

Dimensionierung und Vergleich von
z-Pinch, Antipinch und Thetapinch
als Anordnungen zur Erzeugung star-
ker Stosswellen.

W. Köppendörfer

IPP 1/28

Juli 1964

I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K

G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Dimensionierung und Vergleich von
z-Pinch, Antipinch und Thetapinch
als Anordnungen zur Erzeugung star-
ker Stosswellen.

W. Köppendörfer

IPP 1/28

Juli 1964

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

Dieser Bericht befasst sich mit den Fragen der Dimensionierung von Stossanlagen, die dazu dienen sollen, ein Plasma in kurzer Zeit mit Hilfe starker Stosswellen aufzuheizen. Dabei werden die drei linearen Konfigurationen z-Pinch, Antipinch und Thetapinch untersucht und hinsichtlich der maximal erreichbaren Geschwindigkeit des treibenden Kolbens verglichen.

Das Verhalten des Plasmas im einzelnen lässt sich nur durch ein System partieller Differentialgleichungen beschreiben, die numerisch mit Hilfe schneller elektronischer Rechenmaschinen gelöst werden müssen (1, 2). Es ist ziemlich aussichtslos, auf diesem Weg Auskunft über die günstigste Dimensionierung der Entladestrecke und des elektrischen Kreises zu erhalten. Deshalb wird auf ein einfaches Modell zurückgegriffen, das die Vorgänge bei der Kompression des Plasmas nur grob annähert, nämlich auf das Schneepflugmodell. In Frage kämen auch das sogenannte adiabatische Modell (3,4) oder das "free particle" Modell (5). Hier erscheint aber das Schneepflugmodell (6) am geeignetsten, da es berücksichtigt, dass mit fortschreitender Kompression immer mehr Masse beschleunigt werden muss, und weil die dem Plasma mitgeteilte Energie ausschliesslich kinetische Energie ist, was die Diskussion und den Vergleich sehr vereinfacht. Quantitativ sind die Ergebnisse der Rechnungen wohl nicht zutreffend, aber die Abhängigkeit der Plasmaenergie von der Grösse der einzelnen Elemente des elektrischen Kreises und von den Abmessungen der Entladestrecke wird sicher richtig wiedergegeben. Zuerst werden der lineare z-Pinch, anschliessend Antipinch und Thetapinch behandelt. Dabei wird von idealen Anfangsbedingungen ausgegangen, nämlich von einem gut leitfähigen, vollionisierten Plasma ohne eingefangenes Magnetfeld.

1. Der lineare z-Pinch

Beim Schneepflugmodell wird angenommen, dass die Plasmamasse vom treibenden Magnetfeld (Kolben) in unendlich dünner Schicht aufgesammelt wird. Entsprechend der Annahme unendlicher Leitfähigkeit fällt das Magnetfeld in dieser Schicht sprunghaft auf Null ab. Die im Kolben aufgesammelte Masse ist dann der vom Kolben bereits

überstrichenen Fläche proportional. Der Impuls des Plasmas ist diese Masse mal augenblickliche Geschwindigkeit des Kolbens. Durch Ableitung nach der Zeit erhält man daraus die Trägheitskraft pro Längeneinheit auf die Kolbenfläche, der von der magnetischen Kraft, vermindert um die Kraft des gaskinetischen Druckes, das Gleichgewicht gehalten werden muss. Damit erhält man die Bewegungsgleichung der Plasmaoberfläche:

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \left[(R_G^2 - R_p^2) \rho_0 \pi \cdot \frac{dR_p}{dt} \right] = - 2\pi R_p \left(\frac{B_p^2}{8\pi} - p_0 \right)$$

Es werden durchweg elektromagnetische CGS Einheiten benutzt. Die einzelnen Grössen bedeuten (Abb. 1):

R_G = Anfangsradius des Plasmas

$R_p^{(t)}$ = Plasmaradius

$\rho_0 = n_{i0} m_{i0}$ = Anfangsdichte

$p_0 = n_{i0} k T_0$ = Anfangsdruck

$B = \frac{2.7}{R_p}$ = Magnetfeld an der Plasmaoberfläche

$I(t)$ = Entladestrom

Der elektrische Kreis besteht aus einer Kondensatorbatterie der Kapazität C in Serie mit einer konstanten Induktivität L_A und einer vom jeweiligen Plasmaradius abhängigen Induktivität L_p . Von einer Dämpfung durch ohmsche Widerstände wird abgesehen. Die Gleichung für den elektrischen Kreis ist dann:

$$(2) \quad \frac{d^2}{dt^2} \left[(L_A + L_p) \cdot J \right] + \frac{1}{C} J = 0$$

Dabei sind im einzelnen:

$L_A = L_0 + 2l \ln \frac{R_G}{R_0}$

L_0 = Induktivität ohne Entladestrecke

$2l \cdot \ln \frac{R_G}{R_0}$ = Anfangsinduktivität des Plasmas

$L_p = 2l \cdot \ln \frac{R_0}{R_p}$ = Induktivität des Plasmas

Die beiden Differentialgleichungen werden in dimensionsloser Form geschrieben durch Einführung der neuen Variablen:

$$\tau \approx \frac{1}{\gamma} \cdot t; \quad x = \frac{R_p}{R_0}; \quad y = \frac{1}{\beta} \cdot J$$

Die Grössen γ und β sind, wenn U_0 die Ladespannung ist:

$$\gamma = R_G \cdot \sqrt[4]{\rho_0 \pi} \cdot \sqrt{\frac{L_A}{U_0}}$$

$$\beta = \gamma \cdot \frac{U_0}{L_A}$$

Die Bewegungsgleichung und die Gleichung des elektrischen Kreises lauten dann:

$$(1') \quad \frac{d}{d\tau} \left[(1-x^2) \frac{dx}{d\tau} \right] = -\frac{\gamma^2}{x} + V \cdot x$$

$$(2') \quad \frac{d^2}{d\tau^2} \left[(A - B \cdot \ln x) \cdot y \right] + y = 0$$

mit den Konstanten:

$$A = \frac{C}{\gamma^2} \cdot L_A; \quad B = \frac{C}{\gamma^2} \cdot 2e; \quad V = 2\pi\rho_0 \frac{R_G^2}{\gamma^2} \cdot \frac{L_A^2}{U_0^2}$$

Um die Kompressionsgeschwindigkeit \dot{x} , die hier von Interesse ist, zu erhalten, müssen die Gleichungen (1') und (2') mit Hilfe einer Rechenmaschine numerisch integriert werden, wobei die Anfangsbedingungen sind:

$$\tau = 0 : \quad x = 1 \quad y = 0 \\ \frac{dx}{d\tau} = 0 \quad \frac{dy}{d\tau} = 1$$

Die wirkliche Kolbengeschwindigkeit ergibt sich aus:

$$(3) \quad \frac{dR_p}{dt} = \frac{R_G}{\gamma} \cdot \dot{x} = \frac{1}{\sqrt[4]{\rho_0 \pi}} \cdot \sqrt{\frac{U_0}{L_A}} \cdot \dot{x}; \quad \text{Der Punkt bedeutet die Ableitung } \frac{d}{d\tau}$$

und die Plasmaenergie pro Teilchen am Kolbenort:

$$(4) \quad E_K = \frac{1}{2} m_i \left(\frac{dR_p}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m_i \frac{1}{\sqrt[4]{\rho_0 \pi}} \cdot \frac{U_0}{L_A} \cdot \dot{x}^2; \quad m_i \text{ Ionenmasse}$$

Die dimensionslose Geschwindigkeit $\dot{x}(\tau)$ hängt ab von den Größen C/γ^2 , L_A , l . Bevor die Lösungen für \dot{x} diskutiert werden, werden kurz die Gleichungen für Antipinch und Thetapinch angeführt.

2. Der Antipinch

Der Antipinch ist die inverse Anordnung des linearen z-Pinches. Das azimuthale Feld eines axialen Stromes, der durch einen zentralen, zylindrischen Leiter fliesst, drückt das Plasma nach aussen. Ohne weitere Hilfsmittel ergibt sich kein Gleichgewicht. Abb. 2 zeigt schematisch eine Antipinchanordnung. Die Bewegungsgleichung, nun gleich in dimensionsloser Form geschrieben, ist dieselbe wie die für den z-Pinch.

$$(5) \quad \frac{d}{d\tau} \left[(1-x^2) \frac{dx}{d\tau} \right] = -\frac{y^2}{x} + v \cdot x$$

Die Stromgleichung lautet:

$$(6) \quad \frac{d^2}{d\tau^2} \left[(A^* + B \cdot \ln x) \cdot y \right] + y = 0$$

Die Konstanten sind dieselben wie in den Gleichungen für den z-Pinch mit Ausnahme von A^* .

$$A^* = \frac{c}{j^2} \cdot L_A^* ; \quad L_A^* = L_0 + 2l \cdot \ln \frac{R_G}{R_A}$$

Der Unterschied zwischen L_A und L_A^* liegt allein darin, dass der Bruch unter dem Logarithmus gestürzt wird, weil beim Antipinch im Gegensatz zum z-Pinch $R_G > R_A$ ist (Abb. 2).

Die dimensionslosen Grössen τ , x , y sind genauso definiert wie beim z-Pinch. Ebenso bleiben die Umrechnungsfaktoren dieselben.

$$y = R_G \frac{4\sqrt{\rho_0 \pi}}{\sqrt{U_0}} \cdot \sqrt{\frac{L_A^*}{L_A}} ; \quad \beta = y \frac{U_0}{L_A^*}$$

Damit wird die Kolbengeschwindigkeit wie beim z-Pinch:

$$(7) \quad \frac{dR_p}{dt} = \frac{1}{4\sqrt{\rho_0 \pi}} \cdot \sqrt{\frac{U_0}{L_A^*}} \cdot \dot{x}$$

und für die Energie des Plasmas:

$$(8) \quad E_k = \frac{1}{2} m_i \frac{1}{4\sqrt{\rho_0 \pi}} \cdot \frac{U_0}{L_A^*} \cdot \dot{x}^2$$

Natürlich ergibt sich beim z-Pinch eine negative Geschwindigkeit, da die Kompression in Richtung zur Achse erfolgt und beim Antipinch eine positive Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit $\dot{x}(\tau)$ ist auch beim Antipinch eine Funktion der Parameter $\frac{c}{j^2}$, L_A^* und l . Während bei z-Pinch und Thetapinch ein ausgezeichneter Zeitpunkt existiert, nämlich wenn die treibende Schicht die Achse erreicht, muss für den Antipinch willkürlich ein Zeitpunkt definiert werden, zu dem man nach der Energie im Plasma frägt. Dieser Zeitpunkt soll hier erreicht werden, wenn x den Wert $x_0 = 2,5$ annimmt, d.h. wenn der ursprüngliche Plasmadurchmesser R_G auf den 2,5fachen Wert aufgeweitet wurde.

3. Der Thetapinch

Beim Thetapinch ergeben sich andere Gleichungen und Umrechnungsfaktoren als bei z-Pinch und Antipinch, weil sich der Zusammenhang zwischen Strom und Magnetfeld vom z-Pinch unterscheidet und damit auch die Ausdrücke für die Induktivitäten. Das Magnetfeld ist hier mit dem Strom verknüpft durch:

$$B = \frac{4\pi}{c} j$$

Der wesentliche Unterschied zu z- und Antipinch ist, dass das Magnetfeld unabhängig vom Plasmaradius R_p ist.

Die Bewegungsgleichung und die Stromgleichung in dimensionsloser Form sind:

$$(9) \quad \frac{d}{d\tau} \left[(1-x^2) \frac{dx}{d\tau} \right] = -y^2 \cdot x + z \cdot x$$

$$(10) \quad \frac{d^2}{d\tau^2} \left[(D - E \cdot x^2) \cdot y \right] + y = 0$$

Die Konstanten Z , E und D bedeuten:

$$Z = \frac{e^2}{2\pi j^2} \frac{L_R^{**2}}{U_0^2} \cdot \rho_0$$

$$D = \frac{c}{j^2} \cdot L_R^{**}$$

$$E = \frac{c}{j^2} \cdot L_{p0}$$

mit
$$L_R^{**} = L_0 + \frac{4\pi^2}{e} R_S^2$$

$$L_{p0} = \frac{4\pi^2}{e} R_G^2$$

R_S ist der Spulenradius innen und R_G der Plasmaradius zu Beginn der Entladung (Abb. 3). L_0 bedeutet wie bisher die Induktivität des Entladekreises ohne Entladestrecke (Spule).

Die Umrechnungsfaktoren sind:

$$\beta = \gamma \cdot \frac{U_0}{L_{A0}}$$

und

$$\gamma = \frac{4}{\sqrt{50\pi}} \cdot \sqrt{\frac{e R_G}{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{U_0}{L_{A0}}}$$

Dim.: $\frac{1}{\text{cmE}} \cdot \text{g}^{\frac{1}{4}} \cdot \text{cm}^{-\frac{3}{4}} \cdot \text{cm} \cdot \text{g}^{\frac{1}{4}} \cdot \text{cm}^{\frac{3}{4}} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{cm}^{-\frac{1}{2}}$

Dim. fehler!!!

Die Induktivität L_{A0} ist die bei Beginn der Entladung:

$$L_{A0} = L_R^{**} - L_{p0}$$

Für die Geschwindigkeit und Energie des Plasmas erhält man

$$(11) \quad \frac{dR_p}{dt} = \frac{1}{\sqrt{50\pi}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi R_G}{e}} \cdot \sqrt{\frac{U_0}{L_{A0}}} \cdot \dot{x}$$

$$(12) \quad E_K = \frac{1}{2} m_i \frac{1}{\sqrt{50\pi}} \cdot \frac{2\pi R_G}{e} \cdot \frac{U_0}{L_{A0}} \cdot \dot{x}^2$$

Für gleiche Werte von \dot{x} wird die Energie beim Thetapinch nur dann so gross wie beim z-Pinch - gleiches $\frac{U_0}{L_R}$ vorausgesetzt - wenn $2\pi R_G = 1$ ist, d.h. wenn die Länge der Spule so gross wie der Umfang des Plasmazylinders zu Beginn der Entladung ist.

Formal kann man für $\frac{2\pi R_G}{e} \cdot \frac{U_0}{L_{A0}}$ auch eine Ringfeldstärke E_φ^* am Kreis mit dem Radius R_G einführen. Es ist nämlich:

$$2\pi R_G \cdot E_\varphi^* = -\dot{\phi} = -R_G^2 \cdot \pi \cdot \dot{B}$$

und mit $\dot{B} = \frac{4\pi}{e} j = \frac{4\pi}{e} \frac{U_0}{L_{A0}}$ ergibt sich

$$(13) \quad E_\varphi^* = \frac{2\pi R_G}{e} \cdot \frac{U_0}{L_{A0}}$$

Das negative Vorzeichen wurde weggelassen, da es nur auf den Betrag ankommt. Wesentlich ist aber, dass E_φ^* eine fiktive Feldstärke ist, was durch den Stern angedeutet wurde, da einerseits für die

Flussänderung $R_G^2 \cdot \pi \cdot \dot{B}$ angenommen wurde, dass kein Plasma in der Spule sei, andererseits aber für den Stromanstieg $\frac{dI}{dt} = \frac{U_0}{L_{PO}}$ vorausgesetzt wurde, dass das Gefäss in der Spule von magnetfeldfreiem Plasma angefüllt sei. Die Feldstärke ist dessen ungeachtet eine praktische Grösse, weil sie bereits einen groben Vergleich zwischen verschiedenen Thetapinch-Anlagen erlaubt, soweit es die Energiezufuhr bis zur ersten Kompression betrifft.

Für die Kolbengeschwindigkeit und die Energie erhält man dann:

$$(14) \quad \frac{dR_p}{dt} = \frac{1}{\sqrt{4\mu_0 \pi}} \cdot \sqrt{E_\varphi^*} \cdot \dot{x}$$

$$(15) \quad E_K = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{1}{\sqrt{4\mu_0 \pi}} \cdot E_\varphi^* \cdot \dot{x}^2$$

E_φ^* eignet sich deshalb gut für einen Vergleich von Anlagen, weil die Werte für $|\dot{x}_0|$ im Augenblick der ersten Kompression, die hier bei $x_0 = 0,1$ angenommen wurde, für die üblichen Thetapinch-Anlagen zwischen $0,6 < |\dot{x}_0| < 0,8$ liegen.

Auch beim Thetapinch hängt \dot{x} von den Grössen $\frac{C}{\gamma^2}$, L_A^{**} , L_{po} ab.

4. Zu den Lösungen der Differentialgleichungen.

Um verschieden dimensionierte Anlagen bezüglich der erreichbaren Kolbengeschwindigkeit und der Energie im Plasma vergleichen zu können, wurden die oben angeführten Differentialgleichungen für verschiedene Werte für Kapazität und Induktivität mit Hilfe der Rechenmaschine des Instituts (IBM 7090) integriert. Dabei zeigte sich, was auch aus einfachen Abschätzungen zu erkennen ist, dass der gaskinetische Druck im ungestörten Plasma, der durch die Konstanten V und Z gegeben ist, bei Anfangsdichten von $n_0 < 5 \cdot 10^{16}$ und Anfangstemperaturen von $kT_0 < 2$ eV gleich nach Beginn der Kompression gegen den Trägheitsdruck zu vernachlässigen ist. Deshalb ist der Verlauf der Kompressionsgeschwindigkeit unabhängig von V und Z.

Im folgenden werden die Lösungen für \dot{x} in Abhängigkeit der Konstanten A und B beim z-Pinch, A^* und B beim Antipinch und E und D beim Thetapinch diskutiert. Zunächst werden die Induktivi-

täten festgehalten und nur die Kapazität der Kondensatorbatterie variiert. Das bedeutet beim z-Pinch, dass die Grössen L_A , l und γ festgehalten werden, beim Antipinch L_A^* , l und γ und beim Thetapinch L_A^{**} , $L_{po} = \frac{4\pi^2 R_G^2}{c}$ und γ . Vorausgesetzt ist ausserdem feste Ladespannung U_0 . Damit werden die Quotienten A/B , A^*/B und E/D als konstant festgelegt. Diese Grössen sind ein Mass für das Verhältnis der konstanten Induktivität des Kreises zur infolge der Plasmabewegung veränderlichen Induktivität und liegen bei z-Pinch und Antipinch im Bereich $0,25 < A/B < 2$ und beim Thetapinch unter zwischen $1 < E/D < 4$.

Abb. 4 zeigt den Verlauf der Geschwindigkeit $x(\tau)$ beim z-Pinch für verschiedene Werte von A und B bei einem Verhältnis $A/B = 0,4$. Die Kurven sind bis zur Zeit τ_0 gezeichnet, wenn der Plasmadurchmesser den Ort $x_0 = 0,1$ erreicht hat, d.h. wenn die Plasmasäule auf 10% ihres Anfangsdurchmessers komprimiert wurde. Wesentlich ist nun, dass ab Werten von $A \approx 10$ der Geschwindigkeitsverlauf nicht mehr von A und B abhängt, sondern allein noch vom Verhältnis A/B . D.h. eine weitere Vergrösserung der Kapazität C wirkt sich auf den Verlauf der Kompression nicht mehr aus, weil

$$\frac{A}{B} = \frac{C \cdot L_A}{\gamma^2 \cdot 2e} - \frac{L_A}{2e}$$

ist. Um maximale Endgeschwindigkeit x_0 zu erhalten, muss die Bedingung erfüllt sein:

$$A = \frac{C \cdot L_A}{\gamma^2} \geq 10$$

oder wenn für $\gamma^2 = R_G^2 \sqrt{8\pi} \cdot \frac{L_A}{U_0}$ eingesetzt wird und $C \cdot U_0$ durch die Ladung Q_0 der Kondensatorbatterie ausgedrückt wird:

$$(16) \quad Q_0 \geq R_G^2 \cdot \sqrt{8\pi} \cdot 10$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, dann kann die Kondensatorbatterie mindestens bis zum Zeitpunkt der ersten Kompression als Quelle konstanter Spannung U_0 angesehen werden, weil vernachlässigbar wenig Ladung während der Kompression abgeflossen ist.

Die Beziehung (16) gilt ebenso für den Antipinch, wobei die Endgeschwindigkeit \dot{x}_0 am Ort $x_0 = 2,5$ definiert wurde, d.h. wenn der

Plasmadurchmesser auf den 2,5fachen Wert des Anfangsdurchmessers aufgeweitet wurde. Abb. 5 zeigt $\dot{x}(\tau)$ für verschiedene Werte von A^* und B mit $A^*/B = 0,25$.

Die Bedingung (16) lässt sich bei Einführung der Masse $M = R_0^2 \pi \rho_0$ pro Längeneinheit noch etwas anders schreiben:

$$(17) \quad \left(\frac{Q_0}{R_0}\right)^2 \geq 100 \cdot M$$

Lehner (7), der die Dimensionierung von z-Pinch Stossanlagen unter dem Gesichtspunkt maximaler Ausnützung der gespeicherten Energie des Kondensators diskutiert hat, erhielt die Bedingung:

$$(18) \quad \left(\frac{Q_0}{R_0}\right)^2 \approx M$$

Demnach ist eine um etwa zwei Grössenordnungen kleinere Ladung bei gleichem Radius und gleicher Masse M erforderlich. Der Unterschied liegt allein in den verschiedenen Forderungen: hier möglichst hohe Energie im Plasma wenn die erste Kompression eintritt, bei Lehner ein möglichst hoher Wirkungsgrad der Anlage, wobei der Wirkungsgrad durch das Verhältnis von Energie im Plasma zur anfangs gespeicherten Energie im Kondensator definiert ist.

Danach wird ein Wirkungsgrad von $\eta = 1$ erreicht, wenn am Ende der Kompression die Kondensatorbatterie gerade leer ist, und der Strom gerade auf Null abgefallen ist. Die absolut erreichte Energie liegt dann aber unter der Energie, die sich bei höherer Ladung als Gleichung (18) fordert, erzielen lässt.

Für den Thetapinch gilt prinzipiell dasselbe wie für z-Pinch und Antipinch. Um den Geschwindigkeitsverlauf $\dot{x}(\tau)$ unabhängig von der Kapazität zu machen, muss beim Thetapinch die Bedingung:

$$(19) \quad Q_0 = CU_0 \geq 20 \cdot \frac{e \cdot R_0}{2\pi} \cdot \sqrt{\rho_0 \pi} \frac{L_{A0}}{L_A^{**}}$$

erfüllt sein.

Dabei ist

$$\frac{L_{A0}}{L_A^{**}} = \frac{L_0 + \frac{4\epsilon^2}{e} (R_S^2 - R_0^2)}{L_0 + \frac{4\epsilon^2}{e} R_S^2}$$

Wenn die Kapazitäten einmal hinreichend gross gewählt sind, - nach Bedingung (16) und (19) - ist lediglich noch zu diskutieren, wie die dimensionslosen Geschwindigkeiten \dot{x} von der Verteilung der Induktivitäten im Entladekreis abhängen. In Abb. 6 sind die Kompressionsgeschwindigkeiten des z-Pinches für verschiedene Werte von $L_A/2e$ aufgetragen und in Abb. 8 die Geschwindigkeiten des Thetapinches für verschiedene Werte von L_A^{**}/L_{po} . Wie bereits oben erläutert sind die Zähler der Brüche ein Mass für die konstante Induktivität des Entladekreises und die Nenner ein Mass für die von der Bewegung des Plasmas abhängige Induktivität. Daher ist es auch verständlich, warum die dimensionslose Geschwindigkeit für grössere Werte von $L_A/2e$ und L_A^{**}/L_{po} anwächst. Je kleiner nämlich der Anteil der Induktivität des Plasmas an der Gesamtinduktivität ist, umso weniger wird der Strom durch die Bewegung des Plasmas und damit die treibende Kraft gedrosselt.

Da es bei Fragen der Dimensionierung von Stossanlagen und beim Vergleich verschiedener Anlagen letztlich auf die Energie des Plasmas ankommt, wurden die Werte für die quadratische Endgeschwindigkeit \dot{x}_0^2 , die bei z-Pinch und Thetapinch beim relativen Radius $x_0 = 0,1$ und beim Antipinch bei $x_0 = 2,5$ erreicht sein sollen, für alle drei Konfigurationen im Grenzfall grosser Kapazität in Abhängigkeit von den jeweiligen für die Induktivitätsverteilung charakteristischen Grössen aufgetragen (Abb. 9, Abb. 10, Abb. 11). Mit Hilfe dieser Kurven lässt sich nun leicht die kinetische Energie des Plasmas für verschiedene Anlagen angeben, wenn die Bedingungen (16) und (19) für die gespeicherte Ladung erfüllt ist, was für sämtliche Thetapinchanlagen und für die meisten z-Pinchanlagen auch der Fall ist. Da es hier nicht auf den absoluten Wert der Energie ankommt, und ausserdem für einen Vergleich von gleicher Anfangsdichte ρ_0 ausgegangen werden kann, lassen sich folgende charakteristische Grössen für die einzelnen Entladungen verwenden:

$$\text{I} \quad \varepsilon_z = \frac{U_0}{L_A} \cdot \dot{x}_0^2 \quad \text{für den z-Pinch}$$

$$\text{II} \quad \varepsilon_A = \frac{U_0}{L_A^*} \cdot \dot{x}_0^2 \quad \text{für den Antipinch}$$

$$\text{III} \quad \varepsilon_{\theta} = E_{\varphi}^* \cdot x_0^2$$

für den Thetapinch

Für x_0^2 sind die Werte den Kurven der Abb. 9, 10 oder 11 zu entnehmen. Der Wert von ε ist direkt der Energie proportional:

$$E_K = \frac{1}{2} m_i \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \pi}} \cdot \varepsilon$$

Um einprägsame Zahlenwerte für ε zu erhalten, können U_0 in Kilovolt und die Induktivitäten L_A und L_A^* in cm eingesetzt werden und ebenso kann E_{φ}^* , das oben definiert wurde, in KV/cm angegeben werden.

Zusammenfassung

Lineare Plasmaentladungen lassen sich hinsichtlich der maximal erreichbaren Kompressionsgeschwindigkeit vergleichen, wenn man für die Bewegung des Plasmas einfache Modelle verwendet. Da der Anlass zu den hier beschriebenen Überlegungen die Frage nach der Stosswellengeschwindigkeit beim Antipinch, verglichen mit Thetapinch und z-Pinch war, wurde als Modell das Schneepflugmodell gewählt. Aus Gründen grösserer Einfachheit und besserer Übersichtlichkeit wurde ein magnetfeldfreies Plasma vorausgesetzt.

Der einzig massgebende Gesichtspunkt ist, möglichst hohe Energie bis zur ersten Kompression - oder beim Antipinch nach vorgegebener Laufstrecke - in das Plasma zu bringen, wobei dem Schneepflugmodell entsprechend die Energie allein in kinetischer Energie besteht. Die Energie ist beim z-Pinch im Augenblick der ersten Kompression, die, um die in Wirklichkeit endliche Dicke der komprimierten Plasmaschicht zu berücksichtigen, bei einer Kompression des Anfangsradius auf den zehnten Teil angenommen wurde:

$$E_K = \frac{1}{2} m_i \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \pi}} \cdot \frac{U_0}{L_A} \cdot \dot{X}_0^2 \quad \text{z-Pinch}$$

beim Antipinch

$$E_K = \frac{1}{2} m_i \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \pi}} \cdot \frac{U_0}{L_A^*} \cdot \dot{X}_0^2 \quad \text{Antipinch}$$

und beim Thetapinch:

$$E_K = \frac{1}{2} m_i \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \pi}} \cdot E_\varphi^* \cdot \dot{X}_0^2 \quad \text{Thetapinch}$$

Die Grösse E_φ^* ist eine fiktive Feldstärke, die folgendermassen definiert ist:

$$E_\varphi^* = \frac{2\pi R_0}{c} \cdot \frac{U_0}{L_{A0}}$$

Maximale Energie bei gegebener Induktivität und gegebener Ladung lässt sich nur erreichen, wenn die Ladung Q_0 der Kondensatorbatterie und damit die Kapazität $C = Q_0/U_0$ folgende Bedingungen erfüllt:

$$Q_0 \geq 10 \cdot \sqrt{\epsilon_0 \pi} \cdot R_0^2$$

für z-Pinch und
Antipinch

$$Q_0 \geq 20 \cdot \frac{c \cdot R_0}{2\pi} \cdot \sqrt{\epsilon_0 \pi} \cdot \frac{L_{A0}}{L_A^{**}}$$

für den Thetapinch

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, dann hängen die dimensionslosen Endgeschwindigkeiten nur von der Verteilung der Induktivitäten im Entladekreis ab, d.h. von den Grössen $L_A/2\epsilon$ beim z-Pinch, $L_A^*/2\epsilon$ beim Antipinch und L_A^{**}/L_{p0} beim Thetapinch. Beim Antipinch wurde die Endgeschwindigkeit willkürlich als dann erreicht angesehen, wenn die Plasmaschicht bis zum 2,5fachen Wert des Anfangsradius gekommen ist.

Da die absoluten Werte für die Energien fragwürdig sind, z.B. wegen der Vernachlässigung ohmscher Heizung und aller Effekte, die zu Energieverlusten führen, und ausserdem verschiedene Entladungen zweckmässig bei gleicher Anfangsdichte verglichen werden, wurden folgende der Energie proportionale "Kenngrössen" eingeführt:

$$\epsilon_z = \frac{U_0}{L_A} \cdot X_0^2$$

z-Pinch

$$\epsilon_A = \frac{U_0}{L_A^*} \cdot X_0^2$$

Antipinch

$$\epsilon_\theta = E_\gamma^* \cdot X_0^2$$

Thetapinch

Hier ist es von Vorteil, um einprägsamere Zahlenwerte zu erhalten, die Spannungen in Kilovolt einzusetzen, die Induktivität in cm und die Feldstärke in kV/cm. Bei ausreichender Ladung im Kondensator, gemäss den oben angegebenen Bedingungen, sind die quadratischen Endgeschwindigkeiten \dot{x}_0^2 nur Funktionen der Induktivitäten und können den Abbildungen 9, 10 und 11 entnommen werden. Mit Hilfe der Grössen ϵ können dann verschiedene Stossanlagen bezüglich der Energie im Augenblick der ersten Kompression verglichen werden. Anlagen mit vergleichsweise hohen Werten von ϵ lassen eine starke Aufheizung des Plasmas erwarten, sofern sie nicht durch stark abweichende Anfangsbedingungen, wie z.B. hohe einge-

fangene Magnetfelder zunichte gemacht wird.

Wenn auch so einfache Modelle wie das hier benutzte Schneepflugmodell oder das adiabatische Modell, die im Detail sehr komplizierten Vorgänge im Plasma nur sehr grob annähern, so wird trotzdem der Mechanismus der Energieübertragung vom elektrischen Kreis auf das Plasma bei schneller Kompression im wesentlichen richtig wiedergegeben. Deshalb ist es durchaus zweckmässig, Stossentladungen über die Grössen \mathcal{E} zu vergleichen. - 1850 (1954)

Phys. Ann. (L.P.) 1850 (1954) I.G.I. 63/8

Literaturverzeichnis

- 1 K. Hain et.al. Z.f.Naturf. 15a, 1040 (1960)
- 2 D. Düchs, IPP 1/14
- 3 A. Leontovich et.al. J. Nucl. Energy 4, 209 (1957)
- 4 E. Fünfer et.al. Z.f.Naturf. 15a, 566 (1960)
- 5 H. Kever JÜL - 2 - PP, Nov. 1960
- 6 M. Rosenbluth et.al. Los Alamos Rep. LA - 1850 (1954)
- 7 G. Lehner Frascati, rapporto interno, L.G.I. 63/8

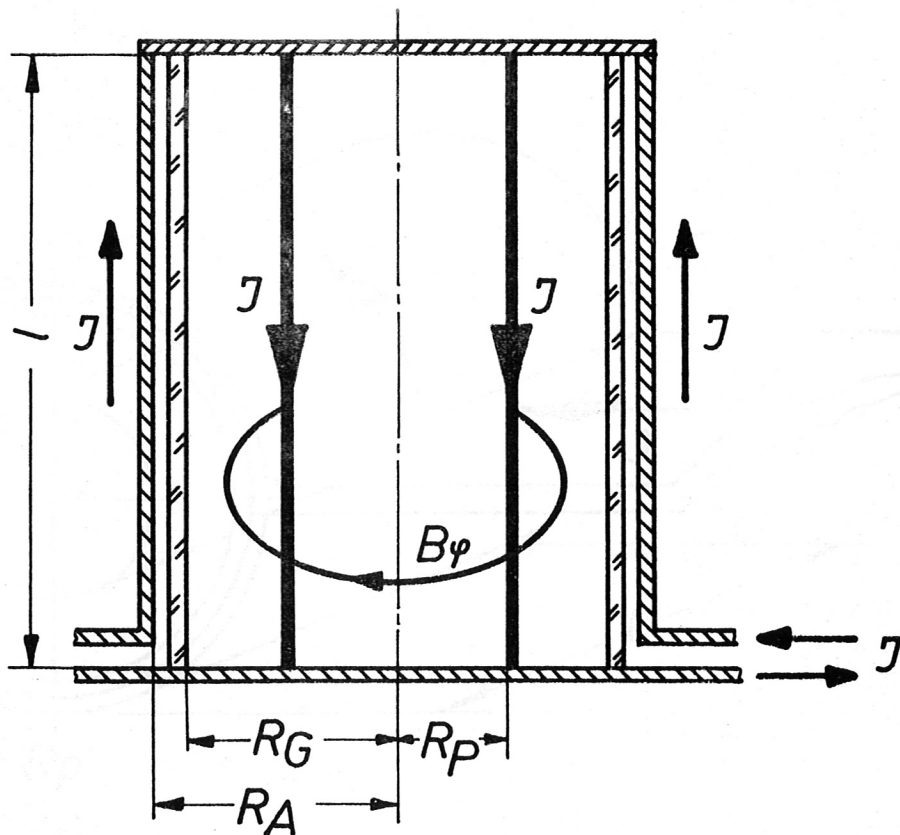


Abb.1 Schnitt durch eine lineare Z-Pinch Entladung (schematisch) zur Erläuterung der Bezeichnung

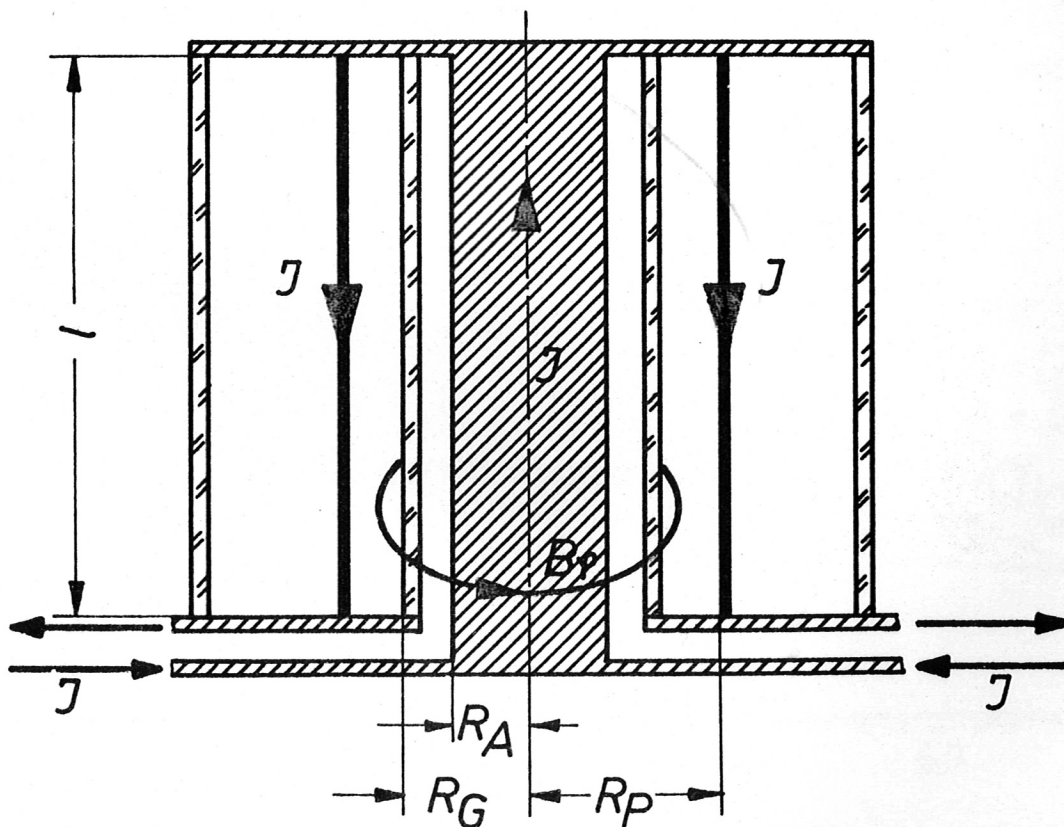


Abb.2 Schnitt durch eine Antipinch Entladungsstrecke (schematisch) zur Erläuterung der Bezeichnung

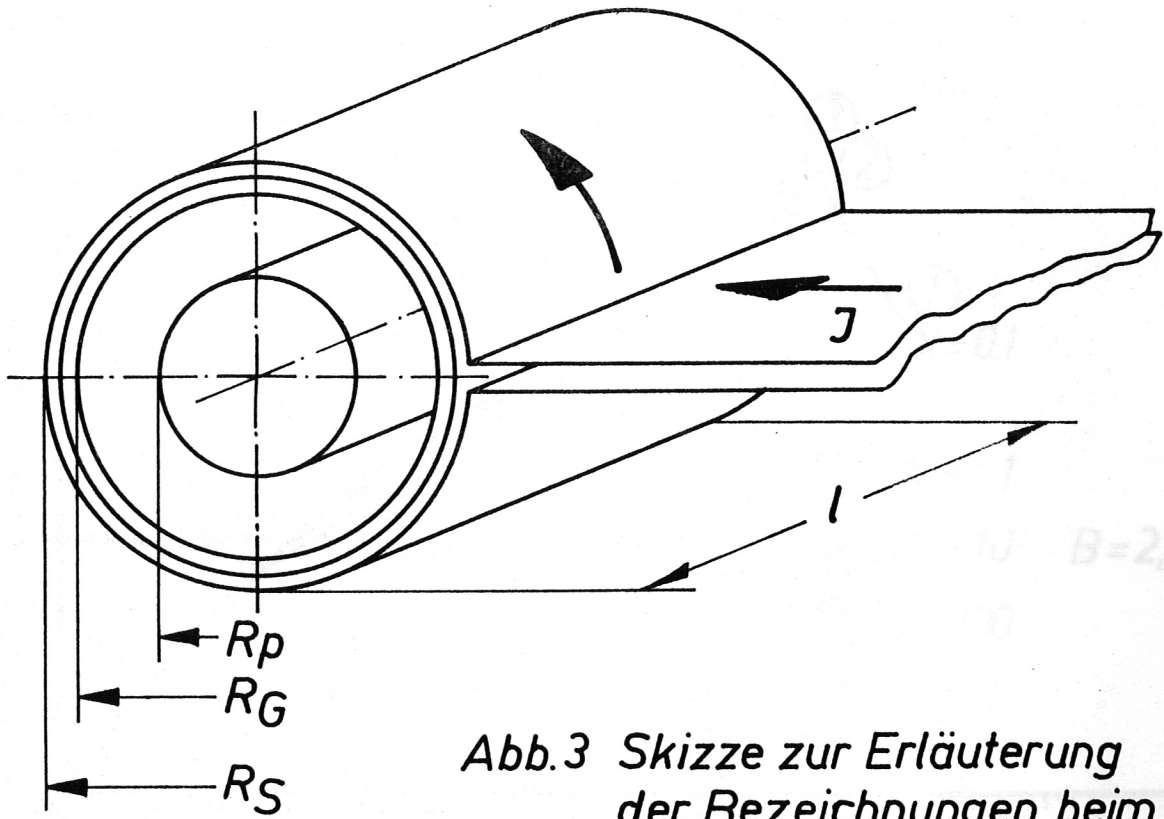


Abb.3 Skizze zur Erläuterung
der Bezeichnungen beim
Thetapinch

Z-Pinch

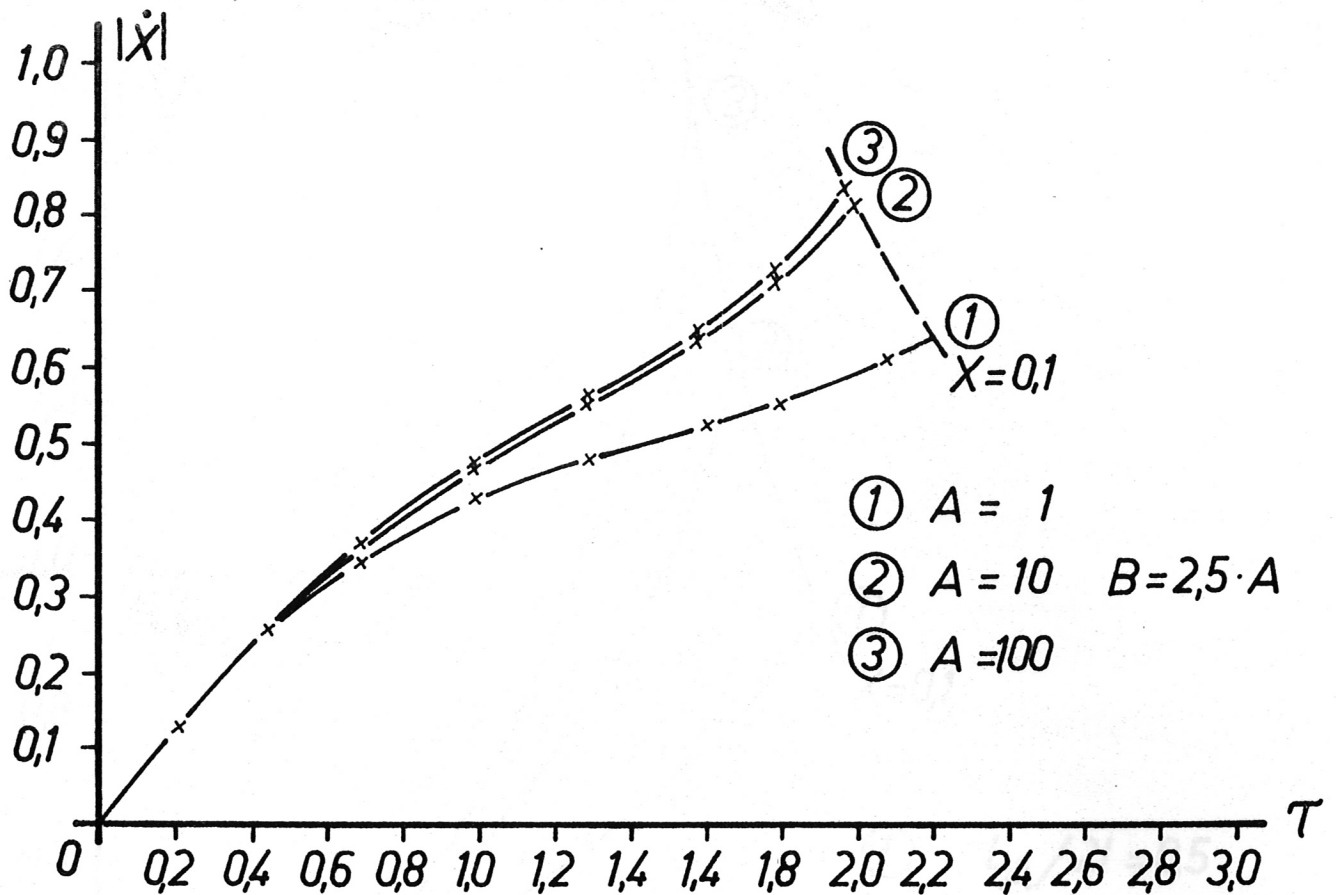


Abb. 4 Geschwindigkeit $\dot{X}(\tau)$ beim linearen Z-Pinch bei konstantem $L_A/2l$ in Abhängigkeit von C/σ^2

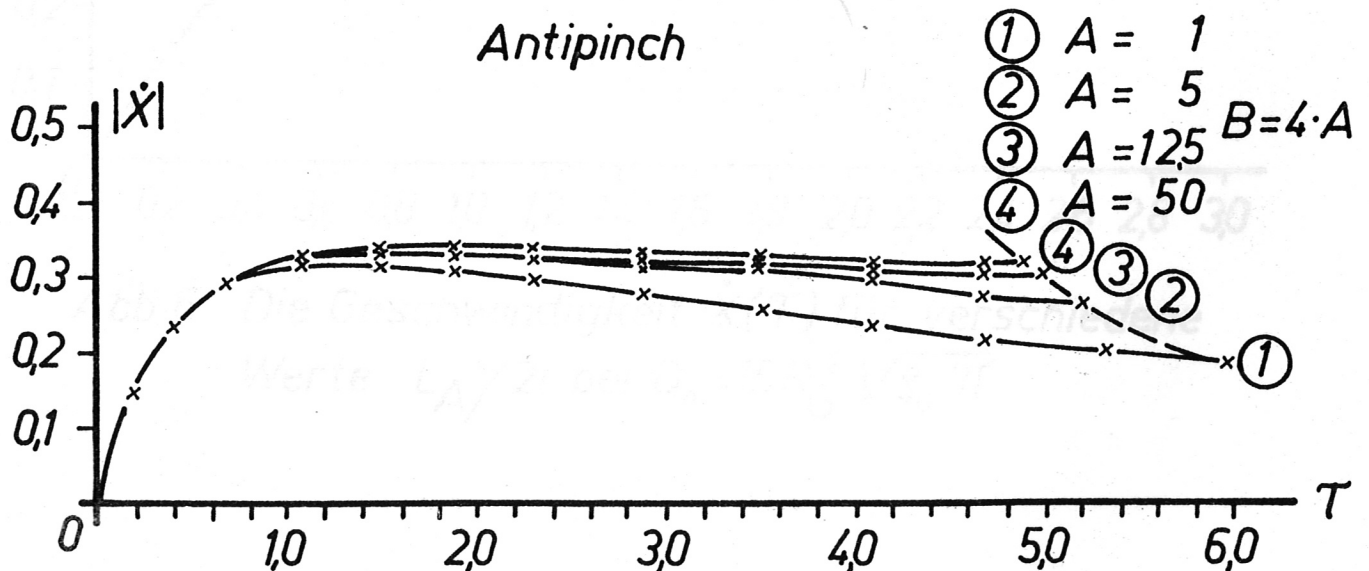


Abb. 5 Geschwindigkeit $\dot{X}(\tau)$ beim Antipinch bei konstantem $L_A^*/2l$ mit C/σ^2 als Parameter

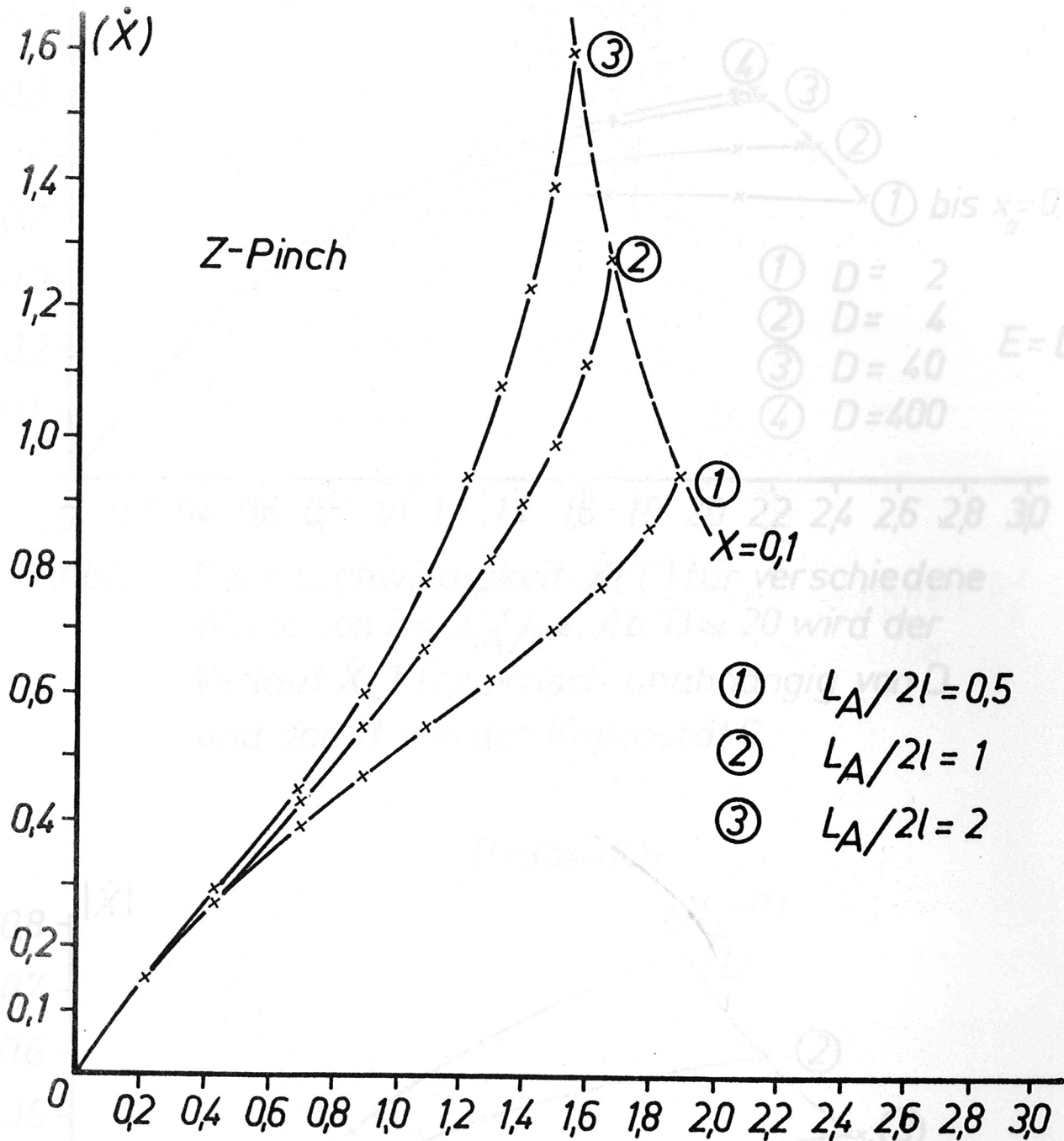


Abb. 6 Die Geschwindigkeit $\dot{X}(T)$ für verschiedene Werte $L_A/2l$ bei $Q_0 = 15 \cdot R_G^2 \cdot \sqrt{\epsilon_0 \cdot \pi}$

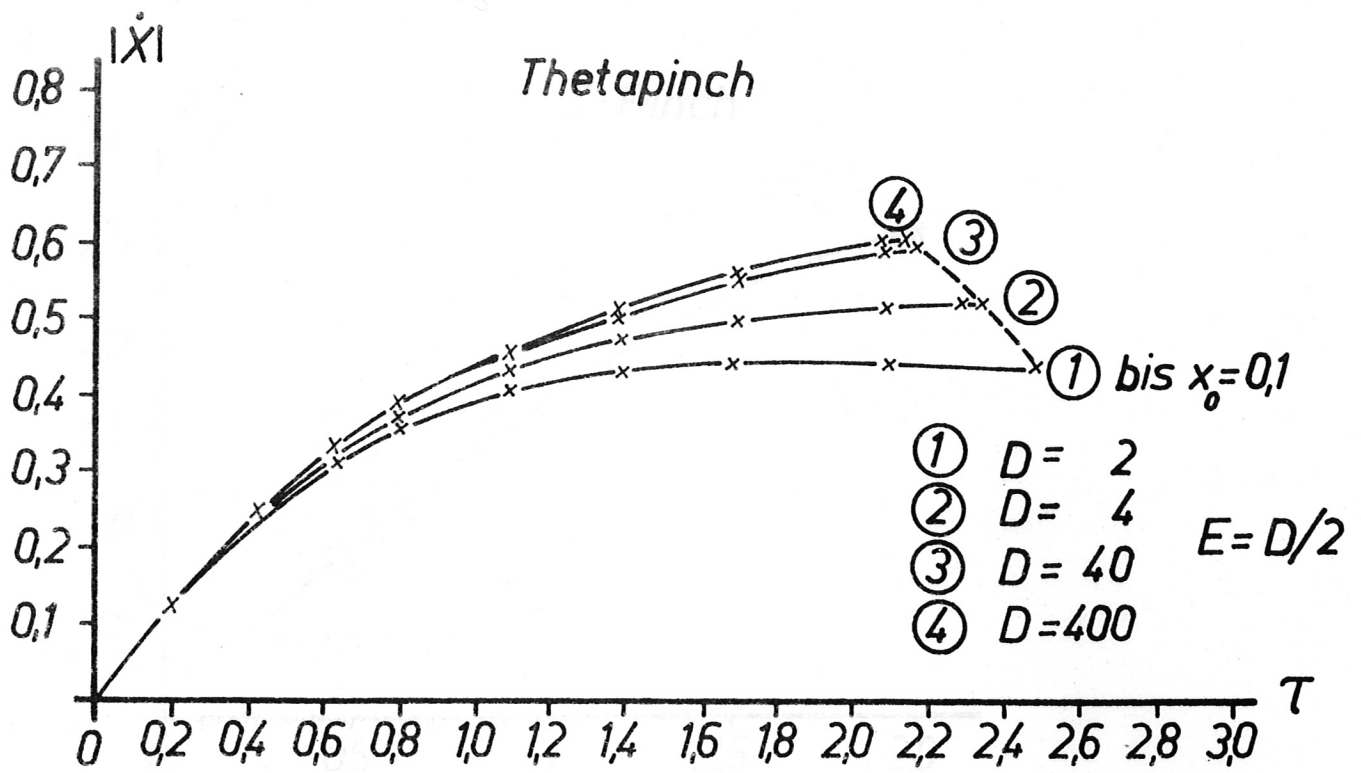


Abb. 7 Die Geschwindigkeit $\dot{X}(\tau)$ für verschiedene Werte von $D = CL_A^{**}/\rho^2$. Ab $D \approx 20$ wird der Verlauf $\dot{X}(\tau)$ praktisch unabhängig von D und damit von der Kapazität C .

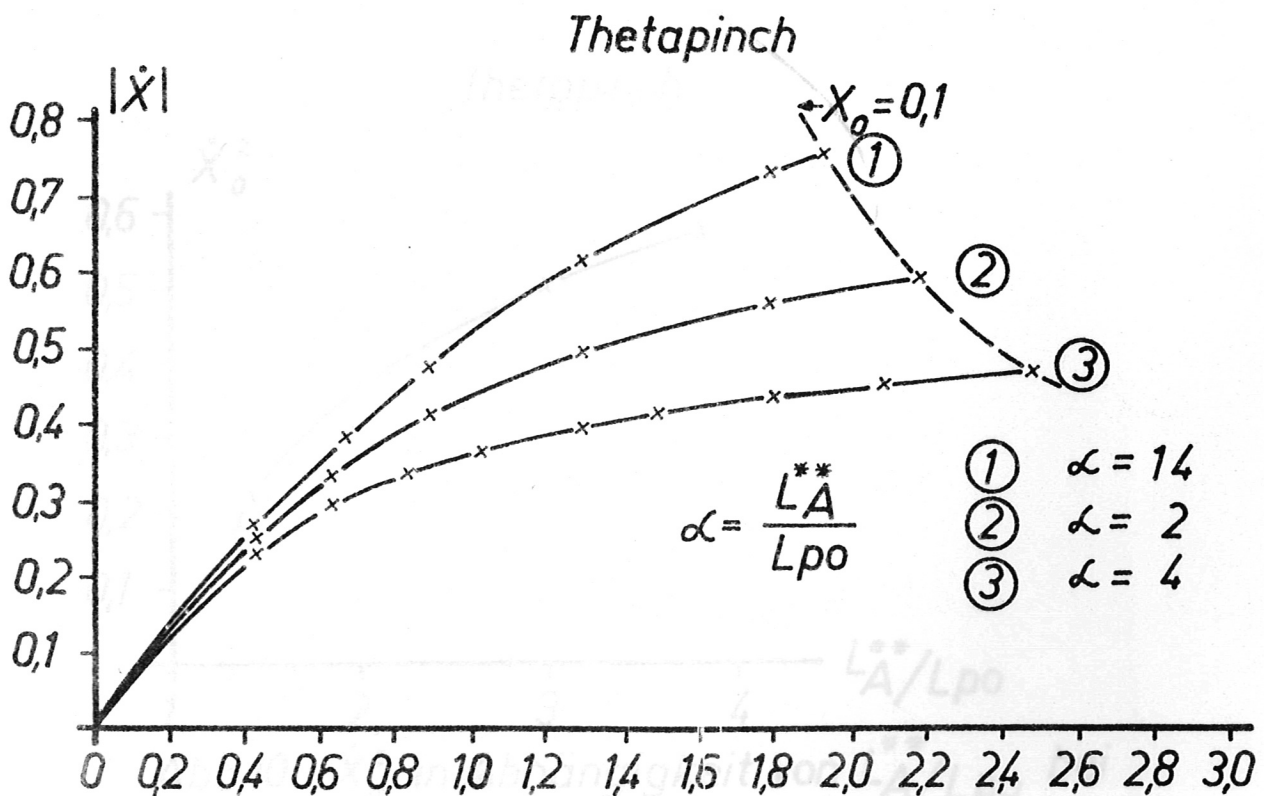


Abb. 8 Die Geschwindigkeit $\dot{X}(\tau)$ für verschiedene Werte L_A^{**}/L_{p0} bei konstanter Kapazität C .

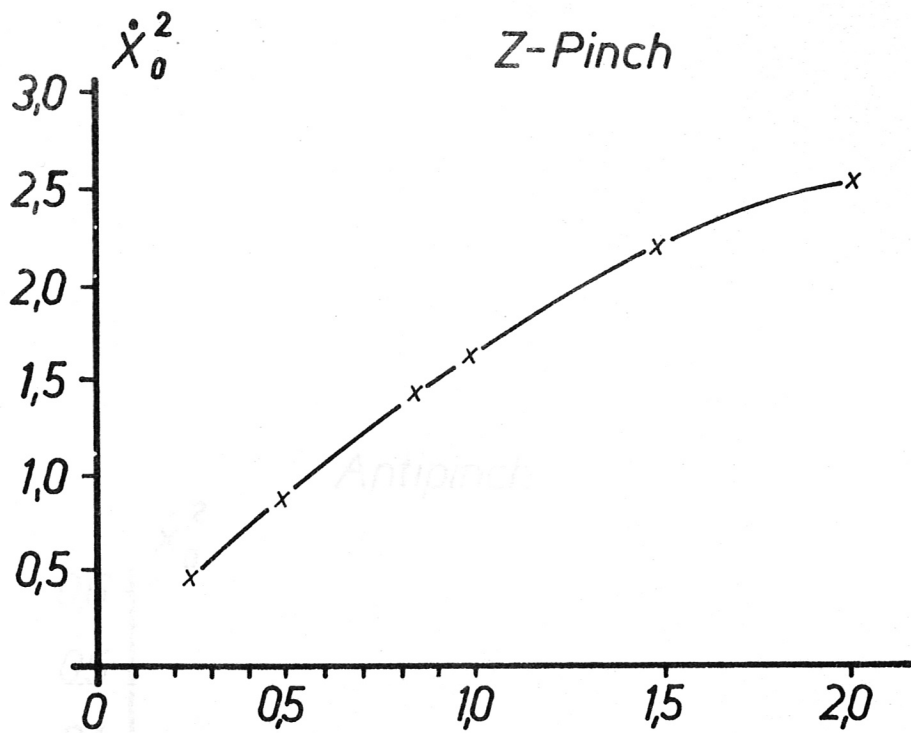


Abb. 9 Die quadratische Endgeschwindigkeit \dot{X}_0^2 in Abhängigkeit von $L_A/2l$ bei großer Kapazität

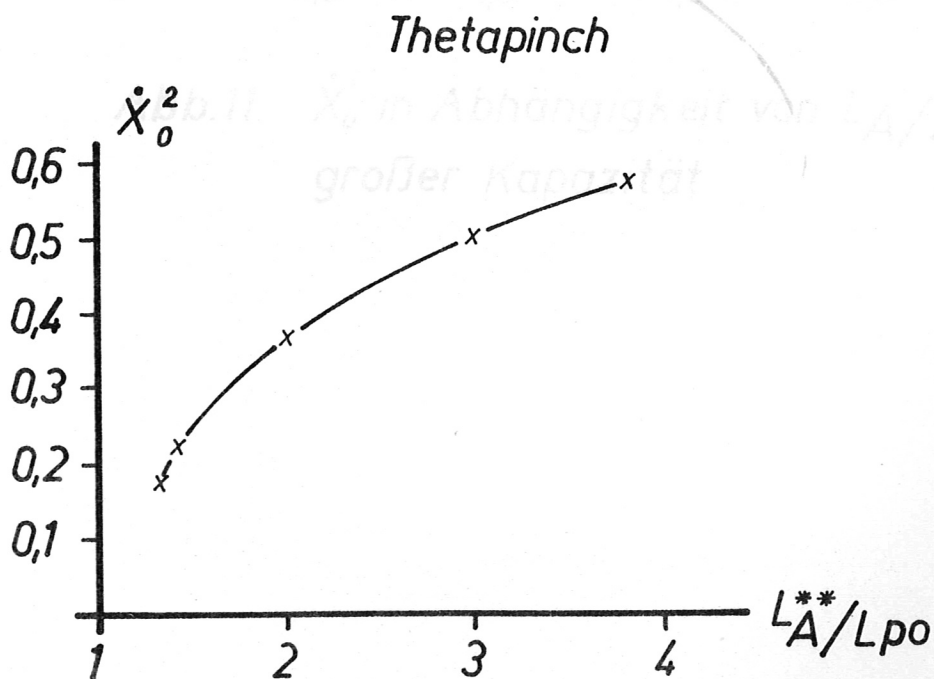


Abb. 10 \dot{X}_0^2 in Abhängigkeit von L_A^{**}/L_{po} bei großer Kapazität

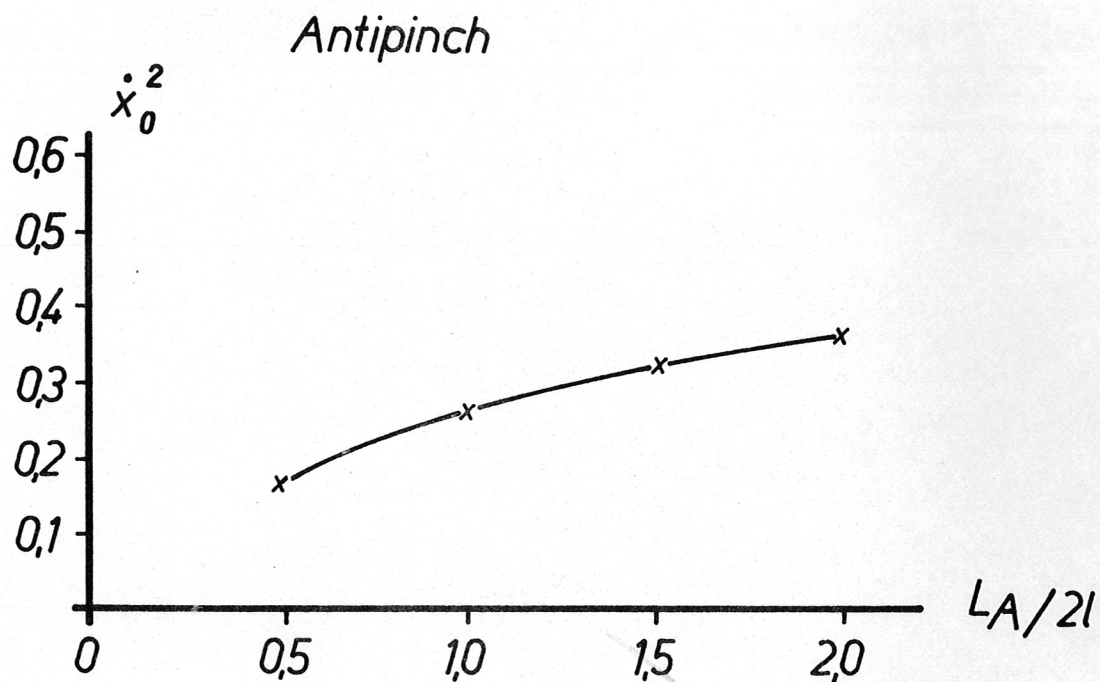


Abb.11 \dot{X}_0^2 in Abhängigkeit von $L_A/2l$ bei großer Kapazität