

**I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K**  
**G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N**

LICHTSTREUUNG UND MISCHUNG IN EINEM PLASMA.

(Linearisierte Theorie)

von

Wilhelm H. Kegel

IPP/6/21

Juli 1964

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

I N H A L T

	<u>Seite</u>
ABSTRACT	3
A. EINLEITUNG	4
B. STREUTHEORIE	
1. Streuung an einem einzelnen Elektron	6
2. Streuung an einem Elektron in einem homogenen Magnetfeld	9
3. Streuung an vielen Elektronen	11
C. THERMISCHE DICHTFLUKTUATIONEN	
1. Zeitliche Mittelwerte im thermischen Gleichgewicht	19
2. Abweichungen vom exakten thermodynamischen Gleichgewicht	29
3. Einfluß eines Magnetfeldes	32
4. Das Frequenzspektrum im magnetfeldfreien Fall	34
5. Diskussion und numerische Beispiele	46
6. Spektralverteilung der Dichtefluktuationen in einem homogenen Magnetfeld	52
D. ERZWUNGENE DICHTFLUKTUATIONEN UND LICHTMISCHUNG	
1. Erzwungene Fluktuationen	59
2. Lichtmischung und Erzeugung der zweiten Harmonischen unter Vernachlässigung der Dispersion	63
3. Einfluß der Dispersion	68
E. GÜLTIGKEITSBEREICHE	69
ANHANG	
I. Zweiteilchenkorrelationsfunktionen	73
II. Lösung der Differentialgleichung (C79)	82
III. Die Funktionen R, S und Y	
1. Die Funktionen $R(\mathbf{k}, s)$	83
2. Die Funktionen $Y(\mathbf{k}, s)$	87
3. Die Funktionen $S(\mathbf{k}, s)$	93
LITERATUR	99

A B S T R A C T

This report is a review of the theory of light scattering in a plasma.

In section B a scattering formula is derived, which connects the scattered intensity to the fluctuations of the electron density in the plasma.

In the case of thermal density fluctuations the theory is treated essentially corresponding to the ideas of E.E. SALPETER (1960,1963) and T.HAGFORS (1961). At first the time mean of the density fluctuations is considered. This quantity corresponds to the total energy scattered into a given solid angle.- The spectral distribution is derived from the linearized VLASOV-equation. The results are discussed from the view point of determining plasma parameters by means of light scattering experiments.

In section D the theory is extended to the case of an external electric field. For a plasma with an external magnetic field it is shown that density fluctuations can be forced by an external electric field (laser beam). If light of a second beam is scattered at these fluctuations, light mixing occurs. An essential condition for this effect is that the two light beams have to be parallel. This theory includes also the generation of the second harmonic.

Finally the limitations of the outlined theory are discussed.

## A. EINLEITUNG

GORDON hat 1958 vorgeschlagen, die Elektronendichte und Temperatur in der Ionosphäre aus Streuspektren von Radarwellen zu bestimmen, die an den freien Elektronen der Ionosphäre gestreut wurden. Seinen Abschätzungen legte er die klassische Theorie oder THOMSON-Streuung zugrunde. D.h. er betrachtete die einzelnen Elektronen als statistisch unabhängig. Danach sollte man für das Streuspektrum ein Gaußprofil erwarten, dessen Halbwertsbreite durch die mittlere thermische Geschwindigkeit der Elektronen bestimmt ist. Die von BOWLES (1958) und PINEO, KRAFT und BRISCOE (1960) ausgeführten Experimente ergaben dagegen ein viel schmaleres Spektrum, das der Geschwindigkeit der Ionen entsprach.

Aufgrund dieser Ergebnisse entstand eine größere Anzahl theoretischer Untersuchungen. Darin wurde gezeigt, daß man bei der Streuung elektromagnetischer Wellen in einem Plasma im allgemeinen die Elektronen nicht als statistisch unabhängig betrachten darf, sondern die elektrostatischen Wechselwirkungen berücksichtigen muß. Dadurch wird das Streuspektrum sowie der Gesamtstreuquerschnitt wesentlich modifiziert.

Das Problem wurde auf sehr verschiedene Weise behandelt. Im wesentlichen gibt es drei Methoden: Die erste setzt thermisches Gleichgewicht voraus und geht dann wesentlich vom NYQUIST-Theorem aus (siehe z.B. DOUGHERTY and FARLEY, 1960); die zweite (siehe z.B. E.E. SALPETER 1960) beruht im wesentlichen auf einer Lösung der WLASOW-Gleichung. Dabei braucht man nicht unbedingt die Annahme des thermischen Gleichgewichtes, sondern kann im Prinzip von beliebigen Verteilungsfunktionen ausgehen. Die dritte Methode ist prinzipiell gesehen die allgemeinste und geht von der Berechnung der Bahnen der einzelnen Teilchen aus (siehe z.B. E.E. SALPETER 1961 u.A. SALAT 1963)

Die Entwicklung des Lasers hat es inzwischen möglich gemacht, entsprechende Streuexperimente auch an Plasmen im Labor durchzuführen ( siehe z.B. E.FÜNFER, B. KRONAST, H.J. KUNZE 1963, 1964 oder E. THOMPSON and G.FIOCCO). Dabei soll das Streulicht Aufschluß über lokale Plasmagrößen geben.

Der vorliegende Bericht soll in Abschnitt B und C einen Überblick über die Theorie der Lichtstreuung im Plasma geben. Das Problem wird im wesentlichen mit Hilfe der WLASOW-Gleichung behandelt. Die Darstellung im Abschnitt C schließt sich an die Arbeiten von E.E. SALPETER (1960) und T.HAGFORS (1961) an. Im Abschnitt D wird die Theorie erweitert, indem der Einfluß eines äußeren elektrischen Feldes (Laserstrahl) berücksichtigt wird. Unter bestimmten Voraussetzungen ergibt sich dabei Lichtmischung, wenn zwei Strahlen das Plasma durchsetzen.

Der vorliegende Bericht beschränkt sich auf eine klassische, nicht-relativistische Behandlungsweise.

Es werden im folgenden ausschließlich elektrostatische cgs-Einheiten verwendet, d.h. es wird  $\epsilon_0 = 1$  und  $\mu_0 = 1$  gesetzt.

## B. STREUTHEORIE

Der Vollständigkeit halber sollen in diesem Abschnitt noch einmal kurz die Formeln der linearisierten Streutheorie abgeleitet werden. Dazu wird zunächst die Streuung an einem einzelnen Elektron betrachtet, dann das Zusammenwirken vieler Elektronen.

### 1. Streuung an einem einzelnen Elektron.

Ein Elektron, das in einem elektromagnetischen Feld mitschwingt, strahlt selber wieder eine elektromagnetische Welle aus entsprechend einem HERTZschen Dipol. Diese Welle geht in alle Raumrichtungen. Wir sagen, die einfallende Welle wird an dem Elektron gestreut. Es sei  $S$  der Strahlungsstrom (Energiestrom pro  $\text{cm}^2$ ) der einfallenden Welle und  $dI$  die von dem Elektron in den Raumwinkel  $d\Omega$  emittierte Energie. Dann ist der Streuquerschnitt definiert durch die Gleichung

$$(B1) \quad d\sigma_e = \frac{dI}{S}$$

Dabei bedeutet der Querstrich eine Zeitmittelung. Ist  $\ddot{x}$  die Beschleunigung des streuenden Elektrons und  $\nu$  der Winkel zwischen der Schwingungsrichtung des Elektrons und der Richtung Elektron-Beobachter, so ist nach H.HERTZ:

$$(B2) \quad dI = \frac{e^2 \ddot{x}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \nu d\Omega$$

(  $e$  = Elementarladung,  $c$  = Lichtgeschwindigkeit. ) Ist  $u$  die

Beobachtungsrichtung, so schwingt der elektrische Vektor der Streulichtwelle senkrecht zu  $u$  in der Ebene, die durch  $u$  und die Schwingungsrichtung des Elektrons geht. Wirken auf das Elektron keine weiteren Kräfte, so ist, wenn man die Wirkung des magnetischen Feldes der Welle vernachlässigt (relativistische Korrektur),

$$(B3) \quad \ddot{x}^2 = \frac{e^2}{m^2} E^2$$

und die Schwingungsrichtung ist parallel zu  $\vec{E}$ . ( $m$  = Masse des Elektrons). Für den Strahlungsstrom gilt

$$(B4) \quad S = \frac{c}{4\pi} E^2$$

Mit den drei letzten Gleichungen ergibt sich aus (B1) für den Streuquerschnitt

$$(B5) \quad d\sigma_e = \left( \frac{e^2}{m c^2} \right)^2 \sin^2 \vartheta \, d\sigma$$

Setzt man die Zahlenwerte ein, so erhält man

$$(B5a) \quad d\sigma_e = 0.794 \cdot 10^{-25} \sin^2 \vartheta \, d\sigma \text{ [cm}^2\text{]} .$$

Durch Integration über alle Raumrichtungen ergibt sich aus (B5) der totale Streuquerschnitt zu

$$(B6) \quad \sigma_e = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{m c^2} \right)^2$$

bzw.

$$(B6a) \quad \sigma_e = 0.665 \cdot 10^{-24} \text{ [cm}^2\text{]} .$$

Den Zusammenhang mit dem Streuwinkel  $\Theta$ , d.h. mit dem Winkel zwischen den Ausbreitungsrichtungen der einfallenden Welle und der beobachteten Streulichtwelle, ersieht man aus Abb. 1.

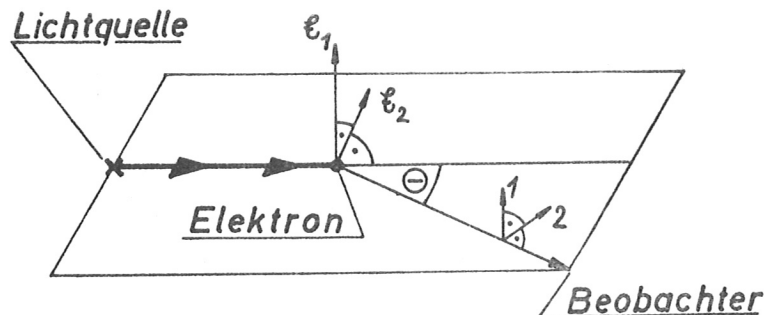


Abb.1: Streuung einer elektromagnetischen Welle an einem Elektron nach A.UNSÖLD (1955).

Wir zerlegen den elektrischen Vektor in die Komponenten  $E_1$  (senkrecht zur Ebene L E B) und  $E_2$  (in dieser Ebene senkrecht zu L E). Entsprechend erhalten wir zwei verschiedene Anteile des Streuquerschnitts:

$$d\sigma_1' = \left( \frac{e^2}{m c^2} \right)^2 d\sigma$$

(B7) und

$$d\sigma_2' = \left( \frac{e^2}{m c^2} \right)^2 \cos^2 \Theta d\sigma$$

Ist die einfallende Welle unpolarisiert (natürliches Licht), so sind beide Anteile gleich groß und damit:

$$(B8) \quad d\sigma_e = \left( \frac{e^2}{m c^2} \right)^2 \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \Theta) d\sigma$$

Auch die Polarisation des Streulichtes ist jetzt leicht zu übersehen. Für  $\Theta = 90^\circ$  ist die Streustrahlung immer linear polarisiert. Bei natürlichem Licht ist für  $\Theta = 0^\circ$  oder  $180^\circ$  die Streustrahlung auch unpolarisiert.



In dem Koordinatensystem, in dem das Elektron - abgesehen von der Schwingungsbewegung in dem elektrischen Feld - ruht, hat das Streulicht dieselbe Frequenz wie das einfallende Licht. In allen anderen Koordinatensystemen muß der Dopplereffekt berücksichtigt werden. Nur bei exakter Vorwärtsstreuung hebt sich dieser heraus.

## 2. Streuung an einem Elektron in einem homogenen Magnetfeld.

In einem Magnetfeld bewegt sich ein Elektron nicht entsprechend Gl. (B3), sondern es gilt:

$$(B9) \quad \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{e}{m} \left( \mathbf{E}_0 e^{i\omega t} + \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathcal{L}}{c} \right)$$

( Dabei ist vernachlässigt, daß sich das Feld am Ort des Elektrons auch durch die Bewegung des Elektrons ändert, falls diese eine Komponente senkrecht zu  $\mathcal{L}$  hat. Diese Näherung ist zulässig, solange  $v/c \ll 1$  ist.) Betrachten wir jetzt die Bewegung in einem Cartesischen Koordinatensystem, dessen x-Achse parallel zu  $\mathcal{L}$  ist, so wird die Bewegung in x-Richtung nicht von dem Magnetfeld beeinflusst. Es folgt aus (B9)

$$(B10) \quad \ddot{x} = -\frac{e}{m} E_x^0 e^{i\omega t}$$

Für die beiden anderen Komponenten erhält man zwei gekoppelte lineare Differentialgleichungen erster Ordnung. Diese kann man separieren und erhält zwei unabhängige Diffgl.

2. Ordnung:

$$(B11) \quad \begin{aligned} \ddot{y} + \Omega_e^2 y &= -\frac{e}{m} \left( E_y^0 - \frac{\Omega_e}{i\omega} E_x^0 \right) e^{i\omega t} \\ \ddot{z} + \Omega_e^2 z &= -\frac{e}{m} \left( E_z^0 + \frac{\Omega_e}{i\omega} E_y^0 \right) e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Dabei ist  $\Omega_e$  die Gyrofrequenz des Elektrons.

Diese Differentialgleichungen entsprechen einer erzwungenen Schwingung. Wenn wir von Einschwingvorgängen absehen und gleich einen periodischen Ansatz machen, ergibt sich für unsere gesuchten Größen:

$$(B12) \quad \ddot{y} = - \frac{e}{m} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} \left( E_y^0 - \frac{\Omega_e}{i\omega} E_z^0 \right) e^{i\omega t}$$

$$\ddot{x} = - \frac{e}{m} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} \left( E_z^0 + \frac{\Omega_e}{i\omega} E_y^0 \right) e^{i\omega t}$$

Die Gleichungen (B10) und (B12) lassen sich zusammenfassen zu der Tensorgleichung

$$(B13) \quad \ddot{r} = - \frac{e}{m} (\alpha \ell)$$

mit

$$(B14) \quad \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} & \frac{i\Omega_e}{\omega} \cdot \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} \\ 0 & - \frac{i\Omega_e}{\omega} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} & \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} \end{pmatrix}$$

Für den Streuquerschnitt ergibt sich dann aus (B1), (B2) und (B4)

$$(B15) \quad d\sigma_e = \left( \frac{e^2}{m c^2} \right)^2 \frac{1}{E_{\text{ein}}^2} |(\alpha \ell^0) \cdot n|^2 d\Omega$$

Die Polarisation der Streustrahlung erhält man wieder durch Zerlegung der Bewegung des Elektrons entsprechend Abb. 1. Im allgemeinen ist das Streulicht einer linear polarisierten Welle elliptisch polarisiert. Für  $\Theta = 90^\circ$  ist das Streulicht jedoch immer linear polarisiert.

Aus den Gleichungen (B10) - (B14) ersieht man, daß für  $\omega \gg \Omega_e$  keine wesentlichen Unterschiede gegenüber dem

magnetfeldfreien Fall (B3) auftreten.

### 3. Streuung an vielen Elektronen.

Wir betrachten ein Plasma aus Ionen und Elektronen in einem Volumen  $V$ . Da der Streuquerschnitt massenabhängig ist, kann man die Streuung an den Ionen gegenüber der an den Elektronen vernachlässigen. Wir machen jetzt die Annahme, daß die Frequenz  $\omega$ , der einfallenden Welle groß ist gegen die Plasmafrequenz  $\omega_p$  und daß das Plasma so dünn ist, daß keine wesentliche Absorption auftritt. Dann ist die elektrische Feldstärke einer einfallenden ebenen Welle gegeben durch

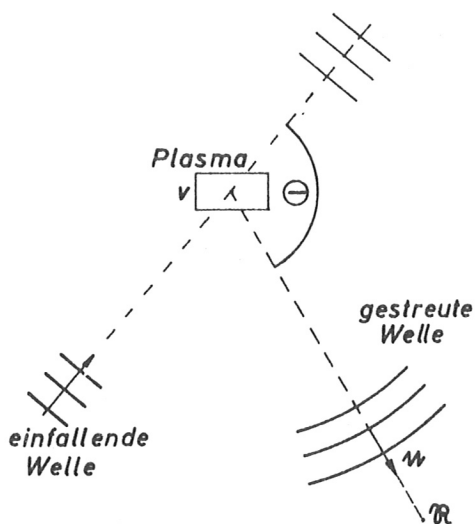


Abb.2: Streuung einer elektromagnetischen Welle an einem Plasma.

$$(B16) \quad \mathcal{E}_1(\mathcal{R}, t) = \frac{1}{2} \mathcal{E}_1^0 \left( \exp\{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathcal{R} - \omega_1 t)\} + \exp\{-i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathcal{R} - \omega_1 t)\} \right)$$

Wird diese Welle an einem einzelnen Elektron im Punkte  $\mathcal{R}_i$  gestreut, so beträgt die elektrische Feldstärke der gestreuten Welle im Punkte  $\mathcal{R}$  :

$$(B17) \quad E_s^i(\mathcal{R}, t) = \frac{\eta_e}{|\mathcal{R} - \mathcal{R}_i|} E_1(\mathcal{R}_i, t - \frac{|\mathcal{R} - \mathcal{R}_i|}{c})$$

Die Richtung von  $\mathcal{E}_s^i$  ist im magnetfeldfreien Fall durch die Projektion von  $\mathcal{E}_1$  auf die Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{u}$  der Streuwelle gegeben (vgl. Abb.1).  $\eta_e$  ist

der "Streukoeffizient" für die elektrische Feldstärke. Dieser ist winkelabhängig. Sind in dem betrachteten Volumen  $n$  Elektronen enthalten, so ist die Gesamtfeldstärke in  $\mathcal{R}$  ganz allgemein

$$(B18) \quad E_s(\mathcal{R}, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\eta_i}{|\mathcal{R}-\mathcal{r}_i|} E_1(\mathcal{r}_i, t - \frac{|\mathcal{R}-\mathcal{r}_i|}{c})$$

oder, wenn man das Teilchenbild verläßt und zu einer kontinuierlichen Darstellung übergeht, :

$$(B19) \quad E_s(\mathcal{R}, t) = \int_V d^3r \frac{\eta_e(\mathcal{r})}{|\mathcal{R}-\mathcal{r}|} n(\mathcal{r}, t - \frac{|\mathcal{R}-\mathcal{r}|}{c}) E_1(\mathcal{r}, t - \frac{|\mathcal{R}-\mathcal{r}|}{c})$$

Dabei ist  $n(\mathcal{r}, t)$  die Elektronendichte.

Wir machen jetzt die Annahme, daß der Abstand  $R$  des Beobachters groß ist gegen die Dimensionen des Plasmavolumens. Dann ist in erster Näherung der Streuwinkel für alle Elektronen der gleiche, d.h.  $\eta_e(\mathcal{r})$  ist konstant und kann vor das Integral gezogen werden. Weiterhin approximieren wir im Nenner  $|\mathcal{R}-\mathcal{r}|$  durch  $R$ . Dabei wird angenommen, daß der Koordinatensprung in unserem Plasmavolumen liegt. Diese Näherung bedeutet, daß man den Unterschied in den Amplituden der von dem einzelnen Elektron herrührenden Streuwellen aufgrund ihrer verschiedenen Entfernung vom Beobachter vernachlässigt. Weiterhin setzen wir in den Argumenten von  $n$  und  $E_1$  :

$$(B20) \quad |\mathcal{R}-\mathcal{r}| = R - \mathcal{r} \cdot \mathcal{u}$$

Führt man außerdem noch eine neue Zeitskala

$$(B21) \quad \tau = t - \frac{R}{c}$$

ein ( mittlere Retardierung) so wird mit (B16) aus (B19):

$$(B22) \quad E_s(\mathcal{R}, t) = \frac{\eta_e E_1^0}{2R} \int_V d^3r \, n(\mathcal{K}, \tau + \frac{\mathcal{K}u}{c}) \cdot \\ \cdot (\exp\{i[(k_1 \mathcal{K} - \omega_1)(\tau + \frac{\mathcal{K}u}{c})]\} + k.k.)$$

Dabei bedeutet k.k. das konjugiert Komplexe der vorstehenden Größe.

Um einen expliziten Ausdruck für die Zeitabhängigkeit der Dichte zu haben, schreiben wir diese als FOURIER-Integral:

$$(B23) \quad n(\mathcal{K}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, n(\mathcal{K}, \omega) e^{i\omega t}$$

Setzt man dies in (B22) ein, so ergibt sich:

$$(B24) \quad E_s(\mathcal{R}, t) = \frac{\eta_e E_1^0}{4\pi R} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_V d^3r \, n(\mathcal{K}, \omega) \left[ \exp\{i[(k_1 - \frac{\omega_1 - \omega}{c}u)\mathcal{K} - (\omega_1 - \omega)\tau]\} \right. \\ \left. + \exp\{-i[(k_1 - \frac{\omega_1 + \omega}{c}u)\mathcal{K} - (\omega_1 + \omega)\tau]\} \right]$$

Das Integral über  $\omega$  läßt sich umformen, indem man es in Teilintegrale aufspaltet, Variablensubstitutionen durchführt und dann die Teile wieder zusammenfaßt. Mit der Bezeichnung:

$$(B25) \quad k_2 = \frac{\omega_2}{c} u$$

läßt sich (B24) dann schreiben als:

$$\begin{aligned}
 E_s(\mathcal{R}, t) = & \frac{\eta_2 E_1^0}{4\pi R} \int_0^\infty d\omega_2 \int_V d^3r \left[ n(\mathbf{r}, \omega_1 + \omega_2) \exp\{i[(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\mathbf{r} + \omega_2 \tau]\} \right. \\
 & + n(\mathbf{r}, -\omega_1 - \omega_2) \exp\{-i[(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\mathbf{r} + \omega_2 \tau]\} \\
 & + n(\mathbf{r}, \omega_2 - \omega_1) \exp\{i[(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)\mathbf{r} + \omega_2 \tau]\} \\
 & \left. + n(\mathbf{r}, -\omega_2 + \omega_1) \exp\{-i[(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)\mathbf{r} + \omega_2 \tau]\} \right]
 \end{aligned}
 \tag{B26}$$

Das Integral über das Volumen stellt eine räumliche FOURIER-Transformation dar. Mit

$$n(\mathbf{k}, \omega) = \int_V d^3r n(\mathbf{r}, \omega) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}
 \tag{B27}$$

und der Beziehung

$$n^*(\mathbf{k}, \omega) = n(-\mathbf{k}, -\omega)
 \tag{B28}$$

geht (B26) über in

$$\begin{aligned}
 E_s(\mathcal{R}, t) = & \frac{\eta_2 E_1^0}{4\pi R} \int_0^\infty d\omega_2 \left\{ [n(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \omega_1 + \omega_2) + n(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1, \omega_2 - \omega_1)] \exp(i\omega_2 \tau) \right. \\
 & \left. + n^*(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \omega_1 + \omega_2) + n^*(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1, \omega_2 - \omega_1) \right\} \exp(-i\omega_2 \tau)
 \end{aligned}
 \tag{B29}$$

Wenn man die spektrale Verteilung der Streustrahlung in  $\mathcal{R}$  mißt, wird der Bereich  $\omega_2 - \frac{1}{2} \Delta \omega$  bis  $\omega_2 + \frac{1}{2} \Delta \omega$  aus dem Spektrum heraus gefiltert. Die entsprechende Feldstärke ist:

$$\Delta E_s(\mathcal{R}, t) = \frac{\eta_2 E_1^0}{4\pi R} \int_{\omega_2 - \frac{\Delta \omega}{2}}^{\omega_2 + \frac{\Delta \omega}{2}} d\omega_2' \{ \dots \}
 \tag{B30}$$

Bei einer Messung hat man es mit dem zeitlichen Mittel des Quadrates dieser Größe zu tun, denn es wird die mittlere Intensität der Streustrahlung gemessen.

$$(B31) \quad \overline{|\Delta E_s(\mathcal{R}, t_0)|^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |\Delta E_s(\mathcal{R}, t)|^2 dt$$

Diese Größe hängt noch von der Wahl des Anfangspunktes  $t_0$  ab, denn in die Berechnung der Dichtefluktuationen gehen wesentlich die Anfangsbedingungen zur Zeit  $t_0$  ein. Wenn man nach dem Erwartungswert für eine Messung fragt, muß man also noch über die Anfangswerte mitteln, d.h. man bildet das Ensemblemittel. Dieses bezeichnen wir im folgenden mit  $\langle \rangle$ . Dann ist:

$$(B31a) \quad \langle \overline{|\Delta E_s(\mathcal{R})|^2} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \langle |\Delta E_s(\mathcal{R}, t)|^2 \rangle dt$$

In diesem Ausdruck ist (B30) einzusetzen. Das Quadrat in (B31a) ist dann das Produkt zweier Integrale. Zur Unterscheidung bezeichnen wir die eine Integrationsvariable mit  $\omega'_2$ . Dann kann man das zweite Integralzeichen vorziehen und die Integranden miteinander multiplizieren. Wir fassen dann einerseits die Terme zusammen, die in der Exponentialfunktion ( $\omega_2 - \omega'_2$ ) stehen haben, andererseits die mit ( $\omega_2 + \omega'_2$ ). Dann ergibt sich ein Ausdruck der Form:

$$(B32) \quad \langle \overline{|\Delta E_s(\mathcal{R})|^2} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \{ \underline{I} + \underline{II} \}$$

Dabei ist I der wesentliche Term. Für diese Zwischenrechnung

setzen wir:

$$(B33) \quad a(\omega_2) = \frac{\eta_c E_1^0}{4\pi R} [n(k_1 + k_2, \omega_1 + \omega_2) + n(k_2 - k_1, \omega_2 - \omega_1)]$$

Damit ist:

$$(B34) \quad I = \left\langle \int_0^T dt \int_{\omega_2 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_2 + \frac{\Delta\omega}{2}} d\omega_1' d\omega_2'' [a(\omega_1') a^*(\omega_2'') \exp\{i(\omega_2 - \omega_1')t\} + a^*(\omega_1') a(\omega_2'') \exp\{-i(\omega_2 - \omega_1')t\}] \right\rangle$$

Da die  $\omega$ -Integration sich nur über ein sehr kleines Intervall erstreckt, kann man  $a(\omega_1')$  in diesem Bereich als konstant betrachten. Dann ist  $a(\omega_1') = a(\omega_2'')$ . Jetzt kann man die beiden Glieder zusammenfassen und die  $t$ -Integration ausführen.

$$(B34a) \quad I = \left\langle 2\pi \iint d\omega_1' d\omega_2'' a(\omega_1') a^*(\omega_2'') \delta(\omega_2' - \omega_2'') \right\rangle$$

$$(B35) \quad I = \left\langle 2\pi \int d\omega_2' |a(\omega_2')|^2 \right\rangle$$

$$(B35a) \quad I \approx 2\pi \langle |a(\omega_2)|^2 \rangle \Delta\omega_2$$

II hat dieselbe Struktur wie I, nur steht in der Exponentialfunktion  $(\omega_2' + \omega_2'')$  statt  $(\omega_2' - \omega_2'')$ . Entsprechend ergibt die  $t$ -Integration den Faktor  $\delta(\omega_2' + \omega_2'')$ . Da aber die  $\omega$ -Integration vorher so umgeformt wurde, daß nur über positive  $\omega$  integriert wird, ist diese  $\delta$ -Funktion in dem betrachteten  $\omega$ -Bereich immer Null ( $\omega_2 \neq 0$  vorausgesetzt). Es ist also  $II = 0$  und damit dann:

$$(B36) \quad \langle |\Delta E_s(\mathbf{R})|^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{\eta_c^2 E_1^0}{8\pi R^2} \Delta\omega \cdot \langle |n(k_1 + k_2, \omega_1 + \omega_2) + n(k_2 - k_1, \omega_2 - \omega_1)|^2 \rangle$$



Prinzipiell ist dies unser gesuchtes Ergebnis. In den uns interessierenden Fällen wird aber ein Term der Summe auf der rechten Seite von (B36) immer Null. Ganz allgemein ist:

$$(B37) \quad |k_1 + k_2| \leq k_1 + k_2$$

↪

$$(B38) \quad \frac{\omega_1 + \omega_2}{|k_1 + k_2|} \geq C$$

Im Fall thermischer Fluktuationen ist  $n(k_1 + k_2, \omega_1 + \omega_2)$  aufgrund von (B38) immer Null, da - wie wir später sehen werden - die thermischen Fluktuationen mit einer bestimmten Phasengeschwindigkeit zusammenhängen mit der Bewegung von Teilchen mit derselben Geschwindigkeit. Und Teilchengeschwindigkeit größer als  $C$  gibt es nicht. - Im Fall der Lichtmischung (siehe Abschnitt D) ist in (B38) das Gleichheitszeichen erfüllt. Wir gehen aber davon aus, daß Dichtefluktuationen mit nur einer (oder zwei) FOURIER-Komponenten erzwungen werden. D.h. auch hier ist im allgemeinen nur ein Glied von (B36) von Null verschieden. Entsprechend schreiben wir:

$$(B39) \quad \overline{|E_s(\mathcal{R})|^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{\eta_e^2 E_0^2}{8 \pi R^2} \langle |n(k, \omega)|^2 \rangle$$

Wir bezeichnen mit  $I_1(\omega_1, k_1)$  die Intensität der Primärstrahlung mit der Frequenz  $\omega_1$ , und dem Wellenzahlvektor  $k_1$ . Fragt man jetzt statt nach der Energie pro  $\text{cm}^2$  in  $\mathcal{R}$  nach der Energie  $dI_2(\omega_2, k_2)$  mit der Frequenz  $\omega_2$  und dem Wellenzahlvektor  $k_2$ , die in den Raumwinkel  $d\Omega$  gestreut wird, so folgt

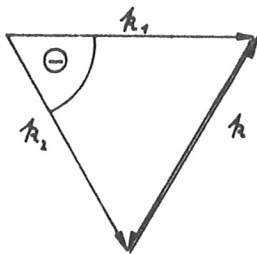
aus (B39):

$$(B40) \quad dI_2(\omega_2, k_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \bar{I}_1(\omega_1, k_1) \langle |n(k, \omega)|^2 \rangle \frac{\Delta\omega}{2\pi} d\Omega_e$$

dabei ist  $d\Omega_e$  durch (B5), (B7) oder (B15) gegeben. Die Größen  $\omega_1, k_1, \omega_2$  und  $k_2$  sind durch das Experiment vorgegeben, während  $k$  und  $\omega$  der Bedingung

$$(B41) \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} k_2 &= k_1 + k & ; & \quad \omega_2 = \omega_1 + \omega \\ k_2 &= k_1 - k & ; & \quad \omega_2 = \omega_1 - \omega \end{aligned}$$

genügen müssen. Diese Bedingung erhält man aus den vorherigen



Formeln, wenn man beachtet, daß  $n(k, \omega) = n^*(-k, -\omega)$  einer Welle in Richtung  $k$  entspricht und  $n(k, -\omega) = n^*(-k, \omega)$  einer Welle in Richtung  $-k$ . Die Bedingung (B41) bedeutet, daß die drei Vektoren  $k_1, k_2$  und  $k$  ein Dreieck bilden müssen (Abb.3)

Abb.3: "Dreiecksrelation" für die  $k$ -Vektoren der einfallenden Welle, der gestreuten Welle und der Dichtefluktuation entsprechend (B4).

Außerdem gilt:

$$(B42) \quad \frac{\omega_1}{k_1} = c \quad \text{und} \quad \frac{\omega_2}{k_2} = c$$

Dabei ist  $c$  im allgemeinen die Lichtgeschwindigkeit im Plasma bei der betrachteten Frequenz. Für  $\omega \gg \omega_p$  ist  $c$  praktisch die Vakuumlichtgeschwindigkeit.

Das Ergebnis (B40) zusammen mit der Bedingung (B41) ist unsere endgültige Streuformel in der linearen Näherung und entspricht der ersten BORNschen Näherung. Die Formel (B40) besagt, daß das Frequenzspektrum des Streulichtes das Frequenzspektrum der Dichtefluktuationen widerspiegelt. Die

Dichtefluktuationen kann man unter bestimmten Voraussetzungen, z.B. wenn man thermisches Gleichgewicht annimmt, berechnen. Prinzipiell kann man alle Mikroinstabilitäten, soweit sie Dichtefluktuationen mit Wellenzahlen zwischen 0 und  $\lambda^{-1}$ , zur Folge haben, dadurch nachweisen, daß man Streulichtspektren unter verschiedenen Streuwinkeln mißt.

Fragt man nicht nach dem Streuspektrum sondern nur nach der gesamten Energie, die im zeitlichen Mittel pro sec. in den Raumwinkel  $d\Omega$  gestreut wird, so muß man (B40) über  $\omega$  integrieren:

$$(B43) \quad dI_2(k_2) = I_1(k_1) \langle |n(k)|^2 \rangle dG_e$$

Daß dies auch das Zeitmittel ist, folgt aus dem PARSEVALSchen Satz. Die Vektoren  $k_1, k_2$  und  $k$  (über das Spektrum gemittelte Werte) müssen wieder der Bedingung (B41) genügen.

### C.THERMISCHE DICHTEFLUKTUATIONEN

Im vorigen Abschnitt wurde das Problem der Lichtstreuung auf das Problem der Fluktuationen der Elektronendichte zurückgeführt. Mit der Berechnung dieser Fluktuationen befassen sich die folgenden Abschnitte dieses Berichtes. Zunächst sollen die Dichtefluktuationen betrachtet werden, die durch die thermische Bewegung der Teilchen bedingt sind.

Wir betrachten ein homogenes Zweikomponentenplasma bestehend aus  $n$  Elektronen und  $N = n/\lambda$  Ionen mit der Ladung  $Ze$  in einem Volumen  $V$ .

#### 1. Zeitliche Mittelwerte im thermischen Gleichgewicht.

Bevor wir das Frequenzspektrum der Dichtefluktuationen diskutieren, fragen wir nach der Größe  $\langle |n(k)|^2 \rangle$ . Aus ihr

bestimmt sich der zeitliche Mittelwert der gesamten Energie, die pro Sekunde in einen bestimmten Raumwinkel gestreut wird.

Bei der Berechnung der Dichtefluktuationen muß man die Teilchenstruktur des Plasmas berücksichtigen. Dementsprechend ist die räumliche FOURIER-Transformierte der Elektronen- bzw. Ionendichte gegeben durch

$$(C1a) \quad n(\mathbf{k}, t) = \sum_{j=1}^n \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j)$$

und

$$(C1b) \quad N(\mathbf{k}, t) = \sum_{j=1}^N \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_j)$$

wobei  $\mathbf{r}_j(t)$  und  $\mathbf{R}_j(t)$  die Koordinaten des  $j$ -ten Elektrons bzw. Ions bedeuten. Entsprechend ist dann die FOURIER-Transformierte der örtlichen Raumladung

$$(C1c) \quad \rho(\mathbf{k}, t) = -en(\mathbf{k}, t) + ZeN(\mathbf{k}, t)$$

Durch Quadrieren des Ausdrucks (C1a) erhalten wir:

$$\begin{aligned} |n(\mathbf{k}, t)|^2 &= n(\mathbf{k}, t) n^*(\mathbf{k}, t) \\ (C2) \quad &= n + \sum_{j \neq l} \exp\{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l)\} \\ &= n + 2 \sum_{j < l} \cos\{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l)\} \end{aligned}$$

Die Summe auf der rechten Seite der letzten Zeile von (C2) besteht aus  $n(n-1)/2$  Gliedern. Bilden wir jetzt das Ensemblemittel, so ist:

$$(C3) \quad \langle |n(\mathbf{k})|^2 \rangle = n + n(n-1) \langle \cos\{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l)\} \rangle$$

Wenn wir annehmen, daß das betrachtete System stationär ist, d.h. makroskopisch gesehen sich zeitlich nicht verändert, so hängen die Größen in (C3) nicht mehr von der Zeit ab.

Da wir  $n \gg 1$  annehmen, können wir in (C3)  $n(n-1)$  durch  $n^2$  ersetzen. Damit wird

$$(C4a) \quad \langle |n(\mathbf{k})|^2 \rangle = n \left[ 1 + n \langle \cos \{ \mathbf{k}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_\ell) \} \rangle \right]$$

Entsprechend folgt aus (C1b) und (C1c) mit  $N=n/Z$ :

$$(C4b) \quad \langle |N(\mathbf{k})|^2 \rangle = N \left[ 1 + N \langle \cos \{ \mathbf{k}(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_\ell) \} \rangle \right]$$

$$(C4c) \quad \langle |g(\mathbf{k})|^2 \rangle = e^2 \langle |n(\mathbf{k})|^2 \rangle + e^2 Z^2 \langle |N(\mathbf{k})|^2 \rangle - 2 n^2 e^2 \langle \cos \{ \mathbf{k}(\mathbf{r}_j - \mathbf{R}_\ell) \} \rangle$$

Die rechten Seiten von (C4) lassen sich berechnen indem man sie mit den Paarkorrelationsfunktionen

$$w_{ee}(\mathbf{r}_\ell - \mathbf{r}_j), \quad w_{ii}(\mathbf{R}_\ell - \mathbf{R}_j) \quad \text{und} \quad w_{ei}(\mathbf{r}_\ell - \mathbf{R}_j)$$

verknüpft.

Die Wahrscheinlichkeit das  $j$ te Elektron im Volumenelement  $dV$  um  $\mathbf{r}_j$  zu finden ist  $dV/V$ . Die Wahrscheinlichkeit das  $j$ -te Elektron im Volumenelement  $dV_j$  um  $\mathbf{r}_j$  und gleichzeitig das  $\ell$ -te Ion im Volumenelement  $dV_\ell$  um  $\mathbf{R}_\ell$  zu finden hängt von dem Abstand  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_j - \mathbf{R}_\ell$  ab. Wir schreiben diese Wahrscheinlichkeit:

$$(C5) \quad \frac{dV_j dV_\ell}{V} \left[ w_{ei}(\mathbf{r}_j - \mathbf{R}_\ell) + \frac{1}{V} \right]$$

und nennen  $w_{ei}$  die Elektron - Ion - Korrelationsfunktion. Die Elektron-Elektron und die Ion-Ion-Korrelationsfunktion  $w_{ee}(r_j - r_e)$  bzw.  $w_{ii}(r_j - r_i)$  werden entsprechend definiert.

Wenn als bekannt angenommen wird, daß sich das j-te Elektron in  $r_j$  befindet, dann ist die Wahrscheinlichkeit, das  $l$ -te Ion im Volumenelement  $dV$  um  $R_l$  zu finden

$$(C6) \quad dV \left[ w_{ei}(r) + \frac{1}{V} \right]$$

Aus dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Abstände der Teilchen ergeben sich die auf der rechten Seite in (C4) auftretenden Mittelwerte:

$$(C7) \quad \langle \cos \{ k(r_j - R_l) \} \rangle = \int_V \left[ w_{ei}(r) + \frac{1}{V} \right] \cos kr \, d^3r$$

Für  $k \neq 0$  ist dann

$$(C7a) \quad \langle \cos \{ k(r_j - R_l) \} \rangle = \int_V w_{ei}(r) \cos kr \, d^3r$$

Das heißt, die in den rechten Seiten von (C4) auftretenden Mittelwerte sind für  $k \neq 0$  die FOURIER-Transformierten der Korrelationsfunktionen.

Aus Gleichung (C6) ergibt sich eine weitere Aussage über die Korrelationsfunktion: (C6) gibt die Wahrscheinlichkeit an, das  $l$ -te Ion im Abstand  $r$  vom j-ten Elektron zu finden. Die Wahrscheinlichkeit überhaupt ein Ion (d.h. irgendeines der  $N$  verschiedenen) im Abstand  $r$  zu finden ist  $N$  mal so groß. D.h. die Ionendichte in der Umgebung des j-ten Elektrons ist

$$(C8a) \quad N^e(r) = \left[ N w_{ei}(r) + \frac{N}{V} \right]$$

Die Korrelationsfunktion gibt also die Abweichung von der mittleren Dichte  $\frac{N}{V}$  an. Entsprechende Ausdrücke gelten für die Elektronendichte in der Umgebung eines Elektrons und die Elektronen- bzw. Ionendichte in der Umgebung eines Ions:

$$(C8b) \quad n^e(\kappa) = \left[ n \omega_{ce}(\kappa) + \frac{n}{V} \right]$$

$$(C8c) \quad n^i(\kappa) = \left[ n \omega_{ci}(\kappa) + \frac{n}{V} \right]$$

$$(C8d) \quad N^i(\kappa) = \left[ N \omega_{ii}(\kappa) + \frac{N}{V} \right]$$

Als nächstes sollen einige Konstanten definiert werden:

$$(C9) \quad \begin{aligned} D_e &= \sqrt{\frac{\kappa T_e}{4\pi \bar{n} e^2}} & ; & & D_i &= \sqrt{\frac{\kappa T_i}{4\pi \bar{n} Z e^2}} \\ \omega_{pe} &= \sqrt{\frac{4\pi \bar{n} e^2}{m}} & ; & & \omega_{pi} &= \sqrt{\frac{4\pi \bar{n} Z e^2}{M}} \\ \Omega_e &= \frac{eB}{mc} & ; & & \Omega_i &= \frac{ZeB}{Mc} \\ \alpha_e &= \frac{1}{k D_e} & ; & & \alpha_i &= \frac{1}{k D_i} = \sqrt{\frac{Z T_e}{T_i}} \alpha_e \\ \Lambda_e &= \bar{n} D_e^3 & ; & & \Lambda_i &= \bar{N} D_i^3 \end{aligned}$$

Dabei ist  $\kappa$  die BOLTZMANN-Konstante,  $e$  die Elementarladung;  $m$  und  $M$  sind die Elektronen-bzw. Ionenmasse;  $\bar{n} = n/V$  und  $\bar{N} = N/V$  sind die mittlere Elektronen-bzw. Ionendichte.

$T_e, T_i, D_e, D_i, \omega_{pe}, \omega_{pi}, \Omega_e$  und  $\Omega_i$  sind die Elektronen- bzw. Iontemperatur, DEBYE-Länge, Plasmafrequenz und Gyrofrequenz. Die Größen  $\Lambda_e$  und  $\Lambda_i$  geben die Zahl der Elektronen bzw. der Ionen im DEBYE-Volumen an.

Für das weitere machen wir die Voraussetzung

$$(C10) \quad \Lambda_e, \Lambda_i \gg 1$$

D.h. wir betrachten nur Fälle, in denen viele Teilchen im DEBEYE-Volumen enthalten sind und die mittlere Wechselwirkungsenergie zweier Teilchen klein gegen deren thermische Energie ist.

Zunächst soll jetzt der Fall exakten thermodynamischen Gleichgewichts in der DEBEYE'schen Näherung betrachtet werden. Dann ist:

$$(C11) \quad T_e = T_i = T$$

Wir betrachten zunächst den hypothetischen Fall, daß eine feste Ladungsverteilung  $\rho_0(r)$  mit dem elektrostatischen Potential  $\phi_0(r)$  von außen in ein vorherhomogenes Plasma gebracht wird. In dem sich dann einstellenden Gleichgewicht interessiert uns die Änderung der Elektronen- bzw. Iondichte gegenüber dem ungestörten Fall. Daher spalten wir die Dichte auf in einen homogenen und einen räumlich variablen Anteil

$$(C12a) \quad n(r) = \bar{n} + n_1(r)$$

$$(C12b) \quad N(r) = \bar{N} + N_1(r)$$

Wir nehmen an, daß in jedem Volumen, über das sich  $n_1(r)$  und  $N_1(r)$  wesentlich ändern, viele Elektronen und Ionen enthalten sind, so daß wir  $n_1(r)$  und  $N_1(r)$  als kontinuierliche Funktionen betrachten können. Weiterhin bezeichnen wir mit  $\phi_e(r)$  das elektrostatische Potential, das durch  $n_1(r)$  hervorgerufen wird und mit  $\phi_i(r)$  das, das von  $N_1(r)$  erzeugt wird. Dann ergibt die POISSON-Gleichung:

$$(C13) \quad \nabla^2 \phi(r) = -4\pi [\rho_0(r) - e n_1(r) + Z e N_1(r)]$$

mit  $\phi(r) = \phi_0(r) + \phi_e(r) + \phi_i(r)$



Die potentielle Energie eines Elektrons im Punkte  $\kappa$  ist  $-e\phi(\kappa)$ , und die eines Ions ist  $ze\phi(\kappa)$ . Im exakten thermodynamischen Gleichgewicht genügen die Teilchen im Mittel einer BOLTZMANN - Verteilung. Dann ist:

$$(C14a) \quad n(\kappa) = \bar{n} \exp\{e\phi(\kappa)/kT\}$$

und

$$(C14b) \quad N(\kappa) = \bar{N} \exp\{-ze\phi(\kappa)/kT\}$$

Aufgrund der Voraussetzung (C10) nehmen wir an, daß in allen wesentlichen Gebieten der Exponent sehr klein ist, und brechen die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion nach dem zweiten Glied ab. Dann folgt aus (C12) und (C14):

$$(C15a) \quad n_1(\kappa) = \bar{n} \frac{e\phi(\kappa)}{kT}$$

und

$$(C15b) \quad N_1(\kappa) = -\bar{N} \frac{ze\phi(\kappa)}{kT} = -\bar{n} \frac{e\phi(\kappa)}{kT}$$

Setzt man dies in (C13) ein, so folgt mit (C9)

$$(C16) \quad \nabla^2 \phi(\kappa) - \frac{\phi(\kappa)}{D^2} = -4\pi \rho_0(\kappa)$$

mit

$$(C17) \quad \frac{1}{D^2} = \frac{1}{D_e^2} + \frac{1}{D_i^2}$$

D ist die DEBEYE-Länge für das betrachtete Plasma.

Es soll jetzt der Spezialfall einer Punktladung im Koordinatenursprung betrachtet werden:

$$(C18) \quad \rho_0(\kappa) = q \delta(\kappa)$$

Da das Problem kugelsymmetrisch ist, führen wir Kugelkoordinaten ein. Dann folgt aus (C16) mit (C18):

$$(C19) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi(r)}{\partial r} \right) - \frac{\phi(r)}{D^2} = -4\pi q \delta(r)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist:

$$(C20) \quad \phi(r) = \frac{q}{r} \exp\left\{-\frac{r}{D}\right\}$$

Die richtige Normierung ergibt sich daraus, daß für  $r \rightarrow 0$  das Potential in das Coulombpotential übergehen muß.

(Die Abschirmung macht sich erst über größere Abstände bemerkbar.) Unser Resultat (C20) entspricht dem Ergebnis der DEBEYE-Theorie.

Wenn wir jetzt speziell annehmen, daß die betrachtete Punktladung ein Ion mit der Ladung  $Ze$  ist, so ergibt sich in seiner Umgebung die Dichteänderung

$$(C21a) \quad n_1^i(r) = \bar{n} \frac{Ze^2}{kT} \cdot \frac{1}{r} \exp\left\{-\frac{r}{D}\right\}$$

und

$$(C21b) \quad N_1^i(r) = -\bar{n} \frac{Ze^2}{kT} \frac{1}{r} \exp\left\{-\frac{r}{D}\right\}$$

Entsprechend ist in der Umgebung eines Elektrons

$$(C21c) \quad n_1^e(r) = -\bar{n} \frac{e^2}{kT} \frac{1}{r} \exp\left\{-\frac{r}{D}\right\}$$

$$(C21d) \quad N_1^e(r) = \bar{n} \frac{e^2}{kT} \frac{1}{r} \exp\left\{-\frac{r}{D}\right\}$$

Andrerseits ist nach (C8)

$$(C22) \quad \begin{aligned} n_1^e(r) &= n w_{ee}(r) & ; & \quad N_1^e(r) = N w_{ei}(r) \\ n_1^i(r) &= n w_{ie}(r) & ; & \quad N_1^i(r) = N w_{ii}(r) \end{aligned}$$

Setzt man (C21) in die Relationen (C22) ein und führt eine FOURIER-Transformation aus (das FOURIER Integral wird elementar, wenn man Kugelkoordinaten einführt und die Achse  $\vartheta = 0$  in die Richtung des Vektors  $k$  legt<sup>\*</sup>), so ergibt sich aus (C7a) ( $k \neq 0$ ) mit (C9) und (C17):

$$(C23a) \quad n \langle \cos k r \rangle_{ee} = - \frac{\alpha_e^2}{1 + \alpha_e^2 + \alpha_i^2}$$

$$(C23b) \quad N \langle \cos k r \rangle_{ii} = - \frac{\alpha_i^2}{1 + \alpha_e^2 + \alpha_i^2}$$

$$(C23c) \quad n \langle \cos k r \rangle_{ei} = + \frac{\alpha_i^2}{1 + \alpha_e^2 + \alpha_i^2}$$

Mit diesem Ergebnis folgt dann aus (C4):

$$(C24a) \quad \langle |n(k)|^2 \rangle = n \frac{1 + \alpha_i^2}{1 + \alpha_e^2 + \alpha_i^2}$$

$$(C24b) \quad \langle |N(k)|^2 \rangle = N \frac{1 + \alpha_e^2}{1 + \alpha_e^2 + \alpha_i^2}$$

$$(C24c) \quad \langle |g|^2 \rangle = n e^2 \frac{1 + Z}{1 + \alpha_e^2 + \alpha_i^2}$$

Es sei darauf hingewiesen, daß diese Ableitung eine "statische" Näherung ist in dem Sinne, daß das Teilchen, dessen Abschirmwolke wir betrachten, als ruhend angenommen wird. Die Abschirmung - und damit die Korrelationsfunktion - für ein bewegtes Teilchen ist anders. Doch mitteln sich diese dynamischen Effekte im exakten thermodynamischen Gleichgewicht in erster Näherung heraus. Im Anhang I wird das Problem der Zweiteilchenkorrelationsfunktion genauer behandelt.

$$* \int \frac{\exp\{-\frac{r}{D}\}}{r} \exp\{-k r\} d^3 r = \frac{4 \pi}{k^2 + \frac{1}{D^2}}$$

Die für die Streuung maßgebende Größe ist  $\langle |n(\mathbf{k})|^2 \rangle$ .  
 Im Falle statistisch unabhängiger Teilchen (keine Wechselwirkung) ist sie n. D.h. die totale Intensität des Lichtes, das in einen vorgegebenen Raumwinkel gestreut wird, wird nach (C24a) im Falle thermodynamischen Gleichgewichts ( $T_e = T_i \implies \alpha_i^2 = Z \alpha_e^2$ ) aufgrund der kollektiven Effekte im Plasma um einen Faktor  $\mu$  reduziert, der gegeben ist durch:

$$(C25) \quad \mu = \frac{1 + \alpha_i^2}{1 + \alpha_e^2 + \alpha_i^2}$$

Die Funktion  $\mu(\alpha_e)$  variiert zwischen 1 für  $\alpha_e = 0$  und  $Z/(1+Z)$  für  $\alpha_e \rightarrow \infty$ . Für den Fall  $Z=1$ , d.h.  $\alpha_e = \alpha_i$ , ist die Funktion  $\mu$  in Abb. 4 dargestellt.

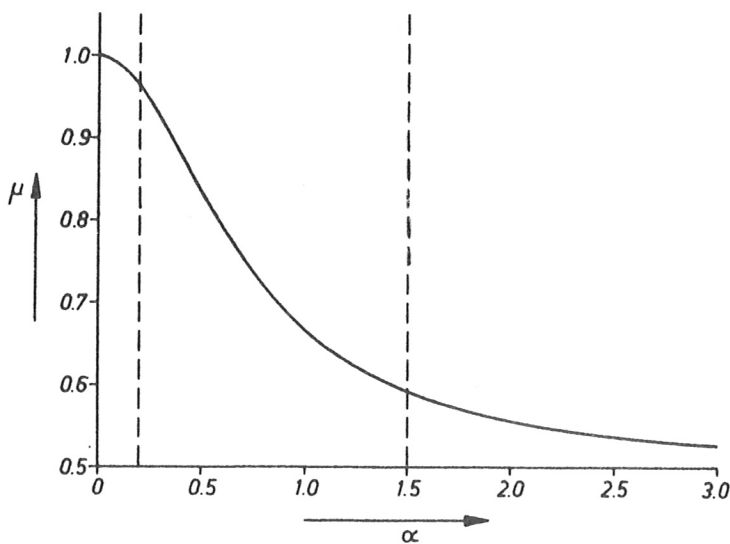


Abb.4: Reduktionsfaktor für den totalen Streuquerschnitt in einem Plasma im thermischen Gleichgewicht mit  $Z=1$ , als Funktion des Parameters  $\alpha_e$ .

Man sieht, daß der wesentliche Abfall im Gebiet  $0.2 < \alpha_e < 1.5$  auftritt. Dies Intervall entspricht der Variation der Elektronendichte um einen Faktor 50. Es zeigt sich, daß auch die Spektralverteilung der Streustrahlung in demselben Gebiet ihre Charakteristik wesentlich ändert.

Die Abb.5 soll einen Eindruck geben, in welchen Temperatur- und Dichtebereich der eben diskutierte Übergang stattfindet. Die  $\alpha_e$ -Werte beziehen sich auf den im Labor

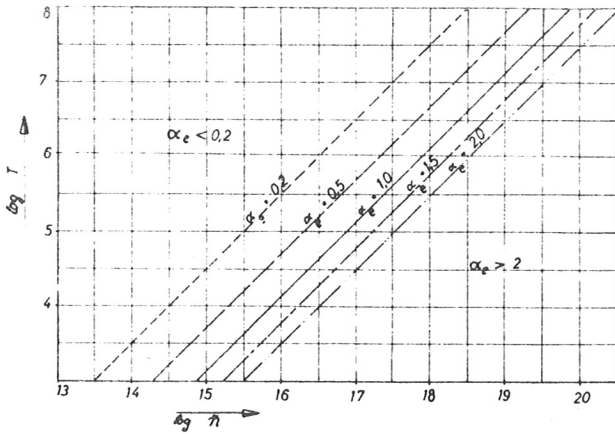


Abb.5: Werte des Parameters  $\alpha_e$  in Abhängigkeit von Dichte und Temperatur für  $Z = 1$ ,  $\lambda = 6943 \text{ \AA}$  und  $\theta = 90^\circ$ .

häufig realisierten Fall  $Z = 1$ ,  $\lambda = 6943 \text{ \AA}$  (Rubin-Laser) und einen Streuwinkel  $\theta = 90^\circ$ . Im Gebiet  $\alpha_e \ll 1$  spielen die kollektiven Effekte keine wesentliche Rolle. Hier kann die Theorie der THOMSON-Streuung in ihrer einfachen Form, wie sie unter der Annahme statistisch unabhängiger Teilchen abgeleitet wird, angewendet werden.

## 2. Abweichungen vom exakten thermodynamischen Gleichgewicht.

Es soll jetzt der Fall betrachtet werden, daß das Plasma sich in einem während der Beobachtungszeit stationären Zustand befindet, der nicht dem vollständigen thermodynamischen Gleichgewicht entspricht, in dem Sinne, daß wir eine Differenz zwischen der Elektronentemperatur  $T_e$  und der Iontemperatur  $T_i$  zulassen. Es wird aber weiterhin angenommen, daß die Verteilungsfunktion für jede Teilchenart in nullter Näherung einer MAXWELL-Verteilung entspricht.

Dieser Fall ist von praktischer Bedeutung insofern als neuere Experimente (siehe SPENCER et.al.1962) darauf schließen lassen, daß in der Ionosphäre  $T_e \neq T_i$  ist. Auch zeigen theoretische Untersuchungen von Pinchentladungen (siehe K.HAIN und A.C.KOLB 1962 und D.DÜCHS 1963), daß auch dort

Unterschiede zwischen Elektronen und Ionentemperatur zu erwarten sind.

Die Gleichgewichtsbetrachtungen des vorigen Abschnitts lassen sich für diesen Fall nicht ohne weiteres durchführen, da wir keine einheitliche Temperatur mehr haben. Eine Verallgemeinerung der Theorie ist von J.RENAU (1962, 1964) und von E.E.SALPETER (1963) durchgeführt worden. Die Ergebnisse der beiden Autoren stehen zu einander in Widerspruch. Daher schien es notwendig, die Ableitung der Zweiteilchenkorrelationsfunktion für den Fall  $T_e \neq T_i$  noch einmal im Detail zu behandeln. Dazu sei auf Anhang I verwiesen. Wir wollen hier nur das - mit dem Resultat von E.E.SALPETER übereinstimmende - Ergebnis betrachten. Für den Fall, daß die thermische Geschwindigkeit der Elektronen groß ist gegenüber der der Ionen, folgt aus (I,28)

$$(C26) \quad \mu = \frac{1 + \alpha_i^2}{1 + \alpha_e^2 + \alpha_i^2} + \frac{(T_i - T_e) \alpha_e^2 \alpha_i^2}{T_e (1 + \alpha_e^2) (1 + \alpha_e^2 + \alpha_i^2)}$$

$$(C26a) \quad = \frac{1 + \alpha_i^2}{1 + \alpha_e^2 + \alpha_i^2} + \frac{(2\alpha_e^2 - \alpha_i^2) \alpha_e^2}{(1 + \alpha_e^2) (1 + \alpha_e^2 + \alpha_i^2)}$$

Der zweite Term in (C26), der im Vergleich mit (C25) neu ist, berücksichtigt die dynamischen Effekte. Nur für  $T_e = T_i$  wird dieser Term Null. Weiterhin sieht man, daß auch in diesem Fall  $\mu$  immer gegen 1 geht, wenn  $\alpha_e \rightarrow 0$  geht.

Abb. 6 zeigt die Funktion  $\mu(\alpha_e)$  für verschiedene Werte des Parameters  $T_e / T_i$ .

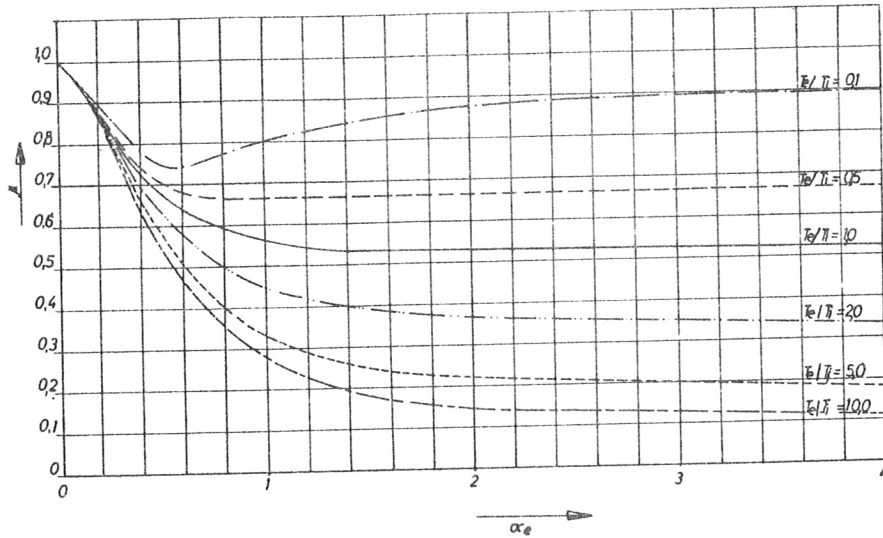


Abb.6:  $\mu$  als Funktion von  $\alpha_e$  bei Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht.

Für  $T_e \geq T_i$  ist  $\mu$  eine monotone Funktion. Dagegen tritt für  $T_e < T_i$  ein relatives Minimum auf. Der asymptotische Wert von  $\mu$  für  $\alpha_e \rightarrow \infty$  ist umso kleiner je größer das Verhältnis  $T_e / T_i$  ist. Schließlich gibt Abb.7 noch  $\mu$  als Funktion von  $T_e / T_i$  mit  $\alpha_e$  als Parameter.

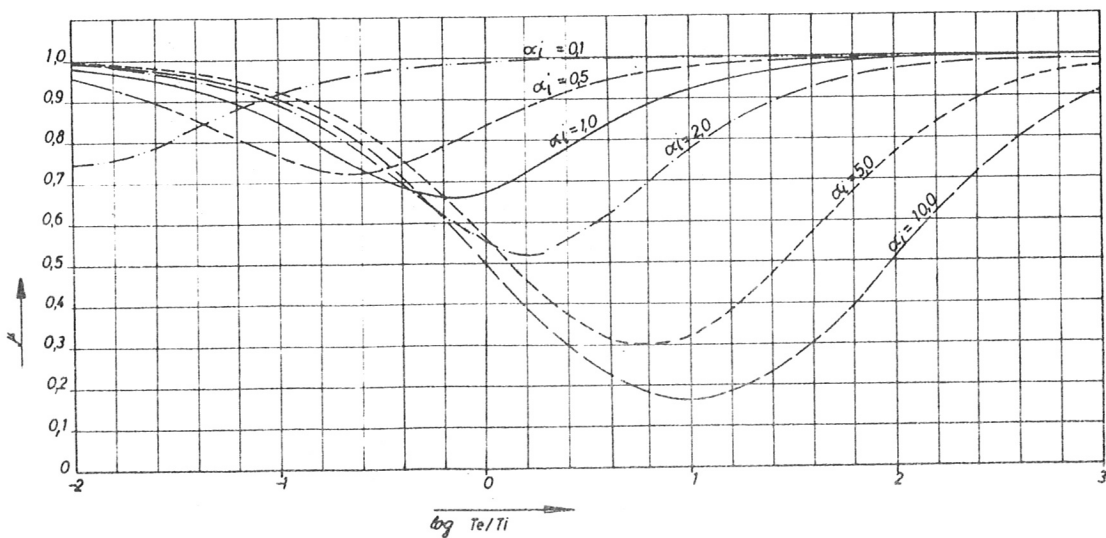


Abb.7: Der Einfluß von Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht auf den totalen Streuquerschnitt.

Man betrachtet dabei also die Änderung des Streuquerschnitts bei Variation von  $T_e$  während man  $T_i$  und  $\bar{n}$  festhält. Für  $T_e \rightarrow \infty$  geht  $\mu$  immer gegen 1, da  $\alpha_e \rightarrow 0$  geht. Beide Abbildungen beziehen sich auf ein Plasma mit  $Z = 1$

Eine Vereinfachung der Formel (26) ergibt sich für den Fall  $\alpha_e, \alpha_i \gg 1$ . Dann geht (26) gegen:

$$(C27) \quad \lim_{\alpha_e, \alpha_i \rightarrow \infty} \mu = \frac{Z T_e}{T_i + Z T_e} \left( 1 + \frac{T_i - T_e}{T_e} \right) \\ = \frac{Z T_i}{T_i + Z T_e}$$

Aus dieser Beziehung ersieht man, daß für  $T_e \ll T_i$  und  $Z > 1$  es möglich ist, daß  $\mu > 1$  wird. D.h. allgemein gilt für die Grenzen von  $\mu$ :

$$(C28) \quad 0 \leq \mu \leq Z$$

### 3. Einfluß eines Magnetfeldes.

Zur Behandlung der Frage, ob ein Magnetfeld die totalen Fluktuationen bzw. die Zweiteilchenkorrelationsfunktionen beeinflusst, setzen wir wieder vollständiges thermodynamisches Gleichgewicht voraus, so daß wir wieder die statistische Gleichgewichtsmechanik anwenden können.

Wir betrachten ein System von N Teilchen (Elektronen und Ionen). Dann ist im thermodynamischen Gleichgewicht ganz allgemein die Wahrscheinlichkeit dafür, das Teilchen 1 im Volumenelement  $dv_1$  um  $x_1$  und das Teilchen 2 im Volumen-



element  $dV_2$  um  $x_2$  zu finden:

$$(C29) \quad dW(x_1, x_2) = \frac{Q(x_1, x_2) dV_1 dV_2}{Z}$$

Dabei ist die Zustandssumme

$$(C30) \quad Z = \int d^3r_1 \dots d^3r_N d^3p_1 \dots d^3p_N \exp\{-H/kT\}$$

und

$$(C31) \quad Q(x_1, x_2) = \int d^3r_3 \dots d^3r_N d^3p_1 \dots d^3p_N \exp\{-H/kT\}$$

H ist dabei die Hamiltonfunktion für die N Teilchen und  $x_i$  und  $p_i$  sind die verallgemeinerten Orts- und Impulskordinaten. Für ein geladenes Teilchen in einem magnetischen Feld mit dem Vektorpotential  $\mathcal{A}(x)$  ist der kanonische Impuls gegeben durch (siehe z.B. H.GOLDSTEIN 1959):

$$(C32) \quad p_i = m_i \dot{x}_i + \frac{q_i}{c} \mathcal{A}(x_i)$$

$q_i$  ist dabei die Ladung des betrachteten Teilchens. Die Hamiltonsche Funktion für das ganze System ist dann

$$(C33) \quad H = \sum_i \frac{1}{2m_i} \left[ p_i - \frac{q_i}{c} \mathcal{A}(x_i) \right]^2 + \sum_{i < j} q_i q_j \phi_{ij}(x_i - x_j)$$

Der erste Term auf der rechten Seite gibt die kinetische Energie, der zweite die potentielle. Wir wollen jetzt in (C30) und (C31) die kanonischen Impulse durch die Geschwindigkeiten ersetzen. In die dabei in den Integralen auftretenden Jakobische Funktionaldeterminante gehen nur die Massen der Teilchen, nicht aber ihre Koordinaten oder das Magnetfeld ein. In den neuen Variablen ist die kinetische Energie dann einfach  $\frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$ . Daraus sieht man, daß die Größen  $Z$  und  $Q(\kappa_1, \kappa_2)$  nicht vom Magnetfeld abhängen. Die räumlichen Korrelationsfunktionen und damit auch die totalen Streuquerschnitte werden also durch ein zeitlich konstantes, äußeres Magnetfeld nicht beeinflußt.

Bei Abweichungen vom exakten thermodynamischen Gleichgewicht kann man eine derartige Betrachtung nicht mehr durchführen. Es läßt sich aber zeigen (siehe Anhang I), daß für den Fall, daß die ungestörten Verteilungsfunktionen beider Teilchenarten MAXWELL-Verteilungen sind, auch für  $T_e \neq T_i$  das Integral über das Streuspektrum nicht von einem räumlich und zeitlich konstanten Magnetfeld beeinflußt wird. D.h. die Gleichung (C26) behält ihre Gültigkeit.

#### 4. Das Frequenzspektrum im magnetfeldfreien Fall.

Als nächstes soll die zeitliche Variation der Dichtefluktuationen bzw. deren Frequenzspektrum untersucht werden.

Das zeitliche Verhalten eines Plasmas wird durch die BOLTZMANN-Gleichung beschrieben. Wir machen speziell die Annahme, daß für alle betrachteten Dichten und  $k$ -Werte  $\Lambda_e, \Lambda_i \gg 1$  und  $\bar{n} k^{-3} \gg 1$  ist. Dann ist die WLASOW-Gleichung eine gute Näherung. Das bedeutet, daß man nur die Ablenkung jedes Teilchens im mittleren Feld aller anderen berücksichtigt, während die Zweierstöße vernachlässigt werden.

Es sei wieder ein Volumen  $V$  betrachtet, das  $n$  Elektronen und  $N = n/Z$  positive Ionen mit der Ladung  $Z$  enthält. Es sei  $f(x, \kappa, t)$  die Verteilungsfunktion der Elektronen und  $F(x, \kappa, t)$  die der Ionen. Dann gilt für die Elektronen in Abwesenheit irgendwelcher äußerer Felder und unter Vernachlässigung des inneren Magnetfeldes die WLASOW-Gleichung in folgender Form:

$$(C34) \quad \frac{\partial f(x, \kappa, t)}{\partial t} + \kappa \frac{\partial f(x, \kappa, t)}{\partial \kappa} - \frac{e}{m} E_i(x, t) \frac{\partial f(x, \kappa, t)}{\partial \kappa} = 0$$

Das innere Feld

$$(C35) \quad E_i(x, t) = - \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x}$$

wird durch die Raumladungen bestimmt und ergibt sich aus der POISSON-Gleichung

$$(C36) \quad \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} = -4\pi e [Z N(x, t) - n(x, t)]$$

Für die Elektronen- bzw. Ionendichte gilt:

$$(C37a) \quad n(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3v f(x, \kappa, t)$$

und

$$(C37b) \quad N(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3v F(x, \kappa, t)$$

Wir schreiben jetzt die Verteilungsfunktion  $f$  als Summe eines raum- und zeitunabhängigen Teils  $f_0$  und eines variablen Teils:

$$(C38) \quad f(x, n, t) = f_0(n) + f_1(x, n, t)$$

Unter der Voraussetzung

$$(C39) \quad f_1(x, n, t) \ll f_0(n)$$

ist die linearisierte WLASCW-Gleichung

$$(C40) \quad \frac{\partial f_1}{\partial t} + n \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{e}{m} \ell_1 \frac{\partial f_0}{\partial n} = 0$$

eine gute Näherung für (C34).

Wir machen jetzt eine FOURIER-Transformation im Raum und eine LAPLACE-Transformation in der Zeit:

$$(C41) \quad f_1(x, n, t) = \sum_k f_1(k, n, t) \exp\{-ikx\}$$

$$(C42) \quad f_1(k, n, s) = \int_0^\infty f_1(k, n, t) \exp\{-st\} dt$$

In (C41) sollen die Randbedingungen von  $V$  periodisch sein. Für  $V \rightarrow \infty$  geht die Summe in ein FOURIER-Integral über. Durch diese Transformationen geht die Gleichung (C40) über in:

$$(C43) \quad [s - ikn] f_1(k, n, s) - \frac{e}{m} \ell_1(k, s) \frac{\partial f_0(n)}{\partial n} = f_1'(k, n)$$

mit

$$f_1'(k, n) = f_1(k, n, t) \quad \text{für} \quad t = 0$$

Weiterhin ist nach (C35) und (C36)

$$(C44) \quad \ell_i(\mathbf{k}, s) = i \frac{4\pi k}{k^2} e [Z N(\mathbf{k}, s) - n(\mathbf{k}, s)]$$

Dabei ist entsprechend (C37) (Annahme  $k \neq 0$ ):

$$(C45a) \quad n(\mathbf{k}, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\mathbf{k}, \mathbf{r}, s) d^3v$$

und

$$(C45b) \quad N(\mathbf{k}, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\mathbf{k}, \mathbf{r}, s) d^3v$$

Eine der Gleichung (C43) entsprechende Gleichung gilt für die Ionen:

$$(C46) \quad [s - i k \omega] F_1(\mathbf{k}, \mathbf{r}, s) + \frac{ze}{m} \ell_i(\mathbf{k}, s) \frac{\partial F_0(\omega)}{\partial \omega} = F^1(\mathbf{k}, \mathbf{r})$$

Löst man (C43) nach  $f_1$  auf, so erhält man:

$$(C47) \quad f_1(\mathbf{k}, \mathbf{r}, s) = \frac{\frac{e}{m} \ell_i(\mathbf{k}, s) \frac{\partial f_0(\omega)}{\partial \omega}}{s - i k \omega} + \frac{f^1(\mathbf{k}, \mathbf{r})}{s - i k \omega}$$

Nach (C45a) ergibt sich daraus durch Integration über  $\mathbf{r}$ :

$$(C48a) \quad n(\mathbf{k}, s) = \frac{e}{m} \ell_i(\mathbf{k}, s) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\partial f_0(\omega)}{\partial \omega}}{s - i k \omega} d^3v + X_e$$

Die entsprechende Gleichung für die Ionen lautet:

$$(C48b) \quad N(\mathbf{k}, s) = - \frac{ze}{M} \ell_1(\mathbf{k}, s) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\partial F_0(\omega)}{\partial \omega}}{s - i k \omega} d^3v + X_i$$

Die Größen  $X_e$  und  $X_i$  beschreiben den Einfluß der Störungen (d.h. Abweichungen von der Homogenität) zur Zeit  $t=0$ . Wir interessieren uns in diesem Zusammenhang nicht für den Einfluß äußerer Störungen im Sinne einer Stabilitätsrechnung, sondern wir betrachten die Abweichungen von der Homogenität als durch die Partikelstruktur des Plasmas gegeben. Wir schreiben

$$(C49) \quad f(x(t), \omega(t)) = \sum_{i=1}^n \delta(x - x_i) \delta(\omega - \omega_i)$$

Bildet man von (C49) die räumliche FOURIER-Transformierte, setzt diese in den zweiten Term auf der rechten Seite von (C47) ein und integriert diesen über  $\omega$ , so erhält man:

$$(C50a) \quad X_e(\mathbf{k}) = \sum_{j=1}^n \frac{\exp\{i k x_j\}}{s - i k \omega_j}$$

Die entsprechende Größe für die Ionen ist:

$$(50b) \quad X_i(\mathbf{k}) = \sum_{j=1}^N \frac{\exp\{i k x_j\}}{s - i k \omega_j}$$

Die Summation erstreckt sich in (C50a) über alle Elektronen und in (C50b) über alle Ionen und bezieht sich auf die Orte und Geschwindigkeiten der Teilchen zur Zeit  $t = 0$ .

Dieses Verfahren weicht von der üblichen Interpretation der WLASOW-Gleichung ab, bei der die Partikelstruktur der Teilchen nicht berücksichtigt wird und daher alle Funktionen kontinuierlich sind. Man kann die explizite Einführung des Teilchenbildes an dieser Stelle umgehen (siehe T.HAGFORS 1961). Dann führt man die Größen  $X_e$  und  $X_i$  unter der zusätzlichen Annahme, daß die räumlichen Dichtefluktuationen nur von der Zahl der Teilchen nicht aber von deren Geschwindigkeiten abhängen, auf die totalen, d.h. über alle Frequenzen integrierten, Fluktuationen zurück. Diese werden aber ihrerseits wieder mit Hilfe des Teilchenbildes berechnet. Daß man in diesem Zusammenhang das Teilchenbild nicht umgehen kann, liegt daran, daß die inkohärente Streuung, die man berechnen will, wesentlich auf der Partikelstruktur des Plasmas beruht.

Setzt man (C44) in die Gleichungen (C48) ein, so ergibt sich:

$$(C51a) \quad n(k, s) = -G_e(k, s) [Z N(k, s) - n(k, s)] + X_e$$

$$(C51b) \quad N(k, s) = \frac{G_i(k, s)}{Z} [Z N(k, s) - n(k, s)] + X_i$$

Dabei wurden zur Abkürzung die Funktionen

$$(C52a) \quad G_e(k, s) = -i \frac{4\pi e^2}{m k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k \frac{\partial f_0(v)}{\partial v}}{s - i k v} d^3 v$$

und

$$(C52b) \quad G_i(k, s) = -i \frac{4\pi Z^2 e^2}{M k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k \frac{\partial F_0(v)}{\partial v}}{s - i k v} d^3 v$$

eingeführt. Die Auflösung des Gleichungssystem (C51) ergibt:

$$(C53a) \quad n(k, s) = \frac{X_e(1-G_i) - Z X_i G_e}{1 - G_e - G_i}$$

und

$$(C53b) \quad N(k, s) = \frac{X_i(1-G_e) - X_e G_i / Z}{1 - G_e - G_i}$$

Die Streuformel (B40) besagt, daß das Streuspektrum im wesentlichen bestimmt wird durch die Größe:

$$(C54) \quad Q(k, \omega) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \langle |n(k, \omega)|^2 \rangle$$

Die Mittelung entspricht einer Mittelung über die Anfangswerte, das bedeutet eine Mittelung der Funktionen  $X_e$  und  $X_i$ . Um die bisher berechnete Größe  $n(k, s)$  mit der im (C59) definierten Größe  $Q(k, \omega)$  in Zusammenhang zu bringen, setzen wir

$$(C55) \quad s = \gamma + i\omega$$

mit

$$(C56) \quad \gamma = \frac{1}{2T}$$

Mit der Dämpfungskonstanten  $\gamma$  wird berücksichtigt, daß das LAPLACE-Integral (C42) über ein unendliches Zeitintervall erstreckt wird, während die Beobachtungszeit  $T$  - und damit die gesamte gemessene Energie der Streustrahlung - endlich



ist. D.h. die Dämpfung erzwingt die Konvergenz von (C42).  
und zwar wurde die Dämpfungskonstante mit (C56) so gewählt,  
daß für ein stationäres Plasma:

$$(C57) \quad \int_0^T |n(k,t)|^2 dt \approx \int_0^{\infty} |n(k,t)|^2 e^{-2\gamma t} dt$$

Der Grenzübergang  $T \rightarrow \infty$  entspricht dann dem Grenzübergang  
 $\gamma \rightarrow 0$  bzw.  $s \rightarrow i\omega$ . Damit wird dann

$$(C58) \quad Q(k, \omega) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\gamma}{\pi} \langle |n(k, s)|^2 \rangle$$

Diese Größe läßt sich mit Hilfe der Gleichungen (C50), (C52)  
und (C53) berechnen.

Außer der Annahme, daß das Plasma während der Beobach-  
tungszeit stationär und in dem betrachteten Volumen homogen  
ist, wurde keine weitere einschränkende Forderung an die  
Verteilungsfunktionen gestellt. In diesem Sinne ist unser  
Ergebnis allgemein. Um es weiter zu vereinfachen müssen  
weitere einschränkende Annahmen gemacht werden. Wir wollen  
im weiteren den Fall betrachten, daß es sich bei den unge-  
störten Verteilungsfunktionen um MAXWELL-Verteilungen handelt,  
wobei verschiedene Temperaturen für Elektronen und Ionen  
zugelassen werden. D.h. es ist

$$(C59a) \quad f_0(n) = \bar{n} \left( \frac{m}{2\pi k T_e} \right)^{3/2} \exp \left\{ - \frac{m v^2}{2 k T_e} \right\}$$

und

$$(C59b) \quad F_0(n) = \bar{N} \left( \frac{M}{2\pi k T_i} \right)^{3/2} \exp \left\{ - \frac{M v^2}{2 k T_i} \right\}$$

Unter dieser Annahme sollen jetzt die Größen  $G_e$  und  $G_i$  aus (C52) berechnet werden. Wir bezeichnen mit  $u$  die Komponente von  $\mathfrak{n}$  in Richtung von  $\mathfrak{k}$  (d.h.  $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{k} = u \mathfrak{k}$ ). Die Integration über die Komponenten von  $\mathfrak{n}$  senkrecht zu  $\mathfrak{k}$  läßt sich direkt ausführen. Danach ist

$$(C60a) \quad G_e(\mathfrak{k}, s) = -\alpha_e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u \mathfrak{k} M_e(u)}{is + \mathfrak{k} u} du$$

$$(C60b) \quad G_i(\mathfrak{k}, s) = -\alpha_i^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u \mathfrak{k} M_i(u)}{is + \mathfrak{k} u} du$$

$M_e$  und  $M_i$  stehen dabei für die eindimensionale MAXWELL-Verteilung:

$$(C61a) \quad M_e(u) = \sqrt{\frac{m}{2\pi \kappa T_e}} \exp\left\{-\frac{m u^2}{2 \kappa T_e}\right\}$$

$$(C61b) \quad M_i(u) = \sqrt{\frac{M}{2\pi \kappa T_i}} \exp\left\{-\frac{M u^2}{2 \kappa T_i}\right\}$$

Nach P.L. BHATNAGAR, E.P. GROSS und M. KROOK (1954) Formel 54 und 56) ist

$$(C62) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\{-u^2/2\}}{u - \Theta} du = \exp\{-\Theta^2/2\} \cdot \left\{ i \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\Theta} d\Theta' \exp\{\Theta'^2/2\} \right\}$$

Mit Hilfe dieser Beziehung und mit der Bezeichnung

$$(C63) \quad X = \frac{\omega}{k} \sqrt{\frac{m}{2\pi T_e}} \quad ; \quad Y = \frac{\omega}{k} \sqrt{\frac{M}{2\pi T_i}}$$

geht (C60) für  $\gamma \rightarrow 0$  über in

$$(C64a) \quad G_e(k, \omega) = -\alpha_e^2 \left\{ 1 - 2X \exp(-X^2) \int_0^X \exp(t^2) dt + i\sqrt{\pi} X \exp(-X^2) \right\}$$

$$(C64b) \quad G_i(k, \omega) = -\alpha_i^2 \left\{ 1 - 2Y \exp(-Y^2) \int_0^Y \exp(t^2) dt + i\sqrt{\pi} Y \exp(-Y^2) \right\}$$

Es muß jetzt noch das mittlere Quadrat des Zählers in (C53a) berechnet werden. Mit (C50) ist:

$$(C65) \quad \begin{aligned} \langle |X_e(1-G_i) - \sum X_i G_e|^2 \rangle &= \langle |1-G_i|^2 \left| \sum_{j=1}^n \frac{\exp(ik\pi_j^e)}{s-ik\pi_j^e} \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + |G_e|^2 \left| \sum_{l=1}^N \frac{\exp(ik\pi_l^i)}{s-ik\pi_l^i} \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + G_e(1-G_i^*) \sum_{j=1}^n \frac{\exp(-ik\pi_j^e)}{s^*+ik\pi_j^e} \sum_{l=1}^N \frac{\exp(ik\pi_l^i)}{s-ik\pi_l^i} \right. \\ &\quad \left. + G_e^*(1-G_i) \sum_{j=1}^n \frac{\exp(ik\pi_j^e)}{s-ik\pi_j^e} \sum_{l=1}^N \frac{\exp(-ik\pi_l^i)}{s^*+ik\pi_l^i} \right\rangle \end{aligned}$$

Betrachten wir zunächst den ersten Term. Mit (C55) ist:

$$(C66a) \quad \left\langle \left| \sum_{j=1}^n \frac{\exp(i k x_j^e)}{s - i k u_j} \right|^2 \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n \frac{1}{(k u_j - \omega)^2 + \gamma^2} + \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^n \frac{\exp\{i k (x_j^e - x_l^e)\}}{(k u_j - \omega + i \gamma)(k u_l - \omega - i \gamma)} \right\rangle$$

Für die Bildung des Ensemblemittels setzen wir voraus, daß die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen zur Zeit  $t = 0$ , die ja nach (C49) eine Summe von  $\delta$ -Funktionen ist, im Mittel eine MAXWELL-Verteilung ist. D.h. nach der Mittelung gehen die Summen in (C66) in Integrale von kontinuierlichen Funktionen über. Die rechte Seite von (C66a) wird dann:

$$(C66b) \quad n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{M_e(u)}{(k u - \omega)^2 + \gamma^2} du + n(n-1) \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{M_e(u_j) M_e(u_l) \langle \exp\{i k (x_j^e - x_l^e)\} \rangle}{(k u_j - \omega + i \gamma)(k u_l - \omega - i \gamma)} du_j du_l$$

Für  $\gamma \rightarrow 0$  geht der erste Term von (C66b) gegen

$$(C67) \quad \frac{n \pi}{k \gamma} M_e\left(\frac{\omega}{k}\right)$$

Der zweite Term dagegen bleibt endlich (proportional zu  $|\mathcal{G}_e|^2$ ) und ist daher gegenüber dem ersten Term zu vernachlässigen. Entsprechendes gilt für die beiden gemischten Terme in (C65). Mit diesem Ergebnis wird dann aus (C58) mit (C53a):

$$(C68) \quad Q(k, \omega) = \frac{n}{k} \cdot \frac{\overbrace{|1 - G_e|^2 M_e\left(\frac{\omega}{k}\right)}^I + \overbrace{\sum |G_e|^2 M_i\left(\frac{\omega}{k}\right)}^{II}}{|1 - G_e - G_i|^2}$$

Zusammen mit (C60) und (C61) ist dies unser endgültiges Resultat, das in die Streuformel (B40) einzusetzen ist. Dies Ergebnis soll im nächsten Abschnitt mit Hilfe numerischer Beispiele diskutiert werden.

Zur Vollständigkeit soll noch kurz der Fall von Teilchen ohne Wechselwirkung (statistisch unabhängige Teilchen) mit demselben Formalismus behandelt werden. Bei Vernachlässigung der Wechselwirkung wird in (C34) das Feld  $\mathcal{E}_i$  gleich Null. Dann folgt aus (C43)

$$(C69) \quad f_i(k, \omega, s) = \frac{f_i^1(k, \omega)}{s - i k \omega}$$

$$\rightarrow (C70) \quad n(k, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(k, \omega, s) d^3v = X_e(k, s)$$

Dabei ist  $X_e$  durch (C50a) gegeben. Ist die gemittelte Verteilungsfunktion eine MAXWELL-Verteilung, so ist

$$(C71) \quad Q(k, \omega) = \frac{n}{k} M_e\left(\frac{\omega}{k}\right)$$

In diesem Fall entspricht das Spektrum des Streulichtes einem GAUSS-Profil, dessen Halbwertsbreite einerseits durch die Temperatur andererseits durch den Streuwinkel, aus dem sich  $k$  bestimmt, gegeben ist. Das Streuspektrum wird um so enger, je kleiner der Streuwinkel ist. Bei exakter Vorwärtsstreuung tritt keine Verbreiterung auf; der Dopplereffekt

bei Absorption und Emission heben sich auf.

Ist  $f_0(m)$  für die streuenden Teilchen keine MAXWELL-Verteilung, so ist in (C71) die entsprechende eindimensionale Verteilungsfunktion einzusetzen. Das bedeutet, daß im wechselwirkungsfreien Fall das Streuspektrum immer - nach Berücksichtigung des Einflusses des Streuwinkels - direkt die Geschwindigkeitsverteilung der streuenden Teilchen widerspiegelt.

### 5. Diskussion und numerische Beispiele

Zunächst soll das Spektrum (C68) qualitativ diskutiert werden. Dazu machen wir die Annahme, daß die mittlere thermische Geschwindigkeit der Elektronen groß ist gegenüber der der Ionen (I,17). Dann können wir die in Anhang I abgeleitete Näherungsformel (I,20) verwenden:

$$(C72) \quad Q(k, \omega) = \underbrace{\frac{n}{k} \sqrt{\frac{m}{2\pi k T_e}} \Gamma_{\alpha_e}(x)}_I + \underbrace{\frac{n}{k} Z \left( \frac{\alpha_e^2}{1+\alpha_e^2} \right)^\alpha \Gamma_{\beta}(y)}_{II}$$

Das Streulicht besteht aus zwei Anteilen. Teil I entspricht dem Licht, daß an Elektronen gestreut wird, die sich frei bewegen, während Teil II die Elektronen berücksichtigt, die mit den Ionen korreliert sind. Teil I wird durch die mittlere Dichte und Temperatur der Elektronen bestimmt. In II geht außer der Elektronendichte und der Iontemperatur auch die Elektronentemperatur ein, da  $\beta$  von  $\alpha_e$  abhängt (I,19). D.h. Abweichungen von thermischen Gleichgewicht ( $T_e \neq T_i$ ) werden sich nur in II bemerkbar machen.

Für  $\alpha_e \ll 1$  ist Teil II gegenüber I zu vernachlässigen. Aus (I,20) ersieht man, daß das Streuspektrum dann dem wechselwirkungsfreien Fall (C71) entspricht, d.h. es

ergibt sich ein Gaußprofil, dessen Halbwertsbreite bei vorgegebenem Streuwinkel durch die mittlere thermische Geschwindigkeit der Elektronen gegeben ist.

Für  $\alpha \gg 1$  hat  $\Gamma_{\alpha}(x)$  ein scharfes Maximum ungefähr bei  $x = \pm x_0$ . Dabei ergibt sich nach (I,20) und (I,21) aus der Dispersionsrelation

$$(C73) \quad g(x_0) - 1 = \frac{1}{\alpha^2}$$

Mit Hilfe einer asymptotischen Entwicklung für  $g$  erhält man

$$(C74) \quad x_0^2 \approx \frac{1}{\alpha^2} (\alpha^2 + 3); \quad \text{bzw.} \quad y_0^2 = \frac{1}{\alpha^2} (\beta^2 + 3)$$

Daraus folgt mit (C63):

$$(C74a) \quad \omega_0^2 = \omega_{pe}^2 + \frac{3kT_e k^2}{m}$$

bzw.

$$(C74b) \quad \omega_0'^2 = \frac{\omega_{pi}^2}{1 + \alpha_i^2} + \frac{3kT_i k^2}{M}$$

Der Ausdruck (C74a) ist die bekannte Dispersionsrelation für longitudinale Plasmaschwingungen. (C74b) entspricht den sogenannten Ionenschwingungen. (Näheres siehe L.SPITZER 1956, Kap.4). Für  $\alpha \gg 1$  läßt sich  $\Gamma_{\alpha}(x)$  in Nähe von  $x_0$  durch ein Dispersionsprofil approximieren:

$$(C75) \quad \Gamma_{\alpha}(x) = \frac{\frac{1}{2} \alpha^2 \exp\{-x_0^2\}}{4(x-x_0)^2 + \frac{1}{4} \pi \alpha^8 \exp(-2x_0^2)}$$

Man sieht also, daß für  $\alpha_e \gg 1$  das Spektrum des Streulichtes sich wesentlich von einem Gaußprofil unterscheidet. Es besteht aus einer Zentrallinie (bestimmt

durch II), deren Halbwertsbreite durch die thermische Geschwindigkeit der Ionen bestimmt wird, und aus zwei symmetrisch dazu liegenden Satellitenlinien (bestimmt durch I) bei  $\pm \omega_0$  (C74a). Im thermischen Gleichgewicht ist  $\beta^2 \leq Z$  (I,19). Das bedeutet, daß die Resonanz in der Zentrallinie nie so scharf werden kann, wie bei den Satelliten. Bei Abweichungen von thermischen Gleichgewicht ( $T_e \neq T_i$ ) nähert sich die Zentrallinie für  $T_e \ll T_i$  einem Gaußprofil, während für  $T_e \gg T_i$  die Resonanz bei  $\pm \omega_0'$  (C74b) sehr scharf wird.

Die nächsten Abbildungen zeigen numerische Beispiele für Streuspektren. Sie wurden mit der exakten Formel (C68) berechnet. Für den Primärstrahl wurde die Wellenlänge  $\lambda = 6943 \text{ \AA}$  (Rubinlaser) gewählt. Die Rechnungen beziehen sich auf ein Wasserstoffplasma ( $Z = 1$ ) und einen Streuwinkel  $\Theta = 90^\circ$ . - Es ist zu beachten, daß in den Abbildungen 8 - 11 links und rechts verschiedene Maßstäbe verwendet werden, damit Details der Zentrallinie und der Satelliten nebeneinander dargestellt werden können.

In Abb. 8 - 10 handelt es sich um Streuung in einem Plasma im thermischen Gleichgewicht ( $T_e = T_i = T$ ;  $\alpha_e = \alpha_i = \alpha$ ). Die Temperatur wurde für die Rechnung gleich

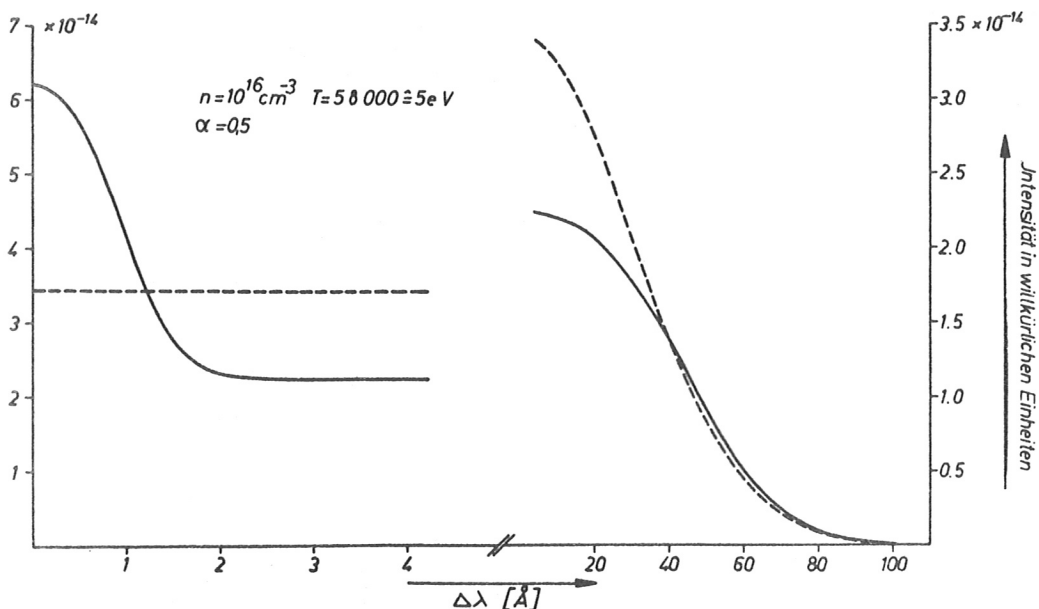


Abb.8: — Streulichtspektrum für ein Plasma in thermischen Gleichgewicht mit  $\alpha < 1$  (kleiner Einfluß der Korrelationen). ---- Gaußprofil (Streuung an statistisch unabhängigen Teilchen).



58000°K ( $\approx 5\text{eV}$ ) gesetzt. Variiert wurde die mittlere Elektronendichte  $\bar{n}$  und damit die Größe  $\alpha$ . In Abb.8 ist  $\bar{n} = 10^{16}\text{cm}^{-3}$  und damit  $\alpha = 0.5$ . Das Streuspektrum zeigt bereits Abweichungen von einem reinen Gaußprofil (gestrichelte Kurve), im wesentlichen in der Linienmitte. Die Zentrallinie, deren Halbwertsbreite durch die thermische Geschwindigkeit der Ionen bestimmt wird, fängt an sich auszubilden.- In Abb.9 ist  $\bar{n} = 10^{17}\text{cm}^{-3}$  und  $\alpha = 1.5$ .

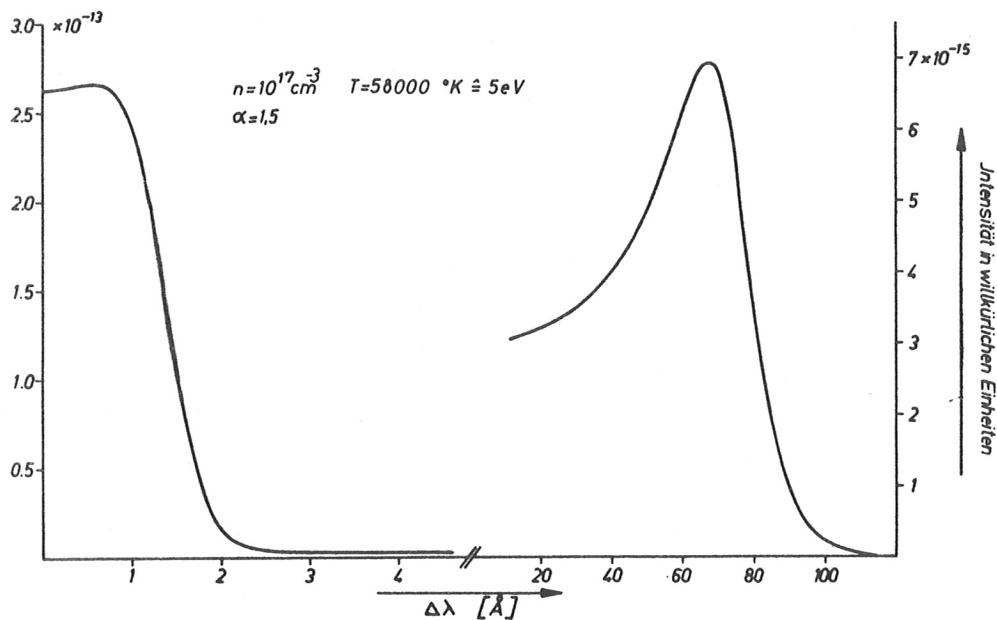


Abb.9: Streulichtspektrum für ein Plasma in thermischen Gleichgewicht mit  $\alpha > 1$  (wesentlicher Einfluß der Korrelationen).

Der Typ des Spektrums hat sich gegenüber dem vorigen Fall grundlegend geändert. Mit wachsender Dichte  $\bar{n}$  wird die Satellitenlinie immer schmaler.- Abb. 10 zeigt noch ein

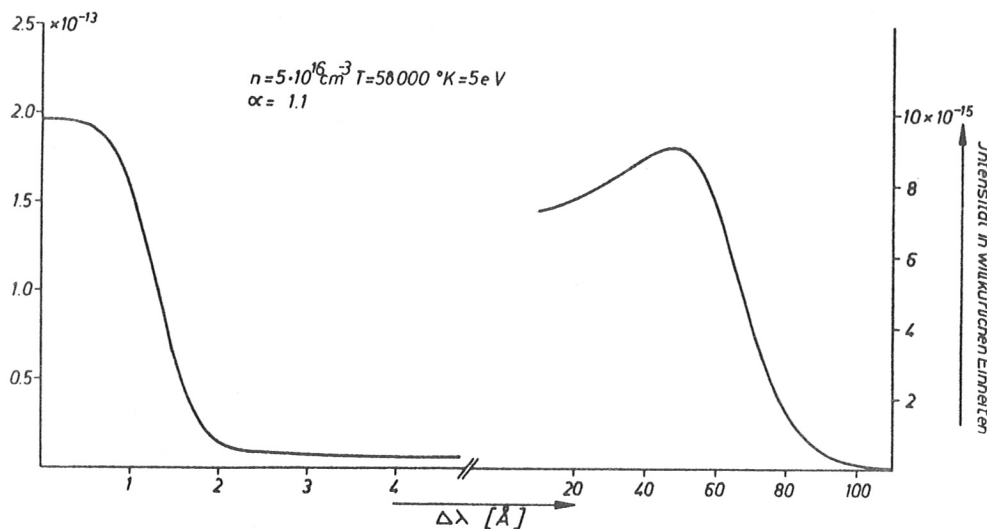


Abb.10: Streulichtspektrum für ein Plasma in thermischen Gleichgewicht mit  $\alpha \approx 1$  (Übergangsgebiet).

Beispiel im Übergangsgebiet mit  $\bar{n} = 5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$  und  $\alpha = 1.1$ .

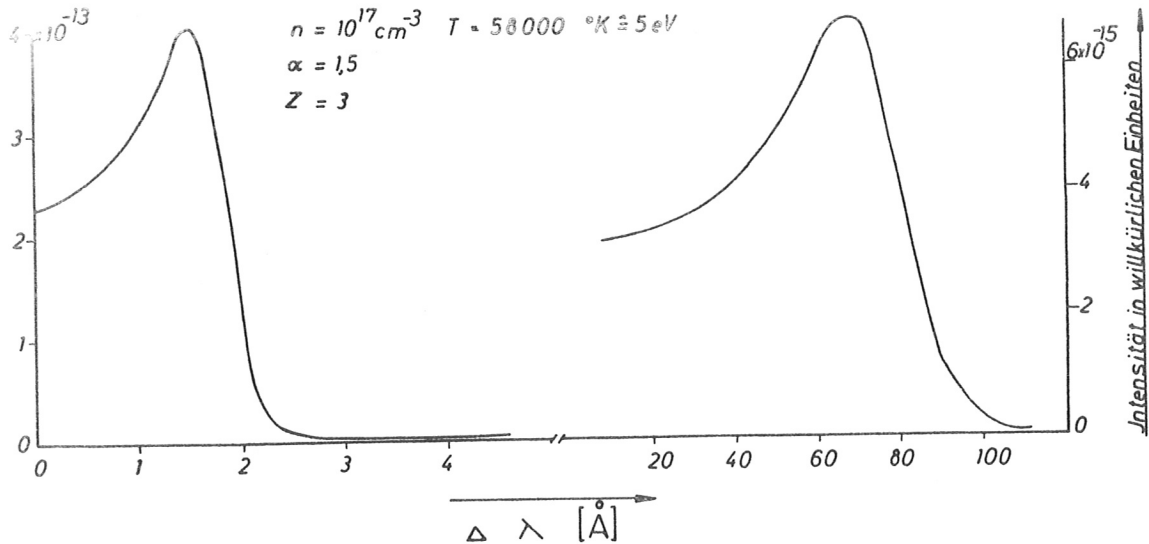


Abb.11: Einfluß der Ionenladung auf die Zentrallinie. Die Daten entsprechen Abb.9 nur wurde  $Z = 3$  gesetzt.

Abb.11 wurde mit denselben Daten gerechnet wie Abb.9, nur wurde  $Z = 3$  gesetzt, um zu zeigen, wie  $Z$  die Form der Zentrallinie beeinflusst.

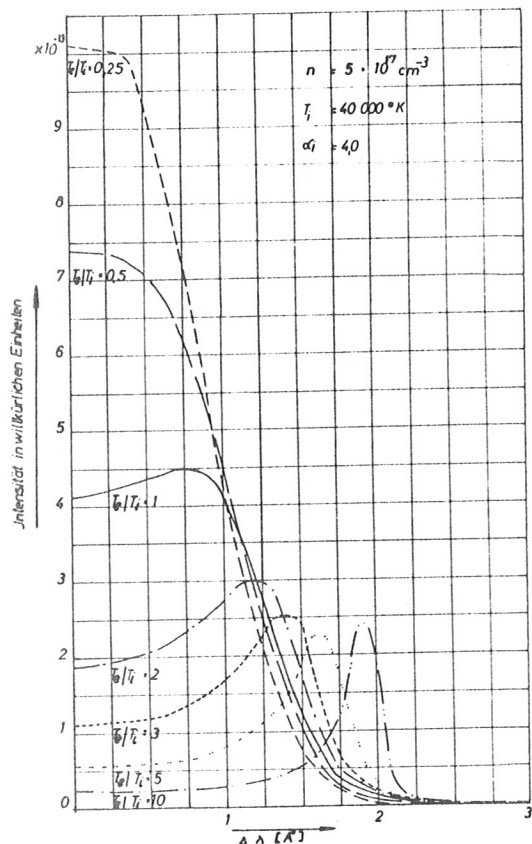


Abb.12: Beeinflussung der Zentrallinie des Streuspektrums durch Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht.

Abb.12 schließlich zeigt, wie Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht die Zentrallinie beeinflussen. Es wurde  $\bar{n} = 5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$  und  $T_i = 40000 \text{ }^\circ\text{K}$  gewählt ( $\rightarrow \alpha_i = 4.0$ ) und  $T_e$  variiert. In diesem Falle wurde die Satellitenlinie nicht mit aufgezeichnet, da sie, wie schon vorher diskutiert, von dem Verhältnis  $T_e/T_i$  nicht beeinflusst wird. Ihre Variation entspricht nur der Änderung von  $T_e$ .

Eine Änderung des Streuwinkels beeinflusst das Spektrum in derselben Weise wie eine Änderung der Tempe-

ratur. Und zwar entspricht ein kleinerer Streuwinkel einer niedrigeren Temperatur. Dies sieht man daran, daß in (C68)  $k$  und  $T$  nur in der Kombination  $k^2 T$  vorkommen ( $k = 4\pi \cdot \sin(\theta/2)/\lambda$ ). Ganz allgemein gesagt, ist die Funktion  $\bar{T}_\alpha(\alpha)$  nur durch einen Parameter ( $\alpha$ ) bestimmt.

Abschließend soll noch kurz diskutiert werden, welche Plasmaparameter mit Streuexperimenten bestimmt werden können. Im Fall  $\alpha_e \ll 1$  ergibt sich ein Gaußprofil, aus dessen Halbwertsbreite sich die Elektronentemperatur ergibt. Die Elektronendichte läßt sich nur durch Absolutmessungen bestimmen.- Für  $\alpha_e \sim 1$  läßt sich die Elektronendichte und die Elektronentemperatur bereits aus der relativen Intensitätsverteilung bestimmen. Hierzu ist ein Vergleich mit detaillierten numerischen Rechnungen notwendig (s.H.J.KUNZE u.a. 1964). Kann man auch die Zentrallinie messen und auflösen, so läßt sich auch noch die Ionentemperatur bestimmen.-Im Fall  $\alpha_e \gg 1$  wird die Situation ungünstiger, da die totale Intensität der Satellitenlinie mit  $1/(1+\alpha_e^2)$  abnimmt (I,27). Außerdem wird in der hier verwendeten Näherung die Satellitenlinie sehr scharf. Wie u.a. von V. GILINSKY und D.DUBOIS (1963) gezeigt wurde, wird dann die Verbreiterung durch Stöße wesentlich.\* Prinzipiell kann man aber im thermischen Gleichgewicht die Elektronendichte und die Temperatur bestimmen aus dem Verhältnis der gesamten Intensität der Zentrallinie und der Satellitenlinie und aus der Lage der Satellitenlinie. Kann man außerdem noch die Zentrallinie auflösen, so kann man auch bei Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht  $T_e$ ,  $T_i$  und  $\bar{n}$  bestimmen.

---

\* Ganz allgemein werden die Stöße wesentlich, wenn man im Spektrum Strukturen in einem Bereich  $\Delta \omega \leq \omega_e$  untersuchen will ( $\omega_e$  = Stoßfrequenz). Diese Einschränkung ist insbesondere auch für Untersuchungen der Zentrallinie von Bedeutung.

6. Spektralverteilung der Dichtefluktuationen in einem homogenen Magnetfeld.

Zum Abschluß dieses Kapitels soll noch untersucht werden, welchen Einfluß ein homogenes, zeitlich konstantes Magnetfeld auf die Spektralverteilung der Dichtefluktuationen hat.

Wir gehen wieder von der WLASOW-Gleichung aus. Dann ist analog zu (C34):

$$(C76) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \omega \frac{\partial f}{i\omega} - \frac{e}{m} \left( \ell_i + \frac{\omega \times \ell_i}{c} \right) \frac{\partial f}{\partial \omega} = 0$$

Mit denselben Bezeichnungen und Transformationen wie in (C35 - C44) ergibt sich für die FOURIER - LAPLACE - Transformierte der Verteilungsfunktion:

$$(C77) \quad [s - i k \omega] f_1(k, \omega, s) - \frac{e}{m} \ell_i(k, s) \frac{\partial f_0(\omega)}{\partial \omega} + \frac{e}{m c} \mathcal{L}(\omega \times \frac{\partial f_1(k, \omega, s)}{\partial \omega}) = f^1(k, \omega)$$

Wenn man  $f_0$ ,  $\ell$  und  $f^1$  als gegeben betrachtet, ist (C77) eine Differentialgleichung für  $f_1$ . Um diese zu lösen,

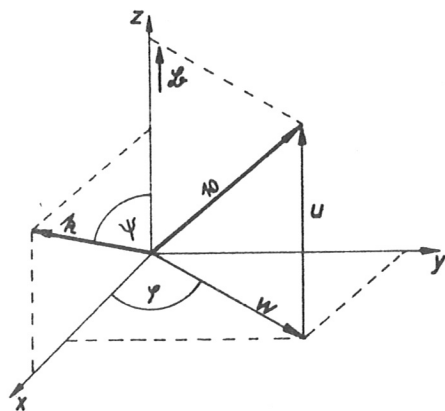


Abb.:13 Zylinderkoordinaten im  $\omega$ -Raum.

werden Zylinderkoordinaten eingeführt mit der Achse parallel zu  $\ell$  und der Ebene  $f = c$  in der  $k$ - $\ell$ -Ebene.  $\psi$  sei der Winkel zwischen  $k$  und  $\ell$ ,  $u$  die Komponente von  $\omega$  parallel zu  $\ell$  und  $w$  der Betrag der Geschwindigkeit senkrecht zu  $\ell$  (siehe Abb.13). Dann ist

$$(C78) \quad v_x = w \cos \varphi ; \quad v_y = w \sin \varphi ; \quad v_z = u$$

Mit dieser Koordinatentransformation und mit (C9) geht (C76) über in

$$(C79) \quad \frac{\partial f_1(k, u, w, \varphi, s)}{\partial \varphi} + \frac{1}{\Omega_e} [s - i k (u \cos \varphi + w \sin \varphi \cos \varphi)] f_1(k, u, w, \varphi, s) \\ = \frac{c}{B} \ell(k, s) \frac{\partial f_0}{\partial \kappa} + \frac{1}{\Omega_e} f^1(k, \kappa)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung (s. Anhang II) ist:

$$(C80a) \quad f_1(k, u, w, \varphi, s) = \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi' \left[ \frac{c}{B} \ell(k, s) \frac{\partial f_0(\kappa')}{\partial \kappa'} + \frac{1}{\Omega_e} f^1(\kappa', k) \right] \cdot \\ \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{\Omega_e} [(s - i k u \cos \varphi)(\varphi - \varphi') - i k w \sin \varphi (\sin \varphi - \sin \varphi')] \right\}$$

Entsprechend gilt für die Ionen:

$$(C80b) \quad F_1(k, u, w, \varphi, s) = \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi' \left[ \frac{c}{B} \ell(k, s) \frac{\partial F_0(\kappa')}{\partial \kappa'} - \frac{1}{\Omega_i} F^1(k, \kappa') \right] \cdot \\ \cdot \exp \left\{ \frac{1}{\Omega_i} [(s - i k u \cos \varphi)(\varphi - \varphi') - i k w \sin \varphi (\sin \varphi - \sin \varphi')] \right\}$$

Wenn wir jetzt die Ausdrücke (C80) über alle Geschwindigkeiten integrieren, so erhalten wir mit (C44) analog zu (C51)

$$(C81a) \quad n(k, s) = Y_e(k, s) - R_e(k, s) [Z N(k, s) - n(k, s)]$$

$$(C81b) \quad N(k, s) = Y_i(k, s) + R_i(k, s)/Z [Z N(k, s) - n(k, s)]$$

Dabei ist:

$$(C82a) \quad Y_e(k, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3v \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Omega_e} f'(k, \omega') \exp\{\dots\} d\omega'$$

$$(C82b) \quad Y_i(k, s) = - \int_{-\infty}^{+\infty} d^3v \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Omega_i} F'(k, \omega') \exp\{\dots\} d\omega'$$

und

$$(C83a) \quad R_e(k, s) = - \int_{-\infty}^{+\infty} d^3v \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i 4\pi e c k}{k^2 B} \frac{\partial f_e(\omega')}{\partial \omega'} \exp\{\dots\} d\omega'$$

$$(C83b) \quad R_i(k, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3v \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i 4\pi Z e c k}{k^2 B} \frac{\partial F_i(\omega')}{\partial \omega'} \exp\{\dots\} d\omega'$$

Die Funktionen  $Y$  und  $\hat{R}$  werden im Anhang III ausführlich behandelt. Die weitere Rechnung geht genau wie im magnetfeldfreien Fall, wenn wir in (C51) und in den folgenden Formeln die Funktionen  $X$  und  $G$  durch  $Y$  und  $\hat{R}$  ersetzen. Damit folgt:

$$(C84a) \quad n(k, s) = \frac{Y_e (1 - R_i) - Z Y_i R_e}{1 - R_e - R_i}$$

$$(C84b) \quad N(k, s) = \frac{Y_i (1 - R_e) - Y_e R_i / Z}{1 - R_e - R_i}$$

und schließlich

$$(C85) \quad Q(k, \omega) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{e i m}{\pi} \frac{\langle |Y_e|^2 \rangle |1 - R_i(k, \omega)|^2 + Z^2 \langle |Y_i|^2 \rangle |R_e(k, \omega)|^2}{|1 - R_e(k, \omega) - R_i(k, \omega)|^2}$$

Mit den Formeln (III,45) für  $Y_i$  und  $Y_e$  ergibt sich dann:

$$(C86) \quad Q(k, \omega) = \frac{n}{\omega \pi} \frac{\overbrace{\frac{1}{\alpha_e^2} |1 - R_i(k, \omega)|^2 \text{Im} R_e(k, \omega)}^I + \overbrace{\frac{Z}{\alpha_i^2} |R_e(k, \omega)|^2 \text{Im} R_i(k, \omega)}^{II}}{|1 - R_e(k, \omega) - R_i(k, \omega)|^2}$$

Diese Formel ist ganz analog zu (C68) für den magnetfeldfreien Fall.\* Entsprechend ist (C86) unser allgemeines Ergebnis für ein Plasma mit Magnetfeld. Die Ionen- und Elektronentemperatur können verschieden sein.

Die Formel (C86) soll noch kurz für einige Spezialfälle diskutiert werden. - Für den Fall  $k$  parallel zu  $\mathcal{E}$ , d.h.  $\gamma = 0$  wird in (III,5) die Integration über  $\rho'$  elementar. Mit (III,4) ergibt sich dann, daß  $R_e$  und  $R_i$  in die Funktionen  $G_e$  und  $G_i$  (C60 bzw. C64) übergehen. Das bedeutet, daß in diesem Fall das Magnetfeld das Streuspektrum nicht beeinflusst; (C86) stimmt mit (C68) überein.

Dieselbe Aussage gilt näherungsweise, solange die Bedingungen

$$(C87a) \quad \frac{k \cos \gamma}{\Omega_e} \sqrt{\frac{2kT_e}{m}} \gg 1$$

\* Dazu sei bemerkt, daß in (C68) gilt:

$$\frac{M_e(\frac{\omega}{k})}{k} = - \frac{\text{Im} G_e}{\pi \omega \alpha_e^2} ; \quad \frac{M_i(\frac{\omega}{k})}{k} = - \frac{\text{Im} G_i}{\pi \omega \alpha_i^2}$$

und

$$(C87b) \quad \frac{k \cos \gamma}{\Omega_i} \sqrt{\frac{2kT_i}{M}} \gg 1$$

erfüllt sind. Man sieht dies am besten an der Gleichung (III,17). Unter der Bedingung (C87a) ist der Integrand nur für kleine  $p''$  wesentlich von Null verschieden. In diesem Bereich kann man aber  $\sin p''$  durch  $p''$  ersetzen und die beiden letzten Terme im Argument der Exponentialfunktion addieren. Damit hat man für  $g_e$  denselben Ausdruck erhalten wie im Fall  $\gamma = 0$ . Entsprechendes gilt für  $g_i$ .

Für starke Magnetfelder, d.h. für

$$(C88a) \quad \frac{k}{\Omega_e} \sqrt{\frac{2kT_e}{m}} \ll 1$$

und

$$(C88b) \quad \frac{k}{\Omega_i} \sqrt{\frac{2kT_i}{M}} \ll 1$$

kommt im (III,17) der wesentliche Beitrag zu dem Integral aus dem Gebiet  $p'' > 1$ . Dann kann man aber den letzten Term in der Exponentialfunktion im Vergleich zu den anderen vernachlässigen, bzw. man kann den Faktor  $\exp(-2k^2 k T_e \cdot \Omega_e^{-2} m^{-1} \sin^2 \gamma \sin^2 p'')$  für alle  $p''$  gleich 1 setzen. Dann erhält man für  $g_e$  wieder dasselbe Resultat wie im Fall  $\gamma = 0$ , wenn man  $T_e$  durch  $T_e \cos^2 \gamma$  ersetzt. Entsprechendes gilt für  $g_i$ , wenn man  $T_i$  durch  $T_i \cos^2 \gamma$  ersetzt. Das bedeutet, das Spektrum wird gegenüber dem magnetfeldfreien Fall um den Faktor  $\cos^2 \gamma$  enger. Die totale Streuintensität wird von dem Magnetfeld nicht geändert, da nur  $g_e$  und  $g_i$  nicht aber  $\alpha_e$  und  $\alpha_i$  beeinflusst werden.

Komplizierter wird der Einfluß des Magnetfeldes auf das Streuspektrum für den Fall eines schwachen Magnetfeldes,



wenn der Wellenzahlenvektor  $k$  ungefähr senkrecht auf  $k$  steht, oder genauer gesagt für

$$(C89a) \quad \frac{k}{\Omega_e} \sqrt{\frac{2kT_e}{m}} \gg 1 ; \quad \frac{k \cos \varphi}{\Omega_e} \sqrt{\frac{2kT_e}{m}} \ll 1$$

und

$$(C89b) \quad \frac{k}{\Omega_i} \sqrt{\frac{2kT_i}{M}} \gg 1 ; \quad \frac{k \cos \varphi}{\Omega_i} \sqrt{\frac{2kT_i}{M}} \ll 1$$

In diesem Fall ist Teil I des Spektrums (C86) im Vergleich zu (C68) mit der Elektronen - und Teil II mit der Ionen- gyrofrequenz moduliert. Man sieht dies am einfachsten folgendermaßen ( auf eine detaillierte Diskussion des Spektrums soll hier verzichtet werden): Wir setzen in (III,19a)  $s = i\omega$  . Dann ist:

$$(C90) \quad g_e = \int_0^\infty dx \left[ \cos\left(\frac{\omega}{\Omega_e} x\right) - i \sin\left(\frac{\omega}{\Omega_e} x\right) \right] \cdot \exp\left\{-\left[\sin^2 \varphi (1 - \cos x) + \frac{1}{2} x^2 \cos^2 \varphi\right] \frac{kT_e k^2}{m \Omega_e^2}\right\}$$

Unter den Bedingungen (C89a) ist die Exponentialfunktion in (C90) nur dann wesentlich von Null verschieden, wenn

$$(C91) \quad x \approx 2\pi \ell$$

ist. Dabei ist  $\ell$  eine ganze Zahl. Mit (C91) gilt die Approximation:

$$(C92) \quad 1 - \cos x \approx \frac{1}{2} (x - 2\pi \ell)^2$$

Mit dieser Näherung folgt aus (C90) für  $g_e$  :

$$(C93) \quad g_e \approx \sum_{\ell} \int_0^\infty dx \left[ \cos\left(\frac{\omega}{\Omega_e} x\right) - i \sin\left(\frac{\omega}{\Omega_e} x\right) \right] \cdot \exp\left\{-\left[\frac{1}{2} (x - 2\pi \ell)^2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} x^2 \cos^2 \varphi\right] \frac{kT_e k^2}{m \Omega_e^2}\right\}$$

Aus (C93) sieht man nun sofort, daß der Realteil von  $g_e$  einen maximalen Wert erreicht, wenn  $\omega$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $\Omega_e$  ist; denn dann ist der Kosinus - unter Berücksichtigung von (C91) - für jedes  $\ell$  ungefähr gleich 1. Nach (III,4a) und (C86) ist nun  $\text{Re } g_e \sim \text{Im } R_e \sim I$ . Entsprechendes gilt für die "Ionenkomponente" II.- Die Modulation ist um so stärker, je näher  $\gamma$  an  $90^\circ$  ist.

Die einzelnen hier diskutierten Bedingungen können auch nur für Teil I oder Teil II erfüllt sein. So kann z.B. (C88a) gleichzeitig mit (C89b) erfüllt sein. Dann ist nur die Zentrallinie (Teil II) mit der Gyrofrequenz der Ionen moduliert, während Teil I dem magnetfeldfreien Fall entspricht, wenn man in  $g_e \bar{t}_e$  durch  $\bar{t}_e \cos^2 \gamma$  ersetzt.

Es erscheint recht schwierig, eine solche Modulation durch Streuexperimente im Labor nachzuweisen. Einerseits tritt eine wesentliche Modulation nur auf, wenn  $\gamma$  sehr nahe bei  $90^\circ$  ist. Andererseits sind die so entstehenden Linien so schmal, daß für eine genaue Berechnung der Profile sicher die Stöße berücksichtigt werden müssen. Diese wiederum werden die Linienstruktur wieder weitgehend verwischen. Außerdem wird es experimentell schwierig sein, die Linienstruktur aufzulösen. Macht man Streuversuche mit dem Licht eines Rubinlasers ( $\lambda = 6943 \text{ \AA}$ ) und bei einem Magnetfeld von  $10\,000 \text{ G}$ , so beträgt der Abstand der durch das Magnetfeld verursachten Maxima in Teil I des Spektrums (Modulation mit der Elektronengyrofrequenz) ungefähr  $0.4 \text{ \AA}$  und in Teil II (Zentrallinie; Modulation mit der Ionengyrofrequenz) ungefähr  $2.5 \cdot 10^{-4} \text{ \AA}$ .

Hinsichtlich einer eingehenderen Diskussion des Spektrums (C86) sei auf die Arbeit von J.A.FEJER (1961) verwiesen. Numerische Beispiele werden in der Arbeit von T. HAGFORS (1961) angegeben.

D. ERZWUNGENE DICHTEFLUKTUATIONEN UND LICHTMISCHUNG.

1. Erzwungene Fluktuationen.

In Kapitel C wurden die thermischen Dichtefluktuationen behandelt, d.h. diejenigen Fluktuationen, die aufgrund der thermischen Bewegung der Teilchen und durch die COULOMB-Kräfte zustande kommen. Es soll jetzt die Frage diskutiert werden, inwieweit es möglich ist, Dichtefluktuationen durch ein äußeres elektrisches Feld (z.B. einen Laserstrahl) zu erzwingen.

Das Problem soll wieder mit Hilfe der linearisierten WLASOW-Gleichung behandelt werden. Dazu spalten wir das elektrische Feld  $\mathcal{E}$  auf in einen Teil  $\mathcal{E}_i$ , der das innere Feld aufgrund der Raumladungen (C35, C47) repräsentiert, und einen Teil  $\mathcal{E}_A$ , der dem äußeren Feld entspricht:

$$(D1) \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_A + \mathcal{E}_i$$

Da wir bei  $\mathcal{E}_A$  insbesondere an das Feld in einem Laserstrahl denken, wollen wir einschränkend annehmen, daß es sich um eine transversale monochromatische Welle handelt. Dann sieht man leicht aus Gl.(C48a) und folgenden, daß - im Rahmen der linearisierten Theorie - in einem magnetfeldfreien Plasma keine Dichtefluktuationen durch ein äußeres Feld hervorgerufen werden. Denn es ist

$$(D2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{E}_A(k, s) f_0(x_0)}{s - i k x_0} d^3 v = 0$$

Zu dem Integral trägt nur eine zu  $k$  parallele Kraftkomponente bei, und entweder stimmt  $k$  mit dem Wellenvektor des elektrischen Feldes  $\mathcal{E}_A$  überein, dann ist  $\mathcal{E}_A \perp k$ , oder es handelt sich um ein anderes  $k$ , dann ist  $\mathcal{E}_A(k, s) = 0$ .

Anders liegt der Fall, wenn auch noch ein äußeres Magnetfeld vorhanden ist, das wir im folgenden als zeitlich konstant und homogen betrachten wollen. Dann erhält die durch  $\mathcal{E}$  erzwungene Bewegung der Elektronen aufgrund der Gyrationbewegung eine longitudinale Komponente, wenn

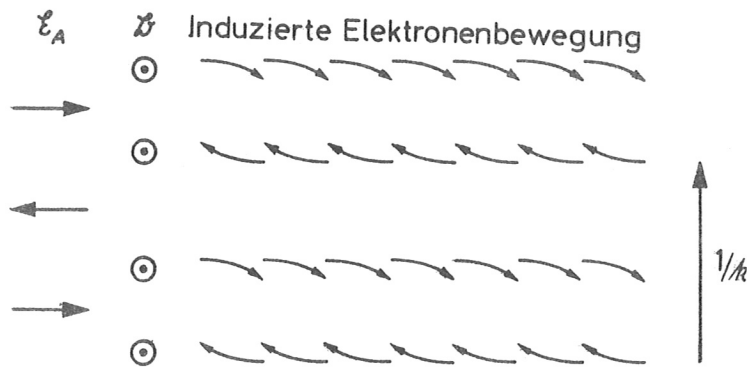


Abb.14: Induzierte Dichtefluktuationen

nicht  $\mathcal{E}$  parallel zu  $\mathcal{E}_A$  oder  $\mathcal{B}$  ist. Dadurch werden dann Dichteschwankungen verursacht. Qualitativ sind die Verhältnisse in Abb. 14 dargestellt.

Wir gehen also wieder von Gleichung (C77) unter Berücksichtigung von (D1) aus. Es ergeben sich dann wieder die Gl.(C80). Durch Integration über den Geschwindigkeitsraum ergibt sich dann:

$$(D3a) \quad n_e(k, s) = Y_e(k, s) - S_e(k, s) - R_e(k, s) [Z N(k, s) - n(k, s)]$$

und

$$(D3b) \quad N(k, s) = Y_i(k, s) - S_i(k, s)/Z - R_i(k, s)/Z [Z N(k, s) - n(k, s)]$$

Die Funktionen  $Y$  und  $R$  wurden bereits durch (C81 und C82) definiert. Analog zu  $R$  ist dann

$$(D4a) \quad S_e(k, s) = - \int_{-\infty}^{+\infty} d^3v \int_{-\infty}^{\varphi} d\varphi' \mathcal{E}_A(k, s) \frac{c}{B} \frac{\partial f_e(v')}{\partial v'} \cdot \exp \left\{ - \frac{1}{\Omega_e} [ (s - i k u \cos \varphi) (\varphi - \varphi') - i k w \sin \varphi (\sin \varphi - \sin \varphi') ] \right\}$$

und

$$(D4b) \quad S_i(k, s) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3v \int_{-\infty}^p dp' \ell_A(k, s) \frac{e}{B} \frac{\partial F_0(x_0')}{\partial x_0'} \exp\left\{-\frac{1}{R_e} L \dots\right\}$$

Die Funktionen Y, R und S werden im Anhang III behandelt.  
Die Auflösung des Systems (D3) ergibt:

$$(D5a) \quad n(k, s) = \frac{(Y_e - S_e)(1 - R_i) - R_e(Z Y_i - S_i)}{1 - R_e - R_i}$$

und

$$(D5b) \quad N(k, s) = \frac{(Y_i - S_i/Z)(1 - R_e) - R_i/Z (Y_e - S_e)}{1 - R_e - R_i}$$

Und daraus folgt dann analog zu (C85):

$$(D6) \quad Q(k, \omega) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\eta}{\pi} \frac{\langle |Y_e - S_e|^2 \rangle |1 - R_i|^2 + \langle |Z Y_i - S_i|^2 \rangle |R_e|^2}{|1 - R_e - R_i|^2}$$

Bei Bildung des Ensemblemittels in (D6) wird in Y über die Anfangsbedingungen und in S über die Phase des äußeren elektrischen Feldes zur Zeit  $t = 0$  gemittelt. Da diese beiden Größen offensichtlich miteinander nicht korreliert sind ist:

$$(D7a) \quad \langle |Y_e - S_e|^2 \rangle = \langle |Y_e|^2 \rangle + \langle |S_e|^2 \rangle$$

$$(D7b) \quad \langle |Y_i - S_i|^2 \rangle = \langle |Y_i|^2 \rangle + \langle |S_i|^2 \rangle$$

Entsprechend können wir schreiben

$$(D8) \quad Q(k, \omega) = Q_{th}(k, \omega) + Q_f(k, \omega)$$

Dabei entspricht  $Q_{tj}$  den thermischen Dichteschwankungen und ist durch (C35) gegeben während  $Q_f$  den erzwungenen Fluktuationen entspricht. Es ist

$$(D9) \quad Q_f(k, \omega) = \lim_{r \rightarrow c} \frac{r}{\pi} \frac{\langle |S_e|^2 \rangle |1 - R_c|^2 + \langle |S_c|^2 \rangle |R_e|^2}{|1 - R_e - R_c|^2}$$

(D8) mit (D9) ist unser endgültiges Resultat in allgemeiner Form. Bis jetzt wurde keine Annahme darüber gemacht, ob es sich bei dem äußeren Feld  $\mathcal{E}_A$  um eine transversale Welle handelt oder nicht. Hingegen wurde im Falle, daß es sich bei  $\mathcal{E}_A$  um das elektrische Feld einer elektromagnetischen Welle handelt, der Einfluß des magnetischen Wechselfeldes der Welle vernachlässigt.

Es soll jetzt noch der Spezialfall genauer behandelt werden, daß es sich bei dem äußeren elektrischen Feld um eine transversale Welle mit  $\omega \gg \Omega_p$  und  $\omega/k_f \approx c$  (d.h.  $\omega \gg \omega_p$ ) handelt. (Gedacht ist dabei an das Feld eines Laserstrahles). In diesem Fall werden die Verhältnisse sehr viel einfacher. Es sind dann die im Anhang III angegebenen Entwicklungen gute Näherungen. Zunächst sieht man, daß unter diesen Voraussetzungen auf der rechten Seite in Gl.(D8) ein Term stets zu vernachlässigen ist. Dann entweder ist  $\omega/k \ll c$ , dann ist  $Q_f = 0$ , da dann  $\mathcal{E}_A(k, \omega) = 0$  ist. Oder aber es ist  $\omega/k \approx c$ , dann ist  $Q_{tj}$  zu vernachlässigen. Dies ergibt sich daraus, daß die Phasengeschwindigkeiten der thermischen Fluktuationen mit den Teilchengeschwindigkeiten gekoppelt sind.\* (Man sieht dies sehr deutlich an Gleichung (C68). Andererseits folgt dies auch formal aus der Reihenentwicklung (III,63).

\*Hier genügt diese Abschätzung. Will man für  $\omega/k \approx c$  die thermischen Fluktuationen genau berechnen, muß man relativistische Gleichungen verwenden.

Da wir uns hier nur für die erzwungenen Fluktuationen interessieren, wählen wir  $\omega$  und  $\kappa$  so, daß sie dem erzwingenden Feld entsprechen. Dann ist also:

$$(D10) \quad Q(\kappa, \omega) = Q_f(\kappa, \omega)$$

Weiterhin ist in diesem Fall

$$(D11) \quad R_e(\kappa, \omega), R_i(\kappa, \omega) \ll 1$$

Damit wird dann:

$$(D12) \quad Q(\kappa, \omega) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\gamma}{\pi} \langle |S_e(\kappa, \omega)|^2 \rangle$$

mit (III,67) wird daraus:

$$(D13) \quad Q(\kappa, \omega) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\gamma}{\pi} \bar{n}^2 \langle |E_A(\kappa, \omega)|^2 \rangle B^2 \frac{1}{\omega^4} \left( \frac{e}{mc} \right)^4 \sin^2 \psi \sin^2 \chi_1 \sin^2 \chi_2$$

Die Winkel  $\psi$ ,  $\chi_1$  und  $\chi_2$  geben die Richtungen von  $\kappa$  und  $\epsilon_A$  relativ zu  $\kappa$  an. Da wir vorausgesetzt hatten, daß es sich bei  $\epsilon_A$  um eine transversale Welle ( $\epsilon_A \perp \kappa$ ) handelt, müssen die drei Winkel die Bedingung (III, 65) erfüllen. D.h. es sind nur zwei dieser Winkel frei wählbar.

## 2. Lichtmischung und Erzeugung der zweiten Harmonischen unter Vernachlässigung der Dispersion.

An diesen durch einen Lichtstrahl ( oder ganz allgemein durch eine elektromagnetische Welle) erzwungenen Dichtefluktuationen mit der Frequenz  $\omega_f$  und dem Wellenzahlvektor  $\kappa_f$  kann nun das Licht eines zweiten Strahles entsprechend (B20) gestreut werden. Entsprechend der Bedingung (B41) hat das auftretende Streulicht dann die Summen- und die Differenzfrequenz der beiden Strahlen. D.h. es tritt Lichtmischung auf.

Wenn man die Dispersion des Plasmas vernachlässigt, d.h. wenn man den Brechungsindex gleich 1 setzt ( $\omega_p \ll \omega_1, \omega_2, \omega_f$ ), gilt:

$$(D14) \quad \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2} = \frac{\omega_f}{k_f}$$

Mit dieser Beziehung folgt aus (B41), daß der Mischungseffekt nur auftritt, wenn die beiden Lichtstrahlen parallel sind. (Das Dreieck in Abb.3 ist dann zu einer Geraden entartet.) Das Mischlicht tritt nur in Vorwärtsrichtung auf.\*

Es sei darauf hingewiesen, daß die Streuformel (B40) nach ihrer Herleitung auch für kohärente Dichtefluktuationen gilt. Man sieht dies sehr einfach, wenn man in (B19) für die Dichtefluktuation eine ebene, monochromatische Welle ansetzt:

$$(D15) \quad n(x, t) = \bar{n} + n_0 [ \exp \{ i [ k_f x - \omega_f t + \varphi ] \} + k. k. ]$$

Dabei ist  $\varphi$  die Phasendifferenz zwischen Lichtwelle und Dichtewelle für  $t = 0$  und  $x = 0$ . Man sieht dann, daß  $\varphi$  in den Ausdruck für das Streufeld  $\mathcal{E}_s$  nur so eingeht, daß es einer Verschiebung des Zeitnullpunktes entspricht. Das bedeutet, daß die mittlere Streuintensität von  $\varphi$  nicht beeinflußt wird.

Daraus ergibt sich, daß (B40) insbesondere auch für den Spezialfall gilt, daß  $\omega_1 = \omega_2$  ist. In diesem Fall haben wir nur einen Lichtstrahl und es ist  $\omega_2 = \lambda \omega_1$ . Das "Streulicht" ist dann also die zweite Harmonische.- Es hat in diesem Fall keinen Sinn, nach Streulicht mit der Differenzfrequenz zu fragen, denn diese sowie der zugehörige Wellenzahlvektor sind Null.

Geht man davon aus, daß die elektromagnetische Welle, die die Dichtefluktuationen erzwingt, eben und monochromatisch

\* Dies ist eine Korrektur der früheren Aussage (W.H.KEGEL 1963), daß die Differenzfrequenz bei antiparallelen Strahlen auftritt.



ist, so folgt, daß die FOURIER-Transformierte der Dichtefluktuations im  $\omega$ - $k$ -Raum einer  $\delta$ -Funktion entspricht. (Bei endlichen Volumen  $V$  gilt dies nur näherungsweise.)- Das hat zur Folge, daß das "Streulicht" nur in einer Richtung auftritt.- Bei der Anwendung der Formel (B40) muß man dies beachten. Es ist dann sinnvoll, nicht mehr nach der differentiellen Streuintensität zu fragen, sondern nach der gesamten gestreuten Energie. Ist  $d\Omega$  das Raumwinkelelement, so ist entsprechend (B40):

$$(D16) \quad I_{\Sigma} = I_1(k_1, \omega_1) \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int d\Omega Q(k, \omega) \epsilon_e$$

Im weiteren sei der spezielle Fall der Erzeugung der zweiten Harmonischen betrachtet. Das Plasmavolumen sei quaderförmig mit den Seiten  $a$ ,  $b$  und  $L$ , parallel zu den Koordinatenachsen. Weiterhin sei angenommen, daß der Wellenzahlvektor  $k_f$  des die Dichtefluktuations erzwingenden Feldes nur eine  $z$ -Komponente habe.

$$(D17) \quad \begin{aligned} \epsilon_A(x, t) &= \epsilon_A^0 \exp\{-i(k_f x - \omega_f t)\} \\ &= \epsilon_A^0 \exp\{-i(k_f z - \omega_f t)\} \end{aligned}$$

Dann gilt für die FOURIER-LAPLACE-Transformierte:

$$(D18) \quad \epsilon_A(k, s) = \epsilon_A^0 \frac{1}{i\omega_f - s} \cdot \frac{\sin(k_x \frac{a}{2})}{k_x} \cdot \frac{\sin(k_y \frac{b}{2})}{k_y} \cdot \frac{\sin\{(k_z - k_f) \frac{L}{2}\}}{k_z - k_f}$$

Setzt man dies in (D13) ein, so erhält man:

$$(D19) \quad \begin{aligned} Q(k, \omega) &= \left( \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{|i\omega_f - s|^2} \right) \bar{n}^2 E_A^0{}^2 B^2 \frac{1}{\omega^4} \left( \frac{e}{mc} \right)^4 \sin^2 \varphi \cdot \\ &\cdot \sin^2 \chi_1 \sin^2 \chi_2 \frac{\sin^2(k_x \frac{a}{2})}{k_x^2} \frac{\sin^2(k_y \frac{b}{2})}{k_y^2} \frac{\sin^2\{(k_z - k_f) \frac{L}{2}\}}{(k_z - k_f)^2} \end{aligned}$$

Bei der Ausführung des Grenzprozesses und der Integration in (D16) ergibt die erste Klammer in (D19) den Faktor 1. Mit der Bezeichnung

$$(D20) \quad A = \bar{n}^2 E_A^2 B^2 \frac{1}{\omega_p^4} \left( \frac{e}{mc} \right)^4 G_e \sin^2 \psi \sin^2 \chi_1 \sin^2 \chi_2$$

wird dann aus (D16):

$$(D21) \quad I_2 = I_1(k_1, \mu_1) A \int d\Omega \frac{\sin^2(k_x \frac{a}{2})}{k_x^2} \frac{\sin^2(k_y \frac{a}{2})}{k_y^2} \frac{\sin^2\{(k_z - k_1) \frac{a}{2}\}}{(k_z - k_1)^2}$$

Ist  $\mu$  der Einheitsvektor in der Richtung Plasma-Beobachter, so ist:

$$(D22) \quad k_2 = k_1 + k = k_2 \mu$$

Wenn wir Polarkoordinaten einführen, so hat  $\mu$  die Komponenten

$$(D23) \quad n_x = \sin \vartheta \cos \varphi; \quad n_y = \sin \vartheta \sin \varphi; \quad n_z = \cos \vartheta$$

Um den Integranden in (D21) zu vereinfachen, approximieren wir:

$$(D24) \quad \frac{\sin^2(k_x \frac{a}{2})}{k_x^2} \approx \frac{a^2}{4} \exp \left\{ -\frac{a^2}{4\pi} k_x^2 \right\}$$

(Entsprechendes gilt für die beiden anderen Faktoren.) Diese Näherung ist so angesetzt, daß die beiden Funktionen für  $k_x=0$  übereinstimmen und das Integral über beide Funktionen den gleichen Wert liefert. Diese Näherung bedeutet, daß wir die Details der durch (D19) gegebenen Beugungsfigur nicht berücksichtigen.

Mit den Gleichungen (D22 -24) wird dann aus (D21):

$$(D25) \quad I_2 \approx I_1(k_1, \omega_1) A \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta \frac{a^2 b^2 L^2}{64} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{4\pi} \left[ a^2 k_2^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + b^2 k_2^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + L^2 (k_2 \cos \vartheta - 2k_f)^2 \right] \right\}$$

Für den Spezialfall  $a = b = L$  läßt sich dies Integral sehr einfach ausrechnen. Mit den Annahmen  $k_2 = 2k_f$  und  $a k_f \gg 1$  ergibt sich aus (D25):

$$(D26) \quad \begin{aligned} I_2 &\approx I_1(k_1, \omega_1) A \frac{V^2}{64} \frac{\pi^2}{a^2 k_f^2} \\ &= I_1 E_A^2 B^2 \frac{1}{\omega_f^4} \left( \frac{e}{mc} \right)^4 G_e \frac{\bar{n}^2 V^2}{64} \frac{\pi^2}{a^2 k_f^2} \sin^2 \vartheta \sin^2 \chi_1 \sin^2 \chi_2 \\ &= I_1 E_A^2 B^2 \frac{\bar{n}^2 V^2}{a^2 \omega^6} \sin^2 \vartheta \sin^2 \chi_1 \sin^2 \chi_2 \cdot 8,82 \cdot 10^{24} \end{aligned}$$

Für den Fall  $a = b \neq L$  folgt mit denselben Annahmen:

$$(D27) \quad \begin{aligned} I_2 &\approx I_1 A \frac{V^2}{64} \frac{\pi^2}{k_f \sqrt{L^2 - a^2}} \exp \left\{ \frac{k_f^2}{\pi} \cdot \frac{a^4}{L^2 - a^2} \right\} \cdot \\ &\cdot \left[ \Phi \left( \frac{k_f}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{a^2 - 2L^2}{\sqrt{L^2 - a^2}} \right) - \Phi \left( -\frac{k_f}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{a^2}{\sqrt{L^2 - a^2}} \right) \right] \end{aligned}$$

Dabei ist  $\Phi$  das Fehlerintegral. Macht man eine asymptotische Entwicklung für große Argumente, so ergibt sich wieder die Formel (D26). Dabei ist dann jetzt  $a^2$  der Querschnitt des durchstrahlten Plasmavolumens.

### 3. Einfluß der Dispersion

Die Verhältnisse werden komplizierter, wenn man die Dispersion mit berücksichtigt. Aus der Dispersionsrelation

$$(D28) \quad c^2 k^2 = \omega^2 - \omega_p^2$$

(gültig für  $\omega \gg \Omega_e$ ) folgt, daß die Bedingung (B41) im Fall der Lichtmischung nicht erfüllt werden kann. - Eine entsprechende Situation findet man bei der Erzeugung von Harmonischen in Kristallen. Dort ist die Intensität der erzeugten Strahlung eine periodische Funktion der Kristalldicke, da ein wesentlicher Teil der elektrischen Feldstärke durch Interferenz ausgelöscht wird. - Das bedeutet, daß in einem unendlich ausgedehnten, homogenen Plasma, der Mischungseffekt nicht auftritt. Bei einem endlichen Volumen hingegen ist die Intensität des Mischlichtes eine periodische Funktion der Weglänge des Lichtstrahles durch das Plasma, sie wird also nur für Sonderfälle gleich Null.

Wenn man entsprechend (D28) berücksichtigt, daß bei der Lichtmischung die Erzeugung mit der Ausbreitung der Wellen nicht in Phase ist, so ergibt sich aus (B22), (für  $c$  ist jetzt die Phasengeschwindigkeit der Streuwelle im Plasma einzusetzen) daß die aus (B40) bzw. (D16) oder (D26) berechnete Intensität  $\bar{I}_2$  noch mit dem Korrekturfaktor

$$(D29) \quad \frac{\sin^2(\Delta k \frac{L}{2})}{(\Delta k \frac{L}{2})^2}$$

zu multiplizieren ist. Dabei ist  $L$  die Weglänge des Lichtstrahles durch das Plasma und

$$(D30) \quad \Delta k = k_1 \pm k_f - \frac{\omega_1 \pm \omega_f}{c_p(\omega_1 \pm \omega_2)}$$

$c_p(\omega)$  ist die Phasengeschwindigkeit einer Lichtwelle der Frequenz  $\omega$  im Plasma. Diesen Formeln liegt die Annahme zugrunde, daß die beiden Strahlen parallel sind.

Für den Spezialfall der Erzeugung der zweiten Harmonischen folgt aus (D28) und (D30):

$$(D31) \quad \Delta k = \frac{2\omega_1}{c} \left( \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2}} - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{4\omega_1^2}} \right)$$

Für  $\omega_p \ll \omega_1$  vereinfacht sich dieser Ausdruck zu:

$$(D32) \quad \Delta k = - \frac{3}{4} \frac{\omega_1}{c} \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2} = - \frac{3}{4} \frac{\omega_p^2}{c\omega_1}$$

(Für das Licht eines Rubinlasers ( $\omega_1 = 2.7 \cdot 10^{15} \text{sec}^{-1}$ ) und eine mittlere Elektronendichte  $\bar{n} = 7 \cdot 10^{16} \text{cm}^{-3}$  ist  $\frac{\Delta k}{2} \approx 1 \text{cm}^{-1}$ .)

Im Fall  $\Delta k$  oder  $L \rightarrow 0$  geht der Faktor (D29) gegen 1. Das bedeutet, daß man für kleine Dimensionen den Einfluß der Dispersion vernachlässigen kann.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß aus (D26), (D29) und (D32) folgt, daß der Maximalwert der Intensität des Mischlichtes nicht von der Dichte  $\bar{n}$  abhängt.

### E. GÜLTIGKEITSBEREICHE

Abschließend sollen noch die Gültigkeitsbereiche der in diesem Bericht dargestellten Theorie kurz diskutiert werden.

Eine Einschränkung für die Gültigkeit ergibt sich daraus, daß von den linearisierten Gleichungen ausgegangen wurde; d.h. es wurden sowohl bei der Berechnung der Dichtefluktuationen in der WLASOW-Gleichung (C40) die nichtlinearen

Terme vernachlässigt, als auch die höheren Terme in der Streuformel (B40). Bei der Lichtmischung ergibt sich im Rahmen der hier gebrauchten Näherungen die Nichtlinearität erst dadurch, daß man die erzwungenen Fluktuationen, die linear vom äußeren elektrischen Feld abhängen, in die Streuformel (B40) einsetzt. Der linearisierte Ansatz für die Berechnung der erzwungenen Dichtefluktuationen hat zur Folge, daß die hier abgeleiteten Gleichungen für die Lichtmischung keine Resonanz enthalten für den Fall, daß die Differenzfrequenz der beiden Strahlen genau der Plasmafrequenz entspricht.

Weiterhin wurden die Zweierstöße vollständig vernachlässigt. Wie bereits erwähnt, wird der Einfluß der Stöße auf das Streuspektrum wesentlich, wenn die Stoßfrequenz in den Bereich der Breite der betrachteten Linie kommt oder größer als diese wird. D.h. die Stöße sind wesentlich für die Resonanz in der Nähe der Plasmafrequenz (C74a), wenn  $\alpha_e \gg 1$  ist ( für  $\alpha_e \approx 1$  wird das Spektrum von den Stößen praktisch nicht beeinflusst), und für die Resonanzen, die unter dem Einfluß eines äußeren Magnetfeldes auftreten. Auch für die genaue Struktur der Zentrallinie können die Stöße wesentlich sein.- Der Einfluß der Stöße auf das Spektrum der Dichtefluktuationen ist in mehreren Arbeiten ausführlich diskutiert worden (z.B. D.DUBOIS u. V.GILINSKY 1963 und A. RON, J. DAWSON u. C.OBERMAN 1963).

In der hier dargestellten Theorie der Lichtstreuung an thermischen Dichtefluktuationen wird die ganz wesentliche Annahme gemacht, daß das durch das Plasma hindurchgehende Licht die Zustandsgrößen des Plasmas nicht wesentlich ändert. Auf der anderen Seite bedient man sich bei der Ausführung der entsprechenden Experimente der stärksten Lichtquellen, die man kennt, und fokussiert die Energie auf ein möglichst kleines Gebiet. Das bedeutet, daß man bei der quantitativen Bestimmung von Plasmaparametern mit Hilfe der Lichtstreuung

prüfen muß, ob die oben genannte Annahme erfüllt ist oder nicht. Dazu sei das folgende Beispiel gegeben: Man kann die Energie berechnen, die ein Plasma aus einem Lichtstrahl absorbiert (kontinuierliche Absorption). Wenn man einen 1MW-Laser mit einer Pulsdauer von  $10^{-7}$  sec verwendet und dessen Strahl in einem Wasserstoffplasma mit einer Elektronendichte von  $\bar{n} = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$  und einer Temperatur von  $60\,000^\circ\text{K}$  auf ein Gebiet mit einem Querschnitt von  $1 \text{ mm}^2$  fokussiert, so beträgt die gesamte absorbierte Energie rund 27% der in diesem Gebiet enthaltenen thermischen Energie.

Die Amplitude der kinetischen Energie, die ein Elektron - klassisch gerechnet - aus der Schwingung in einem elektrischen Feld erhält, ist gegeben durch

$$(E1) \quad E_{kin}^o = \frac{e^2 E^o{}^2}{2 m \omega^2} = \frac{1}{\bar{n}} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{E^o{}^2}{8 \pi}$$

Für ein elektrisches Feld der Größenordnung  $10^6 \text{ e.s.u. } E = 3 \cdot 10^8 \text{ V/cm}$  ist diese Größe von der Ordnung 6 eV.

Man sieht also, daß es durchaus Fälle geben kann, in denen man die Einwirkung des Lichtstrahles auf das Plasma berücksichtigen muß. In extremen Fällen, in denen die Zeit der Wechselwirkung Licht-Plasma kurz ist gegenüber der mittleren Zeit zwischen zwei Stößen - was bei der Anwendung von gepulsten Höchstleistungslasern der Fall sein kann - können diese Einflüsse wesentlich anisotrop sein. Prinzipiell müßte man für die Auswertung von gemessenen Daten eine selbstkonsistente Theorie verwenden, die die Einwirkung des Lichts auf das Plasma berücksichtigt.

Eine weitere wesentliche Einschränkung besteht in der Annahme, daß die mittlere potentielle Energie der Teilchen klein ist gegenüber der mittleren kinetischen Energie. Dies bedeutet, daß sehr viele Teilchen im DEBYE -Volumen enthalten sein müssen (C10). Diese Annahme ist z.B. für Lichtbogenplasmen

kaum noch erfüllt.

Es sei noch einmal erwähnt, daß für alle auftretenden Frequenzen von Lichtwellen angenommen wurde, daß sie groß gegen  $\omega_p$ ,  $\Omega_e$  und  $\Omega_i$  sind. Das bedeutet, daß eine eventuelle Dämpfung der Lichtwellen, sowie Effekte wie Doppelbrechung und Drehung der Polarisationssebene vernachlässigt werden.

Im vorliegenden Bericht wurde nur ein Zweikomponentenplasma betrachtet. Eine analoge Erweiterung auf mehrere Komponenten bereitet keine wesentlichen Schwierigkeiten. Hierzu sei auf die Arbeit von J.A.FEJER (1961) verwiesen.

Diese Arbeit wurde wesentlich durch die Kritik und eine ständige Diskussion mit Herrn Dipl.-Phys. A.SALAT gefördert. Weiterhin danke ich Herrn Prof.A.SCHLÜTER, Herrn Dr.H.K. WIMMEL sowie Herrn Dipl.-Phys.H.VÖLK für zahlreiche anregende und kärende Diskussionen.

Mein Dank gilt auch Herrn Dr. P.P.J.M.SCHRAM. In Zusammenarbeit mit ihm entstanden die Ergebnisse des Anhangs I.



Anhang I. Zweiteilchenkorrelationsfunktionen.

Die Gültigkeit der Methode, mit der in C1 die Zweiteilchenkorrelationsfunktionen und der totale Streuquerschnitt berechnet wurde, beschränkt sich auf das exakte thermodynamische Gleichgewicht. Eine Verallgemeinerung für den Fall verschiedener Elektronen- und Iontemperatur - wie sie z.B. von RENAU (1962, 1963) versucht wurde - führt leicht zu einem falschen Ergebnis. Bei einer korrekten Behandlung des Problems muß die Bewegung aller Teilchen, auch die des Testteilchens, dessen Abschirmwolke man betrachtet, berücksichtigt werden.

Zur konsequenten Behandlung des Problems gibt es verschiedene Möglichkeiten. Einerseits ergibt sich der totale Streuquerschnitt - und damit die Zweiteilchenkorrelationsfunktion - durch Integration des Spektrums (C 68):

$$(I,1) \quad \langle |n(k)|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(k, \omega) d\omega$$

Weiterhin läßt sich die Frage als Testteilchenproblem behandeln. Eine dritte und fundamentalere Methode ist die Anwendung der Hierarchiegleichungen. Es läßt sich zeigen ( P.P.J.M. SCHRAM u.W.H.KEGEL 1964), daß alle drei Methoden zu genau demselben Resultat führen.

Hier soll das Problem als Testteilchenproblem (siehe N. ROSTOCKER 1961) behandelt werden und gezeigt werden, daß das Ergebnis der Integration des Spektrums äquivalent ist.

Wir betrachten ein homogenes Plasma, in dem sich ein Testteilchen geradlinig mit der Geschwindigkeit  $v_0$  bewegt. Seine Ortskoordinate sei  $\mathcal{R}$ . Dann ist:

$$(I,2) \quad \mathcal{R} = \mathcal{R}_0 + v_0 t$$

Analog zu (C38) schreiben wir für die Verteilungsfunktion der übrigen Elektronen

$$(I,3) \quad f(x, w, R_0, w_0, t) = f_0(w) + f_1(x-R, w, w_0, t)$$

Mit dem Potential

$$(I,4) \quad \phi = \phi(x-R, w_0, t)$$

lautet die linearisierte WLASOW-Gleichung für die Elektronen:

$$(I,5a) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + w \frac{\partial}{\partial w} + w_0 \frac{\partial}{\partial R} \right) f_1(x-R, w, w_0, t) = - \frac{e}{m} \frac{\partial f_0}{\partial w} \frac{\partial \phi}{\partial w}$$

Entsprechend gilt für die Ionen:

$$(I,5b) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + w \frac{\partial}{\partial w} + w_0 \frac{\partial}{\partial R} \right) F_1(x-R, w, w_0, t) = \frac{ze}{M} \frac{\partial F_0}{\partial w} \frac{\partial \phi}{\partial w}$$

Hieraus ergibt sich durch FOURIER-Transformation im Raum und LAPLACE-Transformation in der Zeit:

$$(I,6a) \quad \begin{aligned} & [s - i k (w - w_0)] f_1(k, w, w_0, s) \\ &= \frac{e}{m} i k \frac{\partial f_0}{\partial w} \phi(k, w_0, s) + f_1^+(k, w) \end{aligned}$$

und

$$(I,6b) \quad [s - i k (\omega - \omega_0)] F_1(k, \omega, \omega_0, s) = - \frac{ze}{M} i k \frac{\partial F_0}{\partial \omega} \phi(k, \omega_0, s) + F^{-1}(k, \omega)$$

( Die Bezeichnungen entsprechen denen im Abschnitt C4).  
 Da hier nur die Reaktion des Plasmas auf die Störung durch das Testteilchen untersucht werden soll, setzen wir die Störung zur Zeit  $t = 0$  Null:

$$(I,7) \quad \phi^{-1}(k, \omega) = F^{-1}(k, \omega) = 0$$

Dann ist

$$(I,8) \quad \phi_1(k, \omega, \omega_0, s) = \frac{e}{m} \phi \frac{i k \frac{\partial f_0(\omega)}{\partial \omega}}{s - i k (\omega - \omega_0)}$$

Durch Integration über  $\omega$  ergibt sich dann mit (C52):

$$(I,9a) \quad n_1(k, \omega_0, s) = - \frac{k^2}{4\pi e} \phi(k, \omega_0, s) G_e(k, s + i k \omega_0)$$

Für die Ionen gilt entsprechend:

$$(I,9b) \quad N_1(k, \omega_0, s) = \frac{k^2}{4\pi Z e} \phi(k, \omega_0, s) G_i(k, s + i k \omega_0)$$

Nimmt man an, daß das Testteilchen ein Elektron ist, so lautet die POISSON-Gleichung:

$$(I,10) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi^e(x-R, \omega_0, t) = 4\pi e [\delta(x-R) + n_1(x-R, \omega_0, t) - Z N_1(x-R, \omega_0, t)]$$

Daraus folgt:

$$(I,11) - k^2 \phi^e(k, \kappa_0, s) = 4\pi e \left[ \frac{1}{s} + n_1(k, \kappa_0, s) - Z N_1(k, \kappa_0, s) \right]$$

Mit (I,9) ergibt sich dann für das Potential:

$$(I,12a) \phi^e(k, \kappa_0, s) = \frac{-\frac{4\pi e}{s k^2}}{1 - G_e(k, s + i k \kappa_0) - G_i(k, s + i k \kappa_0)}$$

Ist das Testteilchen ein Ion, so ist das Potential

$$(I,12b) \phi^i(k, \kappa_0, s) = \frac{\frac{4\pi Z e}{s k^2}}{1 - G_e(k, s + i k \kappa_0) - G_i(k, s + i k \kappa_0)}$$

Setzt man einen der Ausdrücke (I,12) in (I,9) ein, so erhält man das allgemeine Ergebnis für die Störung der Elektronen- und Ionendichte durch ein zur Zeit  $t = 0$  mit der Geschwindigkeit  $\kappa_0$  eingeschossenes Elektron bzw. Ion. Wir fragen jetzt nach dem asymptotischen Wert von  $n_1(k, \kappa_0, t)$  für  $t \rightarrow \infty$ . Das bedeutet, daß wir uns nicht für die Phänomene interessieren, die durch das plötzliche Einsetzen der Störung hervorgerufen werden. Dieser Grenzwert hängt mit der LAPLACE-Transformierten in folgender Weise zusammen:

$$(I,13a) \lim_{t \rightarrow \infty} n_1(k, \kappa_0, t) = \lim_{s \rightarrow 0} s n_1(k, \kappa_0, s) \stackrel{\text{Def.}}{=} n_1(k, \kappa_0)$$

und

$$(I,13b) \lim_{t \rightarrow \infty} N_1(k, \kappa_0, t) = \lim_{s \rightarrow 0} s N_1(k, \kappa_0, s) \stackrel{\text{Def.}}{=} N_1(k, \kappa_0)$$

Der Ausdruck (I,13) gibt den asymptotischen Wert der Dichteverteilung um ein Testteilchen mit der Geschwindigkeit  $w_0$  an. Der Streukoeffizient wird durch  $|n(k, w_0)|^2$  bestimmt. Ist das Testteilchen ein Elektron, so trägt es selber auch zur Streuung bei. Dann ist also

$$(I,14a) \quad |n^e(k, w_0)|^2 = |1 + n_1^e(k, w_0)|^2$$

Ist das Testteilchen ein Ion, so ist

$$(I, 14b) \quad |n^i(k, w_0)|^2 = |n_1^i(k, w_0)|^2$$

Wir betrachten jetzt das Testteilchen nicht mehr als von außen eingeschossen, sondern als beliebiges Teilchen des Plasmas. Der gesamte Streuquerschnitt ist dann die Summe der den einzelnen Testteilchen zugeordneten Streuquerschnitte ; d.h. für den Mittelwert gilt:

$$(I,15) \quad \langle |n(k)|^2 \rangle = V \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 v_0 |1 + n_1^e(k, w_0)|^2 f_0(w_0) + V \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 v_0 |n_1^i(k, w_0)|^2 F_0(w_0)$$

Mit (I,9), (I,12) und (I,13) folgt dann

$$(I,16) \quad \langle |n(k)|^2 \rangle = V \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 v_0 \frac{|1 - G_e(k, i k w_0)|^2 f_0(w_0) + Z^2 |G_e(k, i k w_0)|^2 F_0(w_0)}{|1 - G_e(k, i k w_0) - G_i(k, i k w_0)|^2}$$

Dasselbe Ergebnis erhält man, wenn man den Ausdruck (C68) über  $\omega$  integriert. Nach einer Variablensubstitution  $u_0 = \omega/k$  sind die Integranden identisch.

Der Ausdruck (I,16) ist unser allgemeines Ergebnis. Ohne weitere einschränkende Annahmen läßt er sich nicht weiter vereinfachen. Die Elektron-Elektron-Korrelationsfunktion ergibt sich aus (I,16) über die Gleichungen (C4a) und (C7a). In analoger Weise lassen sich die anderen Zweiteilchenkorrelationsfunktionen berechnen.

Für das Weitere folgen wir E.E.SALPETER (1963) und nehmen wieder an, daß die ungestörten Verteilungsfunktionen MAXWELL-Verteilungen sind. Dann sind die Funktionen  $f_0$  und  $F_0$  durch (C59) und  $G_e$  und  $G_i$  durch (C64) gegeben. Wir setzen weiter voraus, daß die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen groß ist gegenüber der der Ionen, d.h.:

$$(I,17) \quad \eta \equiv \sqrt{\frac{m T_i}{M T_e}} \ll 1$$

Unter dieser Voraussetzung läßt sich die Gleichung (C68) ( und entsprechend natürlich auch I,16) wesentlich vereinfachen.

Teil I von (C68) enthält den Faktor  $M_e(\omega/k) \sim \exp(-x^2)$ . Der wesentliche Beitrag dieses Teiles kommt aus dem Bereich  $|x| \sim 1$ . In diesem Bereich ist  $|y| \gg 1$ , wenn man von dem kleinen Gebiet  $|x| \lesssim \eta$  absieht. Deshalb kann in Teil I  $G_i$  im Vergleich mit 1 und  $G_e$  vernachlässigt werden. - Teil II von (C68) enthält den Faktor  $M_i(\frac{\omega}{k}) \sim \exp(-y^2)$ . Daraus sieht man, daß für  $|y| \gtrsim \eta^{-1}$  II gegenüber I zu vernachlässigen ist. Im Bereich, in dem II wesentlich ist, ist dann  $|x| \ll 1$ . Hier approximieren wir  $G_e \approx -\alpha_e^2$ .

Mit diesen Näherungen läßt sich die Gleichung (C68) wesentlich vereinfachen:

$$(I,18) \quad Q(k, \omega) \approx \frac{n M_e \left(\frac{\omega}{k}\right)}{k |1 - G_e(k, \omega)|^2} + \frac{Z \alpha_e^4 n M_i \left(\frac{\omega}{k}\right)}{k |1 + \alpha_e^2 - G_i(k, \omega)|^2}$$

Mit den Bezeichnungen

$$(I,19) \quad \beta^2 = \frac{\alpha_e^2}{1 + \alpha_e^2} \quad ; \quad x = \frac{\omega}{k} \sqrt{\frac{m}{2kT_e}} \quad ; \quad y = \frac{\omega}{k} \sqrt{\frac{M}{2kT_i}}$$

und

$$(I,20) \quad \Gamma_\alpha(x) = \frac{\exp(-x^2)}{[1 + \alpha^2 - \alpha^2 g(x)]^2 + \pi \alpha^4 x^2 \exp(-2x^2)}$$

mit

$$(I,21) \quad g(x) = 2x \exp(-x^2) \int_0^x \exp(t^2) dt$$

läßt sich (I,18) schreiben als

$$(I,22) \quad Q(k, \omega) \approx \frac{n}{k} \sqrt{\frac{m}{2\pi kT_e}} \Gamma_{\alpha_e}(x) + Z \left(\frac{\alpha_e^2}{1 + \alpha_e^2}\right)^2 \frac{n}{k} \sqrt{\frac{M}{2\pi kT_i}} \Gamma_\beta(y)$$

bzw.

$$(I,22a) \quad Q(k, \omega) d\omega = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \Gamma_{\alpha_e}(x) dx + Z \left(\frac{\alpha_e^2}{1 + \alpha_e^2}\right)^2 \frac{n}{\sqrt{\pi}} \Gamma_\beta(y) dy$$

Damit haben wir jetzt für  $Q(k, \omega)$  einen Ausdruck abgeleitet, bei dem man die  $\omega$ -Integration analytisch ausführen kann. Für diese Integration betrachten wir die Variable  $x$  bzw.  $y$  als komplex und fragen nach der analytischen Fortsetzung von  $\Gamma_\alpha(x)$  in der komplexen Ebene. Mit der Bezeichnung

$$(I,23) \quad h(x) = 1 - g(x) - i \sqrt{\pi} x \exp(-x^2)$$

folgt aus (I,20):

$$(I,24) \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma_\alpha(x) = \text{Im} \left\{ \frac{1}{\pi \alpha^2 x} \left[ \frac{1}{1 + \alpha^2 h(x)} - \frac{1}{1 + \alpha^2} \right] \right\}$$

Der zweite Term in der Klammer hat keinen Imaginärteil. Er wurde hinzugefügt, um die Singularität des Ausdrucks in der geschweiften Klammer bei  $x = 0$  zu beheben. Dieser Ausdruck ist dann in der ganzen unteren Halbebene regulär. Daher können wir das Integral über die reelle Achse ersetzen durch das Integral über einen Halbkreis in der unteren Halbebene, dessen Radius gegen unendlich geht. Mit  $x = R \exp(i\theta)$  folgt dann:

$$(I,25) \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_\alpha(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi \alpha^2} \text{Im} \int_{\pi}^{2\pi} \left[ \frac{1}{1 + \alpha^2 h(R \exp(i\theta))} - \frac{1}{1 + \alpha^2} \right] i d\theta$$

Mann kann zeigen (P.L.BHATNAGAR, E.P.GROSS und M.KROOK 1954), daß

$$(I,26) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} h(R \exp(i\theta)) = \frac{1}{2R^2} \exp(-2i\theta) \rightarrow 0$$



Daraus folgt dann:

$$(I,27) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{\alpha}(x) dx = \frac{1}{1 + \alpha^2}$$

Mit (I,1) und (I,22) folgt dann

$$(I,28) \langle |n(k)|^2 \rangle = \frac{n}{1 + \alpha_e^2} + \frac{n Z \alpha_e^4}{(1 + \alpha_e^2)(1 + \alpha_e^2 + \alpha_i^2)}$$

Daraus folgt mit (C4a) und (C7a) für die Elektron-Elektron-Korrelationsfunktion:

$$(I,29) n \tilde{w}_{ee}(r) = - \frac{\bar{n} e^2}{k T_e} \frac{1}{r} \left[ \frac{T_i}{T_e} \exp(-r/D) + \frac{T_e - T_i}{T_e} \exp(-r/D_e) \right]$$

In analoger Weise leitet man ab:

$$(I,30) \langle |N(k)|^2 \rangle = N \frac{1 + \alpha_e^2}{1 + \alpha_e^2 + \alpha_i^2}$$

$$(I,31) N \tilde{w}_{ii}(r) = - \frac{\bar{N} Z^2 e^2}{k T_i r} \exp(-r/D)$$

und

$$(I,32) \langle |g(k)|^2 \rangle = \frac{n e^2}{1 + \alpha_e^2} + \frac{n e^2 Z}{(1 + \alpha_e^2)(1 + \alpha_e^2 + \alpha_i^2)}$$

$$(I,33) n \tilde{w}_{ei}(r) = \frac{\bar{n} Z e^2}{k T_i r} \exp(-r/D)$$

Die Integration des Spektrums läßt sich in derselben Näherung auch für den Fall eines Plasmas mit äußerem Magnetfeld (C86) in analoger Weise durchführen. Es ergeben sich wieder Ausdrücke der Art (I,22) und (I,24).  $h(x)$  ist dann eine andere Funktion, die aber auch für  $R \rightarrow \infty$  gegen Null geht. D.h. das Resultat der Integration ist wieder (I,28).

Anhang II: Lösung der Differentialgleichung (C79):

Die Gleichung (C79) ist von dem Typ:

$$(II,1) \quad y' + h(x)y = g(x)$$

Die allgemeine Lösung (s. E. KAMKE 1956 S. 16) für eine Integralkurve durch den Punkt  $\xi, \eta$  ist:

$$(II,2) \quad y = \exp\{-H(x)\} \left[ \eta + \int_{\xi}^x g(x) \exp\{H(x)\} dx \right]$$

mit  $H(x) = \int_{\xi}^x h(x) dx$

In diese Lösung kann man jetzt die Ausdrücke aus (C79) einsetzen. Der Punkt  $\xi, \eta$  ergibt sich aus der Forderung, daß  $f_1$  eine eindeutige Funktion von  $\omega$  sein soll, d.h.

$f_1$  muß periodisch mit der Periode  $2\pi$  von  $\varphi$  abhängen. Dies erreicht man, wenn man  $\xi = -\infty$  (bei den Ionen  $= +\infty$ ) setzt. Da  $s$  einen positiven Realteil hat (C55), wird dann  $\eta \exp\{-H\}$  gleich Null. Die Lösung lautet dann nach (II,2) und (C79):

$$(II,3) \quad f_1(u, \omega, \varphi, k, s) = \int_{-\infty}^{\varphi} d\varphi' \left[ \frac{c}{B} \ell(k, s) \frac{\partial f_1(\omega')}{\partial \omega'} + \frac{1}{\Omega_e} f_1'(k, \omega') \right] \cdot \exp\left\{-\frac{1}{\Omega_e} [(s - iku \cos \gamma)(\varphi - \varphi') - iku \sin \gamma (\sin \varphi - \sin \varphi')]\right\}$$

Die Integrationsvariable  $\varphi'$  entspricht  $z$  in (II,2).  $x'$  ergibt sich aus  $x$  nach (C78) wenn man  $\varphi$  durch  $\varphi'$  ersetzt. Daß die Lösung (II,3) mit der Periode  $2\pi$  von  $\varphi$  abhängt, ersieht man folgendermaßen: Man führt eine neue Integrationsvariable ein:

$$(II,4) \quad x = \varphi' - \varphi$$

Dann geht (II,3) über in:

$$(II,5) \quad f_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{c}{B} \mathcal{E}(\kappa, s) \frac{\partial f_0(x')}{\partial x'} + \frac{1}{\Omega_e} f'(\kappa, x') \right] \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{\Omega_e} \left[ (s - iku \cos \psi)(-x) - ikv \sin \psi (\sin \varphi - \sin \varphi') \right] \right\}$$

Die Integrationsgrenzen hängen jetzt nicht mehr von  $\varphi$  ab. Da  $\varphi$  im Integranden nur in trigonometrischen Funktionen auftritt (auch in  $x'$  geht nur der Sinus und der Kosinus von  $x + \varphi$  ein), ändert sich  $f_1$  nicht, wenn man  $\varphi$  durch  $\varphi \pm 2\pi$  ersetzt. (II,3) ist also unsere gesuchte Lösung. (siehe auch BERNSTEIN 1958, Formel 9-12).

### Anhang III: Die Funktionen R, S und Y.

#### 1. Die Funktionen $R(\kappa, s)$

Die Funktionen  $R_e(\kappa, s)$  und  $R_i(\kappa, s)$  sind durch (C83) definiert. Es soll nur der Fall diskutiert werden, daß es sich bei den ungestörten Verteilungsfunktionen um MAXWELL-Verteilungen handelt, d.h. wir setzen die Gültigkeit von (C59) voraus. Dann ist:

$$(III,1) \quad R_e(\kappa, s) = \frac{i \alpha_e^2}{\bar{n} \Omega_e} \int_{-\infty}^{\infty} d^3v \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi' \kappa x' f_0(x') \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{\Omega_e} \left[ (s - iku \cos \psi)(\varphi - \varphi') - ikv \sin \psi (\sin \varphi - \sin \varphi') \right] \right\}$$

Nach (C78) ist:

$$(III,2) \quad k w' = w k \sin^2 \varphi \cos \varphi' + u k \cos \varphi$$

Mit dieser Beziehung läßt sich (III,1) umformen zu:

$$(III,3) \quad R_e(k, s) = -\frac{\alpha_e^2}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3v f_e(w) \int_{-\infty}^{\infty} dp' \left[ \frac{\partial}{\partial p'} - \frac{s}{\Omega_e} \right] \exp\{\dots\}$$

Da  $s$  einen positiven Realteil hat (C55) verschwindet die Exponentialfunktion für  $p' \rightarrow \infty$

Damit folgt:

$$(III,4a) \quad R_e(k, s) = -\alpha_e^2 \left[ 1 - \frac{s}{\Omega_e} g_e(k, s) \right]$$

mit

$$(III,5a) \quad g_e(k, s) = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3v \int_{-\infty}^{\infty} dp' f_e(w) \exp\{\dots\}$$

Entsprechend gilt für die Ionen:

$$(III,4b) \quad R_i(k, s) = -\alpha_i^2 \left[ 1 - \frac{s}{\Omega_i} g_i(k, s) \right]$$

mit

$$(III,5b) \quad g_i(k, s) = -\frac{1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3v \int_{-\infty}^{\infty} dp' F_0(w') \exp\{\dots\}$$

Schreibt man das Integral über den Geschwindigkeitsraum in Zylinderkoordinaten (Transformation C78), so ist:

$$(III,6) \quad g_e(k, s) = \frac{1}{n} \int_0^{\infty} dw w \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dp' f_0 \exp\{\dots\}$$

Wir machen jetzt die Transformation

$$(III,7) \quad p''(\varphi') = \frac{p - p'}{2}$$

Damit werden die Grenzen des innersten Integrals von unabhängig und wir können die beiden inneren Integrationen vertauschen. Dann ist:

$$(III,8) \quad g_e(k,s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dw w \int_{-\infty}^{\infty} du \int_0^{\infty} dp'' \int_0^{2\pi} d\varphi f_0 \cdot \\ \cdot \exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{k_e}} [(s - ik u \cos \gamma) 2p'' - ik w \sin \gamma (\sin \varphi - \sin(\varphi - 2p''))]\right\}$$

Setzt man jetzt  $\phi(\varphi) = \varphi - p''$ , so folgt:

$$(III,9) \quad g_e(k,s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dw w \int_{-\infty}^{\infty} du \int_0^{\infty} dp'' \int_{-p''}^{-p''+2\pi} d\phi f_0 \cdot \\ \cdot \exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{k_e}} [(s - ik u \cos \gamma) 2p'' - ik w \sin \gamma (\sin(\phi + p'') - \sin(\phi - p''))]\right\}$$

Die beiden Terme in der letzten Klammer lassen sich zusammenfassen zu  $2 \cos \phi \sin p''$ . Weiterhin sieht man, daß der Integrand eine periodische Funktion von  $\phi$  ist und daß sich die  $\phi$ -Integration genau über eine Periode erstreckt. Man kann das Integral also auch von 0 bis  $2\pi$  ausführen. Dann ergibt sich:

$$(III,10) \quad g_e(k,s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dw w \int_{-\infty}^{\infty} du \int_0^{\infty} dp'' \int_0^{2\pi} d\phi f_0 \cdot \\ \cdot \exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{k_e}} [(s - ik u \cos \gamma) 2p'' - 2 ik w \sin \gamma \sin p'' \cos \phi]\right\}$$

Wir setzen jetzt für  $f_0$  (C59) ein und berücksichtigen, daß

$$(III,11) \quad v'^2 = v^2 = u^2 + w^2$$

Bildet man dann im Exponenten die quadratische Ergänzung für  $u$ , so erhält man:

$$g_e(k, s) = \lambda \left( \frac{m}{2\pi k T_e} \right)^{3/2} \int_0^\infty dw w^2 \int_{-\infty}^{\infty} du \int_0^\infty dp'' \int_0^{2\pi} d\phi .$$

$$(III, 12) \quad \cdot \exp \left\{ - \frac{m w^2}{2 k T_e} - \frac{m}{2 k T_e} \left( u - \frac{2 i k p'' k T_e \cos \gamma}{m \Omega_e} \right)^2 - \frac{2 k^2 p''^2 k T_e \cos^2 \gamma}{m \Omega_e^2} - \frac{\lambda s p''}{\Omega_e} - \frac{2 i k w \sin \gamma \sin p'' \cos \phi}{\Omega_e} \right\}$$

Das Integral über  $u$  ist von der Form

$$(III, 13) \quad \int_{-\infty}^{\infty} du \exp \{ - a (u + b)^2 \} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} .$$

Das Integral über  $\phi$  löst man mit der Beziehung

$$(III, 14) \quad \int_0^{2\pi} d\phi \exp \{ i z \cos \phi \} = 2 \pi J_0(z)$$

Dabei ist  $J_0$  die nullte BESSEL-Funktion. Damit folgt:

$$(III, 15) \quad g_e(k, s) = \frac{\lambda m}{k T_e} \int_0^\infty dw w^2 \int_0^\infty dp'' J_0 \left( \frac{2 k w \sin \gamma \sin p''}{\Omega_e} \right) \cdot \exp \left\{ - \frac{m w^2}{2 k T_e} - \frac{2 p'' s}{\Omega_e} - \frac{2 k^2 p''^2 k T_e \cos^2 \gamma}{m \Omega_e^2} \right\}$$

Das Integral über  $w$  läßt sich mit Hilfe der folgenden Beziehung lösen:

$$(III, 16) \quad \int_0^\infty dw w^{\nu+1} J_\nu(a w) \exp(-w^2 \rho^2) = a^\nu (2 \rho^2)^{-\nu-1} \exp\left(-\frac{a^2}{4 \rho^2}\right)$$

(siehe dazu G.N. WATSON 1958, S. 394)

Damit wird dann

$$(III, 17) \quad g_e(k, s) = 2 \int_0^\infty dp'' \exp \left\{ - \frac{2 p'' s}{\Omega_e} - \frac{2 k^2 p''^2 k T_e \cos^2 \gamma}{m \Omega_e^2} - \frac{2 k^2 k T_e \sin^2 \gamma \sin^2 p''}{\Omega_e^2 m} \right\}$$

Mit der Transformation

$$(III,18) \quad \chi = \lambda \varphi''$$

und der Beziehung  $\lambda \sin^2 \frac{\chi}{2} = 1 - \cos \chi$  geht (III,17) über in:

$$(III,19a) \quad g_e(k, s) = \int_0^\infty d\chi \exp \left\{ - \frac{s\chi}{\Omega_e} - \left[ \sin^2 \chi (1 - \cos \chi) + \frac{1}{2} \chi^2 \cos^2 \chi \right] \frac{\kappa T_e k^2}{m \Omega_e^2} \right\}$$

entsprechend leitet man für  $g_i$  ab:

$$(III,19b) \quad g_i(k, s) = \int_0^\infty d\chi \exp \left\{ - \frac{s\chi}{\Omega_i} - \left[ \sin^2 \chi (1 - \cos \chi) + \frac{1}{2} \chi^2 \cos^2 \chi \right] \frac{\kappa T_i k^2}{M \Omega_i^2} \right\}$$

Die Funktionen  $g_e$  und  $g_i$  werden als GORDOJEV-Integrale bezeichnet.

## 2. Die Funktionen $\gamma(k, s)$

Die Funktionen  $\gamma_e(k, s)$  und  $\gamma_i(k, s)$  sind durch (C82) definiert. Sie entsprechen den Größen  $X_e$  und  $X_i$  im magnetfeldfreien Fall. Entsprechend führen wir hier wieder das Teilchenbild ein und schreiben wie in (C49):

$$(III,20) \quad f^1(\pi, \omega) = \sum_{j=1}^n \delta(\pi - \pi_j(t=0)) \delta(\omega - \omega_j(t=0))$$

$$(III,21) \quad \begin{aligned} f^1(k, \omega) &= \int_V d^3r f^1(\pi, \omega) \exp(i k \pi) \\ &= \sum_j \exp\{i k \pi_j\} \delta(\omega - \omega_j) \end{aligned}$$

Geht man im  $w$  - Raum zu Zylinderkoordinaten über, so geht wegen der Periodizität in  $\varphi$  die  $\delta$  - Funktion in eine Summe von  $\delta$  - Funktionen über:

$$(III,22) \quad \delta(w-w_j) = \delta(u-u_j) \sum_{e=-\infty}^{+\infty} \delta(\varphi - \varphi_j + 2\pi e)$$

Weiterhin ist nach (C82):

$$(III,23) \quad Y_e(k,s) = \frac{1}{\Omega_e} \int_0^{\infty} dw w \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\varphi} d\varphi' f'(k, w') \cdot \\ \cdot \exp\left\{-\frac{1}{\Omega_e} [(s-iku \cos \gamma)(\varphi - \varphi') - ikw \sin \gamma (\sin \varphi - \sin \varphi')]\right\}$$

Mit (III,21) wird daraus:

$$(III,24) \quad Y_e(k,s) = \frac{1}{\Omega_e} \sum_{j=1}^n \exp(ikx_j) \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \\ \cdot \sum_{e=\frac{\varphi_j-\varphi}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{\Omega_e} [(s-iku_j \cos \gamma)(\varphi - \varphi_j + 2\pi e) - ikw_j \sin \gamma (\sin \varphi - \sin \varphi_j)]\right\}$$

Es ist  $0 \leq \varphi_j, \varphi \leq 2\pi$  . Daraus folgt:

$$(III,25) \quad Y_e = \frac{1}{\Omega_e} \sum_{j=1}^n \exp(ikx_j) \left[ \int_{\varphi_j}^{2\pi} d\varphi \exp\{\dots\} + \sum_{e=1}^{\infty} \int_0^{\varphi_j} d\varphi \exp\{\dots\} \right]$$

Durch die Substitution  $\varphi'(\varphi) = \varphi + 2\pi e$  geht die eckige Klammer über in:

$$\int_{\varphi_j}^{2\pi} d\varphi' \exp\{\dots\} + \sum_{e=1}^{\infty} \int_{2\pi e}^{2\pi(e+1)} d\varphi' \exp\{\dots\}$$

Die Summe läßt sich ausführen, indem man die Integrale aneinanderstückt. Dann wird

$$(III,26) \quad Y_e = \frac{1}{\Omega_e} \sum_{j=1}^n \exp(ikx_j) \int_{\varphi_j}^{\infty} d\varphi' \exp\left\{-\frac{1}{\Omega_e} [(s-iku_j \cos \gamma) \cdot (\varphi' - \varphi_j) - ikw_j \sin \gamma (\sin \varphi' - \sin \varphi_j)]\right\}$$



oder

$$(III,27) \quad Y_e(k,s) = \frac{1}{\Omega_e} \sum_{j=1}^n \exp(ikx_j) \int_{-\infty}^{-x_j} dp' \exp \left\{ -\frac{1}{\Omega_e} [ (s - ikw_j \cos \vartheta) \cdot (-p' - p_j) - ikw_j \sin \vartheta (-\sin \vartheta' - \sin \vartheta_j) ] \right\}$$

Für die Streuung brauchen wir die Größe  $\gamma \langle |Y_e|^2 \rangle$ .  
Bei der Berechnung dieser Größe betrachten wir wieder wie in (C66) die quadratischen Glieder einzeln und schreiben

$$(III,28) \quad \gamma \langle |Y_e|^2 \rangle = \underline{I} + \underline{II}$$

mit

$$(III,29) \quad \underline{I} = \gamma \left\langle \sum_{j=1}^n \left| \frac{1}{\Omega_e} \int_{-\infty}^{-x_j} dp' \exp \{ \dots \} \right|^2 \right\rangle$$

und

$$(III,30) \quad \underline{II} = \gamma \left\langle \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^n \exp \{ ik(x_j - x_l) \} \int_{-\infty}^{-x_j} dp' \exp \{ \dots \} \int_{-\infty}^{-x_l} dq \exp \{ \dots \} \right\rangle$$

Wenn wir jetzt die Mittelung ausführen

(d.n.:  $\sum_j g(x_j) \rightarrow V \int_{-\infty}^{+\infty} d^3v f_0(x) g(x)$ )  
so wird:

$$(III,31) \quad \underline{I} = \gamma \frac{V}{\Omega_e^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3v \left[ f_0(x) \left| \int_{-\infty}^{-x} dp' \exp \{ \dots \} \right|^2 \right]$$

und

$$(III,32) \quad \underline{II} = \gamma \frac{V^2}{\Omega_e^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3v_j \int_{-\infty}^{+\infty} d^3v_l \langle \exp \{ ik(x_j - x_l) \} \rangle f_0(x_j) f_0(x_l) \cdot \int_{-\infty}^{-x_j} dp' \exp \{ \dots \} \int_{-\infty}^{-x_l} dq \exp \{ \dots \}$$

Man sieht, daß

$$(III,33) \quad \text{II} \sim \gamma \frac{g_e^2(k,s)}{5R_e^2}$$

Da  $g_e(k,s)$  auch für  $\gamma \rightarrow 0$  endlich bleibt, folgt aus (III,33), daß II gegen Null geht, wenn  $\gamma \rightarrow 0$ .

Der Term II kann also - genau wie im magnetfeldfreien Fall - gegen I vernachlässigt werden. Mit derselben Begründung werden in (C85) die gemischten Glieder vernachlässigt.

Mit (C55) folgt aus (III,31):

$$(III,34) \quad \text{I} = \gamma \frac{V}{5R_e^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3v f_0(v) \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi' \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi \exp\left\{-\frac{1}{5R_e} [\gamma(-\lambda + \varphi' - \varphi) + (i\omega - ikv \cos \varphi)(\varphi - \varphi') - ikw \sin \varphi (\sin \varphi - \sin \varphi')]\right\}$$

Die Größe I ist reell. Das folgt einerseits aus der Herleitung (Gl. III,31), andererseits sieht man das an folgendem: Vertauscht man  $\varphi$  mit  $\varphi'$ , was nur einer Umbenennung der Integrationsvariablen entspricht, so geht der Integrand in sein Konjugiert-Komplexes über, d.h.  $\text{I} = \text{I}^* \rightarrow \text{I}$  ist reell. Wir führen jetzt eine partielle Integration über  $\varphi$  aus, indem wir die Exponentialfunktion zerspalten in einen Faktor mit einem reellen Exponenten und in einen Faktor mit einem rein imaginären Exponenten. Dann wird:

$$(III,35a) \quad \text{I} = \frac{V}{5R_e} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3v f_0(v) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi' \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi \exp\left\{ \dots \right\} \right]_{\varphi=-\infty}^{\varphi=+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi' \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi (i\omega - ikv \cos \varphi - ikw \sin \varphi \cos \varphi) \cdot \exp\left\{ \dots \right\}$$

Wir schreiben zur Abkürzung

$$(III,35b) \quad \bar{I} = A + B$$

Da  $I$  reell ist, ist  $\text{Im } A = -\text{Im } B$  und weiter

$$(III,36) \quad \bar{I} = \text{Re } A + \text{Re } B$$

Wenn wir die partielle Integration statt über  $\phi$  über  $\varphi'$  ausführen, so gehen die beiden Terme in (III,35) in ihr Konjugiert-Komplexes über, entsprechend der oben gemachten Bemerkung:

$$(III,35c) \quad \bar{I} = A^* + B^*$$

mit

$$(III,37) \quad B^* = -\frac{V}{\Omega_e} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3v f_0(v) \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi' (i\omega - ikv \cos\gamma - ikw \sin\gamma \cos\varphi') \exp\{\dots\}$$

Dann ist:

$$(III,38) \quad 2 \text{Re } B = B + B^* = \frac{V}{\Omega_e} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3v f_0(v) \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi' \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi \cdot (ikw \sin\gamma (\cos\varphi' - \cos\phi) \exp\{\dots\})$$

Wir schreiben jetzt die  $v$  - Integration in Zylinderkoordinaten ( $f_0(v)$  hängt nur von  $u$  und  $w$  ab!) und transformieren  $\varphi'$  und  $\phi$  so, daß die Integrationsgrenzen von  $\varphi$  unabhängig sind:

$$(III,39) \quad 2 \text{Re } B = \frac{V}{\Omega_e} \int_0^\infty dw w \int_{-\infty}^{+\infty} du f_0(v) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi' \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi \cdot i k w \sin\gamma [\cos(\varphi' - \varphi) - \cos(\phi - \varphi)] \cdot \exp\left\{-\frac{1}{\Omega_e} [\gamma(-\phi - \varphi') + (i\omega - ikv \cos\gamma)(\phi - \varphi') - ikw \sin\gamma (\sin(\phi - \varphi) - \sin(\varphi' - \varphi))]\right\}$$

Jetzt können wir die  $\varphi$  Integration mit den beiden innersten Integrationen vertauschen. Außerdem sieht man, daß der Integrand bezüglich  $\varphi$  ein vollständiges Differential ist:

$$(III,40) \quad 2 \operatorname{Re} B = -V \int_0^{\infty} dw w \int_{-\infty}^{\infty} du f_0 \int_{-\infty}^0 d\varphi' \int_0^0 d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} \exp\{\dots\} \right]$$

Das innerste Integral ergibt Null. Es ist also

$$\operatorname{Re} B = 0 \quad \text{und damit}$$

$$(III,41) \quad \bar{I} = \operatorname{Re} A$$

Aus (III,35) ergibt sich:

$$(III,42) \quad A = \frac{V}{\Omega_e} \int_0^{\infty} dw w \int_{-\infty}^{\infty} du f_0 \int_{-\infty}^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{-\varphi} d\varphi' \exp\left\{-\frac{1}{\Omega_e} [\gamma(-\varphi-\varphi') + (i\omega - ikv \cos \gamma)(-\varphi-\varphi') - ikw \sin \gamma (-\sin \varphi - \sin \varphi')]\right\}$$

Substituieren wir  $\varphi$  durch  $-\varphi$ , so wird

$$(III,43) \quad A = \frac{V}{\Omega_e} \int_0^{\infty} dw w \int_{-\infty}^{\infty} du f_0 \int_{-2\pi}^0 d\varphi \int_{-\infty}^{\varphi} d\varphi' \exp\left\{-\frac{1}{\Omega_e} [\gamma(+\varphi-\varphi') + (i\omega - ikv \cos \gamma)(\varphi-\varphi') - ikw \sin \gamma (\sin \varphi - \sin \varphi')]\right\}$$

Da das innerste Integral eine periodische Funktion von  $\varphi$  ist, kann die  $\varphi$ -Integration statt von  $-2\pi$  bis 0 auch von 0 bis  $2\pi$  ausgeführt werden. Damit wird

$$(III,44) \quad A = \frac{n}{\Omega_e} g_e(k, s) \quad , \quad (n = \sqrt{n})$$

und

$$(III,45a) \quad \gamma \langle |Y_e|^2 \rangle = \operatorname{Re} A = \frac{n}{\Omega_e} \operatorname{Re} g_e(k, s)$$

Für  $\gamma \rightarrow 0$  kann man dafür auch schreiben:

$$(III,45b) \quad \lim_{\gamma \rightarrow 0} \gamma \langle |Y_e(k, s)|^2 \rangle = \frac{n}{\omega \alpha_e} \operatorname{Im} R_e(k, \omega)$$

Entsprechend gilt:

$$(III,45c) \quad \gamma \langle |Y_i(k,s)|^2 \rangle = \frac{N}{\Omega_i} \operatorname{Re} g_i(k,s)$$

und

$$(III,45d) \quad \lim_{\gamma \rightarrow 0} \gamma \langle |Y_i|^2 \rangle = \frac{N}{\omega \alpha_i^2} \gamma_m R_i(k, \omega)$$

### 3. Die Funktionen $S(k,s)$

Die Funktionen  $S_e(k,s)$  und  $S_i(k,s)$  sind durch (D4) definiert. Wie in Abschnitt III,1 setzen wir wieder für die ungestörten Verteilungsfunktionen MAXWELL-Verteilungen voraus, d.h. die Gültigkeit von (C59). Damit wird:

$$(III,46a) \quad S_e(k,s) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3v \int_{-\infty}^{\rho} d\rho' \frac{e \ell_A(k,s) \omega'}{\Omega_e k T_e} f_0(\omega') \exp\left[-\frac{1}{\Omega_e} [\dots]\right]$$

und

$$(III,46b) \quad S_i(k,s) = - \int_{-\infty}^{+\infty} d^3v \int_{-\infty}^{\rho} d\rho' \frac{e \ell_A(k,s) \omega'}{\Omega_i k T_i} F_0(\omega') \exp\left[-\frac{1}{\Omega_i} [\dots]\right]$$

Zur Berechnung der Funktionen  $S(k,s)$  betrachten wir den Vektor  $\ell_A$  in Zylinderkoordinaten entsprechend Abb.(13). Es sei  $\chi_1$  der Winkel zwischen  $\ell_A$  und  $\mathcal{K}$  und  $\chi_2$  der Winkel zwischen der zu  $\mathcal{K}$  senkrechten Komponente von  $\ell_A$  und der x-Achse ( $\rho=0$ ). Dann ist:

$$(III,47) \quad E_{Ax} = E_A \sin \chi_1 \cos \chi_2$$

$$E_{Ay} = E_A \sin \chi_1 \sin \chi_2$$

$$E_{Az} = E_A \cos \chi_1$$

Dies entspricht der Darstellung von  $w$  (C78). Mit (C78) ergibt sich dann:

$$(III,48) \quad \begin{aligned} E_A w' = E_A (w \cos \varphi' \sin \chi_1 \cos \chi_2 \\ + w \sin \varphi' \sin \chi_1 \sin \chi_2 + u \cos \chi_1) \end{aligned}$$

Um die Funktionen  $S(\mathbf{k}, s)$  leichter auf ein einfaches Integral zurückführen zu können - analog zur Behandlung der Funktion  $g(\mathbf{k}, s)$  - schreiben wir den Ausdruck (III,48) in folgender Form:

$$(III,49) \quad \begin{aligned} E_A w' = E_A \frac{\sin \chi_1 \cos \chi_2}{k \sin \gamma} (k w \sin \gamma \cos \varphi' + k u \cos \gamma) \\ + \bar{E}_A u (\cos \chi_1 - \frac{\cos \gamma \sin \chi_1 \cos \chi_2}{\sin \gamma}) \\ + \bar{E}_A w \sin \varphi' \sin \chi_1 \sin \chi_2 \end{aligned}$$

Entsprechend spalten wir  $S_e(\mathbf{k}, s)$  in drei Terme auf:

$$(III,50) \quad S_e(\mathbf{k}, s) = S_{eI}(\mathbf{k}, s) + S_{eII}(\mathbf{k}, s) + S_{eIII}(\mathbf{k}, s)$$

die wir nun einzeln berechnen. In Bezug auf die Integrationen entspricht der erste Term von (III,49a) dem Ausdruck (III,2). Damit folgt:

$$(III,51) \quad S_{eI} = i \frac{e}{\kappa T_e} \bar{n} E_A(\mathbf{k}, s) \left( 1 - \frac{s}{s_{2e}} g_e(\mathbf{k}, s) \right) \frac{\sin \chi_1 \cos \chi_2}{k \sin \gamma}$$

Auch der zweite Term läßt sich entsprechend der Funktion  $g_e$  behandeln. Das Integral über  $u$  ist jetzt nicht mehr von der Form (III,13) sondern von der Form

$$(III,52) \int_{-\infty}^{+\infty} du u \exp\{-a(u+s)^2\} = -h \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Damit wird dann:

$$(III,53) S_{eII}(k,s) = i\bar{n} \frac{\hbar e E_A(k,s)}{m \Omega_e^2} \cos \gamma \left( \cos \chi_1 - \frac{\cos \gamma \cos \chi_1 \cos \chi_2}{\sin \gamma} \right) \cdot \int_0^{\infty} dx x \exp\left\{-\frac{s}{\Omega_e} x - \left[ \sin^2 \gamma (1 - \cos x) - \frac{1}{2} x^2 \cos^2 \gamma \right] \frac{\omega T_e \hbar^2}{m \Omega_e^2} \right\}$$

Der dritte Term in (III,50) läßt sich auch in ähnlicher Weise wie die Funktion  $g(k,s)$  behandeln. Die Funktion  $S_{eIII}(k,s)$  ist proportional der Größe

$$(III,54) A = \int_0^{\infty} d\omega \omega^2 \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} dp' f_0 \sin p' \exp\{\dots\}$$

Macht man jetzt die den Gl.(III,7 -11) entsprechenden Umformungen, so erhält man analog zu (III,12):

$$(III,55) A = 2 \sqrt{\frac{m}{2\pi \hbar k T_e}} \int_0^{\infty} d\omega \omega^2 \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_0^{2\pi} d\phi'' \int_0^{2\pi} d\phi \sin(\phi - \phi'') \exp\{\dots\}$$

Die  $u$ -Integration läßt sich wieder entsprechend (III,13) ausführen. Für  $\sin(\phi - \phi'')$  schreiben wir:

$$(III,56) \sin(\phi - \phi'') = \sin \phi \cos \phi'' - \cos \phi \sin \phi''$$

Damit zerfällt das Integral in 2 Terme. Für den ersten ist das innerste Integral von der Art:

$$(III,57) \quad \int_0^{2\pi} d\phi B \sin\psi \exp\{C \cos\phi\} \\ = -\frac{B}{C} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{d}{d\phi} \exp\{C \cos\phi\} \right] d\phi = 0$$

Für den zweiten Term ist das innerste Integral proportional zu:

$$(III,58) \quad -\int_0^{2\pi} d\phi \sin\psi'' \cos\phi \exp\left\{ \frac{2ikw \sin\psi \sin\psi'' \cos\phi}{\Omega_e} \right\}$$

Dies läßt sich schreiben als

$$(III,59) \quad \int_0^{2\pi} d\phi \frac{i\Omega_e}{2k \sin\psi} \frac{\partial}{\partial w} \exp\left\{ \frac{2ikw \sin\psi \sin\psi'' \cos\phi}{\Omega_e} \right\} \\ = \frac{i\Omega_e}{2k \sin\psi} 2\pi \frac{\partial}{\partial w} J_0\left( \frac{2kw \sin\psi \sin\psi''}{\Omega_e} \right) \\ = -2\pi i \sin\psi'' J_1\left( \frac{2kw \sin\psi \sin\psi''}{\Omega_e} \right)$$

Nach dieser Umformung läßt sich das Integral über  $w$  wieder mit Hilfe der Beziehung (III,16) lösen. Das Endergebnis ist dann:

$$(III,60) \quad A = -i\bar{n} \frac{\kappa T_e k \sin^2\psi}{m \Omega_e} \int_0^\infty dx (1 - \cos x) \cdot \\ \cdot \exp\left\{ -\frac{\nu}{\Omega_e} x - \left[ \sin^2\psi (1 - \cos x) + \frac{1}{2} x^2 \cos^2\psi \right] \frac{\kappa T_e k^2}{m \Omega_e^2} \right\}$$



bzw.:

$$S_{e,III}(k,s) = -i\bar{n} \frac{e E_A(k,s)}{m \Omega_e^2} k \sin \gamma \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \quad (III,61a)$$

$$\cdot \int_0^\infty dx (1 - \cos x) \exp \left\{ -\frac{s}{\Omega_e} x - \left[ \sin^2 \gamma (1 - \cos x) + \frac{1}{2} x^2 \sin^2 \gamma \right] \frac{k \bar{v}_e k^2}{m \Omega_e^2} \right\}$$

(III,50) zusammen mit (III,51,53 und 61) ist das gesuchte Ergebnis in allgemeiner Form. Dabei ist noch keine Annahme darüber gemacht, ob es sich bei dem äußeren elektrischen Feld um eine transversale oder eine longitudinale Welle handelt.

Wir schreiben jetzt wieder  $s = \gamma + i\omega$  und machen eine Entwicklung für  $\omega \gg \Omega_e$ . Dazu machen wir Gebrauch von der Beziehung:

$$(III,62) \quad \exp(ix) = \cos x + i \sin x$$

Wir entwickeln  $S_e(k,s)$  dann entsprechend den Formeln:

$$(III,63a) \quad \int_0^\infty \sin ax f(x) dx = \frac{f(0)}{a} - \frac{f''(0)}{a^3} + \frac{f^{(4)}(0)}{a^5} - \dots$$

$$(III,63b) \quad \int_0^\infty \cos ax f(x) dx = \frac{-f'(0)}{a^2} + \frac{f^{(3)}(0)}{a^4} - \frac{f^{(5)}(0)}{a^6} + \dots$$

Diese Formeln erhält man durch fortgesetzte partielle Integration. Sie gelten für alle Funktionen  $f(x)$ , für die sämtliche Ableitungen existieren und für  $x \rightarrow \infty$  gegen Null gehen. (einschließlich der Funktion  $f(x)$  selber). Im vorliegenden Fall der Funktion  $S_e$  konvergieren diese Reihen schnell für  $\omega \gg \Omega_e$ . Aus (III,51,53 und 61) ergibt sich dann für  $\gamma \rightarrow 0$ , wenn alle höheren Terme in B vernachlässigt werden:

$$(III,64a) \quad S_{e,I} = -i\bar{n} \frac{k e E_A(k,\omega)}{m \omega^2} \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_2}{\sin \gamma}$$

$$(III,64b) \quad S_{eII}(\kappa, \omega) = -i\bar{n} \frac{\hbar e E_A(\kappa, \omega)}{m \omega^2} \cos \gamma \left( \cos \chi_1 - \frac{\cos \gamma \sin \chi_1 \cos \chi_2}{\sin \gamma} \right)$$

$$(III,64c) \quad S_{eIII}(\kappa, \omega) = -\bar{n} \frac{\Omega_e \hbar e E_A(\kappa, \omega)}{m \omega^3} \sin \gamma \sin \chi_1 \sin \chi_2$$

Wenn man die Annahme macht, daß es sich bei dem elektrischen Feld um eine transversale Welle handelt (d.h.  $\mathbf{E}_A \cdot \boldsymbol{\kappa} = 0$ ) so gilt:

$$(III,65) \quad \cos \chi_1 \cos \gamma = -\sin \chi_1 \cos \chi_2 \sin \gamma$$

Mit dieser Bedingung heben sich  $S_{eI}$  und  $S_{eII}$  in der Näherung (III,64) genau auf. Es ist also

$$(III,66) \quad S_e(\kappa, \omega) = S_{eIII}(\kappa, \omega)$$

Dies bedeutet, daß nur die Komponente des elektrischen Feldes zu  $S_e(\kappa, \omega)$  beiträgt, die senkrecht auf  $\boldsymbol{\kappa}$  steht. Dies entspricht der Anschauung entsprechend Abb.(14).

Wenn wir schließlich den Brechungsindex gleich 1 annehmen, so ist  $\omega/\kappa = c$  und damit<sup>\*</sup>:

$$(III,67) \quad \begin{aligned} S_e(\kappa, \omega) &= -\bar{n} \frac{\Omega_e e E_A(\kappa, \omega)}{m c \omega^2} \sin \gamma \sin \chi_1 \sin \chi_2 \\ &= -\bar{n} E_A(\kappa, \omega) B \frac{1}{\omega^2} \left( \frac{e}{m c} \right)^2 \sin \gamma \sin \chi_1 \sin \chi_2 \end{aligned}$$

<sup>\*</sup>Dazu sei bemerkt, daß die Größe  $e E_A / m c$  die Dimension einer Frequenz hat (analog zur Zyklotronfrequenz). Weiter sei bemerkt, daß sich dies Ergebnis um einen numerischen Faktor von früheren Rechnungen (W.H.KEGEL 1963) unterscheidet.

L I T E R A T U R

- BERK, H.L. : Phys. Fluids 7, 917 (1964)
- BERNSTEIN, I.B.: Phys. Rev. 109, 10 (1958)
- BERNSTEIN, I.B., S.K.TREHAN and M.P.H. WEENINK:  
Rijhnizen Report 63-12 (1963)
- BHATNAGAR,P.L., E.P. GROSS and M.KROOK:  
Phys.-Rev.94 , 511 (1954)
- BOWLES, K.L.: Phys.Rev. Lett 1, 454 (1958)
- BUNEMAN,O.: J. Geophys. Res. 67, 2050 (1962)
- DAVIS, W.E.R. and S.A. RAMSDEN: Phys.Lett.8, 179 (1964)
- DOUGHERTY,J.P.: J. Fluid Mech.16, 126 (1963)
- DOUGHERTY,J.P. and D.T. FARLEY: Proc.Roy.Soc.A 259,79(1960)
- DOUGHERTY,J.P. and D.T.FARLEY: J.Geophys.Res.68, 5473(1963)
- DREICER,H.: Proc.Vith Conf. Ion.Phen.Gas.  
Vol. III, 261, Paris 1963
- DREICER,H.: Phys.Fluids 7, 735 (1964)
- DUBOIS,D.F. and V.GILINSKY: Proc.Vith Conf.Ion.Phen.Gas.  
Vol.III, 179, Paris 1963
- DUBOIS,D.F. and V.GILINSKY: Phys.Rev.133, A1308 (1964)
- DUBOIS,D.F. and V.GILINSKY: Phys.Rev. 133,A1317 (1964)
- DÜCHS,D.: Phys.Lett.5, 121 (1963)
- FARLEY,D.: J. Geophys.Res. 69, 197 (1964)
- FARLEY,D.,J.P. DOUGHERTY and D.W.BARRON:  
Proc.Roy.Soc. 263A, 238 (1961)
- FEJER,J.A.: J.Geophys.Res.65, 2635 (1960)
- FEJER, J.A.:Can.J.Phys.38, 1114 (1960)
- FEJER,J.A.: Can.J.Phys.39, 716 (1961)
- FIDONE,J., S.LAFLEUER, Ch.LAFLEUR:  
Fontenay-aux-Roses Report EUR-CEA-FC 204 (1963)
- FIOCCO,G.and E.THOMPSON: Phys.Rev.Lett. 10,89 (1963)
- FÜNFER,E., B.KRONAST, H.-J. KUNZE: Phys.Lett.5,125 (1963)
- FÜNFER,E., W.H.KEGEL, B.KRONAST, H.-J.KUNZE:  
Proc.Vith Conf.Ion.Phen.Gas.Vol.IV,119,Paris 1963
- GREWAL,M.S.: Phys.Rev. 134, A 86 (1964)
- GOLDSTEIN,H.: Classical Mechanics, London:  
Addison-Wesley 1959
- GORDON,W.E.: Proc. IRE 46, 1824 (1958)
- HAGFORS,T.: J. Geophys.Res. 66, 1699 (1961)
- HAIN, K. and A.C.KOLB: Nucl. Fusion Suppl. 2, 561, (1962)
- HUGHES, T.P.: Nature 194, 268 (1962)

- ICHIMARU, S., D. PINES and N. ROSTOCKER:  
Phys. Rev. Lett. 8, 231 (1962)
- KAHN, F. D.: Ap. J. 129, 205 (1959)
- KAMKE, E.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und  
Lösungen I, Leipzig: Akademische Verlagsgesell-  
schaft 1956.
- KEGEL, W. H.: Proc. Vith Conf. Ion. Phen. Gas. Vol. III, 189  
Paris 1963
- KEGEL, W. H.: Laborbericht IPP 6/9 (1963)
- KUNZE, H.-J., E. FÜNFER, B. KRONAST and W. H. KEGEL:  
Phys. Lett. 11, 42 (1964)
- LAMB Jr., J. G. L.: Los Alamos Report LA - 2715
- PINEO, V. C. and H. W. BRISCOE: J. Geophys. Res. 66, 3965 (1961)
- PINEO, V. C., L. G. KRAFT and H. W. BRISCOE:  
J. Geophys. Res. 65, 1620 (1960)
- PINEO, V. C., J. L. KRAFT and H. W. BRISCOE: J. Geophys. Res. 65, 2629  
(1960)
- PLATZMAN, P. M., S. J. BUCHSBAUM and N. TOZAR:  
Phys. Rev. Lett. 12, 573 (1964)
- RENAU, J.: J. Geophys. Res. 65, 3631 (1960)
- RENAU, J.: J. Geophys. Res. 67, 3624 (1962)
- RENAU, J.: Z. f. Phys. 177, 158 (1964)
- RENAU, J., H. CAMNITZ and W. FLOOD: J. Geophys. Res. 66,  
2703 (1961)
- RON, A., J. DAWSON and C. OBERMAN:  
Princeton Tech. Memo -178 (1963)
- ROSENBLUTH, M. N. and N. ROSTOCKER: Phys. Fluids 5, 776 (1962)
- ROSTOCKER, N.: Nucl. Fusion 1, 101 (1960)
- SALAT, A.: Laborbericht MPI/PA 2/63 (1963)
- SALPETER, E. E.: Phys. Rev. 120, 1528 (1960)
- SALPETER, E. E.: J. Geophys. Res. 65, 1851 (1960a)
- SALPETER, E. E.: Phys. Rev. 122, 1663 (1961)
- SALPETER, E. E.: J. Geophys. Res. 68, 1321 (1963)
- SCHRAM, P. P. J. M. and W. H. KEGEL: In Vorbereitung
- SCHWARZ, S. E.: Proc. I. E. E. E. 51, 1362, (1963)
- SLUITER, F. W.: Phys. Lett. 7, 325 (1963)
- SPENCER, N. W., L. H. BRACE and G. R. CARIGNAN:  
J. Geophys. Res. 67, 157 (1962)
- SPITZER, L.: Physics of Fully Ionized Gases, New York:  
Intersciences Publishers 1956
- TAYLOR, E. C. and G. G. COMISAR: Phys. Rev. 132, 2379 (1963)

- THOMPSON, E. and G. FIOCCO: Proc. Vith Conf. Ion. Phen. Gas.  
Vol. IV, 111, Paris 1963
- THOMPSON, W. B.: Princeton Report Matt - 91 (1961)
- VACHASPATI: Phys. Rev. 128, 664 (1962)
- WATSON, G. N.: A Treatise on the Theory of Bessel Functions  
2. Ed. Cambridge Univ. Press 1958
- UNSÖLD, A.: Physik der Sternatmosphären  
Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1955

Das Literaturverzeichnis enthält nicht nur die im Text zitierte Literatur, sondern noch weitere Arbeiten über die Streuung elektromagnetischer Wellen in einem Plasma.