

November 1964 (In German).  
Numerische Berechnung des Vakuum-Magnet-  
feldes in Theta-Pinch-Spulen und ver-  
wandten Anordnungen.

(Numerical calculation of the vacuum  
magnetic field in theta pinch coils and  
related configurations).

F. Pohl, H. Herold

IPP 1/31

November 1964

**I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K**

**G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N**



# INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

IPP 1/31

## GARCHING BEI MÜNCHEN

F. Pohl, H. Herold  
Numerical calculation of the vacuum  
magnetic field in theta pinch coils  
and related configurations,  
November 1964. (in German).

Numerische Berechnung des Vakuum-Magnetfeldes in Theta-Pinch-Spulen und verwandten Anordnungen.

(Numerical calculation of the vacuum magnetic field in theta pinch coils and related configurations).

Abstract: The vacuum magnetic field in theta pinch coils with an observation slot perpendicular to the coil axis is calculated numerically. The current distribution in the coil, necessary for the calculation is obtained from the mutual inductances of partial regions along the coil. Only azimuthal surface currents are regarded, including the currents on the end surfaces. Field distributions ( $B_r$  and  $B_z$ ) are presented for the regions of non-vanishing field gradients. The value of  $B_z$  on the axes of the coil is described by approximation formulas. Furthermore current distribution and field components are calculated for two single-turn coils separated by a slot for the cases that one coil is shorted or that the applied voltage is opposite at the two coils (cusp-device).

F. Pohl, H. Herold

IPP 1/31

November 1964

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*



## 1. Einleitung und Voraussetzungen

Aus den Untersuchungen von Haines, Kohl und Reynolds [1. - 3]

IPP 1/31 F. Pohl Numerical calculation of the vacuum  
theta-pinch H. Herold magnetic field in theta pinch coils  
and related configurations,  
November 1964 (in German).

Spule fließen und im Spuleninneren homogenes Feld herrschen, was aber nur für einen unregelmäßigen Verlauf an der Spule. Ferner können die an der Spule anliegenden Beobachtungsschlitze inhomogenität verursachen. Es ist jedoch von Interesse, die Feldverteilung in der Spule qualitativ zu kennen. In dieser Arbeit wird der Verlauf der Komponenten  $B_r$  und  $B_z$  des

**Abstract:** The vacuum magnetic field in theta pinch coils with an observation slot perpendicular to the coil axis is calculated numerically. The current distribution in the coil, necessary for the calculation is obtained from the mutual inductances of partial regions along the coil. Only azimuthal surface currents are regarded, including the currents on the end surfaces. Field distributions ( $B_r$  and  $B_z$ ) are presented for the regions of non-vanishing field gradients. The value of  $B_z$  on the axes of the coil is described by approximation formulas. Furthermore current distribution and field components are calculated for two single-turn coils separated by a slot for the cases that one coil is shorted or that the applied voltage is opposite at the two coils (cusp-device).

Bei einem theta-pinch nur eine Spule durch einen Slot und die andere als Kurzschlussring wirkt.

In dieser Arbeit werden folgende Voraussetzungen getroffen:  
Die theta-pinch-Spule ist ein drehbarer Zylinder mit rechteckigem Querschnitt und gleichbleibendem Innendurchmesser (Abb. 1). Sowohl der obere als auch der untere Widerstand der Zuleitungsplatten werden vernachlässigt. Die Spannung zwischen den Spulenanschlüssen soll konstant gleich der Kondensatorspannung sein (d.h. unabh. von  $r$  und  $z$ , vergleiche Gl. (3) - (5)). In der Spule kommen dann nur Oberflächenströme vor. Die Spule wird dabei als ein Bündel isolierter Drahtdrähte behandelt. Aus deren ohmschen und induktiven Widerständen folgt eine Integralgleichung für die Stromverteilung (4). In (3) wird ein numerisches



## 1. Einleitung und Voraussetzungen

Aus den Untersuchungen von Haines, Kolb und Reynolds [1 - 3] ist bekannt, dass radiale Gradienten des Magnetfeldes in der  $\theta$ -Pinch-Spule zu Plasmadrift oder zur Rotation des Plasmas führen. Selbst wenn durch geeignete Dimensionierung der Spulenanschlüsse und des Kollektors rein azimuthale Ströme in der Spule fließen und im Spuleninneren homogene Felder herrschen, bestehen noch die stark inhomogenen Felder am Spulenende. Ferner können die meist vorhandenen azimuthalen Beobachtungsschlitze Inhomogenitäten verursachen. Es ist deshalb von Interesse, die Feldverteilung in diesen Spulenbereichen quantitativ zu kennen. In dieser Arbeit wird der Verlauf der Komponenten  $B_r$  und  $B_z$  des Vakuumfeldes am Spulenende, sowie in der Umgebung eines Schlitzes mit variierter Breite für eine Spule mit einem Aspektverhältnis 4.5 numerisch berechnet. (Das Aspektverhältnis: Länge/Radius ist auf eine Hälfte der Spulenordnung in Abb. 1 bezogen). Die Ergebnisse sind auf Spulen mit anderen Abmessungen übertragbar, wenn die ungestörten Spulenabschnitte nur genügend lang sind, so dass ein Bereich mit homogenem  $B_z$ -Feld ( $B_{z0}$ ) existiert (Aspektverhältnis  $> 2$  bis 3). Der Einfluss der Ströme auf den Stirnflächen wird berücksichtigt.

Ausserdem wird auch die Stromverteilung und der Feldverlauf in Spulenordnungen berechnet, in denen 2 Spulen gegensinnig vom Strom durchflossen werden (Cusp-Anordnung), bzw. Anordnungen, bei denen primär nur eine Spule Strom führt und die andere als Kurzschlussring wirkt.

Im Rahmen der Arbeit werden folgende Idealisierungen getroffen: Die Theta-Pinch-Spule ist ein dickwandiger Zylinder mit rechteckigem Querschnitt und gleichbleibendem Innendurchmesser (Abb. 1). Sowohl der ohmsche als auch der induktive Widerstand der Zuleitungsplatten werden vernachlässigt. Die Spannung zwischen den Spulenanschlüssen soll also überall gleich der Kondensatorspannung sein (d.h. unabhängig von  $r$  und  $z$ , vergleiche §2, Gl. (3) - (5)). In der Spule kommen dann nur Azimutalströme vor. Die Spule wird daher wie ein Bündel isolierter Drahttringe behandelt. Aus deren ohmschen und induktiven Widerständen folgt eine Integralgleichung für die Stromverteilung (§2). In §3 wird ein numerisches



Lösungsverfahren entwickelt für den Fall, dass die Spule einen Spalt in der Mitte besitzt und der Ohm-Widerstand vernachlässigt werden kann. Aus der Stromverteilung wird das Magnetfeld berechnet (§4). Ferner werden Näherungsformeln für das Magnetfeld angegeben (§6) und die berechneten Werte der Axialkomponente des Magnetfeldes ( $B_z$ -Werte) mit gemessenen  $B_z$ -Werten verglichen.

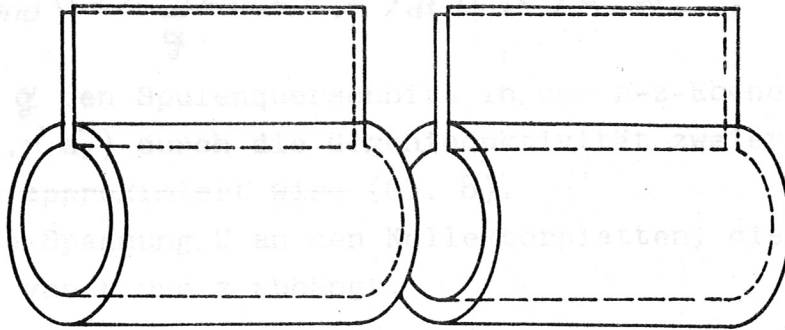


Abb. 1 Thetapinch-Spule mit Schlitz

## 2. Integralgleichung für die Stromverteilung

Zur Gewinnung einer Gleichung für die Stromverteilung betrachten wir die Spannungen, die in einem dünnen Ring am Ort  $z$  mit Radius  $r$  und Querschnitt  $drdz$  auftreten (Abb. 2). In diesem Ring fließt

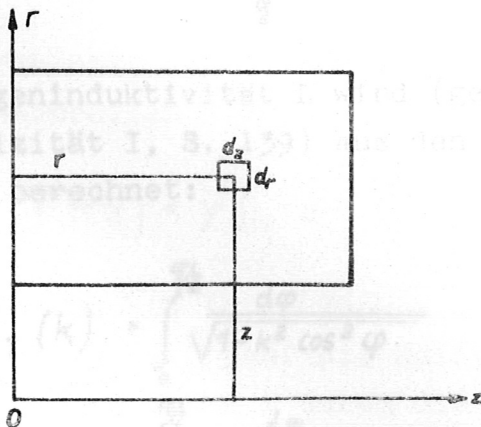


Abb. 2



der Strom

$$(6) \quad j(r, z) \, dr dz$$

Es treten folgende Spannungen auf:

1. infolge des ohmschen Widerstands  $\eta \frac{2\pi r}{dr dz}$

$$(1) \quad U_{ohm}(r, z) = 2\pi r \eta j(r, z)$$

2. infolge Gegeninduktivität mit anderen Spulenelementen:

$$(2) \quad U_{ind}(r, z) = \iint_{\mathcal{G}} L(r, z, r', z') \frac{dj}{dt}(r', z') \, dr' dz'$$

wobei  $\mathcal{G}$  den Spulenquerschnitt in der r-z-Ebene bedeutet und  $L(r, z, r', z')$  durch die Gegeninduktivität zweier coaxialer Kreisringe approximiert wird (Gl. 8).

3. die Spannung U an den Kollektorplatten, die nach Voraussetzung nicht von r und z abhängt.

Sei

$$(3) \quad U = U_0 e^{i\omega t}$$

$$(4) \quad j = (x + iy) e^{i\omega t}$$

dann folgt aus der Spannungsbilanz die Integralgleichung für die Stromdichte

$$(5) \quad 2\pi r \eta x(r, z) - \omega \iint_{\mathcal{G}} L(r, z, r', z') y(r', z') \, dr' dz' = U_0$$

$$2\pi r \eta y(r, z) + \omega \iint_{\mathcal{G}} L(r, z, r', z') x(r', z') \, dr' dz' = 0$$

Die Gegeninduktivität L wird (gemäss Becker-Sauter, Theorie der Elektrizität I, S. 139) aus den vollständigen elliptischen Integralen berechnet:

Sei

$$E_1(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi}}$$

$$(12) \quad E_2(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$(6) \quad k^2 = \frac{4rr'}{(r+r')^2 + (z-z')^2}$$

$$(7) \quad G(r, z, r', z') = \left(\frac{2}{k} - k\right) E_1(k) - \frac{2}{k} E_2(k)$$

dann ist

$$(8) \quad L(r, z, r', z') = \frac{1}{2\pi\gamma^2} \sqrt{rr'} \cdot G(r, z, r', z')$$

Misst man L in elektrostatischer Einheit ( $\text{sec}^2 \text{cm}^{-1}$ ), dann ist

$$\frac{1}{2\pi\gamma^2} = \frac{4\pi}{c^2} = 1,4 \cdot 10^{-20}$$

Misst man L in Henry, die Längen in cm, dann ist

$$\frac{1}{2\pi\gamma^2} = 1,20 \cdot 10^{-8}$$

### 3. Berechnung der Stromverteilung

Wenn Spulenradius R, Wechselstromfrequenz  $\omega$  und spezifischer Widerstand  $\eta$  die Bedingung

$$(10) \quad 4\pi R^2 \omega \gg \eta$$

erfüllen, dann wird der Ohmsche Widerstand vernachlässigbar klein gegenüber den induktiven Widerständen. Da die Magnetfeldlinien in diesem Fall (fast) nicht in die Spule eindringen, fließt der Strom (fast) nur an der Spulenoberfläche.

Wir beschreiben in diesem Paragraphen ein Verfahren zur Berechnung der Stromverteilung in einer Spule mit rechteckigem Querschnitt in der r-z-Ebene und einem Spalt in der Mitte. Die stromführende Schicht besteht aus zwei spiegelbildlich gelegenen "Garnrollen" (Abb.3). Infolge der Symmetrieeigenschaft

$$(11) \quad y(r, z) = y(r, -z)$$

der Stromdichte (und  $\alpha \varphi$  sowie  $\mathcal{L}z$ ) lässt sich das Integrationsgebiet  $\mathcal{Q}$  in Gl.(5) auf die Hälfte reduzieren. Ersetzt man in Gl.(5) die Funktion L durch die Funktion

$$(12) \quad f(r, z, r', z') = L(r, z, r', z') + L(r, z, r', -z')$$



Hierbei bedeuten

$R_I$  Innenradius

$R_A$  Radius der inneren Stirnfläche

$S$  Spaltbreite

$A$  Abstand der inneren Stirnfläche

Gl. (13a) in folgendem Bereich:

1.  $R_I \leq r \leq R_A$  bei  $z = S$  (innere Stirnfläche)

(15) 2.  $R_I \leq r \leq R_A$  bei  $z = S+A$  (äussere Stirnfläche)

3.  $S \leq z \leq S+A$  bei  $r = R_I$  (Innenzylinder).

Das numerische Verfahren besteht darin, die Integralgleichung (14)

Abb. 3 Stromführende Flächen der Spulen

dann besteht  $\mathcal{O}_j$  nur noch aus einer der beiden Garnrollen. Die Stromdichte  $y(r, z)$  entartet zur Flächenstromdichte, z.B. gilt auf der inneren Stirnfläche

$$(13a) \quad \int_z y(r, z) dr dz = \int_z y(r, S) \cdot \delta(z - S) dr dz = y_1(r) dr$$

( $S$  = halbe Spaltbreite).

Analog werden für den Innenzylinder  $y_z(z)$  und für die äussere Stirnfläche  $y_2(r)$  definiert:

$$(13b) \quad y_z(z) = y(R_I, z)$$

$$(13c) \quad y_2(r) = y(r, S+A)$$

Gl. (5) geht über in

$$(14) \quad \int_{R_I}^{R_A} f(r, z, r', S) y_1(r') dr' + \int_S^{S+A} f(r, z, R_I, z') y_z(z') dz' + \int_{R_I}^{R_A} f(r, z, r', S+A) y_2(r') dr' = \frac{U_0}{W} = const.$$

Abb. 5 Der Spulenquerschnitt in der r-z-Ebene und seine Aufteilung für  $M_1 = 2, M_2 = 4, M_3 = 3$ .

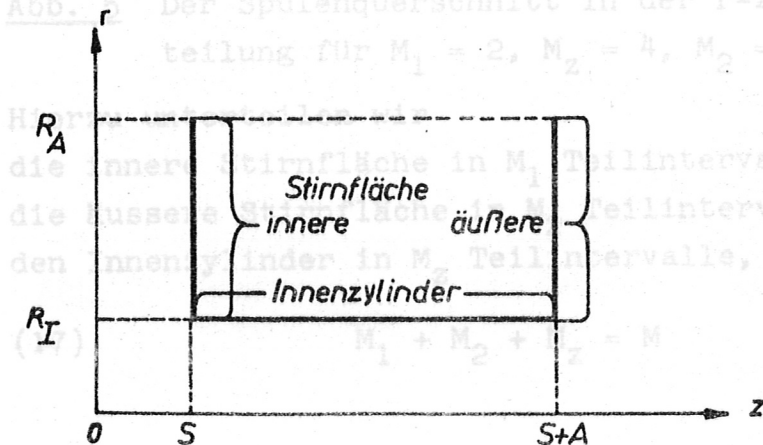


Abb. 4 Spulenquerschnitt in der r-z-Ebene

Hierbei bedeuten

$R_I$  Innenradius

$R_A$  Radius der inneren Stirnfläche

$S$  halbe Spaltbreiten

$A$  Abstand der inneren von der äusseren Stirnfläche

Gl. 14 gilt in folgendem  $r, z$ -Bereich:

- (15) 1.  $R_I \leq r \leq R_A$  bei  $z = S$  (innere Stirnfläche)  
 2.  $R_I \leq r \leq R_A$  bei  $z = S+A$  (äussere Stirnfläche)  
 3.  $S \leq z \leq S+A$  bei  $r = R_I$  (Innenzylinder).

Das numerische Verfahren besteht darin, die Integralgleichung (14) in ein System

$$(16) \sum_{k=1}^M a_{JK} y_k = b_j$$

von  $M$  linearen Gleichungen mit  $M$  Unbekannten umzuwandeln.

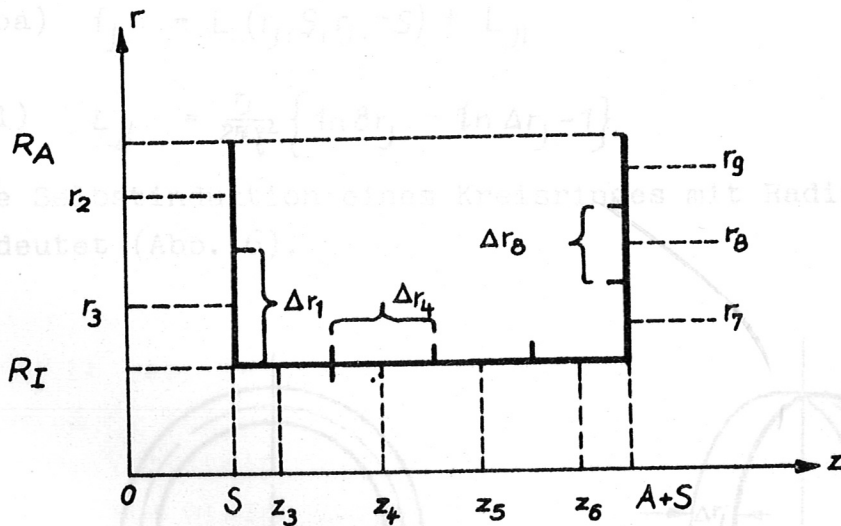


Abb. 5 Der Spulenquerschnitt in der  $r$ - $z$ -Ebene und seine Aufteilung für  $M_1 = 2$ ,  $M_Z = 4$ ,  $M_2 = 3$ .

Hierzu unterteilen wir

die innere Stirnfläche in  $M_1$  Teilintervalle,  
 die äussere Stirnfläche in  $M_2$  Teilintervalle,  
 den Innenzylinder in  $M_Z$  Teilintervalle, wobei

$$(17) M_1 + M_2 + M_Z = M$$



Die Intervallmittelpunkte sind:

Innere Stirnfläche:  $s_J = (r_J; S) \quad J = 1, 2, \dots, M_1$   
 Innenzylinder:  $s_J = (R_I; z_J) \quad J = M_1 + 1, \dots, M_1 + M_2$   
 Äussere Stirnfläche:  $s_J = (r_J; S+A) \quad J = M_1 + M_2 + 1, \dots, M$

Die Approximation der Integrale durch Summen sei hier für das Integral  $\int_{r'=R_1}^{r'=R_2} f(r, z, r', S) y_1(r') dr'$  durchgeführt.

Wir fordern, dass sowohl der Punkt  $r, z$  als auch der Punkt  $r', S$  einer der durch (18) definierten Punkte sein muss. Als Beispiel behandeln wir hier den Fall, dass  $r, z$  auf der inneren Stirnfläche liegt. Dann ist

$$r = r_J \quad z = S \quad r' = r_K \quad J, K = 1, \dots, M_1$$

Physikalisch bedeutet dies die Approximation der kontinuierlichen inneren Stirnfläche durch einzelne Drahringe mit Radius  $r_J$ . Sei

$$(19) \quad y_K = y_1(r_K)$$

$$(20) \quad f_{JK} = f(r_J, S, r_K, S) \quad K \neq J$$

$$(20a) \quad f_{JJ} = L(r_J, S, r_J, -S) + L_{JJ} \quad \text{wobei}$$

$$(21) \quad L_{JJ} = \frac{r_J}{2\pi \gamma z} \{ \ln 8r_J - \ln \Delta r_J - 1 \}$$

die Selbstinduktion eines Kreisringes mit Radius  $r_J$  und Dicke  $\Delta r_J$  bedeutet (Abb. 6).

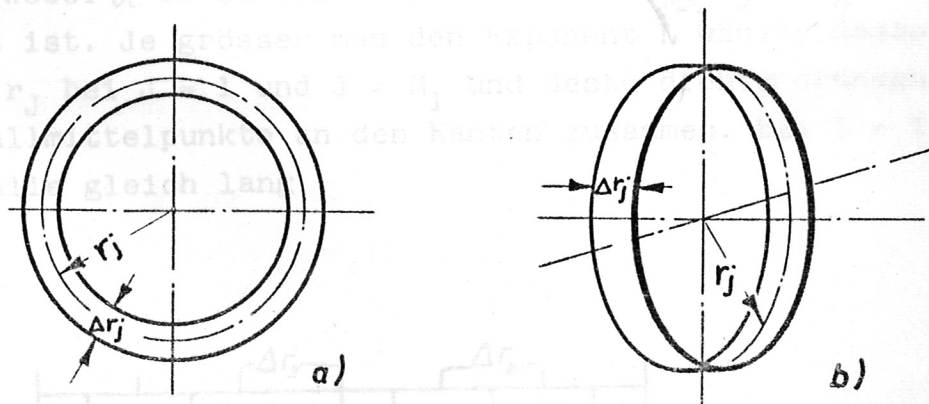


Abb. 6 Kreisringe, deren Selbstinduktion durch Gl. (21) beschrieben wird.

Dann ist  $\int_{R_1}^{R_A} f(r, S, r') y_1(r') dr' \approx \sum_{K=1}^{M_1} f_{JK} y_K \Delta r_K$

$$(22) \int_{r'=R_1}^{R_A} f(r, S, r') y_1(r') dr' \approx \sum_{K=1}^{M_1} f_{JK} y_K \Delta r_K$$

wobei  $\Delta r_K$  die Länge des K-ten Intervalles bedeutet (s. Gl. 25).  
In Gl. (16) ist daher

$$(23a) \quad \alpha_{JK} = f_{JK} \Delta r_K \quad K \leq M_1$$

Analog hierzu ist für den Innenzylinder

$$(23b) \quad \alpha_{JK} = f_{JK} \Delta z_K \quad M_1 + 1 \leq K \leq M_1 + M_z$$

Ferner zeigt der Vergleich mit Gl. (14)

$$(24) \quad b_J = -\frac{U}{\bar{\omega}} = \text{const}$$

Da bei hohen Frequenzen die Stromdichte in der Nähe der Kanten besonders gross ist und besonders stark von der Variablen  $r$  oder  $z$  abhängt, wird man die Intervalllängen  $\Delta r_J$  und  $\Delta z_K$  in Kantennähe besonders klein wählen. Dies erreicht man, indem man z.B. auf der inneren Stirnfläche

$$(25) \quad \Delta r_J = \frac{\alpha}{J^L + (M_1 + 1 - J)^L}$$

setzt, wobei  $\alpha$  so zu bestimmen ist, dass  $\sum_{J=1}^{M_1} \Delta r_J = R_A - R_I$  erfüllt ist. Je grösser man den Exponent  $L$  wählt, desto kleiner wird  $\Delta r_J$  bei  $J = 1$  und  $J = M_1$  und desto dichter drängen sich die Intervallmittelpunkte an den Kanten zusammen. Bei  $L = 1$  sind alle Intervalle gleich lang.

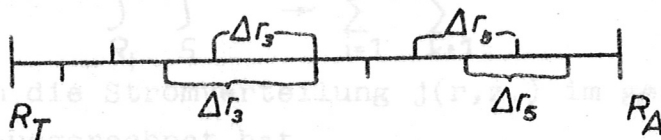


Abb. 7 Aufteilung bei  $M_1 = 5$  für  $L = 2$  (oben) und  $L = 4$  (unten)



4. Berechnung des Magnetfeldes von vorgegebenen Azimutalströmen

Das am Quellpunkt  $\mathbf{r}'$  gelegene Stromelement  $\mathbf{J} d\tau'$  liefert zum Vektorpotential  $\mathbf{A}$  am Aufpunkt  $\mathbf{r}$  den Beitrag

$$\frac{1}{4\pi\gamma} \frac{\mathbf{J} d\tau'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Das Vektorpotential ist daher  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int \frac{\mathbf{J} d\tau'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$

Wenn  $\mathbf{J}$  nicht vom Azimutalwinkel  $\varphi'$  abhängt, lässt sich die Integration über  $\varphi'$  ohne weitere Voraussetzungen ausführen. Bei Benutzung der in Gl.(7) definierten Funktion G folgt, falls

$$j(z) = j(-z)$$

$$(30) \quad A(r, z) = \iint_{r', z'} j(r', z') g(r, z, r', z') dr' dz'$$

wobei

$$(31) \quad g(r, z, r', z') = \frac{1}{2\pi\gamma} \sqrt{\frac{r'}{r}} \left\{ G(r, z, r', z') + G(r, z, r', -z') \right\}$$

Hierbei gilt Gl.(30) nicht nur für die  $\varphi$ -Komponente, sondern auch noch, wenn man für A und j die Vektoren  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{J}$  einsetzt.

Die Magnetfeldkomponenten folgen hieraus zu

$$(32) \quad B_r(r, z) = - \iint_{r', z'} j(r', z') \frac{\partial g}{\partial z} dr' dz'$$

$$(33) \quad B_z(r, z) = \iint_{r', z'} j(r', z') \left\{ \frac{g}{r} + \frac{\partial g}{\partial r} \right\} dr' dz'$$

Der Übergang vom Integral zur Summe geschieht gemäss

$$(34) \quad \begin{aligned} dr' dz' &\rightarrow \Delta r_i \Delta z_k \\ j(r', z') \cdot g(r, z, r', z') &\rightarrow j(r_i, z_k) \cdot g(r, z, r_i, z_k) \\ \int_{R_1}^{R_A} \int_S^{S+A} &\rightarrow \sum_{i=1}^{N_R} \sum_{k=1}^{N_Z} \end{aligned}$$

falls man die Stromverteilung  $j(r, z)$  im gesamten Spulenquerschnitt ausgerechnet hat.

Liegt jedoch die Stromverteilung nur für die Garnrolle (s. §3) vor, dann folgt aus Gl. (30)

anstelle von Gl.(11) aus §3. (Daher gilt  $f(r, z, r', z) = L(r, z, r', z) - L(r, z, r', z)$  anstelle von Gl.(12) aus §3).

$$(35) \quad A(r, z) = \sum_{j=1}^{M_1} j(r_j) g(r, z, r_j, S) \Delta r_j + \sum_{j=N_1}^{N_2} j(z_j) g(r, z, R_1, z_j) \Delta z_j \\ + \sum_{j=N_2}^M j(r_j) g(r, z, r_j, S-A) \Delta r_j$$

Dem Übergang vom Integral zur Summe entspricht physikalisch der Übergang vom Magnetfeld einer kontinuierlichen Stromverteilung zu einem Magnetfeld, welches von einzelnen bei  $r_1, z_k$  gelegenen stromführenden Drahringen oder Kreisströmen erzeugt wird. Dieses Magnetfeld ist in Abb. 8 schematisch dargestellt.

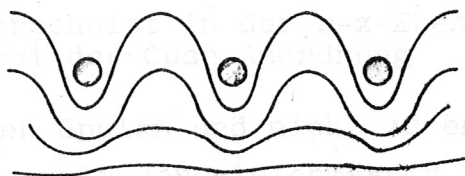


Abb. 8

Es weicht besonders in Spulennähe stark vom Magnetfeld einer kontinuierlichen Stromverteilung ab. Wir müssen daher stets

(36)  $\Delta r_1, \Delta z_k <$  Abstand des Aufpunktes vom Spulenrand wählen und die hierzu erforderlichen Werte der Stromdichte durch Interpolation gewinnen.

### 5. Cusp-Anordnung

Bei der Cusp-Anordnung sind zwei gleiche Spulen durch einen Spalt der Breite  $2S$  getrennt. An der einen Spule liegt die Spannung  $+U$ , an der anderen  $-U$ . Da die Spulen gleich sind, gilt für die Stromdichte:

$$j(z) = -j(-z)$$

anstelle von Gl.(11) aus §3. (Daher gilt  $f(r, z, r', z') = L(r, z, r', z') - L(r, z, r', z')$  anstelle von Gl.(12) aus §3).



Die Ströme auf dem Aussenzyylinder sind nicht mehr vernachlässigbar, da der gesamte magnetische Fluss durch den Spalt hindurchgeht und daher auch in der Nähe des Aussenzyinders beträchtliche Feldstärken auftreten. Abb. 9 zeigt qualitativ den Feldlinienverlauf.

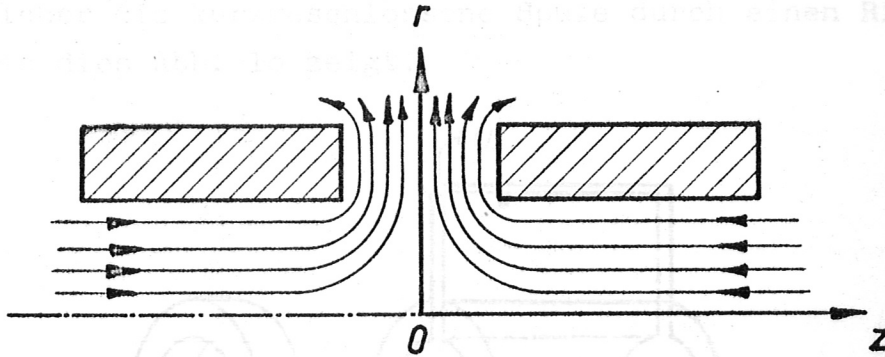


Abb. 9 Spulenquerschnitt in der r-z-Ebene und Feldlinienverlauf bei der Cusp-Anordnung

Bei genügend langen Spulen und nicht zu engem Spalt ist der Strom auf dem Innenzylinder gleichmässig verteilt und liefert ein homogenes Feld. Ein grosser Teil des Gesamtstroms fliesst auf den inneren Stirnflächen und deren Umgebung und bewirkt im Spalt ein starkes Feld. Wegen  $2 \cdot \text{Fluss durch Zylinder} = \text{Fluss durch Spalt}$  folgt in grober Näherung

$$(37) \quad B_r = \frac{B_{z0} \cdot R_I^2}{2rS} ; \quad B_z = 0 \quad \text{für } R_I < r < R_A$$

Für  $r = 0, z = 0$  ist  $|\mathcal{L}| = 0$ .  $|\mathcal{L}|$  besitzt am Ursprung ein Minimum (Cusp-Anordnung). Die numerische Berechnung geschieht streng analog zu dem in §3 und 4 entwickelten Verfahren. Die Integralgleichung für die Stromdichte (§3, Gl. (14)) ist durch ein Glied zu ergänzen, welches die Ströme auf dem Aussenzylinder berücksichtigt.

#### 1. Stromverteilung

Die Stromverteilung in der Spulenordnung nach Abb. 1 (Daten

#### 6. Asymmetrische Anordnung

Zwei gleiche Spulen sind durch einen Spalt der Breite  $2S$  getrennt. An der einen Spule liegt die Spannung  $+U$ , die andere Spule ist kurzgeschlossen. Für die Stromdichte gilt dann keine Symmetriebeziehung. In §3, Gl. (14) ist  $f(r, z, r', z')$  durch  $L(r, z, r', z')$  zu er-

setzen, ausserdem ist diese Gleichung nicht nur für positive  $z'$ , sondern auch für negative  $z'$  aufzustellen.

Die Durchführung der Rechnung ergibt, dass der in der kurzgeschlossenen Spule induzierte Strom zum grössten Teil in der inneren Stirnfläche und deren nächster Umgebung fliesst. Das Magnetfeld ist daher nahezu das gleiche wie das einer Anordnung, bei welcher die kurzgeschlossene Spule durch einen Ring ersetzt ist, wie dies Abb. 10 zeigt.

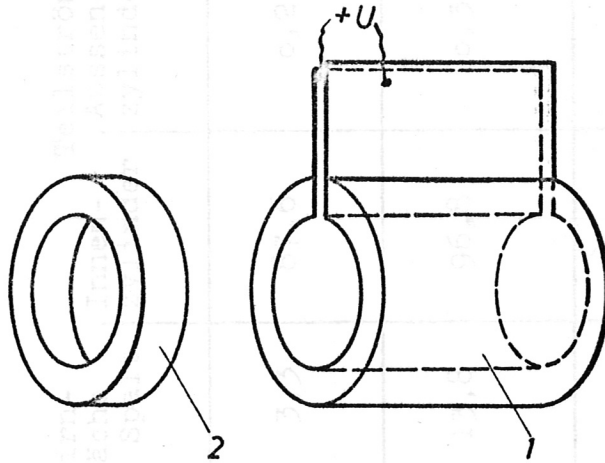


Abb. 10

#### Asymmetrische Anordnung mit Kurzschlussring

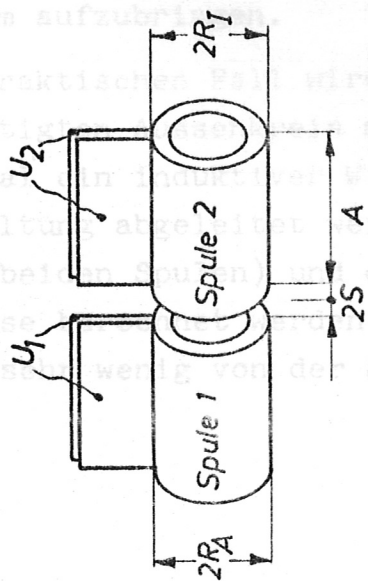
Der Feldbetrag besitzt im Spalt (d.h. für  $-S \leq z \leq +S$ ) kein ausgeprägtes Minimum, da der auf dem Ring induzierte Strom schwächer ist als der auf der gegenüberliegenden Stirnfläche. Der Feldlinienverlauf ist in Abb. 15 dargestellt.

### 7. Ergebnisse und Diskussion

#### 1. Stromverteilung

Die Stromverteilung in der Spulenordnung nach Abb. 1 (Daten siehe Tab. 1) wurde für 3 Fälle berechnet.

a) Beide Spulen werden gleichsinnig vom Strom durchflossen. Die Spannung an den Zuführungen der Spule 1,  $U_1$ , ist gleich der Spannung an der Spule 2,  $U_2$  (Theta-Pinch mit azimuthalem Spalt).



	Relat. Spaltbreite $Sp = 2S/R_I$	Gesamtstrom $J_1$	Stirnfläche am Spalt	Innenzylinder	Außenzylinder	Teilströme auf Stirnfläche am Spulenende
Theta-Pinch-Spule mit Spalt $U_1 = U_2$	0,56	100	3,3	87,6	0,2	8,9
Asymmetrische Anordnung 2. Hälfte kurzgeschlossen $U_1 \neq 0, U_2 = 0$	0,56	119,5	13,8	96,8	0,3	8,6
Cusp-Anordnung $U_1 = -U_2$	0,56	135,7	24,7	92,3	9,8	8,9
	0,2	182	63,3	96,7	12,7	9,3
	0,1	268	139,7	102,9	16,1	9,2

Tab. 1 Ströme (relat.) auf den Spulenflächen bei gegebenen gleichen Spannungen  $|U|$ .  
Spulendaten:  $A = 15$  cm,  $R_I = 3,5$  cm,  $R_A = 6,5$  cm.



b) Die Spulen werden gegensinnig vom Strom durchflossen;

$$U_1 = -U_2 \text{ (Cusp-Anordnung).}$$

c) Eine Spule führt Strom, die andere ist kurzgeschlossen;

$$U_1 \neq 0, U_2 = 0.$$

Abb. 13 zeigt die Stromverteilungen für die Anordnungen a) und b). Die Ströme sind auf den Wert des Stromes in der Spulenmitte normiert. Die Frequenz sei so hoch, dass nur Oberflächenströme fließen. Sowohl bei der Cusp-Anordnung als auch beim Theta-Pinch und bei der asymmetrischen Anordnung in der primär stromführenden Spule ist die Stromdichte im Innenzylinder praktisch gleichförmig mit Ausnahme eines sehr kurzen Bereichs nahe an den Enden (Abb. 13 und 14). In diesem Bereich (ca. 5 mm) steigt der Strom zu den Enden hin stark an. Der Verlauf des Stromanstiegs hängt von der Wanddicke der Spule ab.

Die Stromdichte auf der inneren Stirnfläche und auf dem Aussenmantel der Spule ist sehr stark von der Schaltung der Spulen und von der Spaltbreite abhängig. Tab. 1 gibt für eine Spule mit den angegebenen Abmessungen die Aufteilung der Ströme auf die verschiedenen Spulenflächen. Es ist zu beachten, dass für die verschiedenen Schaltungen a) - c) gleiche Spannung an den Spulenanschlüssen vorgegeben wurde.

Man sieht, dass sich bei den verschiedenen Schaltungen der Strom im Spuleninnenzylinder nur wenig ändert. Der Gesamtstrom steigt jedoch bei der Cusp-Schaltung beträchtlich an, da nun ein grösserer Strom auf der Innenstirnfläche und auf dem Aussenmantel fliesst. Das heisst, um gleichen magnetischen Fluss im Spuleninneren (oder gleiches  $B_{z0}$ ) zu erhalten, ist beim Cusp ein wesentlich höherer Strom aufzubringen.

Im praktischen Fall wird dies Verhalten durch den hier unberücksichtigten Aussenkreis modifiziert. Aus Tab. 1 kann jedoch formal ein induktiver Widerstand der Spule in der jeweiligen Schaltung abgeleitet werden (oder auch die Gegeninduktion zwischen den beiden Spulen) und damit können in der üblichen Weise die Kreise berechnet werden. Da die Stromverteilung im Innenzylinder nur sehr wenig von der Schaltung der Spulen abhängt, kann auch

sinngemäss auf die Ströme in längeren Spulen extrapoliert werden.

## 2. Magnetfelder

### a) Vergleich mit Messungen

Für eine experimentell verwendete Theta-Pinch-Spule wurden die Feldverteilungen nach dem angegebenen Verfahren numerisch berechnet und die  $B_z$ -Komponenten mit Messungen verglichen. Die Daten der Spule sind  $R_I = 3,55$  cm,  $R_A = 6,5$  cm, gesamte Spulenlänge =  $2(A + S) = 32$  cm, Spaltbreite  $2S = 2$  cm. Die Feldmessungen wurden mit Magnetfeldsonden bei einer Frequenz des Spulenstroms von 100 kHz durchgeführt. Die Sondenspulen hatten einen Durchmesser von 0,8 mm und eine Länge von ca. 0,5 mm bei 20 Windungen. Abb. 16 zeigt den berechneten axialen  $B_z$ -Verlauf im Bereich des Spulenschlitzes für verschiedene Spulenradien. Die Radien und Abstände sind auf den Spuleninnenradius  $R_I$  normiert und das Magnetfeld auf das ungestörte homogene Feld im Spuleninneren  $B_{z0}$ . Zu 2 Feldverläufen sind die Messwerte eingetragen. Die Übereinstimmung ist gut. Bei den achsennahen  $B_z$ -Werten beträgt die Abweichung der Messpunkte maximal  $\pm 3\%$ , bei den wandnahen Werten 5 - 10%. Die grösseren Abweichungen erklären sich durch die in Wandnähe (besonders in der Nähe der Kante) vorhandenen grossen Feldgradienten. Die Abmessungen der Sonden und die Ungenauigkeit der Ortsbestimmung verursachen deshalb in Wandnähe grössere Fehler.

Vergleiche zwischen Messung und Rechnung wurden ebenfalls an den Spulenenenden durchgeführt (Abb. 20). Auch hier war Übereinstimmung in den angegebenen Fehlergrenzen vorhanden.

### b) Ergebnisse der numerischen Rechnungen für Theta-Pinch-Spulen und Beschreibung durch Näherungsformeln

Abb. 16 gibt einen Überblick über den Verlauf der Feldkomponenten  $B_z$  und  $B_r$  im Bereich des Spaltes für die unter a) angegebene Theta-Pinch-Spule. Zur besseren Anschaulichkeit ist in Abb. 17 noch eine räumliche Darstellung des  $B_z$ -Verlaufs gegeben.

Charakteristisch für  $B_z$  und  $B_r$  ist ein starkes Maximum in der Nähe der Schlitzkante.  $B_r$  erreicht dort Werte vergleichbar mit

$B_{z0}$  während  $B_z$  beträchtlich über  $B_{z0}$  anwächst.  $dB_z/dr$  ist im Bereich des Spaltes negativ mit Ausnahme eines kleinen Gebietes in der Nähe der Kante.  $B_r$  nimmt im Spaltbereich innerhalb der Spule in radialer Richtung zu.

Bei anderen relativen Spaltbreiten zeigen  $B_r$  und  $B_z$  einen qualitativ ähnlichen Verlauf wie in Abb. 16/17 dargestellt. Kennzeichnend für die Störung des Spulenfeldes durch einen Spalt ist der Verlauf von  $B_z(o,z)$  und  $B_z(r,o)$ . Diese  $B_z$ -Verläufe werden für verschiedene Spaltbreiten gezeigt und durch Näherungsformeln beschrieben. Die Ergebnisse sind brauchbar für genügend lange Spulen mit Einzelspalten. Die Spulenabschnitte links und rechts des Spalts müssen so lang sein, dass im Inneren der Abschnitte ein Bereich mit homogenem Magnetfeld  $B_{z0}$  existiert. Zur Abschätzung der notwendigen Spulenlängen kann man Abb. 16 heranziehen.

Es werden folgende Bezeichnungen verwendet:

$B_{za}(r,z)$  gemäss Näherungsformeln errechneter  $B_z$ -Wert bei  $r,z$

$B_z(r,z)$  gemäss § 1-4 maschinell errechneter  $B_z$ -Wert bei  $r,z$

$B_{z0}$  Wert des homogenen  $B_z$ -Feldes im Spuleninneren

$S_p = 2S/R_I$  relative Spaltbreite

$D_r = (R_A - R_I)/R_I$  relative Wand-Dicke

Der Verlauf des  $B_z$ -Feldes auf der Spulenachse  $B_z(o,z)$  im Spaltbereich ist in Abb. 18 für verschiedene Spaltbreiten dargestellt. Näherungsweise kann er beschrieben werden durch

$$(38) \quad B_{za}(0,z) = B_0 (1 - B e^{-(z/c)^2})$$

wobei

$$(39) \quad B = 0,2 S_p^{1,8} \quad = \text{Tiefe der Einsattelung}$$

$$(40) \quad c = \sqrt{0,3 R_I^2 + S^2} \quad = \text{Breite der Einsattelung} \\ \text{(s. Abb. 11)}$$

Die Formeln (38) und (40) wurden für  $1 \gg S_p \geq 0,2$  erprobt; für kleinere Spaltbreiten ist die durch (39) gegebene Einsattelungstiefe zu klein.



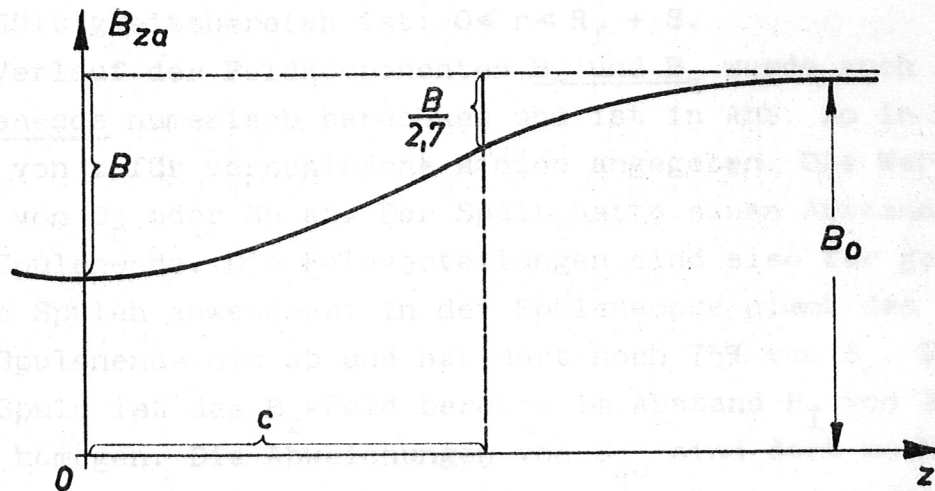


Abb. 11

Bei Theta-Pinch Experimenten werden meist Beobachtungsspalte mit einer relativen Breite  $2S/R_I$  von etwa 0,2 verwandt. Solche Spalte vermindern  $B_z(0,0)$  um etwas über 1%.

Die Berücksichtigung der Wanddicke der Spule bringt nur eine sehr geringfügige Erhöhung von  $B_z(0,z)$ , die nur bei grossen Spaltbreiten merklich ist. Dies ist in Abb. 18 bei  $Sp = 1$  für zwei sehr unterschiedliche Wandstärken  $Dr = 0,04$  und  $Dr = 0,8$  gezeigt. In Gl. (38) - (40) wird der Einfluss der Wandstärke vernachlässigt.

Der radiale  $B_z$ -Verlauf in der Spaltmitte  $B_z(r,0)$  für verschiedene Spaltbreiten aus den numerischen Rechnungen ist in Abb. 19 dargestellt. Auch hier ist der Einfluss der Wandstärke (bei  $Sp = 0,4$ ) gezeigt. Wie zu erwarten ist der Einfluss in der Nähe der inneren Spaltkante (bei  $r/R_I \approx 1,1$ ) am grössten und ergibt bei den vorliegenden Abmessungen eine Änderung um etwa 5%.

Der  $B_z$ -Verlauf für nicht zu grosse Spaltbreiten ( $Sp < 0,4$ ) kann grob charakterisiert werden durch:

Die Störung des  $B_{z0}$ -Feldes im Spuleninneren durch einen Spalt ist gross für  $R_I > r > R_I - 2S$ ; für  $r < R_I - S$  liegt die Abnahme von  $B_z$  unter 10% von  $B_{z0}$ .

Genähert ergibt sich der  $B_z$ -Verlauf zu:

$$(41) \quad B_{za}(r,0) = \frac{B_1}{\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{\pi R_I}{2S} - \operatorname{arctg} \left( \frac{\pi}{2S} (r - R_I) \right) \right)$$

Abb. 12

wobei  $B_1 = B_0 (1-B)$

Der Gültigkeitsbereich ist:  $0 \leq r < R_I + S$ .  
 Der Verlauf der Feldkomponenten  $B_r$  und  $B_z$  wurde auch für das Spulenende numerisch berechnet und ist in Abb. 20 in Abhängigkeit von  $z$  für verschiedene Radien angegeben. Die Werte hängen kaum von  $D_r$  oder  $S_p$  ab. Der Spalt hatte einen Abstand  $4,2 \cdot R_I$  vom Spulenende. Die Feldverteilungen sind also für genügend lange Spulen anwendbar. In der Spulenchse nimmt das  $B_z$ -Feld zum Spulenende hin ab und hat dort noch 75% von  $B_0$ . Im Inneren der Spule ist das  $B_z$ -Feld bereits im Abstand  $R_I$  vom Spulenende fast homogen. Die Abweichungen von  $B_{z0}$  sind dort noch etwa 2%. Im Bereich des inhomogenen Feldes nimmt  $B_z$  in der Spule in radialer Richtung beträchtlich zu, ausserhalb der Spule nimmt es ab. Auf ein driftendes Plasma wirkt demnach im Bereich des inhomogenen  $B_z$ -Feldes innerhalb der Spule eine zur Achse rücktreibende Kraft.

Eine Näherungsformel für den Verlauf von  $B_z(0, z)$  ergibt sich wie folgt:

$z_2 = A + S + aR_I$  sei die Stelle, bei welcher das Feld auf die Hälfte des Wertes im Spulenninneren abgesunken ist.  $a$  liegt bei 0,41. Führt man die Variable  $\gamma = \frac{z - z_2}{1,61R_I}$  ein, so findet man

$$(42) \quad B_{za} = \frac{B_0}{2} \left\{ 1 - \tanh\left(\frac{\gamma}{2} - 0,1 \left(\frac{\gamma}{2}\right)^3\right) \right\} \quad \gamma \leq 0$$

$$(43) \quad B_{za} = \frac{B_0}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{\gamma}{\pi}\right) \right\} \quad \gamma \geq 0$$

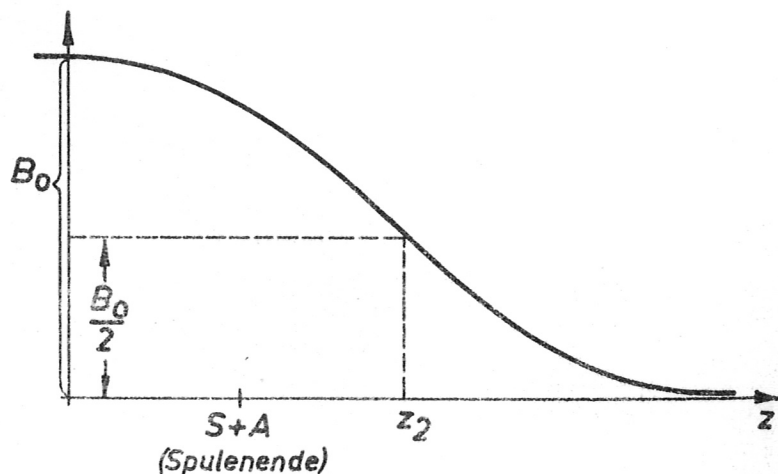


Abb. 12

Die radiale Feldkomponente nimmt erst ausserhalb der Spule grössere Werte an.  $dB_r/dr$  ist dort positiv.

c) Cusp-Anordnung

In Abb. 21 ist der Verlauf der Feldkomponenten  $B_z$  und  $B_r$  für eine Spule (Daten siehe §7 2 a)) dargestellt, wenn die symmetrisch gebauten Spulen gegensinnig vom Strom durchflossen werden.

Im Vergleich mit Abb. 16 sieht man, dass sich die Störung des homogenen  $B_z$ -Feldes weiter in die Spule hinein erstreckt als bei der Theta-Pinch Anordnung.  $B_r$  nimmt entsprechend §5 im Spalt bei  $r/R_I = 1$  Werte an, die beträchtlich über dem Wert von  $B_{z0}$  liegen.



Literaturverzeichnis

- 1 M.G. Haines, Physics Letters 6, 313 (1963)
- 2 A.C. Kolb, P.C. Thoneman, Phys. Fluids 7, 1455 (1964)
- 3 J.A. Reynolds et.al., CLM-P 46 (1964)

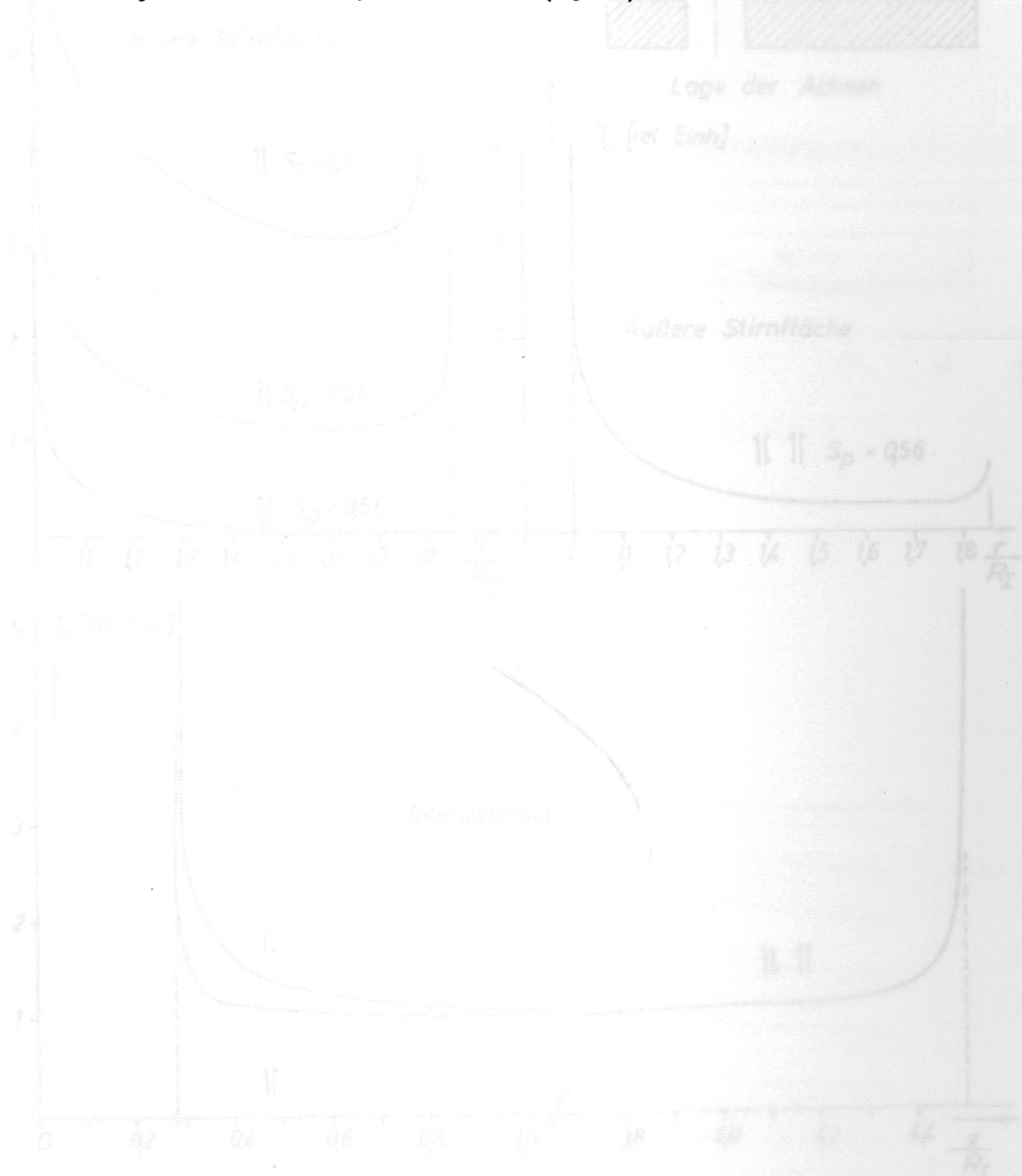


Abb. 13 Stromverteilung auf den Stirnflächen und auf dem Innenzylinder der Spule 1  
 I<sub>1</sub> = Theta-Pinch-Spule mit Spalt  $U_1 = U_2$   
 II = Cusp-Anordnung  $U_1 = -U_2$   
 $Sp = 2s/R_1 =$  relative Spaltbreite

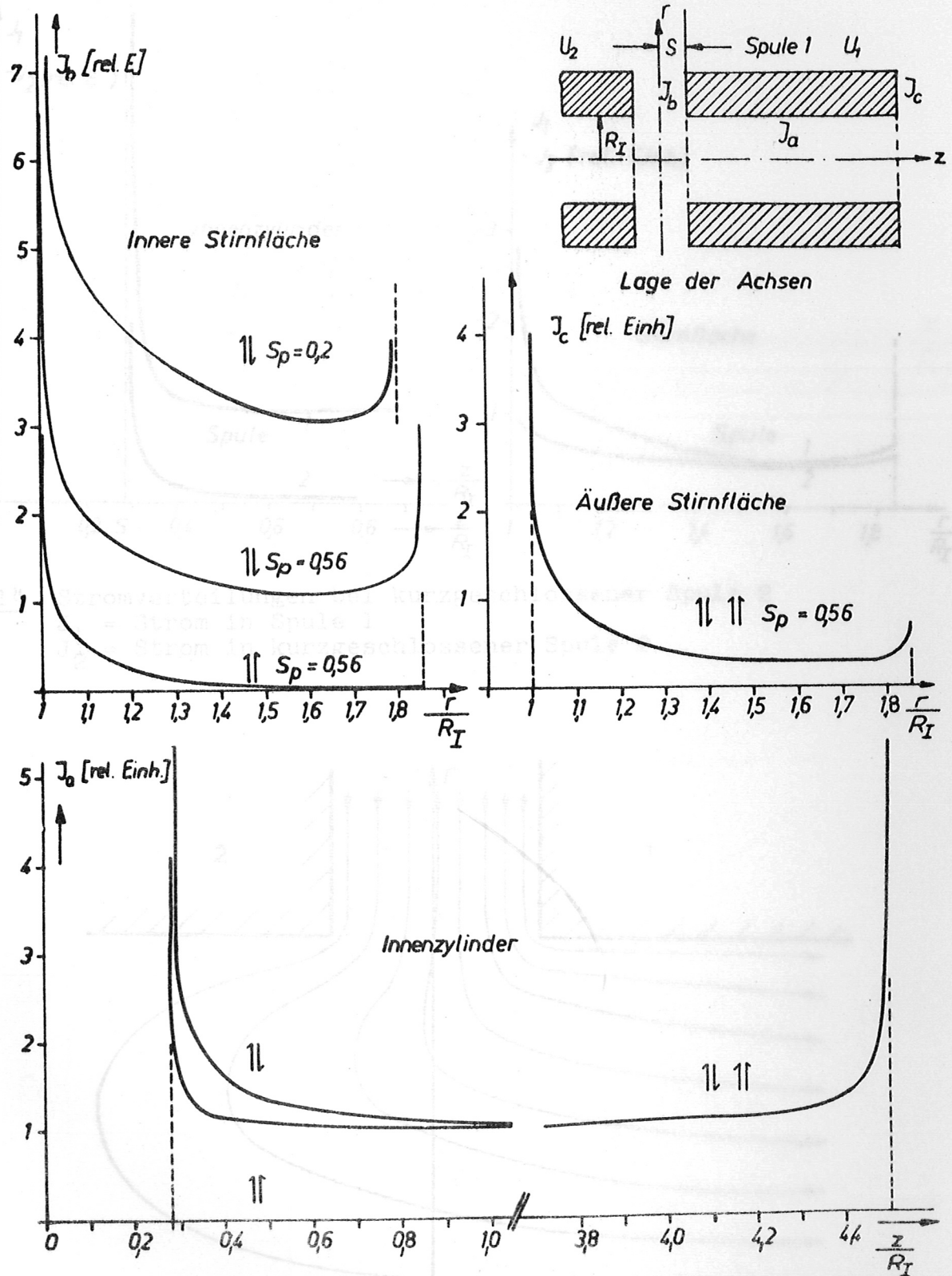


Abb. 13 Stromverteilung auf den Stirnflächen und auf dem Innenzylinder der Spule 1

↑↑ = Theta-Pinch-Spule mit Spalt  $U_1 = U_2$

↑↓ = Cusp-Anordnung  $U_1 = -U_2$

Sp =  $2S/R_I$  = relative Spaltbreite

Spule 2 ist Kurzgeschlossen

Abb. 15

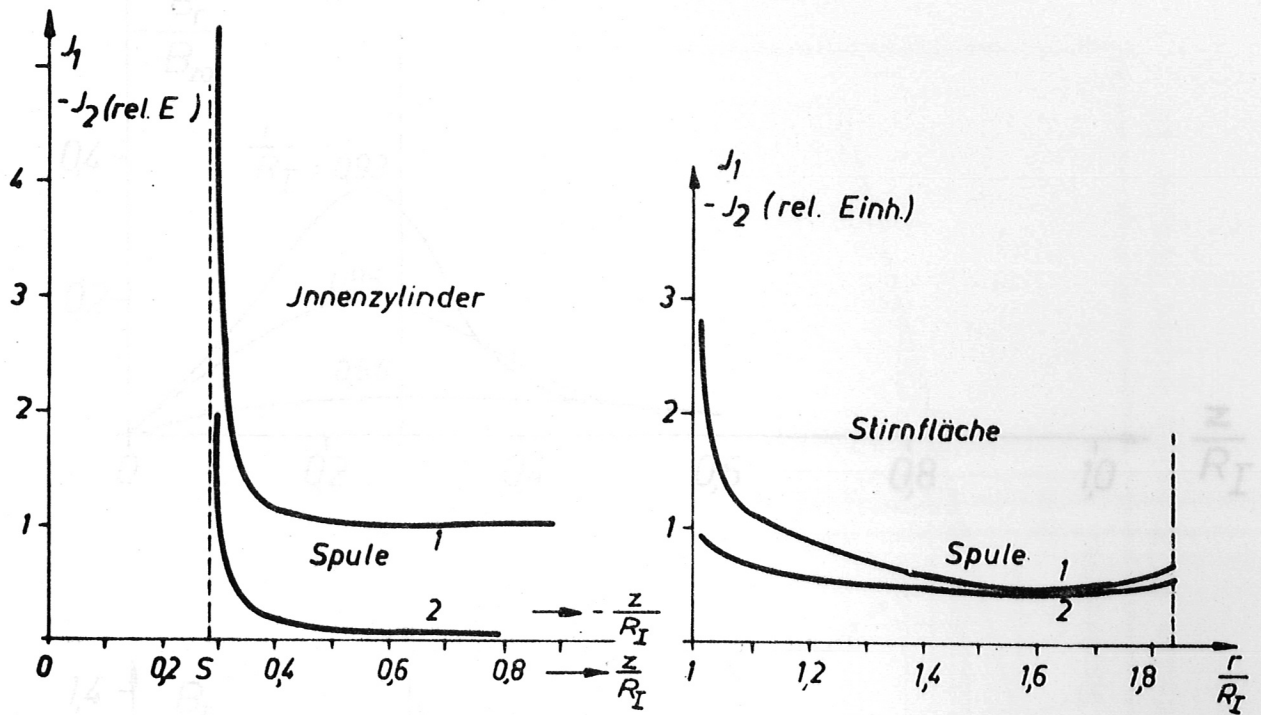


Abb. 14 Stromverteilungen bei kurzgeschlossener Spule 2  
 $J_1$  = Strom in Spule 1  
 $J_2$  = Strom in kurzgeschlossener Spule 2

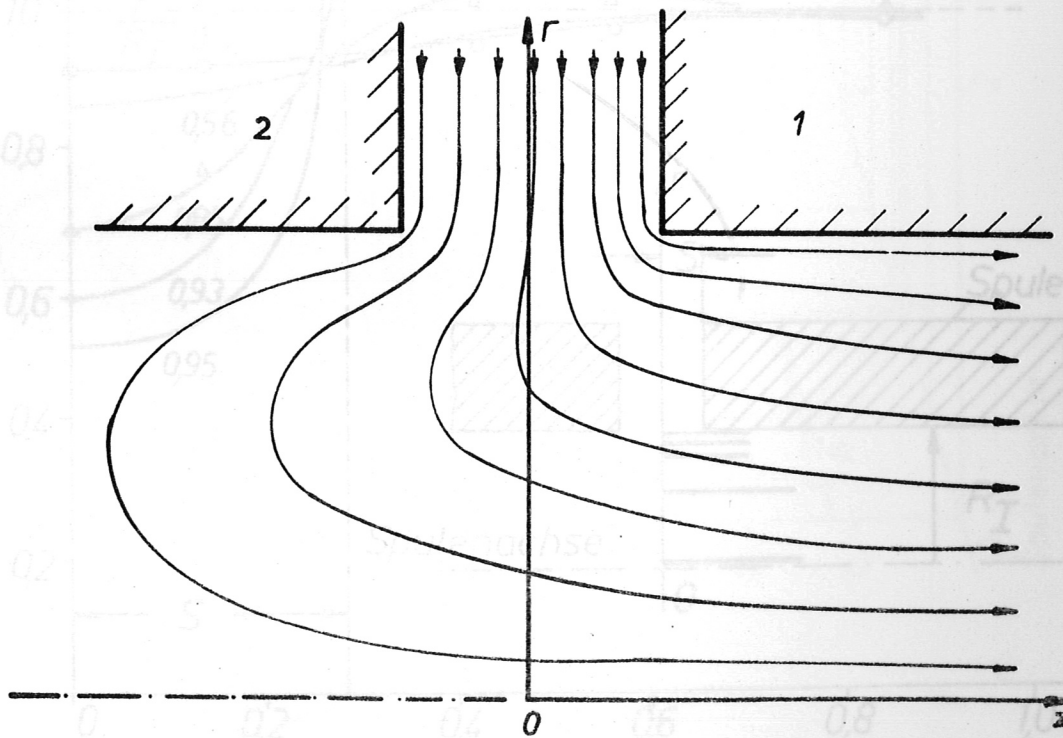


Abb. 15 Feldlinienverlauf (qualitativ), im Bereich eines Spaltes  
 Spule 1 führt primär Strom  
 Spule 2 ist kurzgeschlossen



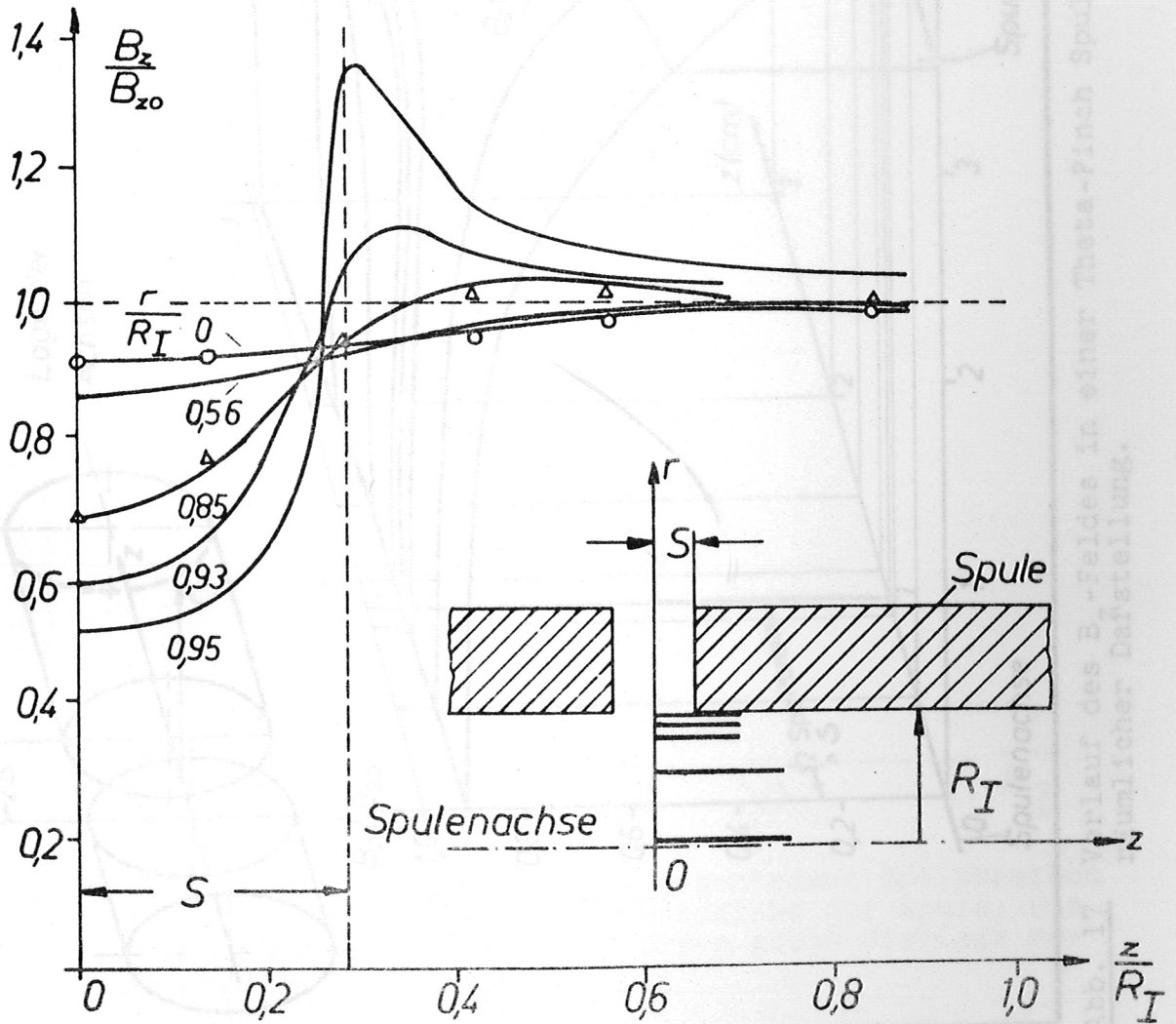
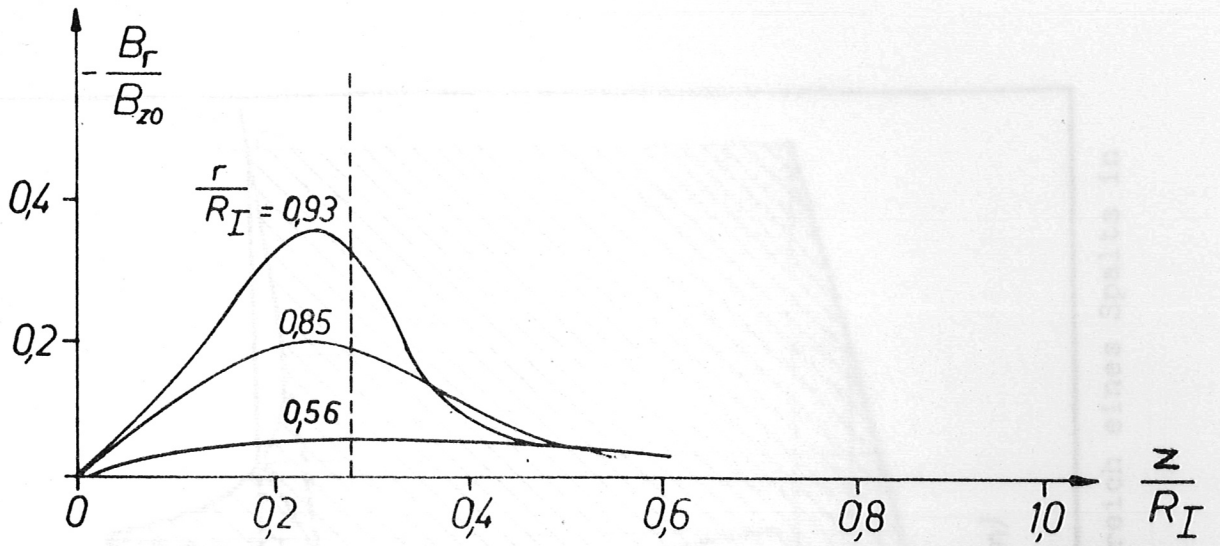


Abb. 16 Relative magnetische Feldstärken im Bereich eines Spaltes der rel. Breite  $Sp = 2S/R_I = 0,56$   
 0 = Messwerte für  $r/R_I = 0$   
 $\Delta$  = Messwerte für  $r/R_I = 0,85$

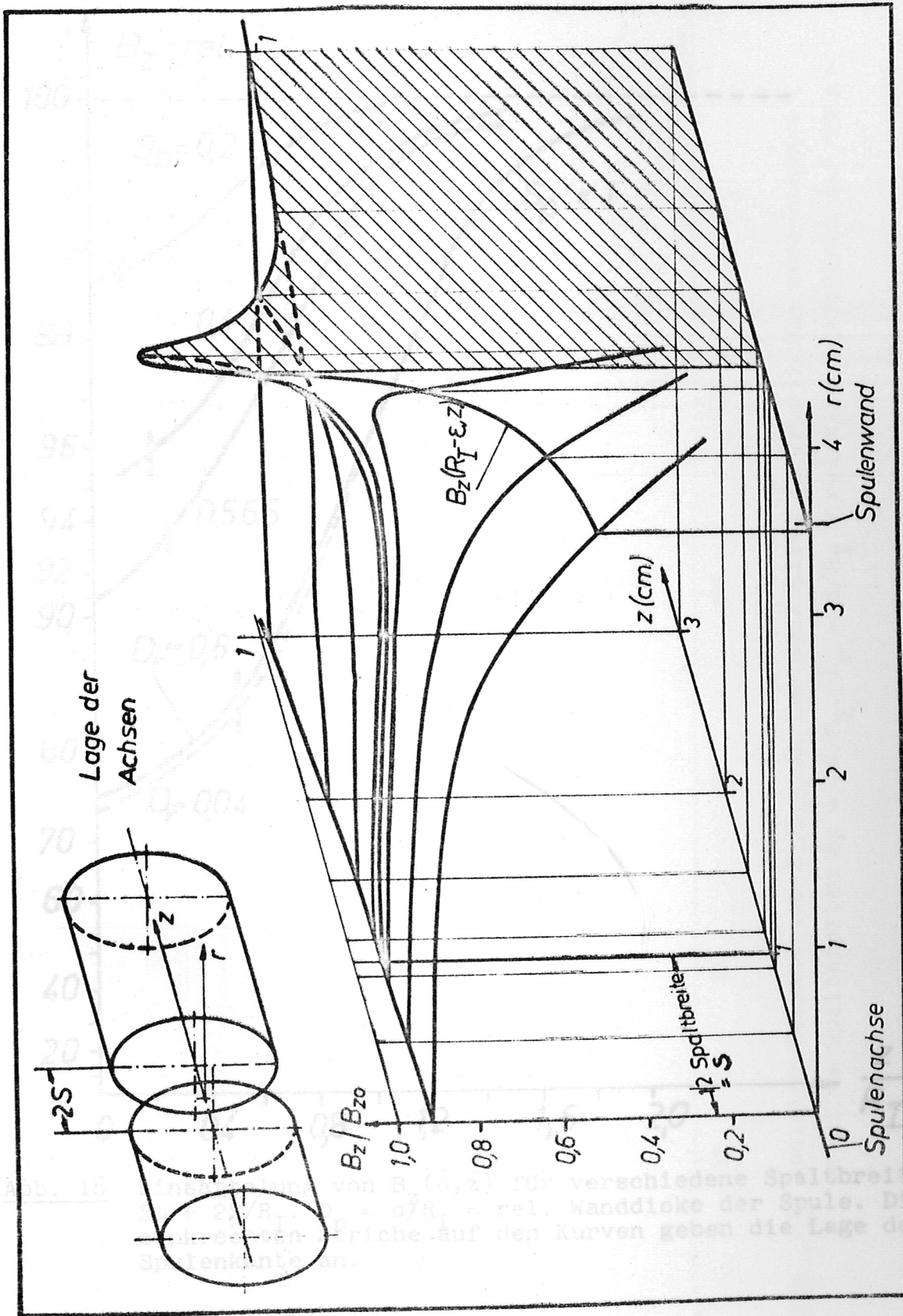


Abb. 17 Verlauf des  $B_z$ -Feldes in einer Theta-Pinch Spule im Bereich eines Spalts in räumlicher Darstellung.

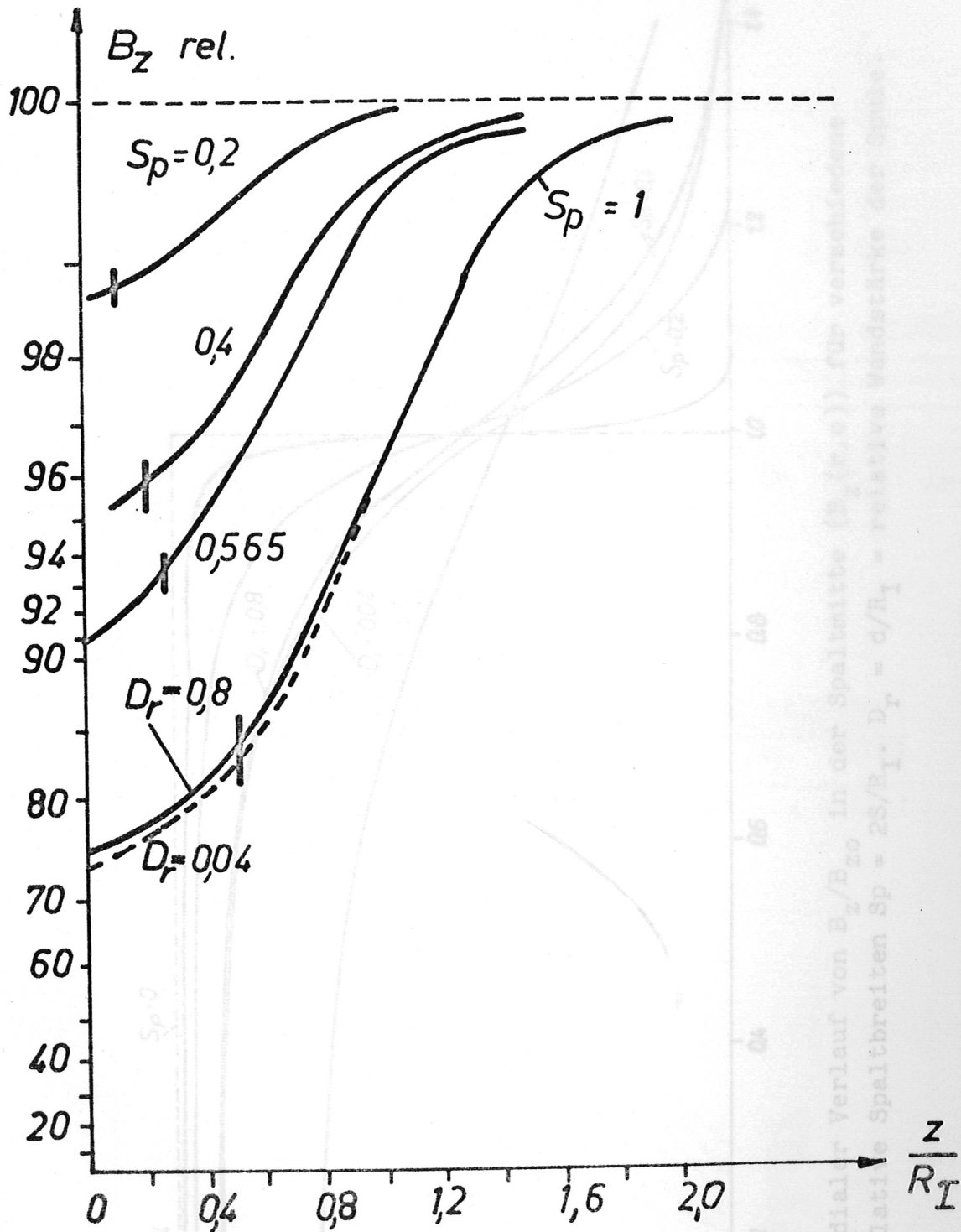


Abb. 18 Einsattelung von  $B_z(o, z)$  für verschiedene Spaltbreiten  $S_p = 2S/R_I$ .  $D_r = d/R_I =$  rel. Wanddicke der Spule. Die senkrechten Striche auf den Kurven geben die Lage der Spulenkante an.



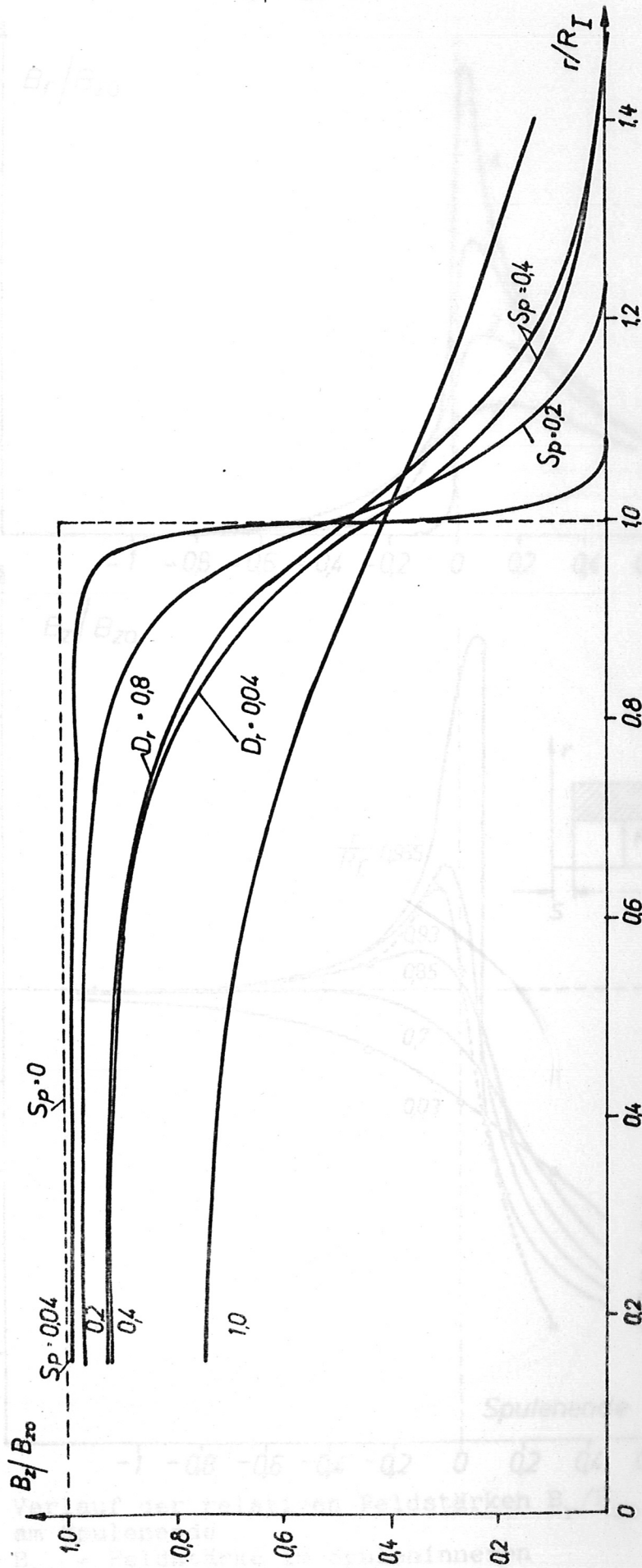


Abb. 19 Radialer Verlauf von  $B_z/B_{z0}$  in der Spaltmitte ( $B_z(r,0)$ ) für verschiedene relative Spaltbreiten  $Sp = 2S/R_I$ .  $D_r = d/R_I$  = relative Wandstärke der Spule.

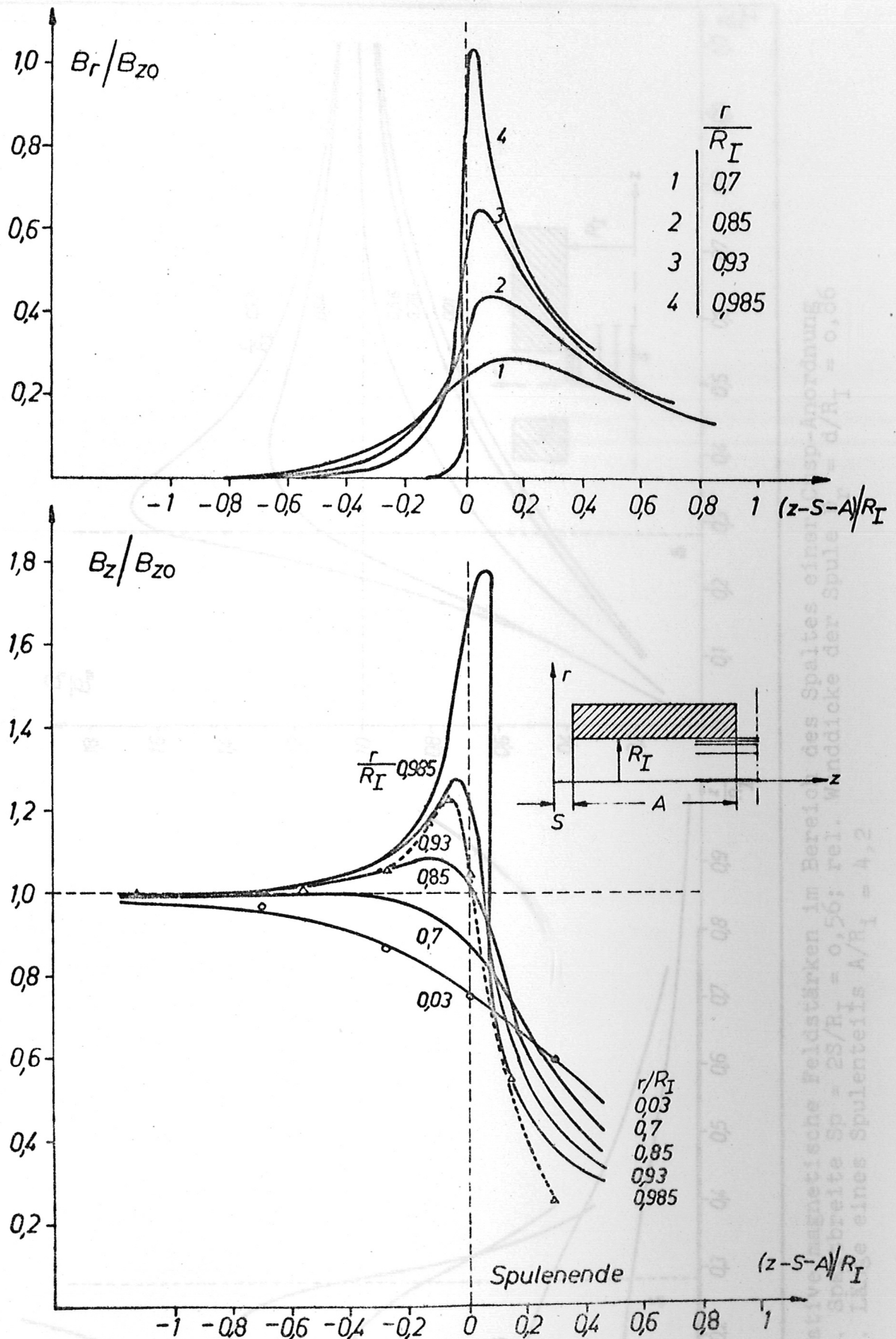


Abb. 20 Verlauf der relativen Feldstärken  $B_r/B_{z0}$  und  $B_z/B_{z0}$  am Spuleneende  
 $B_{z0}$  = Feldstärke im Spulennieren  
 $\circ$  = Messwerte bei  $r/R_1 = 0,03$   
 $\Delta$  = Messwerte bei  $r/R_1 = 0,93$

Abb. 21 Relativmagnetische Feldstärken im Bereich des Spaltess einer Spulenordnung  
 Rel. Spaltenbreite  $Sp = 2S/R_1 = 0,56$ ; rel. Manddicke der Spule  $d/R_1 = 0,36$   
 Rel. Länge eines Spulenteils  $A/R_1 = 4,2$

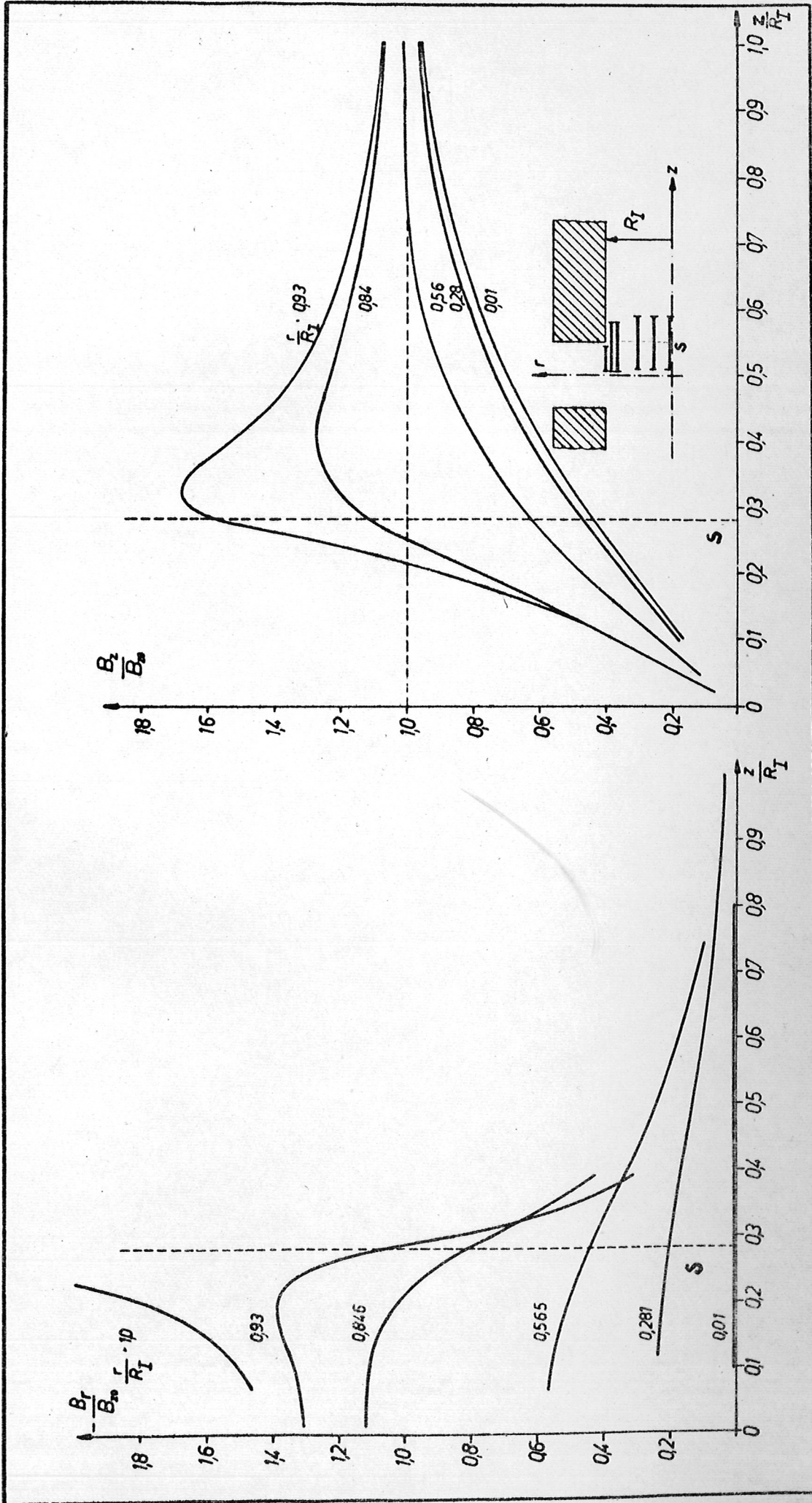


Abb. 21 Relative magnetische Feldstärken im Bereich des Spaltess einer Cusp-Anordnung  
 Rel. Spaltbreite  $Sp = 2s/R_1 = 0,56$ ; rel. Wanddicke der Spule  $D_r = d/R_1 = 0,06$   
 Rel. Länge eines Spulenteils  $A/R_1 = 4,2$