LG Q	LG C
2.00E 14	4.4516E 04	1.8212E 28	0.470	4.65	28.26
3.00E 14	1.3367E 04	1.2521E 28	0.600	4.13	28.10
4.00E 14	2.4652E 03	4.5531E 27	0.800	3.39	27.66
4.10E 14	1.7898E 03	3.6311E 27	0.820	3.25	27.56
4.20E 14	1.1620E 03	2.6863E 27	0.840	3.07	27.43
4.30E 14	5.7756E 02	1.7188E 27	0.860	2.76	27.24
4.40E 14	3.2485E 01	7.2850E 26	0.880	1.51	26.86

Die Matrixelemente sind durch die Formeln

$$\langle mk | UDY | pl \rangle = \int U_{mk} \frac{\partial Y_{pl}}{\partial z} d\bar{z}_j, \quad (58)$$

$$\langle mk | TT | qs \rangle = \int T_{mk} (\Delta_j - i\sigma\rho_2) T_{qs} d\bar{z}_j, \quad (59)$$

$$\langle pl | TDX | nj \rangle = \int T_{pl} \frac{\partial X_{nj}}{\partial z} d\bar{z}_j, \quad (60)$$

$$\langle pl | TDY | qs \rangle = \int T_{pl} \frac{\partial Y_{qs}}{\partial z} d\bar{z}_j, \quad (61)$$

sowie durch (1.7.125) - (128) und (3.3.30) definiert.

Wegen des großen Aufwands, der mit den numerischen Rechnungen verbunden ist, wurde das System (58) nur in erster Näherung und nur für  $p_1 = .01$ ,  $p_2 = 0$ . gelöst. Die Resultate sind in Tabelle 6 zusammengefaßt und in Abb. 15 dargestellt. Das Auftreten der Instabilität können wir so beschreiben: Für gegebene Werte von  $A, p_1, p_2$  existiert eine Zahl  $\bar{Q}(A, p_1, p_2)$  mit welcher die Instabilität für  $Q < \bar{Q}$  als Überstabilität, für  $Q > \bar{Q}$  als Konvektion auftritt.

Ich möchte Herrn Prof. Dr. A. Schlüter ganz herzlich danken für sein stetes Interesse und für die vielen wertvollen Anregungen, die ich von ihm erhalten habe. Insbesondere auch dafür, daß ich im Institut für Plasmaphysik GmbH, Garching, arbeiten und die dortige Rechenanlage IBM 7090 benutzen konnte. Herrn Dr. R. Gorenflo bin ich besonders dankbar für seine freundschaftliche Hilfe bei der deutschen Stilisierung der Arbeit. Schließlich ist es mir eine angenehme Verpflichtung, der Alexander von Humboldt-Stiftung meinen Dank auszusprechen für ein Stipendium, das meinen Aufenthalt in Deutschland ermöglichte.

Anhang

Wir benutzen die Bezeichnungen

$$F_{mk} = \alpha_{mk} f_{m+1/m}(\alpha_{mk}), \quad \Gamma_{mk} = 2(2m+3) - F_{mk}, \quad H_{mk} = \beta_{mk} J_{m+5/2}(\beta_{mk}).$$

A 1. Matrixelemente für stationäre Konvektion.

$$\langle mk | UUI | nj \rangle = \frac{2(m+1)(m+2)}{2m+3} \alpha_{mk}^4 \delta_{mn} \delta_{kj}.$$

$$\langle mk | UTI | nj \rangle = \frac{2(m+1)^2(m+2)^2}{2m+3} \delta_{mn} \left\{ \frac{1}{2} \alpha_{mk}^2 F_{mk} (F_{mk} - 2m - 7) \delta_{kj} \right. \\ \left. + \frac{2 \alpha_{mk}^2 d_{ij}^2}{\alpha_{mk}^4 - d_{ij}^4} \left( \frac{F_{mk}}{\alpha_{mk}^2} - \frac{F_{nj}}{d_{ij}^2} \right) (1 - \delta_{kj}) \right\}.$$

$$\langle mk | UDDUI | nj \rangle = \delta_{m, n-2} \frac{2(m+1)(m+2)(n+1)(n+2)}{(2m+3)(2n+3)(m+n+3)} \cdot \frac{2 \alpha_{mk}^2 d_{ij}^2}{d_{ij}^4 - \alpha_{mk}^4} (F_{mk} + \Gamma_{nj}) \\ + \delta_{m, n+2} \frac{2(m+1)(m+2)(n+1)(n+2)}{(2m+3)(2n+3)(m+n+3)} \cdot \frac{2 \alpha_{mk}^2 d_{ij}^2}{\alpha_{mk}^4 - d_{ij}^4} (F_{nj} + \Gamma_{mk}) \\ + \delta_{mn} \frac{2(m+1)(m+2)}{2m+3} \cdot \frac{2m^2 + 6m + 1}{(2m+1)(2m+5)} \left\{ \frac{1}{4} F_{mk} \Gamma_{mk} \delta_{kj} \right. \\ \left. + \frac{2 \alpha_{mk}^2 d_{ij}^2}{\alpha_{mk}^4 - d_{ij}^4} (F_{nj} - F_{mk}) (1 - \delta_{kj}) \right\}.$$

$$\langle mk | UDX | nj \rangle = \delta_{m, n-2} \frac{2(m+1)(m+2)(n+1)(n+2)}{(2m+3)(2n+3)} \cdot \frac{F_{mk} \Gamma_{nj}}{\alpha_{mk}^4 - d_{ij}^4} \\ + \delta_{m, n+2} \frac{2(m+1)(m+2)(n+1)(n+2)}{(2m+3)(2n+3)} \cdot \frac{F_{nj} \Gamma_{mk}}{d_{ij}^4 - \alpha_{mk}^4} \\ + \delta_{mn} \frac{2(m+1)(m+2)}{2m+3} \left\{ - \frac{2m^2 + 6m + 1}{(2m+1)(2m+5)} \delta_{kj} + \frac{(m+1)(m+3)}{2m+3} \alpha_{mk}^2 d_{ij}^2 F_{mk} F_{nj} \right\}.$$

$$\begin{aligned} \langle mk | UDY | nj \rangle &= \delta_{m, n-2} \frac{2(n+1)(n+2)(n+1)(n+2)}{(2m+3)(2n+3)} \cdot \frac{H_{ni}}{\beta_{nj}^4 - d_{nk}^4} \left( \frac{\beta_{nj}^2}{d_{nk}^2} F_{nk} - \frac{2}{2n+1} \right) \\ &+ \delta_{m, n+2} \frac{2(n+1)(n+2)(n+1)(n+2)}{(2m+3)(2n+3)} \cdot \frac{H_{nj}}{\beta_{nj}^4 - d_{nk}^4} \left( \frac{d_{nk}^2}{\beta_{nj}^2} G_{nk} - \frac{2}{2m+1} \right) \\ &+ \delta_{mn} \frac{2(n+1)(n+2)}{2m+3} \left\{ - \frac{2m^2+6m+1}{(2m+1)(2m+5)} \frac{2d_{nk}^2 H_{nj}}{\beta_{nj}^4 - d_{nk}^4} + \frac{(m+1)(m+3)}{2m+3} d_{nk}^2 \beta_{nj}^2 F_{nk} H_{nj} \right\}. \end{aligned}$$

$$\langle mk | TT | nj \rangle = - \frac{(n+1)(n+2)}{2m+3} H_{nk}^2 \delta_{mn} \delta_{kj}.$$

$$\begin{aligned} \langle mk | TDY | nj \rangle &= \delta_{m, n-2} \frac{2(n+1)(n+2)(n+1)(n+2)}{(2m+3)(2n+3)} \cdot \frac{\beta_{mk}^{-2}}{\beta_{nj}^2 - \beta_{mk}^2} H_{mk} H_{nj} \\ &+ \delta_{m, n+2} \frac{2(n+1)(n+2)(n+1)(n+2)}{(2m+3)(2n+3)} \cdot \frac{\beta_{nj}^{-2}}{\beta_{mk}^2 - \beta_{nj}^2} H_{nj} H_{mk} \\ &+ \delta_{mn} \frac{2(n+1)(n+2)}{2m+3} \left\{ - \frac{2m^2+6m+1}{2(2m+1)(m+5)} \beta_{mk}^{-2} H_{mk}^2 \delta_{kj} + \frac{(m+1)(m+3)}{2m+3} \cdot \frac{H_{mk} H_{nj}}{\beta_{mk}^2 - \beta_{nj}^2} \right\}. \end{aligned}$$

A 2. Matricelemente für Überstabilität.

$$\begin{aligned} \langle mk | UU | nj \rangle &= \delta_{mn} \frac{2(n+1)(n+2)}{2m+3} \left\{ (d_{nk}^4 - \frac{i\sigma_i}{4} F_{nk} G_{nk}) \delta_{kj} \right. \\ &\left. + 2i\sigma_i \frac{d_{nk}^2 d_{nj}^2}{d_{nk}^4 - d_{nj}^4} (F_{nj} - F_{nk})(1 - \delta_{kj}) \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle mk | UT | nj \rangle &= \delta_{mn} \frac{2(n+1)^2(n+2)^2}{2m+3} \cdot \frac{d_{nk}^2}{d_{nk}^4 + (\sigma_i p_i)^2} \cdot \frac{d_{nj}^2}{d_{nj}^4 + (\sigma_i p_i)^2} \left\{ 2 \frac{d_{nk}^4 + (\sigma_i p_i)^2}{d_{nk}^4 - d_{nj}^4} \right. \\ &\cdot (F_{nk} - F_{nj})(1 - \delta_{kj}) - (1 + \frac{(\sigma_i p_i)^2}{d_{nk}^4}) (i\sigma_i p_i + \frac{1}{4} F_{nk} G_{nk}) \delta_{kj} - 2F_{nk} \\ &\left. - 4\sqrt{i\sigma_i p_i} \frac{\mathcal{I}_{m+\frac{1}{2}}(\sqrt{i\sigma_i p_i})}{\mathcal{I}_{m+\frac{3}{2}}(\sqrt{i\sigma_i p_i})} \right\}. \end{aligned}$$



$$\langle mk | U P | ij \rangle = \delta_{m,n-2} \frac{2(m+1)(m+2)(n+1)(n+2)}{(2m+3)(2n+3)(m+n+3)} \alpha_{uj}^2 [\alpha_{uj}^4 + (\sigma_1 p_2)^2]^{-1} \alpha_{mk}^2 [\alpha_{mk}^4 + (\sigma_1 p_2)^2]^{-1}$$

$$\left\{ 2 [2(\sigma_1 p_2)^2 - i\sigma_1 p_2 (2n+1) G_{uj}] \sqrt{i\sigma_1 p_2} \frac{\Gamma(\sqrt{i\sigma_1 p_2})}{\Gamma_{m+1/2}} / \frac{\Gamma(\sqrt{i\sigma_1 p_2})}{\Gamma_{n+3/2}} \right.$$

$$+ \alpha_{uj}^4 (\alpha_{mk}^4 - \alpha_{uj}^4)^{-1} [2\alpha_{mk}^4 (F_{mk} + G_{uj}) + i\sigma_1 p_2 (2n+1) G_{uj} F_{mk}]$$

$$+ (\sigma_1 p_2)^2 (\alpha_{mk}^4 - \alpha_{uj}^4)^{-1} [2\alpha_{mk}^4 F_{mk} + 2\alpha_{uj}^4 G_{uj} + i\sigma_1 p_2 (2n+1) F_{mk} G_{uj}] \left. \right\}$$

$$+ \delta_{m,n+2} \frac{2(m+1)(m+2)(n+1)(n+2)}{(2m+3)(2n+3)(m+n+3)} \alpha_{mk}^2 [\alpha_{mk}^4 + (\sigma_1 p_2)^2]^{-1} \alpha_{uj}^2 [\alpha_{uj}^4 + (\sigma_1 p_2)^2]^{-1}$$

$$\left\{ 2 [2(\sigma_1 p_2)^2 - i\sigma_1 p_2 (2m+1) G_{mk}] \sqrt{i\sigma_1 p_2} \frac{\Gamma(\sqrt{i\sigma_1 p_2})}{\Gamma_{n+1/2}} / \frac{\Gamma(\sqrt{i\sigma_1 p_2})}{\Gamma_{m+3/2}} \right.$$

$$+ \alpha_{mk}^4 (\alpha_{uj}^4 - \alpha_{mk}^4)^{-1} [2\alpha_{uj}^4 (F_{uj} + G_{mk}) + i\sigma_1 p_2 (2m+1) F_{uj} G_{mk}]$$

$$+ (\sigma_1 p_2)^2 (\alpha_{uj}^4 - \alpha_{mk}^4)^{-1} [2\alpha_{uj}^4 F_{uj} + 2\alpha_{mk}^4 G_{mk} + i\sigma_1 p_2 (2m+1) F_{uj} G_{mk}] \left. \right\}$$

$$+ \delta_{mn} \frac{2(m+1)(n+2)}{2m+3} \alpha_{mk}^2 [\alpha_{mk}^4 + (\sigma_1 p_2)^2]^{-1} \alpha_{uj}^2 [\alpha_{uj}^4 + (\sigma_1 p_2)^2]^{-1} \left\{ \left( \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{n+2}{2n+3} \right. \right.$$

$$+ \left. \frac{n+1}{2n+3} \cdot \frac{n+3}{2n+5} \right) [2\alpha_{uj}^4 (\alpha_{mk}^4 - \alpha_{uj}^4)^{-1} [\alpha_{mk}^4 + (\sigma_1 p_2)^2] (F_{mk} - F_{uj}) (1 - \delta_{kj})$$

$$- [\alpha_{mk}^4 + (\sigma_1 p_2)^2] (i\sigma_1 p_2 + \frac{1}{2} F_{mk} G_{mk}) \delta_{kj}] - \frac{n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} \cdot [2i\sigma_1 p_2$$

$$+ (2n+1) G_{uj}] [2i\sigma_1 p_2 + (2m+1) G_{mk}] \sqrt{i\sigma_1 p_2} \frac{\Gamma(\sqrt{i\sigma_1 p_2})}{\Gamma_{m+1/2}} / \frac{\Gamma(\sqrt{i\sigma_1 p_2})}{\Gamma_{n-1/2}}$$

$$+ \frac{n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} [2i\sigma_1 p_2 + (2n+1) G_{uj}] i\sigma_1 p_2 G_{mk} + \frac{(n+1)(n+3)}{(2n+3)(2n+5)} \cdot 2(\sigma_1 p_2)^2$$

$$\left. \left. 2\sqrt{i\sigma_1 p_2} \frac{\Gamma(\sqrt{i\sigma_1 p_2})}{\Gamma_{m+1/2}} / \frac{\Gamma(\sqrt{i\sigma_1 p_2})}{\Gamma_{n+3/2}} + \frac{(n+1)(n+3)}{(2n+3)(2n+5)} \cdot 2(\sigma_1 p_2)^2 F_{mk} \right\} \right.$$

$$\langle mk | U D | ij \rangle = \delta_{m,n-2} \frac{2(m+1)(m+2)(n+1)(n+2)}{(2m+3)(2n+3)(m+n+3)} \alpha_{uj}^2 [\alpha_{uj}^4 + (\sigma_1 p_2)^2]^{-1} \alpha_{mk}^2 [\alpha_{mk}^4 + (\sigma_1 p_2)^2]^{-1}$$

$$\left\{ \alpha_{mk}^4 (\alpha_{mk}^4 - \alpha_{uj}^4)^{-1} [(2n+1) F_{mk} G_{uj} + 2i\sigma_1 F_{mk}] + \alpha_{uj}^4 (\alpha_{mk}^4 - \alpha_{uj}^4)^{-1} 2i\sigma_1 G_{uj} \right.$$

$$+ \left. \sigma_1^2 (\alpha_{mk}^4 - \alpha_{uj}^4)^{-1} [(2n+1) F_{mk} G_{uj} + 2i\sigma_1 (F_{mk} + G_{uj})] - F_{mk} G_{uj} \sqrt{i\sigma_1} \frac{\Gamma(\sqrt{i\sigma_1})}{\Gamma_{m+3/2}} / \frac{\Gamma(\sqrt{i\sigma_1})}{\Gamma_{n+1/2}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + \delta_{m, n+2} \frac{2(m+1)(n+2)(n+1)(n+2)}{(2m+3)(2n+3)(m+n+3)} d_{mk}^2 (d_{mk}^4 + \sigma_1^2)^{-1} d_{nj}^2 (d_{nj}^4 + \sigma_1^2)^{-1} \left\{ d_{nj}^4 (d_{nj}^4 \right. \\
 & - d_{mk}^4)^{-1} \left[ (2m+1) F_{nj} (G_{mk} + 2i\sigma_1 F_{nj}) \right] + d_{mk}^4 (d_{nj}^4 - d_{mk}^4)^{-1} 2i\sigma_1 G_{mk} \\
 & + \sigma_1^2 (d_{nj}^4 - d_{mk}^4)^{-1} \left[ (2m+1) F_{nj} (G_{mk} + 2i\sigma_1 (F_{nj} + G_{mk})) \right] - F_{nj} G_{mk} \sqrt{i\sigma_1} \\
 & \left. \frac{\Gamma_{n+3/2}(\sqrt{i\sigma_1})}{\Gamma_{n+5/2}(\sqrt{i\sigma_1})} \right\} + \delta_{mn} \frac{2(m+1)(n+2)}{2m+3} d_{mk}^2 (d_{mk}^4 + \sigma_1^2)^{-1} d_{nj}^2 (d_{nj}^4 + \sigma_1^2)^{-1} \\
 & \left\{ \left( \frac{m}{2m+1} \cdot \frac{n+2}{2m+3} + \frac{n+1}{2m+3} \cdot \frac{m+3}{2m+5} \right) \left[ -\delta_{kj} (d_{mk}^4 + \sigma_1^2) (1 + i\sigma_1 F_{mk} G_{mk} / (4d_{mk}^4)) \right. \right. \\
 & + (1 - \delta_{kj}) (d_{mk}^4 + \sigma_1^2) 2i\sigma_1 (F_{mk} - F_{nj}) / (d_{mk}^4 - d_{nj}^4) \left. \right] - \frac{m}{2m+1} \cdot \frac{n+2}{2m+3} 2i\sigma_1 G_{nj} \\
 & + \frac{n+1}{2m+3} \cdot \frac{m+3}{2m+5} 2i\sigma_1 F_{nj} + \frac{m}{2m+1} \cdot \frac{m+2}{2m+3} G_{mk} G_{nj} \sqrt{i\sigma_1} \frac{\Gamma_{n+3/2}(\sqrt{i\sigma_1})}{\Gamma_{n+5/2}(\sqrt{i\sigma_1})} \\
 & \left. + \frac{m+1}{2m+3} \cdot \frac{m+3}{2m+5} F_{mk} F_{nj} \sqrt{i\sigma_1} \frac{\Gamma_{n+3/2}(\sqrt{i\sigma_1})}{\Gamma_{n+5/2}(\sqrt{i\sigma_1})} \right\} .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle mk | UDY | nj \rangle & = \delta_{m, n-2} \frac{2(m+1)(n+2)(n+1)(n+2)}{(2m+3)(2n+3)(m+n+3)} (\beta_{nj}^2 + i\sigma_1)^{-1} \left\{ d_{mk}^2 (\beta_{nj}^4 - d_{mk}^4)^{-1} \right. \\
 & \left[ (2m+1) H_{nj} F_{mk} - 2\beta_{nj}^2 H_{nj} \right] + 2i\sigma_1 H_{nj} d_{mk}^2 (d_{mk}^4 + \sigma_1^2)^{-1} + d_{mk}^2 (d_{mk}^4 + \sigma_1^2)^{-1} \\
 & H_{nj} F_{mk} \sqrt{i\sigma_1} \frac{\Gamma_{n+3/2}(\sqrt{i\sigma_1})}{\Gamma_{n+5/2}(\sqrt{i\sigma_1})} \left. \right\} + \delta_{m, n+2} \frac{2(m+1)(n+2)(n+1)(n+2)}{(2m+3)(2n+3)(m+n+3)} (\beta_{nj}^2 \\
 & + i\sigma_1)^{-1} \left\{ d_{mk}^2 (\beta_{nj}^4 - d_{mk}^4) \left[ (2m+1) H_{nj} (G_{mk} - 2\beta_{nj}^2 H_{nj}) \right] + d_{mk}^2 (d_{mk}^4 + \sigma_1^2)^{-1} \right. \\
 & H_{nj} \left[ (2m+1) (G_{mk} + 2i\sigma_1) \right] - d_{mk}^2 (d_{mk}^4 + \sigma_1^2)^{-1} H_{nj} (G_{mk} \sqrt{i\sigma_1} \frac{\Gamma_{n+3/2}(\sqrt{i\sigma_1})}{\Gamma_{n+5/2}(\sqrt{i\sigma_1})}) \left. \right\} \\
 & + \delta_{mn} \frac{2(m+1)(n+2)}{2m+3} (\beta_{nj}^2 + i\sigma_1)^{-1} \left\{ - \left( \frac{n}{2m+1} \cdot \frac{n+2}{2n+3} + \frac{n+1}{2m+3} \cdot \frac{n+3}{2m+5} \right) \left[ 2d_{mk}^2 \beta_{nj}^2 ( \right. \right. \\
 & \beta_{nj}^4 - d_{mk}^4 )^{-1} - 2i\sigma_1 d_{mk}^2 (d_{mk}^4 + \sigma_1^2)^{-1} \left. \right] H_{nj} - \frac{n}{2m+1} \cdot \frac{n+2}{2m+3} d_{mk}^2 (d_{mk}^4 + \sigma_1^2)^{-1} \\
 & H_{nj} G_{mk} \sqrt{i\sigma_1} \frac{\Gamma_{n+3/2}(\sqrt{i\sigma_1})}{\Gamma_{n+5/2}(\sqrt{i\sigma_1})} + \frac{n+1}{2m+3} \cdot \frac{n+3}{2m+5} d_{mk}^2 (d_{mk}^4 + \sigma_1^2)^{-1} H_{nj} F_{mk} \\
 & \left. \sqrt{i\sigma_1} \frac{\Gamma_{n+3/2}(\sqrt{i\sigma_1})}{\Gamma_{n+5/2}(\sqrt{i\sigma_1})} \right\} .
 \end{aligned}$$

$$\langle mk | TT | nj \rangle = - \delta_{mn} \frac{2(m+1)(n+2)}{2m+3} \delta_{kj} (1 + i\sigma_1 p_2 / \beta_{mk}^2) H_{mk}^2 / 2 .$$

$$\langle mk | TDY | nj \rangle = \delta_{m, n-2} \frac{2(m+1)(n+2)(n+1)(n+2)}{(2m+3)(2n+3)(m+n+3)} (\beta_{mk}^2 + i\sigma_1)^{-1} (\beta_{nj}^2 + i\sigma_1)^{-1} .$$

N	J	1	2	3	4	5	6	7
0	5.267657	8.506949	11.687678	14.850490	18.005420	21.156178	24.304458	
1	6.529929	9.872617	13.104075	16.297308	19.472579	22.637916	25.797166	
2	7.748589	11.190897	14.476613	17.704535	20.904024	24.087271	27.260321	
3	8.938693	12.475244	15.815767	19.080320	22.306216	25.509468	28.698226	
4	10.108300	13.733801	17.128450	20.430382	23.683894	26.908476	30.114243	
5	11.262315	14.971931	18.419500	21.758912	25.040662	28.267397	31.511059	
6	12.403975	16.193383	19.692461	23.069085	26.379325	29.648704	32.890856	
7	13.535550	17.400898	20.950013	24.363379	27.702123	30.994409	34.255440	
8	14.658702	18.596551	22.194242	25.643765	29.010875	32.326172	35.606323	
9	15.774689	19.781955	23.426812	26.911844	30.307081	33.645383	36.944784	
10	16.884489	20.958395	24.649070	28.168938	31.591997	34.953219	38.271920	
11	17.958882	22.126912	25.862128	29.416147	32.866684	36.250687	39.588675	
12	19.088501	23.288363	27.066911	30.654407	34.132051	37.538654	40.895873	
13	20.183863	24.443465	28.264207	31.884516	35.388882	38.817876	42.194234	

Tabelle 7: Wurzeln von  $\int_{h+3/2}^1 I_{h+3/2}(\alpha) - \int_{h+3/2}^1 I_{h+3/2}(\alpha) = 0$

N	J	1	2	3	4	5	6	7
0	4.493409	7.725252	10.964121	14.066193	17.220755	20.371303	23.519452	
1	5.763459	9.095011	12.322941	15.514603	18.689036	21.853874	25.012803	
2	6.987932	10.417118	13.698023	16.923621	20.121806	23.304246	26.476763	
3	8.182561	11.704907	15.039665	18.301255	21.525417	24.727565	27.915575	
4	9.355812	12.966530	16.354709	19.653152	22.904550	26.127750	29.332562	
5	10.512835	14.207392	17.647974	20.983463	24.262768	27.507868	30.730380	
6	11.657032	15.431289	18.922999	22.295348	25.602856	28.870373	32.111195	
7	12.790781	16.641003	20.182470	23.591274	26.927041	30.217262	33.476800	
8	13.915822	17.838643	21.428487	24.873213	28.237134	31.550188	34.828696	
9	15.033469	19.025853	22.662720	26.142767	29.534633	32.870534	36.168157	
10	16.144743	20.203942	23.886530	27.401259	30.820794	34.179474	37.496274	
11	17.250454	21.373972	25.101038	28.649796	32.096677	35.478013	38.813988	
12	18.351261	22.536816	26.307181	29.889316	33.363191	36.767018	40.122124	
13	19.447702	23.693208	27.505752	31.120621	34.621122	38.047244	41.421399	

$$J_{n+1/2}(\beta) = 0$$

Tabelle 8: Wurzeln von

$$\begin{aligned}
 & \left\{ (2n+1)(\beta_{mk}^2 + i\sigma_i)(\beta_{nj}^2 - \beta_{mk}^2)^{-1} H_{mk} H_{nj} + \sqrt{i\sigma_i} \frac{\Gamma(\sqrt{i\sigma_i})}{\Gamma_{n+3/2}} / \frac{\Gamma(\sqrt{i\sigma_i})}{\Gamma_{m+5/2}} \cdot H_{mk} H_{nj} \right\} \\
 & + \delta_{m, k+2} \frac{2(n+1)(n+2)(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2h+1)(m+h+3)} (\beta_{nj}^2 + i\sigma_i)^{-1} (\beta_{mk}^2 + i\sigma_i)^{-1} \left\{ (2m+1)(\beta_{nj}^2 + i\sigma_i) \cdot \right. \\
 & \left. (\beta_{mk}^2 - \beta_{nj}^2)^{-1} H_{nj} H_{mk} + \sqrt{i\sigma_i} \frac{\Gamma(\sqrt{i\sigma_i})}{\Gamma_{h+3/2}} / \frac{\Gamma(\sqrt{i\sigma_i})}{\Gamma_{n+5/2}} \cdot H_{nj} H_{mk} \right\} + \delta_{mn} \frac{2(n+1)(n+2)}{2n+3} \\
 & (\beta_{mk}^2 + i\sigma_i)^{-1} (\beta_{nj}^2 + i\sigma_i)^{-1} H_{mk} H_{nj} \left\{ -\left( \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{h+2}{2n+3} + \frac{h+1}{2n+3} \cdot \frac{h+3}{2n+5} \right) (\beta_{mk}^2 + i\sigma_i) \cdot \right. \\
 & \left. \cdot \frac{1}{2} \delta_{kj} + \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{h+2}{2n+3} \sqrt{i\sigma_i} \frac{\Gamma(\sqrt{i\sigma_i})}{\Gamma_{h+3/2}} / \frac{\Gamma(\sqrt{i\sigma_i})}{\Gamma_{n+4/2}} + \frac{h+1}{2n+3} \cdot \frac{h+3}{2n+5} \sqrt{i\sigma_i} \frac{\Gamma(\sqrt{i\sigma_i})}{\Gamma_{h+3/2}} / \frac{\Gamma(\sqrt{i\sigma_i})}{\Gamma_{n+5/2}} \right\}
 \end{aligned}$$

Die Konstanten  $\alpha_{nj}$  und  $\beta_{nj}$  sind in den Tabellen 7 und 8 gegeben. Der Fehler beträgt ungefähr eine Einheit der letzten angegebenen Stelle.

### Literatur

- Chandrasekhar, S., 1952, Phil. Mag. Ser. 7, 43, 1317-29;  
 1961, "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability", Oxford Univ. Press  
 Bisshopp, F.E., 1958, Phil. Mag. Ser. 8, 3, 1342-60.