

Zum Zündmechanismus einer
Thetapinch-Entladung

R. Chodura

IPP 1/21 März 1964

I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K

G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Zum Zündmechanismus einer
Thetapinch-Entladung

R. Chodura

IPP 1/21

März 1964

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

Zusammenfassung

In der folgenden Arbeit werden die Vorgänge bei der Ionisation durch Elektronenstoss im zeitlich veränderlichen Magnetfeld $B_z(t)$ einer Thetapinch-Spule diskutiert. Diese Vorgänge sind stark abhängig von der im Gas bereits vorhandenen Ladungsträgerdichte. Bei geringer Ladungsträgerdichte ist das elektrische Feld nicht rotationssymmetrisch, und die Ionisation ist hauptsächlich auf die Umgebung des Spulenschlitzes (Stromzuführung) beschränkt.

Von einer gewissen Ladungsträgerdichte an werden äussere elektrische Potentialfelder abgeschirmt, gleichzeitig werden aber infolge ungleicher Bewegung von Elektronen und Ionen innere Raumladungsfelder erzeugt. Es wird versucht, eine annähernde, selbstkonsistente Beschreibung dieser Bewegung zu geben. Bei starker Kopplung von Ionen- und Elektronenbewegung (Quasineutralität) bewegen sich Elektronen und Ionen in radialer Richtung so, als hätten sie beide die gleiche Masse von der Grösse des geometrischen Mittels aus Ionen- und Elektronenmasse, $m = (m_i m_e)^{1/2}$.

Die Elektronenenergie W wird charakterisiert durch die Grösse $\mu = W/|B_z|$. Bei linearer Veränderung von B_z mit der Zeit, $B_z \sim t$, ist μ für $|t| \gg (m_i m_e)^{1/4} / |e \dot{B}_z|^{1/2}$ eine periodische Funktion in t^2 . Ihr Maximalwert μ_{\max} für ein Elektron, das zur Zeit t_0 losläuft, ist gleich dem $(m_i/m_e)^{1/4}$ -fachen des Wertes von μ eines freien Elektrons, das zur Zeit $(m_e/m_i)^{1/4} t_0$ seine Bewegung am gleichen Ort r_0 begonnen hat. Für $|t_0| \gg (m_i m_e)^{1/4} / |e \dot{B}_z|^{1/2}$ ist insbesondere $\mu_{\max} = \frac{1}{2} m_i v_D^2(r_0, t_0) / |B_z(t_0)|$, $v_D = E_\varphi(r_0) / B_z(t_0)$ d.h. ein Elektron gewinnt in seiner ersten Bewegungsperiode eine Maximalenergie W_{\max} von der Grösse der Ionendriftenergie.

Aufgrund dieser Ergebnisse werden Schranken dafür angegeben, wie lange bei einem beliebigen Verlauf von $B_z(t)$ Ionisation möglich ist. Diese Schranken geben den experimentell gefundenen Streubereich der Zündzeitpunkte beim Thetapinch gut

wieder. Es wird auch der Fall diskutiert, dass anstelle des Wirbelfeldes $E_{\varphi} = \frac{r}{2} \dot{B}_z$ ein statisches elektrisches Feld angelegt wird und $B = \text{const.}$ ist. Die in diesem Fall, z.B. bei rotierenden Plasmen und ähnlichen Anordnungen beobachtete kritische Geschwindigkeit $v_c = (2W_i/m_e)^{1/2}$ (W_i = Ionisationsenergie des verwendeten Gases) könnte sich vielleicht durch die oben beschriebene Grenzenergie W_{max} eines Elektrons in einem solchen Feld erklären lassen.

1. Einleitung

Beim Betrieb einer θ -Pinch-Entladung mit einem Spulenstrom, der im Verlauf der Entladung mehrmals sein Vorzeichen ändert, nehmen die zeitlichen und örtlichen Bereiche um die Nullstelle des Magnetfelds eine gewisse Sonderstellung ein. Einerseits hört hier die einschliessende Wirkung des Magnetfelds wegen der grossen Gyrationen der Teilchen auf, andererseits gilt nicht mehr die adiabatische Invarianz des magnetischen Moments.

Es soll hier das Verhalten geladener Teilchen für einen einfachen Fall des Nulldurchgangs des Magnetfeldes beschrieben werden, nämlich für den Nulldurchgang vor der eigentlichen Zündung des Gases in der θ -Pinch Spule. Es soll weiter versucht werden, den Zündvorgang selbst etwas besser zu verstehen, um den Einfluss äusserer Änderungen, z.B. des äusseren Stromkreises, des Füllgasdrucks, eines überlagerten stationären Magnetfeldes, oder der Vorionisierung, auf den Anfangszustand des Plasmas vor der Kontraktionsphase abschätzen zu können.

Unter dem Begriff "Zündung" wird in dieser Arbeit derjenige Zeitpunkt verstanden, zu dem sich im Inneren des Füllgases erstmals eine merkliche Veränderung der Magnetfeld-Verteilung gegenüber der Vakuum-Feldverteilung zeigt, mit anderen Worten, wenn im Füllgas ein Strom von vergleichbarer Grössenordnung zum äusseren Spulenstrom fliesst. Die folgenden Überlegungen beziehen sich daher nur auf Nulldurchgänge des Magnetfeldes, welche über den ganzen Spulenquerschnitt gleichzeitig erfolgen.

Die oben definierte "Zündung" äussert sich infolge der mit ihr verbundenen Verringerung der Induktivität des Entladungsstromkreises in einer sprunghaften Vergrösserung des Betrages der Zeitableitung des Spulenstroms bzw. in einer Verkleinerung des Betrages der um das Entladungsgefäss gemessenen Umfangsspannung. Die Erscheinung, dass diese Zündsprünge immer in einem Zeitbereich von einigen 10^{-7} sec Breite (bei einigen μ sec Periodendauer) um den Nulldurchgang des Spulenmagnetfeldes erfolgen, wurde schon zu Beginn der Untersuchungen am Thetapinch bemerkt, und sowohl die Änderung ihrer Lage in der Folge der Nulldurchgänge, als auch innerhalb des schmalen Zeitbereichs um den Nulldurchgang durch Veränderung des Füllgasdrucks [1], überlagerten Magnetfeldes [2,5] und der Vorionisierung untersucht.

Das schlechte Ionisationsvermögen der θ -Pinch Apparatur - ohne Zündhilfe dauert der Ionisierungsvorgang bis zur Zündung einige Halbwellen der Entladung - erklärt sich aus der Behinderung der Ionisation durch das Spulenmagnetfeld. Trotz der ziemlich hohen induzierten elektrischen Feldstärken von ca. 1 kV/cm können die Elektronen ausser in der Nähe des Nulldurchgangs des Magnetfeldes nicht nennenswert beschleunigt werden, weil sie sofort vom Magnetfeld auf eine Gyrationbahn gezwungen werden, auf der ihre Energie nur mehr entsprechend ihres anfangs gewonnenen kleinen magnetischen Moments zunimmt [3]. Dies führt dazu, dass Elektronen, die ausserhalb eines kritischen Zeitbereiches von etwa 10^{-8} sec um den Nulldurchgang des Magnetfeldes durch Stossionisation entstehen, ihrerseits nicht mehr an der weiteren Vermehrung teilnehmen können, weil sie im Verlauf der Halbwelle des Magnetfeldes die Ionisierungsenergie nicht mehr erreichen. Da die Stossfrequenz für ionisierende Stösse bei 0,1 Torr aber günstigstenfalls etwa $2 \cdot 10^8$ sec⁻¹ ist, so folgt, dass die exponentielle Elektronenvermehrung im kritischen Zeitbereich um den Nulldurchgang des Magnetfeldes nach wenigen Generationen abbricht und bestenfalls nur einen Vermehrungsfaktor pro Nulldurchgang

der Grössenordnung 10 liefert. Dem widerspricht aber, dass eine θ -Pinch Entladung bei 0,1 Torr Füllgasdruck bereits beim zweiten Nulldurchgang des Magnetfeldes zündet.

Erklärungsversuche für diesen Widerspruch nahmen entweder eine zusätzliche Ionisierung durch Sekundärelektronen-Vervielfachung an der Gefässwand [1, 4, 5] oder eine Veränderung des Elektronenenergiegewinns infolge Raumladung im Gasvolumen an [6].

Während die erste Erklärung etwas unrealistische Annahmen über die elastische Reflexion von Elektronen an der Gefässwand machen musste, blieb bei der zweiten unter anderem die Frage offen, auf welche Weise eine Elektronen- und Ionendichte erreicht wird, welche Raumladungsfelder von einer mit der induzierten elektrischen Feldstärke vergleichbaren Grösse erzeugen könnte.

Im folgenden werden daher die Möglichkeiten der Elektronenvermehrung durch Stossionisation etwas genauer diskutiert, wobei die im Verlauf der Vermehrung erfolgende Veränderung des im Gefässvolumen herrschenden elektrischen Feldes mitberücksichtigt werden muss.

2. Ionisation im nicht-rotationssymmetrischen elektrischen Feld

Betrachten wir zunächst das elektrische Feld, das sich allein aufgrund des zeitlich veränderlichen Spulenstroms ohne Störungen durch Raumladungen im Inneren einer geraden, kreisförmigen Zylinderspule unendlicher Länge mit einer Stromzuführung ausbildet. Es wurde in [7] und [3] beschrieben und lautet (Abb. 1):

$$\varphi = \frac{1}{2} [r \dot{L}] - \text{grad } \phi \quad (1)$$

$$\phi = - R_s^2 \dot{B}_z \arctg \frac{\frac{r}{R_s} \sin \varphi}{1 + \frac{r}{R_s} \cos \varphi}$$

Gleichung (1) befriedigt die Maxwellgleichung

$$\text{rot } \varphi = - \dot{L}$$

und die Randbedingung, dass das elektrische Feld senkrecht

auf der einen guten Leiter darstellenden Spule stehen muss. Der prinzipielle Verlauf der zeitlichen Energieänderung eines geladenen, freien (d.h. nicht stossenden) Teilchens in einem durch (1) gegebenen elektrischen und dazu senkrecht stehenden, homogenen, zeitlich veränderlichen Magnetfeld wurde in [3] dargestellt. Danach durchläuft ein zur Zeit t_0 ruhendes Teilchen zunächst eine Phase nicht-adiabatischer Beschleunigung der Dauer

$$t_1 - t_0 \approx \frac{1}{|\omega_g(t_1)|}$$

wobei $\omega_g(t) = \frac{e B_z(t)}{m}$ die Gyrationfrequenz des Teilchens (Ladung e , Masse m) bedeutet. Für $t_0 = 0$ (wobei der Nullpunkt des Zeitmasstabes mit dem Nulldurchgang des Magnetfeldes zusammenfallen soll) ist

$$|\omega_g(t_1)| \cdot t_1 = 1, \quad (2a)$$

für

$$|\omega_g(t_0) \cdot t_0| \gg 1$$

und langsam wachsendes $\omega_g(t)$ (z.B. $\omega_g(t) = \frac{\dot{\omega}_g(0)}{\omega} \sin \omega t$ und $\omega \ll \sqrt{\dot{\omega}_g(0)}$) geht auch t_1 monoton gegen t_0 :

$$t_1 \approx t_0. \quad (2b)$$

Nach der Zeit t_1 besitzt das Teilchen eine Energie,

$$W(t_1) \approx \frac{e^2}{2m} E^2(t_0) (t_1 - t_0)^2 = \frac{e^2}{2m} \frac{E^2(t_0)}{\omega_g^2(t_1)} \quad (3)$$

und ein annähernd adiabatisch invariantes magnetisches Moment

$$\mu(x_0, t_0) \approx \frac{e^3}{2m^2} \frac{E^2(x_0, t_0)}{|\omega_g^3(t_1)|}. \quad (4)$$

Damit wird die Energie W zu einer Zeit $t > t_1$

$$W(t; x_0, t_0) = \mu(x_0, t_0) \cdot B_z(t) \quad (5)$$

Die Voraussetzung stossfreier Bewegung in der nicht-adiabatischen Beschleunigungsphase des Teilchens ist gewährleistet, wenn

$$t_1 - t_0 < \frac{1}{\nu}$$

oder

$$\sqrt{|\dot{\omega}_g(0)|} > \nu$$

wobei ν die totale Stossfrequenz des Teilchens bedeutet. Dies ist für Elektronen bei den üblichen Parametern der Thetapinch-Entladungen sicher erfüllt.

Im Verlauf der adiabatischen Bewegungsphase wird das Teilchen natürlich Stösse ausführen.

Bei elastischen Stößen verändert das Teilchen sein magnetisches Moment im Mittel um $m \cdot E^2 / B^3$ pro Stoss, jedoch wollen wir diese Änderung vernachlässigen, weil sie für Teilchen, die in der Nähe des Nulldurchgangs von B loslaufen, klein gegen das zur Zeit des Stosses bereits erreichte magnetische Moment sind, und bei späterem Loslaufen kein für die Ionisierung bedeutender Energiegewinn erzielt wird.

Weiter werden im Rahmen dieser nur qualitativen Abschätzung auch keine anregenden Stösse, Mehrfachprozesse usw. betrachtet.

Beim ionisierenden Stoss eines Elektrons gegen ein Neutralgas-molekül oder Atom ist die Tatsache wichtig, dass das eine der nach der Ionisierung vorhandenen 2 Elektronen ziemlich unabhängig von der Energie des stossenden Elektrons nur eine geringe Energie von der Grössenordnung 1 eV besitzt und es erhebt sich die Frage, ob und unter welchen Umständen dieses langsame Elektron die zur Fortsetzung der exponentiell ansteigenden Elektronenlawine nötige Ionisierungsenergie gewinnen kann. Dabei soll wiederum zur Vereinfachung angenommen werden, dass das langsame Elektron unmittelbar nach dem ionisierenden Stoss überhaupt ruht. Der Zeitpunkt $t_{0 \text{ max}}$, zu dem ein langsames Elektron irgendwo im Volumen entstanden sein muss, um im Verlauf der weiteren Viertelwelle von B_z gerade nicht mehr die Ionisierungsenergie W_i erreichen zu können, stellt sicher eine obere Grenze für die Zeit der exponentiellen Elektronenvermehrung dar.

Nach den Gleichungen (5), (4) und (1) ist der Energiegewinn für Teilchen am grössten, die in der Nähe der Stromzuführung der Spule entstehen. Zur Bestimmung von $t_{o \max}$ könnte man also $r_o = R_G$, $f_o \approx \pi$ setzen und erhält dann aus (5), (4), (2b) und (1)

$$\frac{1}{8} e R_S^2 \dot{\omega}_g^2(t_{o \max}) \left(\frac{R_G}{R_S} + \frac{2}{1 - \frac{R_G}{R_S}} \right)^2 \frac{B_{\max}}{|\omega_g^3(t_{o \max})|} = W_i \quad (6a)$$

B_{\max} ist das maximale Magnetfeld der Halbwelle.

Für $R_S = 2,5$ cm, $R_G = 2,2$ cm, $\dot{B}_{(0)} = 5,6 \cdot 10^{10}$ G/sec

$B_{\max} = 5 \cdot 10^4$ G und molekularen Wasserstoff ergibt sich $t_{o \max} = 2,0 \cdot 10^{-7}$ sec.

Analog könnte man eine Schranke für den Beginn der exponentiellen Ionisierung vor dem nächsten Nulldurchgang von B_z dadurch angeben, dass man $W(t_1, r_o)$ nach Gl. (3) und für r_o an der Zuführung gleich W_1 setzt (hier stellt $W(t_1)$ ein Maximum für $W(t)$ dar, da $W(t)$ in der adiabatischen Bewegungsphase wegen $|B_z| \rightarrow 0$ abnimmt). Zusammen mit (1) und (2b) ergibt sich dann:

$$\frac{1}{8} m R_S^2 \frac{\dot{\omega}_g^2(t_{o \min})}{\omega_g^2(t_{o \min})} \left(\frac{R_G}{R_S} + \frac{2}{1 - \frac{R_G}{R_S}} \right)^2 = W_i \quad (6b)$$

und bei den oben verwendeten Parametern und $W_i = 15,4$ eV ist $t_{o \min} = 0,92 \cdot 10^{-7}$ sec.

Diese Ionisierungszeiten würden einen ziemlich grossen Vermehrungsfaktor eines primär vorhandenen Elektrons pro Nulldurchgang ergeben [11]. Abb. 2 gibt die Stosszahl ionisierender Stösse von Elektronen gegen H_2 -Moleküle bei 0,1 Torr Druck. Mit $t_{o \max} = 2 \cdot 10^{-7}$ sec und $v_1 = 2 \cdot 10^8$ sec⁻¹ ergäbe sich z.B. ein maximaler Vermehrungsfaktor

$$V = e v_1 t_{o \max} = 10^{12}$$

Es erhebt sich aber natürlich die Frage, wieviel der vor der Nullstelle von B vorhandenen Teilchen wirklich eine exponentielle Vermehrung erfahren. So zeigt eine Betrachtung der Driftbewegung der Ladungen im ζ -Feld nach Gl. (1) und dazu senk-

rechten B-Feld, dass die Ladungen nach dem nulldurchgang von B aus dem Gebiet hoher elektrischer Feldstärke bei der Spulenzuführung in das Gebiet niedriger Feldstärke am gegenüberliegenden Gefässrand driften würden.

Genauere Rechnungen, die von K. Hain für eine homogene Anfangsdichtevertelung über den Gefässquerschnitt zur Zeit t_0 an gestellt wurden, zeigen, dass für t_0 in der Nähe des nulldurchgangs ($|\sqrt{\dot{\omega}_y(0)} \cdot t_0| < 1$) fast alle Teilchen innerhalb eines Zeitintervalls $\Delta t \approx \frac{1}{|\dot{\omega}_y(0)|}$ auf die Gefässwand treffen (Abb. 3). Es ist also sicher eine starke Wechselwirkung der Elektronen mit der Gefässwand während dieser Ionisierungsphase vorhanden, die vielleicht verhindert, dass Elektronen zu rasch aus den Gebieten hinausdriften, in denen sie sich exponentiell vermehren können. Wegen der Unübersichtlichkeit der Wandprozesse kann man diese Ionisierungsphase im reinen Vakuum - φ - Feld (1) kaum genauer untersuchen und sie ist auch praktisch kaum wichtig, weil sie durch äussere Vorionisierung meist übersprungen wird.

Bei zunehmender Ladungsträgerdichte im Gasvolumen gelangen durch Stösse oder beim nulldurchgang des Magnetfeldes immer mehr geladene Teilchen - annähernd den Feldlinien folgend - an die Wand und zwar so lange, wie eine Radialkomponente des elektrischen Feldes am Gefässrand erhalten bleibt. Mit ihrem Verschwinden verschwindet der gesamte Potentialfeldanteil in Gl. (1) und es bleibt allein das rotationssymmetrische Wirbelfeld übrig.

Die zur Aufhebung des Potentialfeldes im Gefässinnenraum an der Gefässwand nötige Ladungsdichte σ ergibt sich unter Verwendung der Randbedingungen

$$\bar{E}_\varphi (R_s) = 0, \quad \bar{E}_r (R_G) = 0$$

zu

$$\sigma (R_G, \varphi) = -\frac{\dot{B}_z}{2\pi c^2} \frac{R_s^2}{R_G} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 - \left(\frac{R_G}{R_s}\right)^{2n}} \left(\frac{R_G}{R_s}\right)^n \sin n\varphi \quad (7)$$

Die mittlere Anzahl von Ladungsträgern, die pro Volumeinheit

mindestens vorhanden sein muss, um ein σ nach Gl. (7) erzeugen zu können, ist dann

$$n_{\min} = \frac{\int_0^\pi \sigma(R_G, \varphi) R_G d\varphi}{e \cdot R_G^2 \pi} = \frac{\dot{B}_z}{2\pi^2 c^2 e} \left(\frac{R_S}{R_G}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(-1)^n}{1 - \left(\frac{R_G}{R_S}\right)^{2n}} \left(\frac{R_G}{R_S}\right)^n (\cos n\pi - 1) \quad (8)$$

$$= \frac{\dot{B}_z}{2\pi^2 c^2 e} \left(\frac{R_S}{R_G}\right)^2 \left\{ \ln \frac{1+R_G/R_S}{1-R_G/R_S} + \ln \frac{1+(R_G/R_S)^3}{1-(R_G/R_S)^3} + \dots \right\}$$

Für $\frac{R_G}{R_S} = 0,9$ und $\dot{B}_z = 5,6 \cdot 10^{10}$ T/sec ist diese Zahl

$$n_{\min} \approx 3 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-3}$$

Sie hängt natürlich ziemlich stark vom Verhältnis R_G / R_S ab.

3. Ionisierung im rotationssymmetrischen, elektrischen Feld.

Nach Abschirmung des nicht-rotationssymmetrischen Potentialfeldes, das von Ladungen auf der Spulenoberfläche herrührte, bleibt zunächst nur das rotationssymmetrische Wirbelfeld

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} [\mathbf{v} \times \dot{\mathcal{L}}] \quad (9)$$

im Inneren des Glasgefäßes übrig.

Betrachtet man die Bewegung von Ladungen in diesem und dem dazu senkrechten homogenen Magnetfeld $B_z(t)$, so erkennt man bereits aus der Bewegungsgleichung der Ladung e

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{m} \left(\frac{1}{2} [\mathbf{v} \times \dot{\mathcal{L}}] + [\dot{\mathbf{v}} \times \mathcal{L}] \right), \quad (10)$$

dass für zeitlich konstantes $\dot{\mathcal{L}}$ und für Anfangsbedingungen

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad \dot{\mathbf{r}}(t_0) = 0$$

die Bahn des Teilchens $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau, \tau_0, \mathbf{r}_0)$ nur mehr von einem dimensionslosen Parameter

$$\tau = \sqrt{\dot{\omega}_g} t, \quad \omega_g = \frac{e B_z}{m} \quad (11)$$

und nicht mehr explizit von Ladung und Masse abhängt (Veränderung des Vorzeichens von ω von + nach - bedeutet eine Änderung

des Koordinatensystems vom Rechts- zu einem Linkssystem). Insbesondere durchlaufen also ein Elektron und ein Ion mit gleicher Anfangsbedingung eine spiegelsymmetrische, aber ansonsten gleiche Bahn, allerdings mit einem verschiedenen Zeitmasstab, der durch (11) gegeben ist.

Die Lösung der Bewegungsgleichung (10) für $\dot{L} = \text{const.}$ wurde in [3] angegeben. Sie lautet für ein zur Zeit $t = t_0$ am Ort r_0, φ_0 ruhendes Teilchen

$$r e^{i\varphi} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} r_0 \tau_0^{3/2} \tau^{-1/2} e^{i(\varphi_0 + \frac{\tau_0^2}{4} - \frac{\tau^2}{4})} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \left[J_{3/4}\left(\frac{\tau_0^2}{4}\right) + i J_{-1/4}\left(\frac{\tau_0^2}{4}\right) \right] \cdot J_{1/4}\left(\frac{\tau^2}{4}\right) + \\ & + \left[J_{-3/4}\left(\frac{\tau_0^2}{4}\right) - i J_{1/4}\left(\frac{\tau_0^2}{4}\right) \right] \cdot J_{-1/4}\left(\frac{\tau^2}{4}\right) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

r, φ gibt den Ort des Teilchens zur Zeit $\tau = \sqrt{\omega_g} t$ an, J bedeutet Besselfunktionen.

Abb. 4 zeigt den Abstand $r(t, t_0)$ zweier Teilchen mit gleichem Ladungsbetrag aber verschiedener Masse m_1 bzw. m_e für 3 verschiedene Anfangszeiten t_0 . Die Teilchen schwingen um ein Gyrationzentrum, das durch die Anfangsbedingungen bestimmt ist und führen ausserdem eine radiale Drift aus. Man sieht, dass für Anfangszeiten

$$|t_0| \ll \frac{1}{\sqrt{|\omega_{gi}|}}, \quad \omega_{gi} = \frac{e B_z}{m_i}$$

um den Nulldurchgang des Magnetfeldes das schwerere Teilchen hinter dem leichteren zurückbleibt, während für

$$|t_0| \gg \frac{1}{\sqrt{|\omega_{gi}|}}$$

die Amplitude der Gyrationbewegung für beide Teilchenarten sehr klein geworden ist und die massenunabhängige Drift die Bewegung bestimmt.

Man erkennt daraus, dass in der Umgebung des Nulldurchgangs des Magnetfeldes Ladungstrennungen zwischen leichten Elektronen und schweren Ionen auftreten müssen, die bei genügender Ladungs-

trägerdichte zum Auftreten radialer Raumladungsfelder im Gas führen.

Will man nun den Energiegewinn eines neu gebildeten Elektrons in einer derartigen Feldkombination aus elektrischem Raumladungs- und Wirbelfeld zusammen mit dem zeitabhängigen Magnetfeld ermitteln, so stellt sich das Problem, die Bewegungsgleichung (10) vermehrt um ein Glied mit der Raumladungsfeldstärke \mathcal{E}_r selbstkonsistent zu lösen. D.h. es müssen Lösungen der Bewegungsgleichung

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{e}{m} \left(\frac{1}{2} [\dot{u} \mathcal{L}] + \mathcal{E}_r + [\dot{\vec{r}} \mathcal{L}] \right) \quad (13)$$

gefunden werden, derart, dass die Teilchendichte der Ionen und Elektronen n_i und n_e , die sich aus dieser Bewegung ergibt, die Poisson-Gleichung

$$\operatorname{div} \mathcal{E}_r = 4\pi c^2 e (n_i - n_e) \quad (14)$$

befriedigt.

Es wurde nicht versucht, dieses Problem streng zu lösen. Vielmehr wurde folgendes vereinfachte Modell zugrunde gelegt.

Nimmt man einmal an, dass Ionen bzw. Elektronen je einen Zylinder mit einem Radius $R_i(t)$ bzw. $R_e(t)$ mit gleichmässiger Dichte n_i bzw. n_e erfüllen und sei z.B. $R_e < R_i$ (Abb. 5), dann wird Gl. (12) befriedigt durch

$$\begin{aligned} E_r &= 2\pi c^2 e (n_i - n_e) r, & 0 \leq r \leq R_e \\ E_r &= 2\pi c^2 e \left(n_i - (R_e/r)^2 n_e \right) r, & R_e \leq r \leq R_i \\ E_r &= 0 & R_i \leq r \end{aligned} \quad (15)$$

Innerhalb des kleineren der beiden Zylinder wächst also $E_r = F(t) \cdot r$ linear mit r . Dann folgt aber aus der Bewegungsgleichung (13), dass die Bahn eines Elektrons, das zum Zeitpunkt t_0 am Orte r_0 ruhte, durch eine Gleichung

$$r = r_0 \mathcal{f}(t, t_0)$$

gegeben ist, d.h. bezüglich des Abstands r von der Zylinderachse verlaufen alle Elektronenbahnen im Zylinder ähnlich. Insbesondere bleibt ein Elektron, das sich anfangs am Zylinderrand befand, immer am Zylinderrand, solange nur $R_i > R_e$ und eine anfangs homogene Dichteverteilung bleibt im Verlauf der Bewegung homogen.

Die hier gemachte Näherung besteht nun darin, auch für die gesamte Ausdehnung des grösseren Zylinders eine linear mit r veränderliche Feldstärke E_r anzunehmen und dadurch auch für die zweite Teilchenart, in unserem Beispiel die Ionen, ähnliche Teilchenbahnen und homogene Dichteverteilung zu erhalten. Diese Näherung ist zwar für das Gebiet falsch, das nur von einem der beiden Zylinder umschlossen ist, doch werden dieses Gebiet und die darin enthaltene Anzahl von Teilchen mit zunehmender Teilchenzahl und Annäherung an die Quasineutralität relativ immer kleiner.

Wir nehmen also eine Raumladungsfeldstärke der Form an:

$$E_r = 2\pi c^2 e n_0 R_0^2 \left(\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_e^2} \right) r \quad (15a)$$

wobei n_0 die gemeinsame Anfangsdichte von Ionen und Elektronen und R_0 der gemeinsame Anfangsradius des Ionen- bzw. Elektronenzylinders ist.

Die Bewegungsgleichung (13) lautet dann in r und φ -Komponenten:

$$\ddot{r}_i - r_i \dot{\varphi}_i^2 = r_i \dot{\varphi}_i \omega_{gi} + \frac{1}{2} \omega_{pi}^2 R_0^2 \left(\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_e^2} \right) r_i \quad (13a)$$

$$r_i \ddot{\varphi}_i + 2\dot{r}_i \dot{\varphi}_i = -\frac{1}{2} r_i \dot{\omega}_{gi} - \dot{r}_i \omega_{gi}$$

für die Ionen bzw. wenn man ω_{gi} durch $-\omega_{ge}$ und ω_{pi}^2 durch $-\omega_{pe}^2$ ersetzt analog für die Elektronen. Dabei ist

$$\omega_{gi,e} = \frac{|e| B_z}{m_{i,e}}, \quad \omega_{pi,e}^2 = \frac{4\pi c^2 e^2 n_0}{m_{i,e}}$$

Die φ -Komponenten der Bewegungsgleichungen lassen sich integrieren. Sie geben die Konstanz des generalisierten Drehimpulses des Teilchens

$$r_i^2 \left(\dot{\varphi}_i + \frac{1}{2} \omega_{gi} \right) = \text{const} = P_i \quad (13b)$$

$$r_e^2 \left(\dot{\varphi}_e - \frac{1}{2} \omega_{ge} \right) = \text{const} = P_e$$

Führt man dies in die r -Komponenten der Bewegungsgleichungen (13a) ein, so erhält man

$$\ddot{r}_i = r_i \left\{ \frac{P_i^2}{r_i^4} - \frac{\omega_{gi}^2}{4} + \frac{\omega_{Pi}^2}{2} R_0^2 \left(\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_e^2} \right) \right\} \quad (13c)$$

$$\ddot{r}_e = r_e \left\{ \frac{P_e^2}{r_e^4} - \frac{\omega_{ge}^2}{4} - \frac{\omega_{Pe}^2}{2} R_0^2 \left(\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_e^2} \right) \right\}$$

Die Gleichungen (13b,c) liefern auch die Gleichungen für R_i und R_e selbst wenn man darin $r_i = R_i$ und $r_e = R_e$ setzt. Es ergeben sich 2 nicht-lineare, gekoppelte Schwingungsgleichungen, wobei der Elektronenzylinder $R_e(t)$ wegen der wesentlich kleineren Masse der Elektronen viel rascher schwingt als $R_i(t)$. Nimmt man R_i und ω_{ge} als zeitlich konstant während einer Schwingung von R_e an und setzt kleine Amplituden der Elektronenschwingung voraus, so erhält man eine quasiperiodische Bewegung des Elektronenzylinders um die Gleichgewichtslage \bar{R}_e :

$$\frac{P_e^2}{R_e^4} - \frac{\omega_{ge}^2}{4} - \frac{\omega_{Pe}^2}{2} R_0^2 \left(\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_e^2} \right) = 0 \quad (16)$$

mit der Frequenz

$$\left(4 \frac{P_e^2}{R_e^4} + \omega_{Pe}^2 \frac{R_0^2}{R_e^2} \right)^{1/2}$$

dabei ist $\omega_{Pe} \frac{R_0}{R_e}$ die Plasmafrequenz des auf \bar{R}_e komprimierten Elektronenzylinders.

Die eben beschriebenen schnellen Elektronenschwingungen sollen im folgenden nicht weiter betrachtet werden. Es soll vielmehr angenommen werden, dass der Elektronenzylinder sich stets in der durch Gl. (16) beschriebenen Gleichgewichtslage befindet, d.h. die Trägheit der Elektronen wird vernachlässigt. Das

Gleichungssystem (13c) besteht dann nur mehr aus einer

Differentialgleichung für $R_i(t)$ und einer algebraischen Gleichung (16) für $R_e(t)$. Abb. 6 zeigt eine Lösung dieses Gleichungssystems für

$$B_z = \text{const}, \alpha = \frac{\omega_p^2}{\omega_g^2} \left(\frac{R_o}{R_G} \right)^2 = 36, \quad \frac{m_e}{m_i} = 1,36 \cdot 10^{-4} \quad \text{und} \quad \sqrt{\omega_{ge}} t_o = -85,7$$

$$R_o/R_G = 0,205.$$

Der Grad der Verkopplung von Elektronen- und Ionenbewegung und damit die Annäherung an die Quasineutralität wird durch die Grösse ω_p^2/ω_g^2 bestimmt. Dem Wert $\alpha = 36$ in Abb. 6 entspricht bei $\dot{B}_z = 5,6 \cdot 10^{10}$ Gauß/sec eine Dichte des unkomprimierten Plasmas von $n_o \left(\frac{R_o}{R_G} \right)^2 = 1 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$, also etwas mehr als die nach Gl. (8) zur Abschirmung des äusseren Potentialfeldes nötigen Ladungsdichte. Wir wollen im folgenden so hohe Ladungsdichten n_o annehmen, dass die Voraussetzung der Quasineutralität

$$R_i = R_e = R \tag{17}$$

gilt, das elektrische Raumladungsfeld E_r nach Gl. (15a) aber natürlich beibehalten. Die Elimination des Raumladungsfeldes aus den beiden Gleichungen (13c)

$$(m_i + m_e) \ddot{R} = R \left\{ \frac{m_i P_i^2 + m_e P_e^2}{R^4} - \frac{1}{4} (m_i \omega_{gi}^2 + m_e \omega_{se}^2) \right\}$$

Wegen der im Vergleich zur Ionenmasse sehr kleinen Elektronenmasse ist

$$m_i \omega_{gi}^2 \ll m_e \omega_{se}^2$$

und nach Gl. (13b) auch

$$m_i P_i^2 \ll m_e P_e^2.$$

Daher gilt für den gemeinsamen Radius des Elektronen- und Ionenzylinders R schliesslich

$$\ddot{R} = \frac{m_e}{m_i} R \left\{ \frac{P_e^2}{R^4} - \frac{\omega_{se}^2}{4} \right\} \tag{18}$$

Der Vergleich mit den Bewegungsgleichungen (13c) zeigt, dass sich bei starker Raumladungskopplung zwischen Ionen und Elektronen der gemeinsame Elektronen-Ionen Zylinder so bewegt, als enthielte er nur Teilchen einer Sorte mit gleichem Ladungsbetrag wie die Elektronen aber mit einer Masse m , die dem geometrischen Mittel aus Elektronen- und Ionenmasse entspricht:

$$m = \sqrt{m_i m_e} \tag{19}$$

Mit Gl. (18) ist also die radiale ambipolare Bewegung von Ionen und Elektronen im rotationssymmetrischen elektrischen Feld $E_\varphi = 1/2 r \dot{B}_z$ und homogenen zeitabhängigen Magnetfeld $B_z(t)$ auf die radiale Bewegung eines freien Teilchens der Masse m in diesen Feldern zurückgeführt. Wegen der Ähnlichkeit der r -Komponenten der Bahnen lässt sich aus $R(t)$ auch die radiale Bewegung von Teilchen im Inneren des Zylinders bestimmen und aus Gl. (13b) ihre Bewegung in φ -Richtung. Die radiale Bewegung eines freien Teilchens der Masse m für konstantes B_z wurde bereits in Gl. (12) angegeben, wenn man nur die Beträge der komplexen Gleichung betrachtet und

$$\tau = \sqrt{|\dot{\omega}_g|} t, \quad \omega_g = \frac{|e|B_z}{m} = \frac{|e|B_z}{\sqrt{m_i m_e}} \quad (20)$$

setzt.

Man sieht, dass sich der Zeitmasstab der radialen Bewegung eines Elektrons im ambipolaren Fall gegenüber der freien Radialbewegung im gleichen äusseren Feld um den Faktor $(m_i/m_e)^{1/4}$ verlängert. Damit kann das Teilchen aber auch viel länger vom elektrischen Wirbelfeld E_φ beschleunigt werden und gewinnt wesentlich mehr Energie als im Fall der freien Bewegung. Abb. 7 zeigt die Bahn eines Elektrons bei einer Raumladungskopplung an Ionen mit dem Massenverhältnis $m_i/m_e = 16$. Aus der Gyrationbewegung des freien Elektrons um ein driftendes Gyrationzentrum wird nun eine pulsierende Spiralbahn um die Spulenachse.

Dementsprechend geht auch die Grösse

$$\mu = \frac{\frac{1}{2} m_e v_e^2}{|B_z|} \quad (21)$$

für langsame Feldänderungen ($\tau \gg 1$) nicht gegen einen konstanten Wert wie bei der freien Bewegung, sondern ist für $\tau \gg 1$ eine periodische Funktion in t^2 , nämlich

$$\mu = \frac{1}{4} |e| \sqrt{|\dot{\omega}_{ge}|} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/4} r_0^2 \frac{1}{a - b \cos\left(\frac{\tau^2}{2} + \beta\right)} + \left\{ \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \left[a - b \cos\left(\frac{\tau^2}{2} + \beta\right) - \frac{\tau_0^2}{2} \right]^2 + \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} b^2 \sin^2\left(\frac{\tau^2}{2} + \beta\right) \right\} \quad (22)$$

wobei a , b und β von der Anfangszeit t_0 abhängen und $a > b > 0$. Für $m_e/m_i \ll 1$ kann man natürlich den 2. Summanden in (22) weglassen, der von der Radialbewegung herrührt.

Immerhin sind also wenigstens der Mittelwert von μ über eine Periode von t^2

$$\bar{\mu} = \frac{1}{4\pi} \int_{t^2}^{t^2 + 4\pi} \mu d(\tau^2)$$

oder der Maximalwert von μ einer Periode adiabatische Invarianten.

Abb. 8 zeigt das Maximum μ_{\max} , das μ während einer Periode annimmt, in Abhängigkeit vom Beginn der Bewegung τ_0 . Bei der Berechnung der Grösse μ für ein frei bewegliches Elektron ohne Raumladungskopplung an Ionen [3] wurde gezeigt, dass die Grösse μ in der betrachteten Näherung unabhängig von τ wird. Diesen Fall erhält man, wenn man in (22) $m_e/m_i = 1$ setzt. Es ist also die Funktion

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a - b \cos\left(\frac{\tau^2}{2} + \beta\right)} \left\{ \left(a - b \cos\left(\frac{\tau^2}{2} + \beta\right) - \frac{\tau_0}{2} \right)^2 + b^2 \sin^2\left(\frac{\tau^2}{2} + \beta\right) \right\} = \\ & = \text{const}(\tau_0) = \\ & = \frac{1}{8} \pi |\bar{v}_0|^3 \left| j_{3/4}\left(\frac{\tau_0^2}{4}\right) + i j_{-1/4}\left(\frac{\tau_0^2}{4}\right) + e^{-i\frac{\pi}{4}} \left[j_{-3/4}\left(\frac{\tau_0^2}{4}\right) - i j_{1/4}\left(\frac{\tau_0^2}{4}\right) \right] \right|^2 \end{aligned}$$

eine Konstante bezüglich der Veränderung von τ aber abhängig von τ_0 .

Führt man diese Beziehung in (22) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{4} |e| \sqrt{\omega_{je}} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/4} v_0^2 \quad (22a) \\ & \cdot \left\{ \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \text{const}(\tau_0) - \left[\left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} - \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \right] \frac{b^2 \sin^2\left(\frac{\tau^2}{2} + \beta\right)}{a - b \cos\left(\frac{\tau^2}{2} + \beta\right)} \right\} \end{aligned}$$

Da der 2. Summand in $\left\{ \right\}$ für alle τ_0 und τ positiv ist, kann μ maximal den Wert

$$\mu_{\max} = \frac{1}{4} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/4} |e| \overline{v_{je}^2} r_0^2 \text{const}(\tau_0) \quad (22b)$$

haben, d.i. bis auf den Faktor $\left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/4}$ und die veränderte Definition von τ_0 nach Gl. (20) der gleiche Wert wie für die freie Elektronenbewegung. Durch die Raumladungskopplung hat sich also die Grösse von μ_{\max} gegenüber dem Wert von μ für die freie Bewegung des Elektrons im Verhältnis $\left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/4}$ vergrössert und ausserdem der Zeitmasstab für die Veränderung mit t_0 im gleichen Masse verlängert.

Für $|\tau_0| \gg 1$ wird

$$\begin{aligned} \mu_{\max} &= \frac{1}{8} |e| r_0^2 |\dot{v}_{je}|^{1/2} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/4} |\tau_0|^{-3} = \\ &= \frac{1}{8} |e| r_0^2 \frac{m_i}{m_e} |\dot{v}_{je}|^{-1} |\tau_0|^{-3} \end{aligned} \quad (22c)$$

Bei den vorangegangenen Betrachtungen war angenommen worden, dass alle Teilchen zum Zeitpunkt t_0 in Ruhe waren. Im allgemeinen werden sie jedoch an jedem Ort eine Geschwindigkeitsverteilung mit einer Streuung Δv_0 besitzen. Auch dann ergibt die Betrachtung der ungekoppelten Einzelteilchenbahnen, dass sich ein elektrisches Raumladungsfeld ausbilden muss, welches die mittlere Bewegung der Ionen an die der Elektronen anpasst. Die Streuung in der Anfangsgeschwindigkeit führt nun allerdings dazu, dass die Teilchen ihre gekoppelten Bahnen nicht mehr völlig gleichphasig durchlaufen. Die Gleichphasigkeit wird nur so lange erhalten bleiben wie die Zeit

$$\Delta t_0 = \frac{m_{i,e}}{|e|} \frac{1}{E_f} \Delta v_{0,e}$$

klein ist gegenüber der Dauer einer Bewegungsperiode, das ist gegen $(m_i/m_e)^{1/4}/|e\dot{v}_e|$ für $|\tau_0| \ll 1$ bzw. gegen $(m_i/m_e)^{1/2}/|e\dot{v}_e|$ für $|\tau_0| \gg 1$. Diese Bedingung ist im Verlauf des Ionisierungsprozesses, wo Teilchen verschiedener Entstehungszeit nebeneinander existieren, sicher nicht immer erfüllt. Man kann erwarten, dass dann die periodischen Anteile der Bewegung verwischt werden und dass

dementsprechend auch das magnetische Moment μ etwa einen zeitlichen Mittelwert von (22) annehmen und somit zeitlich konstant wird.

Eine genauere Untersuchung dieser Vorgänge wird vorbereitet.

4. Diskussion des Einflusses äusserer Parameter auf das Zündverhalten.

Man kann die Ergebnisse des vorangegangenen Abschnitts noch etwas verallgemeinern, indem man einen beliebigen Kurvenverlauf für $B_z(t)$ annimmt, der nicht notwendig durch Null gehen muss (Abb. 9). Die Grösse t , die bisher den Abstand der Nullstelle des Magnetfeldes angab, ist nun durch

$$t \rightarrow B_z(t) / \dot{B}_z(t) \quad (23)$$

zu ersetzen und entsprechend τ durch

$$\tau = \frac{|e \dot{B}_z(t)|^{1/2}}{(m_i m_e)^{1/4}} \frac{B_z(t)}{\dot{B}_z(t)} \quad (23a)$$

Insbesondere wird dann für

$$|\tau_0| \gg 1$$

nach Gleichung (22a)

$$\mu_{\max} = \frac{1}{8} m_i r_0^2 \frac{\dot{B}_z(t_0)}{|B_z^3(t_0)|} \quad (22d)$$

Gleichung (22d) führt zu dem einfachen Ergebnis, dass die Energie W_{\max} , die ein Elektron, das zur Zeit t_0 am Ort r_0 losläuft, innerhalb der ersten Periode von μ maximal erreichen kann, gleich

$$\begin{aligned} W_{\max} &= \mu_{\max}(t_0) |B_z(t_0)| = \frac{1}{8} m_i r_0^2 \frac{\dot{B}_z^2(t_0)}{B_z^2(t_0)} = (24) \\ &= \frac{1}{2} m_i E_\varphi^2(r_0, t_0) / B_z^2(t_0) = \frac{1}{2} m_i v_D^2(r_0, t_0) \end{aligned}$$

ist, also gleich der Energie eines mit $v_D = \frac{E_\varphi}{B_z}$ driftenden Ions.

Man kann nun wiederum wie in Abschnitt 2 danach fragen, in welchem Zeitbereich um ein Minimum des Betrages $|B_z(t)|$ ein neu gebildetes Elektron, das sich unter dem Einfluss der Raumladungskopplung mit den Ionen bewegt, die Ionisierungsenergie W_i erlangen kann. Die untere bzw. obere Schranke $t_{0 \min}$ bzw. $t_{0 \max}$ ist durch

$$\mu_{\max}(r_0, t_{0 \min}) |B_z(t_{0 \min})| = W_i \quad (25)$$

bzw.
$$\mu_{\max}(r_0, t_{0 \max}) |B_{z \max}| = W_i$$

gegeben, wobei $|B_{z \max}|$ den Maximalbetrag bezeichnet, den die Feldstärke nach $t_{0 \max}$ noch annehmen kann.

Ist insbesondere das zu $t_{0 \min}$ bzw. $t_{0 \max}$ gehörige $\tau_{0 \min}$ bzw. $\tau_{0 \max}$

$$|\tau_{0 \min}^{\max}| \gg 1$$

so kann man wegen (24) die Ionisierungsbedingung einfacher schreiben:

$$\frac{1}{2} m_i v_D^2(r_0, t_{0 \min}) = W_i \quad (25a)$$

bzw.
$$\frac{1}{2} m_i v_D^2(r_0, t_{0 \max}) |B_{z \max} / B_z(t_{0 \max})| = W_i$$

Für einen sinusförmigen Verlauf von $B_z(t)$ und die auf Seite angegebenen Grössen von $B_z(0)$, B_{\max} , $r_0 = R_G$ und $m_e/m_i = 1,36 \cdot 10^{-4}$ (D_2^+ - Ionen) betragen die Ionisierungsschranken um den Nulldurchgang des Magnetfeldes ($t = 0$)

$$t_{0 \min} = -4,0 \cdot 10^{-7} \text{ sec}$$

bzw.

$$t_{0 \max} = 5,25 \cdot 10^{-7} \text{ sec}$$

Diese Zeiten stimmen in ihrer Grössenordnung recht gut mit dem experimentell gefundenen Streubereich der Zündzeitpunkte von ca. $\pm 3 \cdot 10^{-7}$ sec um den Nulldurchgang des Magnetfeldes überein.

Gleichung (25a) gibt an, wann in einem beliebigen zeitabhängigen Magnetfeld nach Abb. 9 (unter der einzigen Bedingung, dass

$|\tau_0| \gg 1$ nach Gl. (23a)) eine Ionisierung des Neutralgases möglich ist, nämlich dann, wenn die Ionendriftenergie in dem

entsprechenden E_{φ} - und B_z -Feld über der Ionisierungsenergie des Gases liegt. Dies gibt eine Beschränkung der Wirksamkeit einer Vorionisierung des Thetapinches mit Hilfe einer Vorentladung durch die Spule, wobei meist noch ein nahezu stationäres Magnetfeld überlagert wird.

Ist das Magnetfeld der Vorentladung durch

$$B_z(t) = B_0 + B_1 \sin \omega t, \quad B_0 > B_1 > 0$$

gegeben, dann muss nach Gl. (25a) mindestens

$$\frac{\omega^2 B_1^2}{B_0^2 - B_1^2} \geq \frac{8W_i}{m_i R_G^2} \quad (26)$$

sein, um Ionisierung zu ermöglichen.

Für ein linear ansteigendes Magnetfeld

$$B_z(t) = \dot{B}_z t, \quad \dot{B}_z = \text{const}$$

ist nach Gl. (25a) Ionisierung mindestens solange möglich, wie

$$t^2 \leq \frac{m_i R_G^2}{8W_i} \quad (27)$$

Die Ionisierungsdauer ist in diesem Fall völlig unabhängig von B_z und nur von der Gasart und dem Gefässradius abhängig.

Nach der Formulierung der Ionisierungsbedingung von Gl. (25a) ist es offenbar gleichgültig, wie die Driftgeschwindigkeit zustande kommt. Man kann anstatt der Feldkombination aus zeitlich veränderlichem Magnetfeld und zugehörigem Wirbelfeld auch den Fall eines homogenen, zeitlich konstanten Magnetfeldes mit dazu senkrechtem ebenfalls homogenen und konstanten elektrischen Feld betrachten (Abb. 10). Ist die Ladungsträgerdichte so gross, dass Quasineutralität vorausgesetzt werden kann und existiert weiter ein Gradient der Ladungsträgerdichte senkrecht zu E und B, so können die Elektronen bei Anlegen des elektrischen Feldes nicht frei driften, sondern werden von den Ionen aufgrund von Raumladungen zunächst daran gehindert. Dadurch folgen sie länger dem E-Feld und gewinnen nach Gl. (24) eine Energie, die im Maximum gleich der Ionendriftenergie ist.

Diese Erscheinung könnte vielleicht eine Erklärung für die von Alfvén und Mitarbeitern [8] beobachtete kritische Drehschwindigkeit bei rotierenden Plasmen sowie für die von Alfvén postulierte kritische Geschwindigkeit eines interstellaren Gases bei dessen Beschleunigung durch einen Zentralkörper [9] darstellen. In beiden Fällen tritt nämlich als Grenzggeschwindigkeit für die Beschleunigung eines teilweise ionisierten Plasmas die Geschwindigkeit $v_c = (2W_i/m_i)^{1/2}$ bzw. Grenzfeldstärke $E_c = v_c \cdot B$ auf, also gerade die in (25a) für eine mögliche Ionisierung des Gases durch Elektronenstoss geforderte Geschwindigkeit v_D bzw. Feldstärke $v_D B$.

Die Ionisierungsschranken nach Gl. (25a) sind völlig unabhängig von der Neutralgasdichte, allerdings nur solange, wie die Energieverluste der Elektronen bei Stößen klein gegenüber der zwischen zwei Stößen gewonnenen Energie bleibt. Die Vermehrung der Ladungsträger innerhalb der Ionisierungsgrenzen ist dagegen annähernd exponentiell von der Neutralgasdichte abhängig

$$n = n_A e^{\nu_i (t - t_{0 \min})}, \quad t_{0 \min} \leq t \leq t_{0 \max}$$

n = Elektronendichte

n_0 = Neutralgasdichte

ν_i = Stossfrequenz für ionisierende Stösse (Abb. 2), $\nu_i \sim n_0$ wenn man von Teilchenverlusten durch Diffusion usw. absieht.

Daraus erklärt sich die empfindliche Abhängigkeit des Zündzeitpunkts vom Anfangsdruck des Neutralgases [1]. Die Ionisierungsschranken $t_{0 \min}$ und $t_{0 \max}$ hängen nach Gl. (25) noch vom Abstand r_0 von der Spulenachse ab, denn Elektronen mit grossem Abstand von der Achse können im Verhältnis des Quadrats ihres Achsenabstandes mehr Energie gewinnen als achsennahe. Dementsprechend können sich die Elektronen in den wandnahen Gebieten länger exponentiell vermehren als in den achsennahen. Dadurch nimmt die Ladungsträgerdichte in Richtung auf die Gefässwand zu.

Bisher wurde stets angenommen, dass die Energieverluste der Elektronen infolge von Stößen klein gegenüber ihrem Energiegewinn im äusseren elektrischen Feld sei. Dies ist sicher von

einer gewissen Neutralgasdichte an nicht mehr richtig. Oberhalb dieser kritischen Dichte nimmt die Elektronenvermehrung nach einem Maximum wieder ab. Die kritische Stossfrequenz ν_c ist etwa dann erreicht, wenn die Zeit zwischen zwei Stößen nicht mehr ausreicht, um ein Elektron bis zur Ionisierungsenergie W_i zu beschleunigen

$$\frac{m_e}{2} \left(\frac{e}{m_e} \bar{E}_p \frac{1}{\nu_c} \right)^2 = W_i \quad (28)$$

$$\nu_c = \frac{|e \bar{E}_p|}{(2 m_e W_i)^{1/2}}$$

Mit

$$\bar{E}_p = \frac{1}{2} R_G \dot{B}_z, \quad \dot{B}_z = 5,6 \cdot 10^{10} \text{ T/sec}, \quad W_i = 15,4 \text{ eV}$$

ist

$$\nu_c = 4,7 \cdot 10^9 \text{ sec}^{-1}$$

Die totale Stossfrequenz von Elektronen gegen H_2 - Moleküle ist im betrachteten Energiebereich ungefähr durch

$$\nu = 1,7 \cdot 10^{-7} \cdot n_0$$

gegeben, wobei n_0 [cm^{-3}] die H_2 - Gasdichte bedeutet.

Die kritische H_2 - Gasdichte folgt daraus zu

$$n_{0c} = \frac{\nu_c}{1,7 \cdot 10^{-7}} = 2,8 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3} \quad (29)$$

Sie entspricht etwa einem Anfangsdruck des Neutralgases von 1 Torr. Ausserdem können schnellere Elektronen ihre Energie auch dadurch verlieren, dass sie von einer kritischen Ladungsträgerdichte n_c an nicht mehr vorwiegend mit Neutralteilchen stossen, sondern auch durch viele schwache Stösse mit langsameren Elektronen abgebremst werden. Der Zeitmasstab für diesen Vorgang ist etwa durch

$$\tau = 2,6 \cdot n^{-3/2} \ln \Lambda, \quad T [^{\circ}\text{K}]$$

gegeben und führt bei $T \approx 10^4$ $^{\circ}\text{K}$ und $\ln \Lambda = 6$ zu einer kritischen Dichte für die Abbremsung von

$$n_c = \frac{\nu_c}{2,6 \cdot T^{-3/2} \ln \Lambda} = 3,0 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3} \quad (30)$$

Literatur

- [1] J.A. Reynolds, N.J. Phillips, Proc. 5th Int. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, München, 2288 (1961)
- [2] H. Beerwald, Proc. 5th Int. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, 1507 (1961)
- [3] R. Chodura, M. Keilhacker, Z.f.Naturf. 17a, 977 (1962)
- [4] T.H. Jensen, H.G. Voorhies, General Atomic Rep. GA - 2867 (1962)
- [5] E. Bertolini, B. Brunelli, R. Gratton, S.E. Segre, 6th Int. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, Paris (1963)
- [6] H.A.B. Bodin, T.S. Green, G.B.F. Niblett, N.J. Peacock, Proc. 4th Int. Conf. on Ionization Phenomena, Uppsala, 1065 (1959)
- [7] J.E. Allen, S.E. Segre, Nuovo Cim, 21, 980 (1961)
- [8] B. Angerth, L. Block, U. Fahleson, K. Soop, Proc. Conf. on Plasma Phys. and Controlled Thermonuclear Fusion Res. Salzburg, 39 (1962)
- [9] H. Alfvén, J.M. Wilcox, Astrophys. Journal, 136, 1016 (1962)
- [10] D. Düchs, 6th Int. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, Paris (1963)
- [11] G. Malesani, 6th Int. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, Paris (1963)

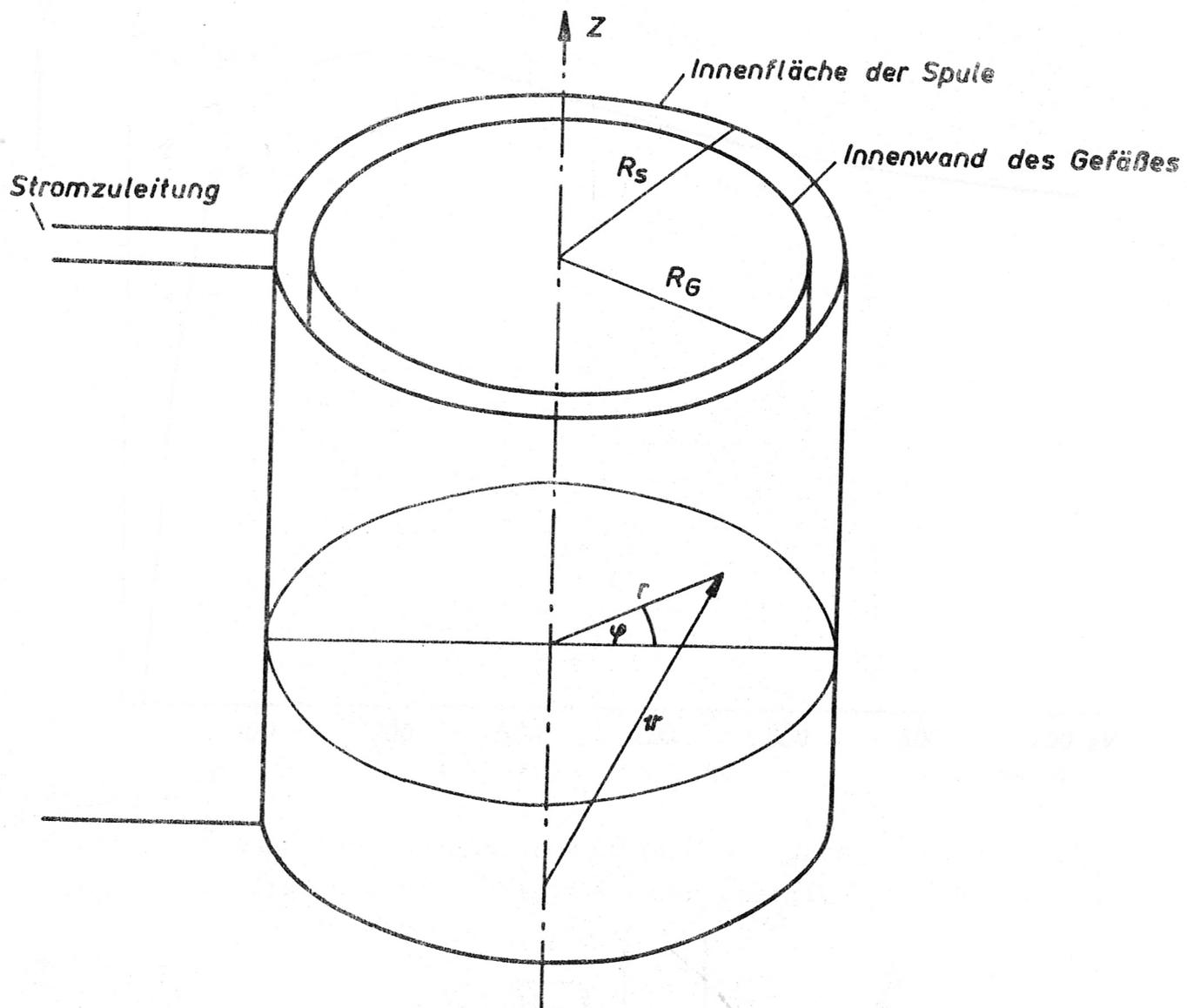


Abb. 1

Anordnung der Thetapinch-Spule und Koordinatensystem

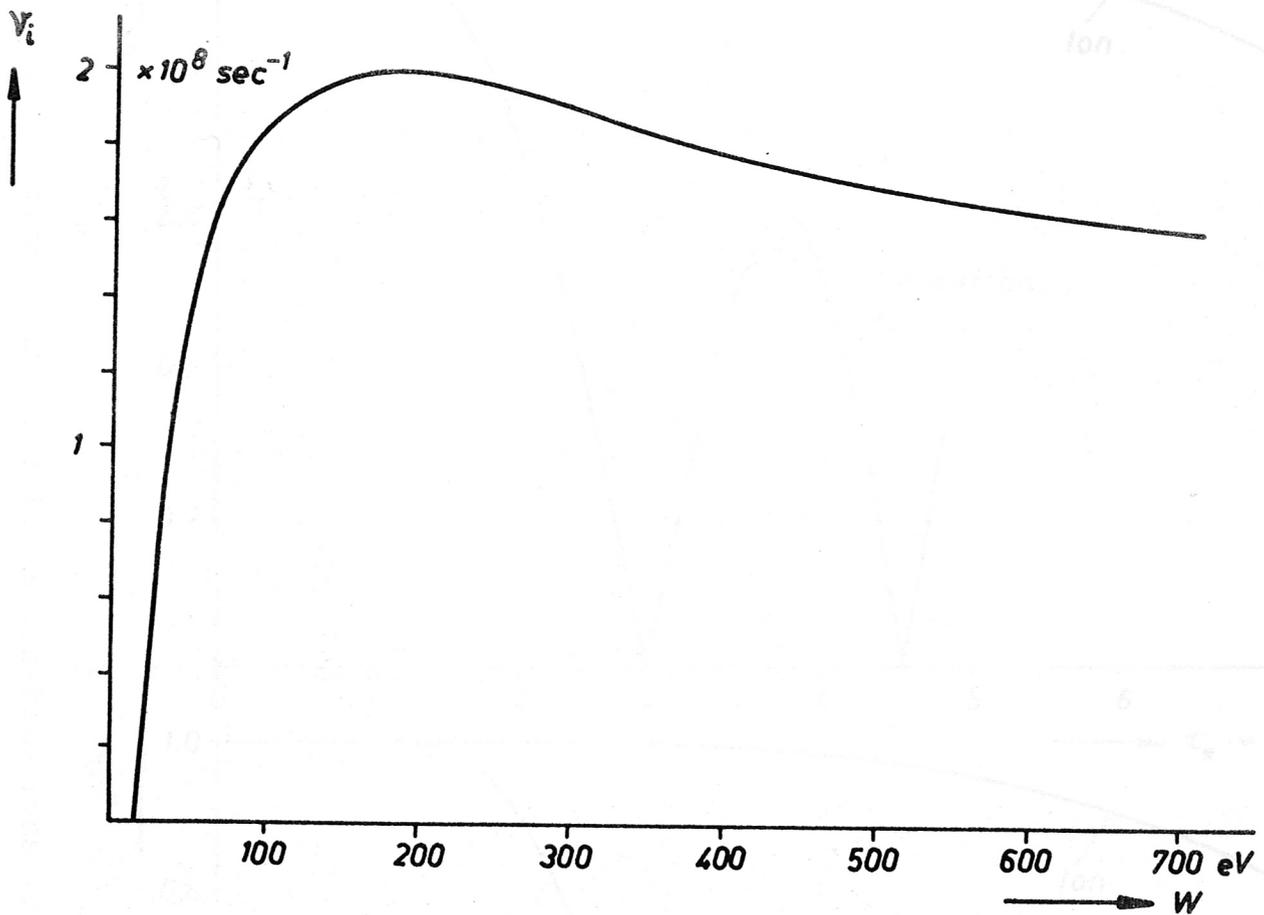


Abb. 2
Stoßfrequenz für ionisierende Stöße ν_i eines Elektrons gegen H_2 - Moleküle in Abhängigkeit von der Energie W des Elektrons

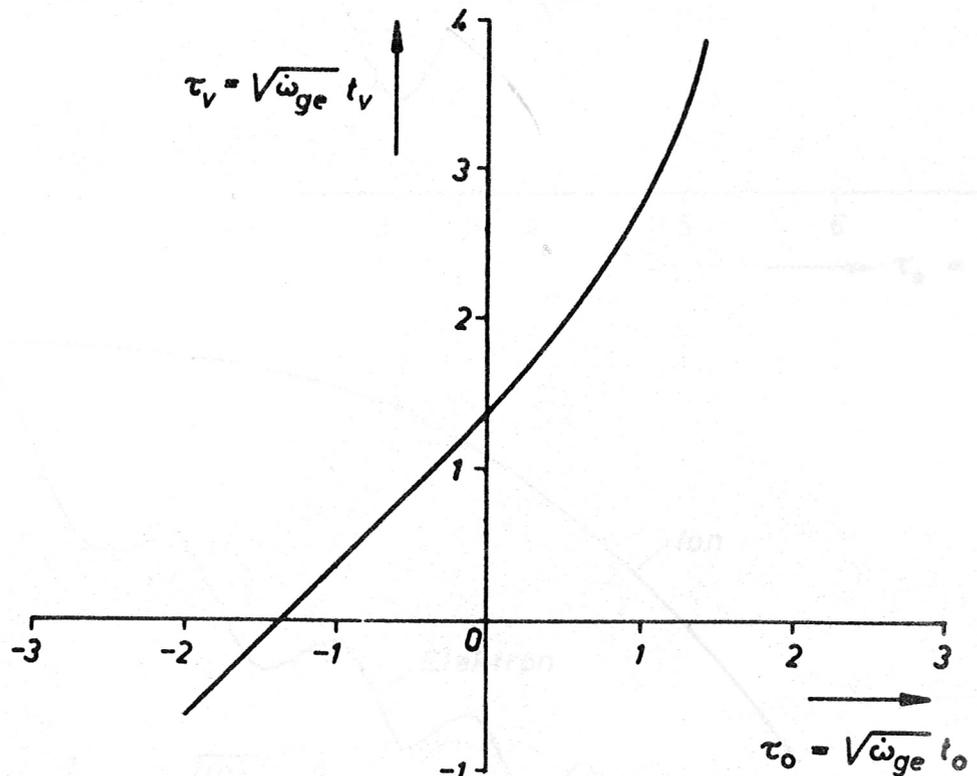
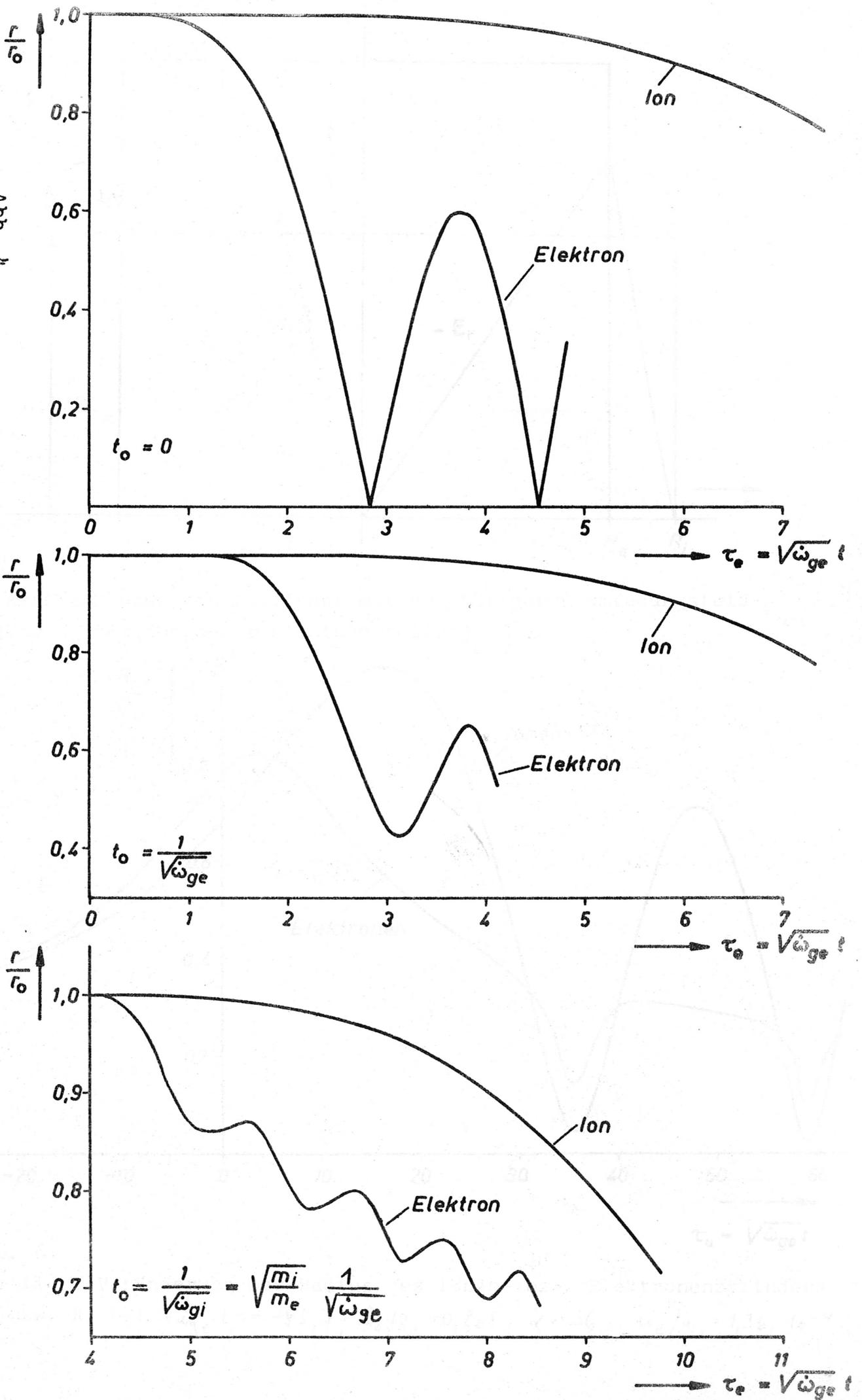


Abb. 3
Zeitpunkt t_v des Verlustes der Hälfte der ursprünglich vorhandenen Elektronen an die Wand. Die Elektronen hatten zu Beginn der Bewegung t_0 homogene Dichteverteilung.

Abb. 4
 Abstand r eines Elektrons bzw. Ions von der Achse für 3 verschiedene Zeiten t_0 des Bewegungs-
 beginns (Das Massenverhältnis Ion:Elektron wurde wie 16:1 angenommen).



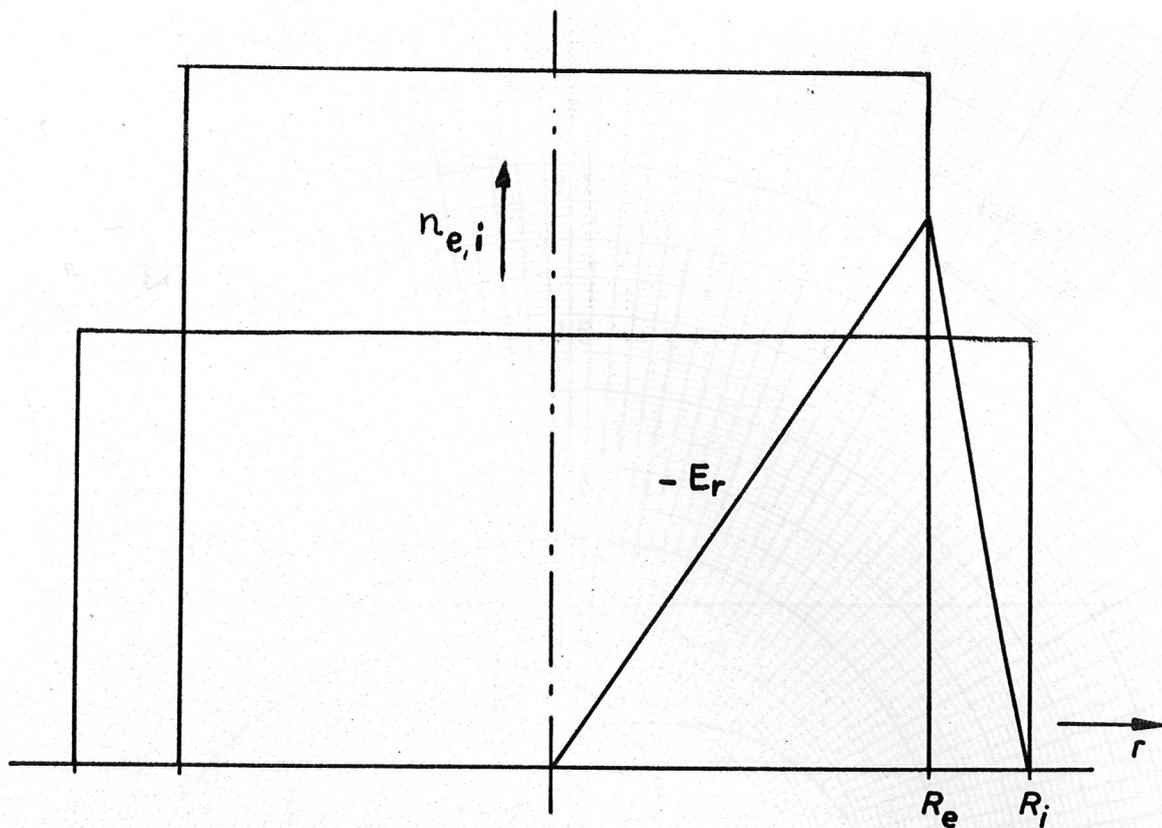


Abb. 5

Elektronen- bzw. Ionenzyylinder mit zugehöriger Raumladungsfeldstärke E_r bei homogener Dichteverteilung

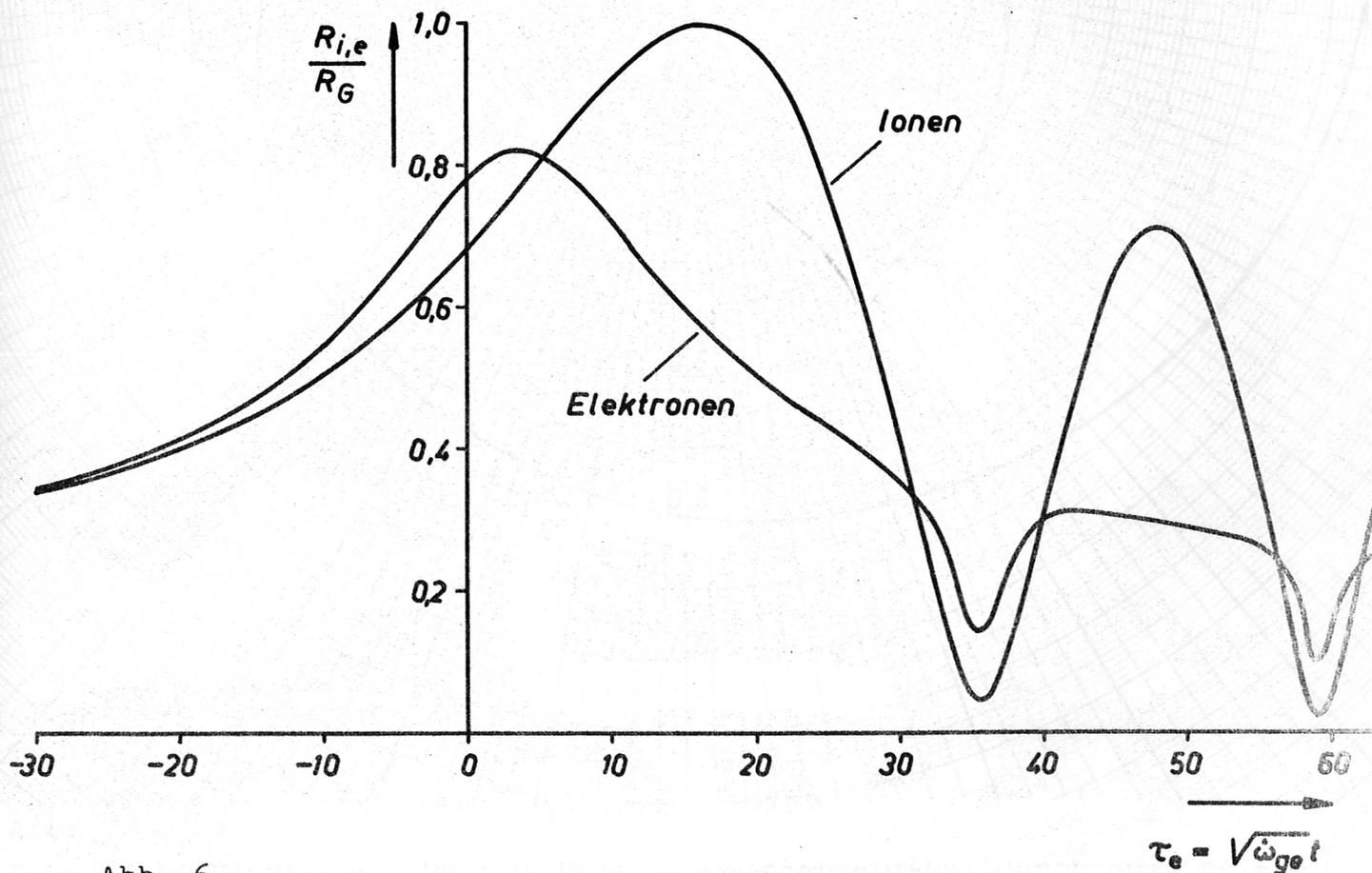


Abb. 6

Zeitliche Veränderung des Radius des Ionen- bzw. Elektronenzyinders R_i bzw. R_e bei $\sqrt{\omega_{ge}} t_0 = -85,7$; $R_0/R_G = 0,205$; $\alpha = 36$; $m_e/m_i = 1,36 \cdot 10^{-4}$

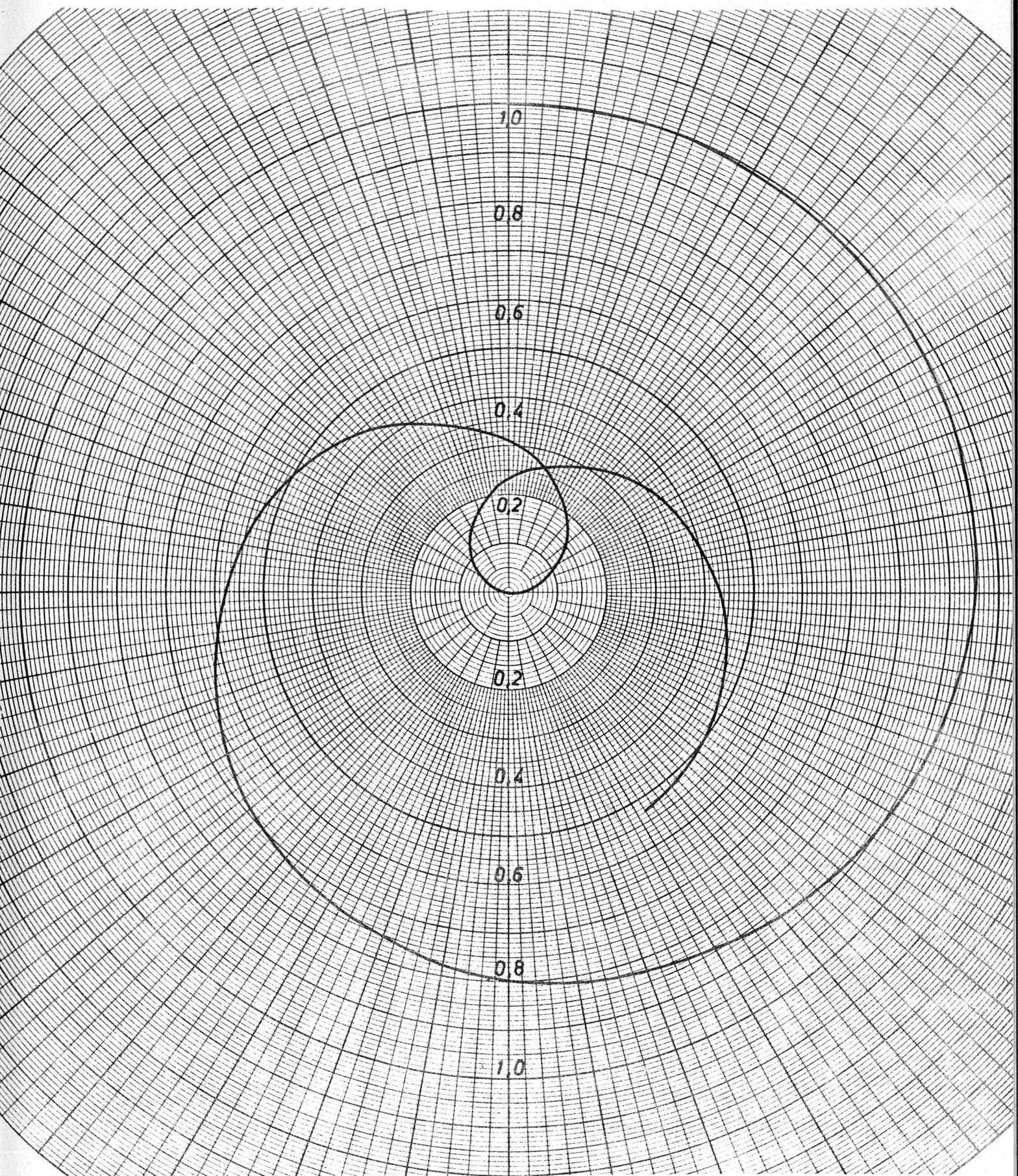


Abb. 7

Bahn eines Elektrons, das zur Zeit des Magnetfeld-Nulldurchgangs $t_0 = 0$ seine Bewegung beginnt und durch Raumladungsfelder an Ionen mit dem Massenverhältnis $m_i / m_e = 16$ gekoppelt ist.

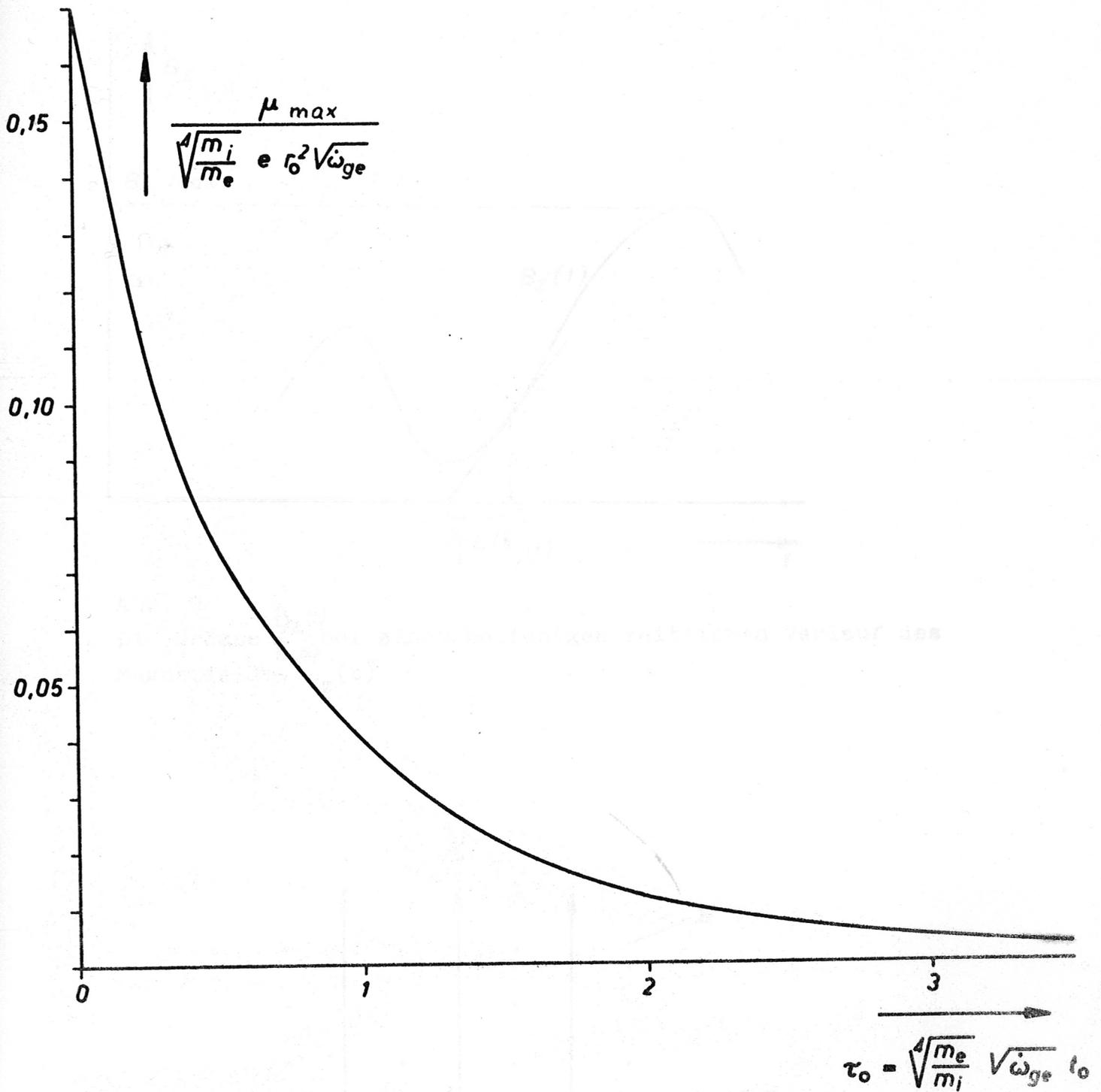


Abb. 8

Maximalwert von $\mu = \frac{1}{2} m_e v_e^2 / B_z$ während einer Periode in t^2 in Abhängigkeit vom Zeitpunkt t_0 des Bewegungsbeginns des Elektrons.

Abb. 10

Orientierung des elektrischen Feldes, Magnetfeldes und Richtungsgradienten grad ϵ

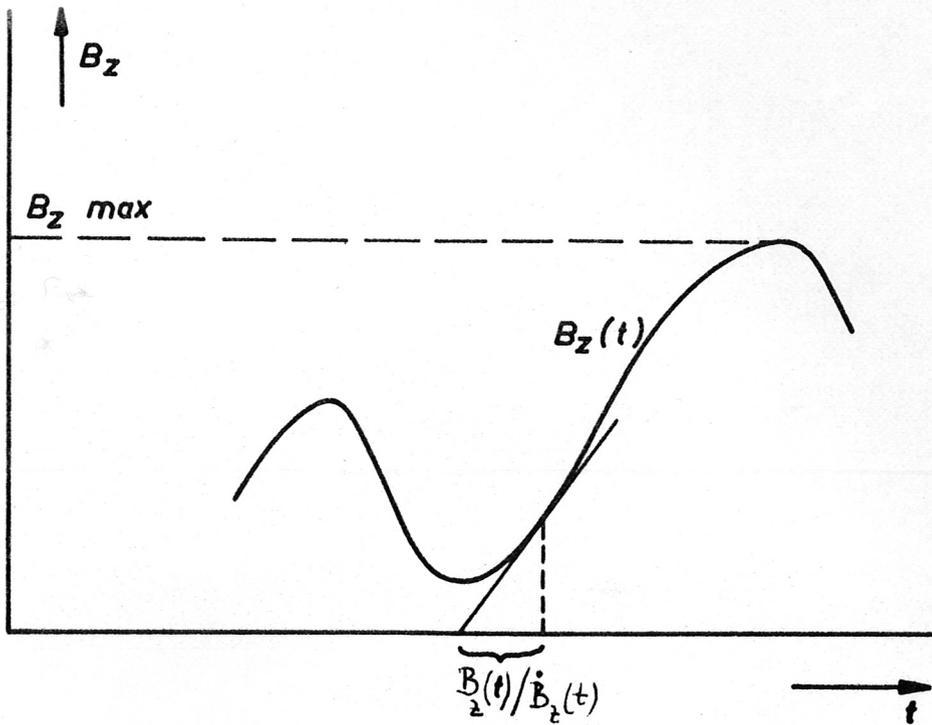


Abb. 9
 Die Grösse $\frac{B_z(t)}{\dot{B}_z(t)}$ bei einem beliebigen zeitlichen Verlauf des Magnetfeldes $B_z(t)$

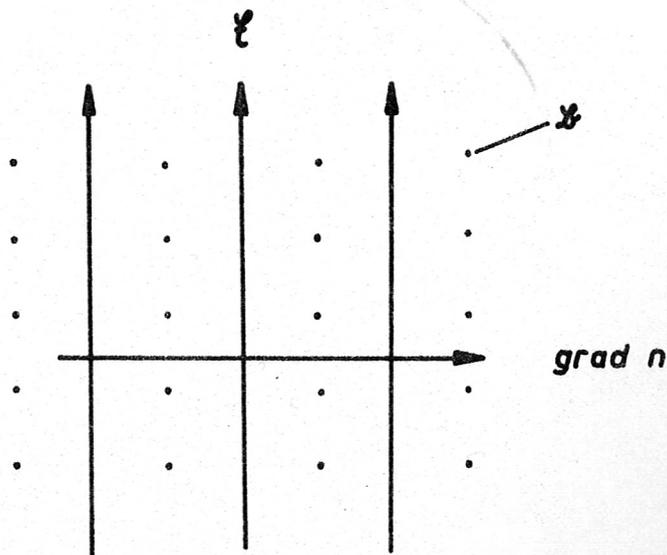


Abb. 10
 Orientierung des elektrischen Feldes , Magnetfeldes und Dichtegradienten $\text{grad } n$