

Studien zur statischen Schicht

W. Ott

IPP 2/34

Januar 1964

I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K

G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Studien zur statischen Schicht

W. Ott

Die in der vorliegenden Arbeit behandelten Messungen der elektrischen Feldstärke in der statischen Schicht werden verglichen mit einer Näherungslösung auf der Grundlage des Bohm-Kriteriums und mit exakten Lösungen der Plasma-Schicht-Gleichung von TONKS und LANGMUIR für den Bereich $\omega > \omega_{pe}$. Bei allen Rechnungen ergibt sich für den Verlauf der Feldstärke eine flache S-Form und damit in einem weiten Bereich der stromlosen Schicht ein annähernd linearer Verlauf, der mit dem experimentell beobachteten, von JANSEN und KROHNE (1964) im Januar 1964 veröffentlichten Anstieg gut übereinstimmt.

Die hier vorgeschriebenen Bedingungen des linearen Falles der experimentellen Kurven auf vollwirksame Hall sind der Schnittpunkt der Wendetangente der Parameterkurven mit der Abszisse gestattet die Definition einer Bohm-Kriterium, die aus zwei Gründen bevorzugt werden kann. Zum einen, weil das Bild der Parameterkurven durch die Bohm-Kriterium, zum anderen, weil die Bohm-Kriterium Bohm-Kriterium Bohm-Kriterium mit optischen Methoden von LANGMUIR (1924) und KROHNE (1964) gemessen werden kann.

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

Zusammenfassung

Eigene und fremde Messungen der elektrischen Feldstärke in der Plasmagrenzschicht werden verglichen mit einer Näherungsrechnung auf der Grundlage des BOHM-Kriteriums und mit exakten Lösungen der Plasma-Schicht-Gleichung von TONKS und LANGMUIR für den Bereich der Schicht.

Bei allen Rechnungen ergibt sich für den Verlauf der Feldstärke eine flache S-Form und damit in einem weiten Bereich der stromlosen Schicht ein annähernd linearer Verlauf, der mit dem experimentell gefundenen, praktisch linearen Anstieg gut übereinstimmt.

Die lineare Extrapolation des linearen Teils der experimentellen Kurven auf Feldstärke Null bzw. der Schnittpunkt der Wendetangente der berechneten Kurven mit der Abszisse gestattet die Definition einer Schichtdicke, die aus zwei Gründen "optisch" genannt werden soll: Einmal, weil das Bild der Feldstärkekurve diese Definition anbietet, zum anderen, weil die so definierte Schichtdicke übereinstimmt mit optischen Messungen von LANGMUIR und MOTT-SMITH.

S. 16
S. 17
S. 28
S. 29

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	S. 1
I. Einführung	S. 1
II. Messung der Feldstärke mit Elektronenstrahlsonden	S. 1
III. Näherungsrechnung auf der Grundlage des BOHM-Kriteriums	S. 3
IV. Exakte Lösung des Schichtproblems	S. 6
A. Die Plasma-Schicht-Gleichung von TONKS und LANGMUIR	S. 6
B. Zur Bedeutung von α	S. 7
C. Lösung der Plasma-Schicht-Gleichung	S. 8
D. Vergleich mit der BOHMschen Näherung	S. 10
V. Vergleich mit optischer Schichtdickenbestimmung	S. 11
VI. Einfaches Schichtmodell	S. 12
VII. Anhang: Sphärisches Plasma	S. 13
Literatur	S. 14
Tabellenverzeichnis	S. 16
Tabellen	S. 17
Bildunterschriften	S. 28
Bilder	S. 29

I. Einführung

Alle irdischen Plasmen sind von Schichten umgeben, in denen starke Gradienten des Potentials und der Trägerdichte auftreten, die auf das Plasma mehr oder weniger intensiv zurückwirken. Es ist daher wichtig, Näheres über die Schicht zu wissen, d.h. über den Verlauf von Potential, Feldstärke und Raumladungsdichte, über mögliche Instabilitäten in der Schicht, über den Einfluß der Schicht auf Resonanzen usw.

Die vorliegende Studie befaßt sich mit statischen Schichten im Niederdruckfall, bei dem die freie Weglänge groß ist gegen die Querdimensionen des Plasmas. Die Grundlagen für die exakte theoretische Behandlung der Schicht sind von TONKS und LANGMUIR gegeben worden. Die Lösung ihrer Plasma-Schicht-Gleichung im Bereich der Schicht scheiterte jedoch lange Zeit an mathematischen Schwierigkeiten. Man begnügte sich daher mit mehr oder weniger brauchbaren Näherungen, erfand Randbedingungen und stellte Schichtkriterien auf, die sich zum Teil als geradezu falsch erwiesen. In jetzt erschienenen Berichten wurde das alte Problem von TONKS und LANGMUIR für endliche α numerisch gelöst und zwar von SELF für ebene Geometrie und von PARKER für zylindrische Geometrie. Wie hier gezeigt werden soll, läßt sich das Schichtproblem im Grenzfall $\alpha \rightarrow 0$ ebenfalls lösen.⁺)

Es scheint nötig, daß die damit bekannten, theoretisch exakten Ergebnisse für verschiedene Werte des Parameters α sowohl untereinander als auch mit der BOHMschen Näherung und mit experimentellen Ergebnissen verglichen werden.

II. Messung der Feldstärke mit Elektronenstrahlsonden

GIERKE, OTT und SCHWIRZKE⁽¹⁾⁽²⁾ bestimmten die statische elektrische Feldstärke in der Grenzschicht zwischen Plasma und isolierter Wand nach einer Methode, wie sie von GABOR, ASH und DRACOTT⁽³⁾ benutzt worden war: Durch die Schicht

⁺) α gibt ungefähr das Verhältnis von DEBYE-Länge zu Linear-dimension. Zur genauen Definition siehe Abschnitt IV.

wird ein Elektronenstrahl geschossen, der eine der elektrischen Feldstärke proportionale Ablenkung erfährt. Abweichend von dem von GABOR et al. angegebenen Verlauf erhielten sie in einem größeren Bereich vor der Wand einen linearen Abfall, dem sich ein langsamer Übergang ins feldfreie Plasma anschließt. Abb. 1 zeigt eine Kurvenschar, wie sie sich bei verschiedenen Entladungsströmen in der positiven Säule ergeben hatte.

Die lineare Extrapolation des linearen Abfalls auf Feldstärke Null gestattet die Definition einer "optischen" Schichtdicke. Sie wird, wie die Abbildung deutlich zeigt, mit zunehmender Entladungsstromstärke, d.h. mit zunehmender Plasmadichte, immer kleiner. Eine nähere Untersuchung⁽¹⁾⁽⁴⁾ zeigte ihre umgekehrte Proportionalität zur Wurzel aus der Plasmadichte. Damit besitzt sie die gleiche Abhängigkeit von der Plasmadichte wie die DEBYE-Länge.

Bei diesen Messungen im Quecksilberdampfplasma ergab sich die optische Schichtdicke als das 3- bis 5-fache der DEBYE-Länge im ungestörten Plasma oder als das 4- bis 7-fache der DEBYE-Länge in dem Bereich, in dem mit der Elektronenstrahlsonde gemessen wurde. ⁺)

HARP und KINO⁽⁵⁾ haben ebenfalls den Verlauf der Schichtfeldstärke mit einem Elektronenstrahl ausgemessen. Sie brachten dazu eine ebene Platte in ein Quecksilberplasma, dessen Aufbau dem von TAKAYAMA et al.⁽⁶⁾ entspricht. Vor der stromlosen Platte fanden auch sie einen ziemlich gut linearen Abfall der Feldstärke mit einem anschließend langsamen Übergang ins Plasma. Die von ihnen angegebenen Kurven sind in Abb. 2 auf die dimensionslosen Variablen $d\eta/d\xi$ und ξ übertragen und dabei auf den optischen Schichtrand bezogen (η = in kT_e gemessenes Potential, ξ = in DEBYE-Längen gemessene räumliche Entfernung).

⁺) Wegen der größeren Verluste durch die eingebrachte Platte war die Plasmadichte um ungefähr Faktor 2 größer, die DEBYE-Länge also um Faktor $\sqrt{2}$ kleiner als in der ungestörten Entladung.

Die Kurve für 100 mA stimmt im eigentlichen Schichtbereich sehr gut mit der unten behandelten BOHMschen Näherung überein; die übrigen Kurven scheinen einen Gang mit der Entladungsstromstärke anzudeuten, derart, daß die auf die DEBYE-Länge bezogene Schichtdicke mit zunehmendem Strom kleiner wird. Dazu muß allerdings gesagt werden, daß Plasmadichte und Elektronentemperatur nur für die Kurve für 100 mA Entladungsstromstärke angegeben waren ($n_0 = 10^8 \text{ cm}^{-3}$, $T_e = 3,6 \text{ eV}$). Um die anderen Kurven von HARP und KINO zu einem Vergleich heranziehen zu können, wurde bei der Auswertung die gleiche Elektronentemperatur wie bei 100 mA und eine der Entladungsstromstärke proportionale Plasmadichte angenommen. Wesentliche Änderungen im Bild der Kurvenschar durch die gemessenen Werte von n_e und T_e sind allerdings nicht zu erwarten, und so zeigt Abb. 2, daß der optische Schichtrand den geeigneten Ausgangspunkt für einen Vergleich darstellt.

In einer anderen Art von Grenzsicht, nämlich im Kathodenfeld einer anomalen Glimmentladung in Wasserstoff hat WIEDEMANN ⁽⁷⁾ ebenfalls die Feldstärke mit einer Elektronenstrahlsonde gemessen und mit Abb. 1 und 2 vergleichbare Kurven gefunden: Er erhielt in der Nähe des Glimmsaums einen flachen S-förmigen Feldstärkeanstieg. Ein quantitativer Vergleich läßt sich leider nicht anstellen, da in dieser Arbeit die Plasmadaten nicht bestimmt worden sind.

III. Näherungsrechnung auf der Grundlage des BOHM-Kriteriums

BOHM ⁽⁸⁾ beschäftigte sich mit der Grenze zwischen einem Plasma und der positiven Raumladungsschicht, die sich vor einer negativen Wand ausbildet. Er knüpfte an die früheren Arbeiten von LANGMUIR et al. ⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾ an, die gezeigt hatten, daß es keine "ideale" Grenze geben kann, auf deren einer Seite sich ein ungestörtes Plasma und auf deren anderer sich die Schicht befindet.

BOHM zeigte, daß das Potential schon innerhalb des Plasmas um einen bestimmten Betrag abfallen muß, damit die Ionen auf eine gewisse Energie beschleunigt werden. Unter folgenden vereinfachenden Voraussetzungen

1. die Ionen seien monoenergetisch und fallen frei zur Wand, ihre Energie sei gleich dem gesamten Potentialabfall, d.h. alle Ionen sollen im Potentialmaximum gebildet werden,
2. die Elektronendichte stellt sich in der Schicht gemäß einer BOLTZMANN-Verteilung ein,
3. der Unterschied zwischen Ionen- und Elektronendichte und die Feldstärke E seien innerhalb des Plasmas bis zum Schichttrand vernachlässigbar klein,

fand er für das Potential des Schichtrandes:

$$- U_0 \geq \frac{1}{2} \frac{kT_e}{e}$$

und damit für die Energie der Ionen am Schichttrand $|eU_0|$.

BOHM, BURHOP und MASSEY ⁽¹¹⁾ gaben als Folgerung für kalte Ionen folgende maximale Ionenstromdichte an:

$$j_i = \epsilon^{-1/2} \cdot n_0 \sqrt{\frac{kT_e}{m_i}}$$

ϵ = Basis der natürlichen Logarithmen.

ALLEN und THONEMANN ⁽¹²⁾ vermieden die BOHMsche Annahme $E = 0$ am Schichttrand, setzten dafür aber die räumlichen Ableitungen von Ionen- und Elektronendichte am Schichttrand einander gleich und gelangten zu demselben Ergebnis für die Ionenenergie.

SCHULZ und BROWN ⁽¹³⁾ berechneten unter den gleichen Voraussetzungen, wie sie ALLEN und THONEMANN verwendet hatten, die kleinstmögliche Ionenstromdichte in der Schicht, bei der sich noch ein monotoner Potentialabfall einstellt, und erhielten ebenfalls die BOHMschen Werte für U_0 und j_i .

Mit den BOHMschen Voraussetzungen und Ergebnissen gelangt man über die POISSON-Gleichung zu folgenden Gleichungen für den

Verlauf von Raumladung, Feldstärke und Potential in der Schicht:

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon\eta}} \quad -\epsilon^{-\eta} = \frac{n_i - n_e}{n_0}$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{\epsilon}}} \sqrt{\sqrt{2\eta} + \epsilon^{1/2-\eta} - 2}$$

$$\xi = \sqrt{\frac{\sqrt{\epsilon}}{2}} \int^{\eta} \frac{dt}{\sqrt{\sqrt{2t} + \epsilon^{1/2-t} - 2}}$$

mit den dimensionslosen Variablen für Potential und Ortskoordinate $\eta = -eU/(kT_e)$ und $\xi = x/h$, $h = \sqrt{\epsilon_0 kT_e / (n_0 e^2)}$ = DEBYE-Länge. Der räumliche Verlauf von $d^2\eta/d\xi^2$, $d\eta/d\xi$ und η ist in Abb. 3 dargestellt. Einzelne Werte sind außerdem in Tab. 1 zusammengestellt.

Es soll besonders darauf hingewiesen werden, daß in obigen drei Gleichungen die Ionenmasse nicht auftritt und damit die in Abb. 3 dargestellten Verläufe für alle Plasmen gelten, die aus Elektronen und positiven Ionen bestehen. Gemäß der Argumentation von SCHULZ und BROWN gelten sie auch dann, wenn die Ionentemperatur vergleichbar mit der Elektronentemperatur wird.

Lediglich die Ionenstromdichte ist von der Ionenmasse abhängig und damit das Floating-Potential ⁽¹⁴⁾:

$$\eta_f = \frac{1}{2} \ln \frac{\epsilon m_i}{2\pi m_e},$$

das der Einfachheit halber an der Stelle angenommen wurde, an der die ungerichtete Elektronenstromdichte gleich der Ionenstromdichte ist.

Wie Abb. 3 zeigt, ergibt sich für die Feldstärke in der Schicht ein flacher, S-förmiger Verlauf und damit vor einer Wand auf Floating-Potential ein praktisch linearer Anstieg. Dies stimmt gut mit den experimentellen Ergebnissen überein, wie sie in Abb. 1 und 2 dargestellt sind.

Entsprechend der schon in Teil II dargelegten Methode kann man hier den "optischen" Schichtrand als Schnittpunkt der Wendetangente der Feldstärkekurve mit der Abszisse definieren. Die sich hieraus ergebenden Werte für Floating-Potential und Schichtdicke sind in Tab. 2 für verschiedene Gase zusammengestellt.

IV. Exakte Lösung des Schichtproblems

A. Die Plasma-Schicht-Gleichung von TONKS und LANGMUIR

TONKS und LANGMUIR haben in ihrer berühmten Arbeit (15) die exakte Lösung der POISSON-Gleichung für die positive Säule einer Niederdruckentladung in Angriff genommen. Sie gingen von folgenden Annahmen aus:

1. Das Potential nehme monoton vom Zentrum zur Wand ab.
2. Die Elektronendichte stelle sich gemäß einer BOLTZMANN-Verteilung ein.
3. Die Ionen werden kalt erzeugt und fallen frei zur Wand.

Unter der weiteren Annahme, daß die Ionisierungsrate G proportional zur Elektronendichte, also

$$G(U) = \nu \cdot n_{e0} \in^{eU/(kT_e)}$$

sei, kann man die POISSON-Gleichung in der Form schreiben

$$\frac{\alpha^2}{2} \Delta \eta = \int_0^s \frac{\sigma^\beta e^{-\eta(\sigma)}}{\sqrt{\eta(s) - \eta(\sigma)}} d\sigma - e^{-\eta(s)}$$

$$\text{wo } \eta = -ell / (kT_e) , \quad s = \nu \sqrt{m_i / (kT_e)} \cdot Z ,$$

$$\alpha^2 = \nu^2 \epsilon_0 m_i / (n_0 e^2) = (m_i / m_e) \nu^2 / \omega_e^2$$

und $\beta = 0, 1$ oder 2 im Falle ebener, zylindrischer oder sphärischer Symmetrie ist.

B. Zur Bedeutung von α

Der Parameter α stellt an sich das mit $\sqrt{m_i/m_e}$ multiplizierte Verhältnis von Ionisierungsfrequenz zur Elektronenplasmafrequenz dar. Eine sehr anschauliche Bedeutung gewinnt man durch folgende Überlegung: Wie die Rechnungen zeigen, gilt für die Ionenstromdichte in allen Fällen

$$j_i \approx en_0 \sqrt{\frac{kT_e}{m_i}} .$$

Da die Zahl der durch die Schicht abgesaugten Ionen gleich der Zahl der im Plasma erzeugten Ionen ist, gilt mit der weiteren Näherung, daß die Elektronendichte konstant sei.

a) im ebenen Fall

$$n_0 \sqrt{\frac{kT_e}{m_i}} \approx \nu \cdot n_0 \cdot d ,$$

wo $2d$ der Abstand der Begrenzungswände ist.

Damit ergibt sich

$$\alpha^2 \approx \frac{\epsilon_0 m_i}{n_0 e^2} \cdot \frac{kT_e}{m_i} \cdot \frac{1}{d^2} = \left(\frac{h}{d} \right)^2$$

mit $h = \sqrt{\epsilon_0 kT_e / (n_0 e^2)}$ = DEBYE-Länge im Zentrum,

b) im zylindrischen Fall

$$n_0 \sqrt{\frac{kT_e}{m_i}} \cdot 2\pi r \approx \nu \cdot n_0 \cdot \pi r^2 ,$$

wo r der Zylinderradius ist. Somit gilt

$$\alpha^2 \approx \frac{\epsilon_0 m_i}{n_0 e^2} \cdot \frac{kT_e}{m_i} \cdot \frac{4}{r^2} = \left(\frac{2h}{r} \right)^2 ,$$

c) im sphärischen Fall

$$n_o \sqrt{\frac{kT_e}{m_i}} \cdot 4\pi r^2 \approx \nu n_o \cdot \frac{4}{3}\pi r^3,$$

wo r der Kugelradius ist. Damit ist

$$\alpha^2 \approx \frac{\epsilon_o m_i}{n_o e^2} \cdot \frac{kT_e}{m_i} \cdot \frac{9}{r^2} = \left(\frac{3h}{r}\right)^2.$$

$\frac{1}{\alpha}$ gibt also die Größenordnung der in DEBYE-Längen gemessenen Lineardimension.

C. Lösung der Plasma-Schicht-Gleichung

Die Plasma-Schicht-Gleichung von Abschnitt A ist nichtlinear und kann daher im allgemeinen nur numerisch gelöst werden. Für den speziellen Fall $\alpha = \beta = 0$ jedoch wird sie linear in s und $ds/d\eta$. Eine analytische Lösung hierzu fanden HARRISON und THOMPSON (16).

$$s = \frac{2}{\pi} \left\{ D(\sqrt{\eta}) - \int_0^{\eta} D(\sqrt{t}) dt \right. \\ \left. = \frac{1}{\pi} \left\{ (1-2\eta) D(\sqrt{\eta}) + \sqrt{\eta} e^{-\eta} \right\} \right\},$$

wobei $D(x)$ die DAWSON-Funktion

$$D(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

darstellt. Diese Lösung gilt bis zum Punkt $(s_o/\eta_o) = (0,4046/0,8540)$, bei dem $ds/d\eta = 0$ wird.

In den Fällen $\beta = 1$ und $\beta = 2$ (zylindrische und sphärische Symmetrie) führt für $\alpha = 0$ noch eine Reihenentwicklung

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \eta^{n+1/2}$$

zum Ziel (TONKS und LANGMUIR (15)). Die mit Hilfe einer

Rekursionsformel maschinell berechneten Koeffizienten a_n sind bis $n = 10$ in Tab. 3 zusammengestellt.

Auch in diesen beiden Fällen besitzt $ds/d\eta$ bei einem gewissen Wert $\eta = \eta_0$ eine Nullstelle (TONKS-LANGMUIR-Schichttrand). Die entsprechenden Werte sind in Tab. 3 ebenfalls enthalten.

Für $\alpha > 0$ wurde die Plasma-Schicht-Gleichung für den Fall ebener Symmetrie von SELF⁽¹⁷⁾ und für den Fall zylindrischer Symmetrie von PARKER⁽¹⁸⁾ gelöst. Der von ihnen berechnete Verlauf des Potentials, der Feldstärke und der Raumladungsdichte in der Schicht ist in den Abb. 4 bis 9 aufgetragen als Funktion des in DEBYE-Längen gemessenen Abstandes vom optischen Schichttrand. Diese Kurven lassen für $\alpha = 0$ eine ähnliche Kurve erwarten. Ihrer Berechnung steht jedoch zunächst die Nullstelle von $ds/d\eta$ am Punkt (s_0/η_0) entgegen, die gemeinhin so interpretiert wird, daß an diesem Punkt die Feldstärke unendlich sei. Gerade bei dem Grenzfall $\alpha = 0$ wird aber die Betrachtungsweise wichtig. Mißt man die Längen nicht in Einheiten von $\sqrt{2kT_e/m_i} / \nu$ (also $s = \nu \sqrt{m_i/(2kT_e)} \cdot z$) sondern in DEBYE-Längen h (also $x = z/h$), so gilt die Umrechnung

$$x = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \cdot s$$

und

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \cdot \frac{d\eta}{ds}$$

Für $\alpha = 0$ und $d\eta/ds = \infty$ ist diese Umrechnung nun nicht möglich. Aufschluß gibt aber Tab. 4. Sie zeigt, daß mit $\alpha \rightarrow 0$ die Feldstärke $d\eta/dx$ etwas stärker als mit $\sqrt{\alpha}$ ebenfalls gegen null geht. Damit ist für $\alpha = 0$ die Randbedingung $d\eta/dx = 0$ bei $\eta = \eta_0$ gewonnen, und die Grenzschicht läßt sich auch in diesem extremen Fall rechnerisch verfolgen.

Die Integration der POISSON-Gleichung geschah in allen drei Fällen (ebene, zylindrische und sphärische Symmetrie) durch weitgehende Reihenentwicklung der darin enthaltenen ineinandergeschachtelten Integrale. Das Ergebnis ist in den Tab. 5, 6 und 7 zusammengestellt. Die resultierenden Kurven sind in den Abb. 4 bis 9 mit eingezeichnet bzw. für den sphärischen Fall in Abb. 10 aufgetragen. Wie zu erwarten war, schließen sich die Kurven für $\alpha=0$ auch in der Grenzschicht in vernünftiger Weise an die übrigen Kurven an.

D. Vergleich mit der BOHMschen Näherung

Bei dem Fall $\alpha=C$ handelt es sich im Grunde genommen um eine exakte Behandlung des BOHM-schen Gedankengangs. In beiden Fällen rückt der "Schichtrand" ($\eta_{\text{BOHM}} = 0,5$ bzw. $\eta_0 = 0,8540; 1,155; 1,425$ für ebene, zylindrische und sphärische Geometrie) ins Unendliche, und die Ionisierung in der Schicht ist gleich Null. Der Unterschied ist folgender: Während BOHM für die Energie der Ionen annimmt, daß sie gleich dem gesamten Potentialabfall vom Plasmazentrum bis zu dem betrachteten Punkt sei, ist die mittlere Ionenenergie im ebenen Fall (und $\alpha=0$) bei η_0 nur 79 % der maximal möglichen Energie. Daher fällt die Ionendichte mit zunehmendem Potential schneller ab als bei BOHM, und die Schicht wird dicker.

Noch ausgeprägter als im ebenen Fall wird dieser Unterschied im zylindrischen und sphärischen Fall.

Bei ebener Symmetrie zeigen die Abb. 4, 5 und 6, daß sich die Schicht in den verschiedenen Fällen nur wenig ändert. Das gleiche ergibt Tab. 8: Ionenstromdichte, Wandpotential und optische Schichtdicke sind ungefähr konstant. Das Potential am optischen Schichtrand ändert sich jedoch um ungefähr Faktor 3. Man kann dem Schichtrand also kein bestimmtes

Potential zuordnen, wie z.B. $\eta_{\min} = 0,5$ (BOHM) oder $\eta_{\min} = \ln 2 = 0,6931$ (HARRISON-THOMPSON) oder $\eta_0 = 0,8540$ (TONKS-LANGMUIR). Die Art und Weise, wie er aus dem Feldstärkeverlauf bestimmt wird, entspricht vielmehr der Vorstellung LANGMUIRS ⁽⁹⁾ von der Schichtgrenze als derjenigen Stelle, bei welcher der scharfe Potentialabfall beginnt. Es ist auch bemerkenswert, daß die Raumladungsdichte am optischen Schichtrand in allen Fällen ungefähr 1 e-tel des maximalen Wertes annimmt.

V. Vergleich mit optischer Schichtdickenbestimmung

LANGMUIR und MOTT-SMITH ⁽¹⁹⁾ haben in einer ihrer ersten Arbeiten über ihre Sondenmethode auch optische Schichtdickenmessungen durchgeführt. Sie haben dazu ein besonderes Entladungsgefäß gebaut, das eine größere Metallplatte enthielt. Ihr konnten sie ein beliebiges Potential aufprägen und die Schicht von außen gut beobachten. Die Ergebnisse ihrer Messungen sind in mehreren Tabellen zusammengefaßt, aber leider läßt sich nur die zu einer einzigen Tabelle gehörige Plasmodichte finden. In Tab. 9 sind diese Angaben ausgewertet und mit der aus der BOHMschen Näherung berechneten optischen Schichtdicke verglichen. Wie die Tabelle zeigt, ergibt sich eine überraschend gute Übereinstimmung. Dies und überhaupt die Tatsache, daß der Schichtrand ziemlich scharf erscheint, ist umso erstaunlicher, wenn man bedenkt, daß die Elektronendichte keinen dermaßen scharfen räumlichen Abfall aufweist. So dürften denn auch mehr physiologische Eigenschaften des Auges als physikalische Gründe für den scharfen optischen Schichtrand verantwortlich sein (Vergl. die Bemerkung von v. ENGEL und STEENBECK ⁽²⁰⁾ zur Schärfe des Glimmsaums im Kathodenfall einer Glimmentladung).

Mit der BOHMschen Näherung erhält man nicht nur für die optische Schichtdicke, sondern auch für andere Messungen von LANGMUIR eine ausgezeichnete Übereinstimmung:

1. Für die Potentialdifferenz zwischen Achse und Wand in der positiven Säule einer Quecksilberdampfentladung geben TONKS und LANGMUIR ⁽¹⁵⁾ den Wert $\eta_f \text{ exp} = 5,9 \pm 0,2$ an, während aus dem BOHM-Kriterium der Wert $\eta_f = 5,98$ folgt.
2. Für das Verhältnis von ungerichteter Elektronenstromdichte im Quecksilberplasma zur Ionenstromdichte in der Schicht findet LANGMUIR ⁽²¹⁾ den Wert $(j_{eo}/j_i)_{\text{exp}} = 411 \pm 17$, während das BOHM-Kriterium für Hg $j_{eo}/j_i = 400$ ergibt.

VI. Einfaches Schichtmodell

Der oben dargelegte, für die stromlose Schicht charakteristische Feldverlauf, also ihr über einen weiten Bereich annähernd linearer räumlicher Abfall legt ein einfaches Schichtmodell nahe, das auch bei komplizierteren Rechnungen noch eine gute Näherung zu liefern scheint: Ein feldfreies Plasma bis zum Schichtrand und in der Schicht ein linearer Anstieg der Feldstärke und damit ein parabolischer Anstieg des Potentials bis zur Wand.

Bekanntlich schwingt ein Teilchen in einem Parabelpotential mit einer von der Amplitude unabhängigen Frequenz. Bei dem hier gegebenen Fall ist die Kreisfrequenz für Elektronen:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{e}{m_e} \left| \frac{dE}{dx} \right|} = \sqrt{\frac{e}{m_e} \left| \frac{d^2U}{dx^2} \right|} = \omega_{ep} \sqrt{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}} .$$

Das Frequenzverhältnis ω_o/ω_{ep} ist also unmittelbar durch die Steilheit des Feldstärkeanstiegs gegeben.

In Tab. 10 sind die Werte für ω_o/ω_{ep} zusammengestellt, wie sie in den verschiedenen Fällen dem maximalen und mittleren Feldstärkeanstieg in der Schicht entsprechen.

PAVKOVICH und KINO ⁽²²⁾ benutzen ein solches Modell, um das Hochfrequenz-Verhalten der Schicht zu berechnen. Sie gingen von einem Frequenzverhältnis von $\omega_o/\omega_{ep} = 0,4$ und einer

Schichtdicke von 10 DEBYE-Längen aus (die optische Schichtdicke hätte ungefähr 7 DEBYE-Längen betragen) und fanden eine sehr gute Übereinstimmung mit den Wechselfeldstärkemessungen von HARP und KINO ⁽⁵⁾.

VII. Anhang: Sphärisches Plasma

Die aus dem Koeffizienten von Tab. 3 für das sphärische Plasma berechneten Werte von η , $d\eta/ds$ und $n(s)$ sind in Tab. 11 zusammengestellt und in Abb. 11 aufgezeichnet.

Nach Abschluß dieser Studie wurde festgestellt, daß die in Tab. 3 angegebenen Zahlenwerte mit geringerer Genauigkeit schon in der Arbeit ⁽²³⁾ von HARRISON enthalten sind.

Literatur

- 1) G. v. GIERKE, W. OTT und F. SCHWIRZKE, Proc. Fifth Int. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, Munich 1961, Vol. II, S. 1412 (North Holland Publ. Co., Amsterdam)
- 2) W. Ott, Z. Naturf. 17a, 962 (1962)
- 3) D. GABOR, E.A. ASH und D. DRACOTT, Nature 176, 916 (1955)
- 4) W. OTT, Diplomarbeit, Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München 1961 (unveröffentlicht)
- 5) R. HARP und G.S. KINO, Proc. Sixth Int. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, Paris 1963
- 6) K. TAKAYAMA, H. IKEGAMI und S. MIYAZAKI, Phys. Rev. Letters 5, 238 (1960)
- 7) H. WIEDEMANN, Diplomarbeit, II. Phys. Institut der Universität, München 1963 (unveröffentlicht)
- 8) D. BOHM, Characteristics of Electrical Discharges in Magnetic Fields, herausgeg. von A. GUTHRIE u. R.K. WAKERLING (Kap. 3), McGraw-Hill Book Co., New York 1949
- 9) H. MOTT-SMITH und I. LANGMUIR, Phys. Rev. 28, 727 (1926)
- 10) L. TONKS und I. LANGMUIR, Phys. Rev. 33, 1070 (1929)
- 11) D. BOHM, E.H.S. BURHOP und H.S.W. MASSEY, Loc. cit. 5 Kap. 2, Gleichung (26)
- 12) J.E. ALLEN und P.C. THONEMANN, Proc. Phys. Soc. B67, 768 (1954)
- 13) G.J. SCHULZ und S.C. BROWN, Phys. Rev. 98, 1642 (1955)
- 14) K. YAMAMOTO und T. OKUDA, J. Phys. Soc., Japan 11, 57 (1956)
- 15) L. TONKS und I. LANGMUIR, Phys. Rev. 34, 876 (1929)

- 16) E.R. HARRISON und W.B. THOMPSON, Proc. Phys. Soc. 74, 145 (1959)
- 17) S.A. SELF, Microwave Laboratory Report No. 1009 (1963) Stanford University, Stanford, California
- 18) J.V. PARKER, Phys. Fluids 6, 1657 (1963); Techn. Rep. No. 19, California Institute of Technology, Pasadena, California, Dec. 1962
- 19) I. LANGMUIR und H. MOTT-SMITH, Gen. Elec. Rev. 27, 538 (1924)
- 20) A. v. ENGEL und M. STEENBECK, Elektrische Gasentladungen Bd. II, S. 63, Springer-Verlag, Berlin 1934
- 21) I. LANGMUIR, J. Franklin Institute 214, 275 (1943)
- 22) J. PAVKOVICH und G.S. KINO, Proc. Sixth Int. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, Paris 1963
- 23) E.R. HARRISON, J. Electronics and Control 5, 319 (1958)

Verzeichnis der Tabellen

1. Potential η , Feldstärke $\frac{d\eta}{d\xi}$ und Raumladungsdichte $\frac{n_i - n_e}{n_o}$ bei BOHMscher Näherung
2. Floatingpotential und optische Schichtdicke für verschiedene Ionenarten bei BOHMscher Näherung
3. Koeffizienten der Potenzreihen für zylindrisches und sphärisches Plasma, $\alpha = 0$
4. Feldstärke $\frac{d\eta}{d\xi}$ am optischen Schichttrand bei verschiedenen α
5. Potential η , Feldstärke $\frac{d\eta}{d\xi}$ und Raumladungsdichte $\frac{n_i - n_e}{n_o}$ in ebener Schicht, $\alpha = 0$
6. Dasselbe in zylindrischer Schicht
7. Dasselbe in sphärischer Schicht
8. Vergleich verschiedener Fälle bei ebener Schicht
9. Vergleich optischer Schichtdickenmessungen von LANGMUIR und MOTT-SMITH mit BOHMscher Näherung
10. Parabelfrequenz der ebenen Schicht für Elektronen
11. Sphärisches Plasma

9,5	3,22	1,730	0,1330
10,5	9,713	1,770	0,1343
11,0	9,980	1,800	0,1340
11,5	10,25	1,830	0,1337
12,0	10,52	1,860	0,1334
12,5	10,79	1,890	0,1331
13,0	11,05	1,920	0,1328

BOHMsche Näherung

Plattendicke

η	ξ	$\frac{d\eta}{d\xi}$	$\frac{n_i - n_e}{n_o}$
0,5	$-\infty$	0	0
1,0	-0,720	0,159	0,0610
1,5	1,347	0,348	0,1271
2,0	2,509	0,520	0,1679
2,5	3,351	0,671	0,1892
3,0	4,029	0,803	0,1978
3,5	4,610	0,919	0,1990
4,0	5,126	1,021	0,1961
4,5	5,595	1,111	0,1911
5,0	6,029	1,193	0,1851
5,5	6,435	1,267	0,1788
6,0	6,820	1,335	0,1726
6,5	7,186	1,397	0,1667
7,0	7,536	1,454	0,1612
7,5	7,874	1,508	0,1561
8,0	8,200	1,558	0,1513
8,5	8,516	1,605	0,1469
9,0	8,824	1,649	0,1428
9,5	9,123	1,692	0,1391
10,0	9,415	1,732	0,1356
10,5	9,700	1,770	0,1323
11,0	9,980	1,807	0,1293
11,5	10,25	1,842	0,1265
12,0	10,52	1,875	0,1238
12,5	10,79	1,908	0,1213
13,0	11,05	1,939	0,1189

Tab. 1

Floating-Potential und optische Schichtdicke
nach der BOHMschen Näherung

N = Ordnungszahl, M_i = Atomgewicht,
 $\eta_f = -eU_f / (kT_e)$, $\sigma_f = s_f / h$, h = DEBYE-Länge

N	ION	M_i	η_f	σ_f
1	H ⁺	1,008	3,34	4,4
1	H ₂ ⁺	2,016	3,69	4,8
2	He ⁺	4,003	4,03	5,1
10	Ne ⁺	20,183	4,83	5,9
18	Ar ⁺	39,944	5,18	6,1
36	Kr ⁺	83,7	5,54	6,4
55	Cs ⁺	132,91	5,77	6,6
80	Hg ⁺	200,01	5,98	6,8

Tab. 2

Koeffizienten a_n von $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^{n+1/2}$ bei zylindrischer und sphärischer Symmetrie für $\alpha = 0$.

Nullstelle (s_0/η_0) von $ds/d\eta$

J = Konstante der Ionenstromdichte

n	zylindrische Symmetrie		sphärische Symmetrie	
0	1,000	10^0	1,2732	10^0
1	- 2,000	10^{-1}	- 1,8189	10^{-1}
2	- 2,6061	10^{-2}	- 2,2565	10^{-2}
3	- 6,4894	10^{-3}	- 5,5883	10^{-3}
4	- 1,9813	10^{-3}	- 1,6879	10^{-3}
5	- 6,7660	10^{-4}	- 5,6149	10^{-4}
6	- 2,4790	10^{-4}	- 1,9783	10^{-4}
7	- 9,5123	10^{-5}	- 7,2389	10^{-5}
8	- 3,7679	10^{-5}	- 2,7203	10^{-5}
9	- 1,5274	10^{-5}	- 1,0426	10^{-5}
10	- 6,3024	10^{-6}	- 4,0576	10^{-6}
s_0	0,77190		1,1200	
η_0	1,1552		1,4248	
J	0,2703		0,2136	

Tab. 3

Feldstärken $d\eta/ds$ und $d\eta/d\xi = (\alpha/\sqrt{2}) \cdot d\eta/ds$ und Verhältnis $(d\eta/d\xi)/\sqrt{\alpha}$ am TONKS-LANGMUIR-Schichtrand η_0 .

- a) im ebenen Fall nach den Werten der Tabellen von SELF,
 b) im zylindrischen Fall nach PARKER

a)

α	10^{-1}	$10^{-3/2}$	10^{-2}	$10^{-5/2}$	10^{-3}	$10^{-7/2}$
$\frac{d\eta}{ds}$	5,02	8,37	13,9	23,1	38,4	63,7
$\frac{d\eta}{d\xi}$	0,356	0,187	0,0983	0,0517	0,0271	0,0142
$\frac{d\eta}{d\xi}/\sqrt{\alpha}$	1,12	1,06	0,98	0,92	0,86	0,81

b)

α	$\sqrt{2} \cdot 10^{-1}$	$\sqrt{2} \cdot 10^{-3/2}$	$\sqrt{2} \cdot 10^{-2}$	$\sqrt{2} \cdot 10^{-5/2}$	$\sqrt{2} \cdot 10^{-3}$
$\frac{d\eta}{ds}$	3,28	5,70	9,52	16,4	23,7
$\frac{d\eta}{d\xi}$	0,328	0,180	0,0952	0,0518	0,0237
$\frac{d\eta}{d\xi}/\sqrt{\alpha}$	0,89	0,86	0,81	0,78	0,63

Tab. 4

Ebene Schicht für $\alpha = 0$

η	ξ	$\frac{d\eta}{d\xi}$	$\frac{n_i - n_e}{n_o}$
1,0	-4,431	0,0396	0,0128
1,5	0,444	0,2147	0,0749
2,0	2,161	0,3803	0,1185
2,5	3,270	0,5260	0,1429
3,0	4,120	0,6528	0,1544
3,5	4,826	0,7634	0,1581
4,0	5,442	0,8607	0,1573
4,5	5,995	0,9469	0,1541
5,0	6,502	1,024	0,1497
5,5	6,975	1,094	0,1448
6,0	7,419	1,157	0,1399
6,5	7,840	1,215	0,1352
7,0	8,243	1,268	0,1307
7,5	8,630	1,318	0,1265
8,0	9,002	1,364	0,1226
8,5	9,363	1,408	0,1190
9,0	9,713	1,449	0,1156
9,5	10,05	1,488	0,1126
10,0	10,39	1,525	0,1097
10,5	10,71	1,560	0,1070
11,0	11,03	1,593	0,1045
11,5	11,34	1,626	0,1022
12,0	11,64	1,656	0,1000
12,5	11,94	1,686	0,9800
13,0	12,24	1,714	0,9608

Tab. 5

Zylindrische Schicht für $\alpha = 0$

η	ξ	$\frac{d\eta}{d\xi}$	$(n_i - n_e)/n_o$
1,6	-0,654	0,1307	0,0417
2,0	1,491	0,2544	0,0754
2,5	3,052	0,3934	0,1021
3,0	4,156	0,5145	0,1160
3,5	5,039	0,6198	0,1218
4,0	5,790	0,7119	0,1229
4,5	6,454	0,7931	0,1213
5,0	7,057	0,8654	0,1184
5,5	7,614	0,9304	0,1148
6,0	8,135	0,9892	0,1111
6,5	8,627	1,043	0,1073
7,0	9,095	1,092	0,1038
7,5	9,543	1,138	0,1004
8,0	9,974	1,181	0,0973
8,5	10,39	1,221	0,0944
9,0	10,79	1,258	0,0917
9,5	11,19	1,294	0,0892
10,0	11,57	1,327	0,0869
10,5	11,94	1,359	0,0847
11,0	12,30	1,390	0,0827
11,5	12,66	1,419	0,0809
12,0	13,01	1,447	0,0791
12,5	13,35	1,473	0,0775
13,0	13,69	1,499	0,0759

Tab. 6

Sphärische Schicht für $\alpha = 0$

η	ξ	$\frac{d\eta}{d\xi}$	$(n_i - n_e)/n_0 \cdot 10^2$
2,0	0,290	0,1541	4,297
2,5	2,620	0,2860	7,080
3,0	4,082	0,4015	8,637
3,5	5,191	0,5018	9,381
4,0	6,108	0,5893	9,634
4,5	6,904	0,6660	9,605
5,0	7,618	0,7340	9,423
5,5	8,272	0,7949	9,165
6,0	8,880	0,8497	8,878
6,5	9,452	0,8996	8,584
7,0	9,994	0,9454	8,299
7,5	10,51	0,9876	8,029
8,0	11,01	1,027	7,775
8,5	11,49	1,063	7,540
9,0	11,95	1,098	7,321
9,5	12,40	1,130	7,119
10,0	12,83	1,161	6,931
10,5	13,26	1,190	6,757
11,0	13,67	1,218	6,595
11,5	14,08	1,244	6,444
12,0	14,48	1,270	6,302
12,5	14,87	1,294	6,169
13,0	15,25	1,317	6,045

Tab. 7

Ebene Schicht: Vergleich der verschiedenen Fälle für:
 Konstante c der Ionenstromdichte $j_1 = c \cdot n_{e0} \sqrt{kT_e/m_i}$
 Wandpotential $\eta_f = -e \cdot U_f / (kT_e)$
 Optische Schichtdicke $\sigma = s/h$, $h = \text{DEBYE-Länge}$
 Potential η_s am optischen Schichtrand

	c	η_f	σ	η_s
BOHMsche Näherung	0,61	5,98	6,8	1,13
$\alpha = \begin{cases} 10^{-1} \\ 10^{-3/2} \\ 10^{-2} \\ 10^{-5/2} \\ 10^{-3} \\ 0 \end{cases}$	0,64	5,94	6,7	0,55
	0,55	6,09	7,2	0,96
	0,51	6,16	7,5	1,20
	0,50	6,19	7,6	1,32
	0,49	6,20	7,6	1,36
0	0,487	6,21	7,6	1,41

Tab. 8

Vergleich der von LANGMUIR und MOTT-SMITH optisch bestimmten, mit der aus der BOHM-schen Näherung bestimmten Schichtdicke

U [V]	s _{obs} [mm]	η	σ_{obs}	σ_{ber}
- 89	2,1	26,2	18	17
- 49	1,4	14,4	12	11,7
- 29	0,8	8,5	7	8,5
- 20	0,7	5,9	6	6,7
Glas	0,7	(5,98)	6	6,8

U = Potentialdifferenz zwischen Plasma und eingebrachter Platte in V

$$\eta = - eU/kT_e$$

s_{obs} = optisch bestimmte Schichtdicke in mm

σ_{obs} = s_{obs}/h, h = DEBYE-Länge

σ_{ber} = berechnete Schichtdicke (in DEBYE-Längen)

$$T_e = 39.400^\circ K$$

$$n_e = 1,4 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$$

Tab. 9

Verhältnis von Parabelfrequenz ω_0 der ebenen Schicht
für Elektronen zur Elektronenplasmafrequenz ω_{ep}

$(\omega_0/\omega_{ep})_{\max}$: entsprechend dem maximalen Feldstärkeanstieg

$\langle \omega_0/\omega_{ep} \rangle$: entsprechend dem über die optische Dicke einer stromlosen Schicht in Hg gemittelten Feldstärkeanstieg

	$(\frac{\omega_0}{\omega_{ep}})_{\max}$	$\langle \frac{\omega_0}{\omega_{ep}} \rangle$
BOHMsche Näherung	0,45	0,41
$\alpha = \left\{ \begin{array}{l} 10^{-1} \\ 10^{-3/2} \\ 10^{-2} \\ 10^{-5/2} \\ 10^{-3} \\ 0 \end{array} \right.$	0,48	0,44
	0,43	0,39
	0,41	0,37
	0,40	0,37
	0,40	0,36
	0,40	0,36

Tab. 10

Sphärisches Plasma

η	s	ds/d η
0	0	∞
0,10	0,3968	1,9250
0,20	0,5527	1,2961
0,30	0,6663	1,0025
0,40	0,7567	0,8174
0,50	0,8314	0,6831
0,60	0,8943	0,5772
0,70	0,9474	0,4885
0,80	0,9923	0,4110
0,90	1,0299	0,3407
1,00	1,0606	0,2749
1,10	1,0849	0,2115
1,20	1,1030	0,1487
1,30	1,1146	0,0847
1,40	1,1198	0,0174
1,425	1,1200	0

Tab. 11

Bildunterschriften

- Abb. 1 Gemessene elektrische Feldstärke in der Schicht nach (4)
- Abb. 2 Gemessene Feldstärke nach (5)
- Abb. 3 Potential, Feldstärke und Raumladungsdichte in der Schicht, aus BOHMscher Näherung berechnet
- Abb. 4 Potential
- Abb. 5 Feldstärke
- Abb. 6 Raumladungsdichte
- } in ebener Schicht bei verschiedenen Werten des Parameters α (nach (17)). Gestrichelt: BOHMsche Näherung
- Abb. 7 Potential
- Abb. 8 Feldstärke
- Abb. 9 Raumladungsdichte
- } in zylindrischer Schicht nach (18) für verschiedene α
- Abb. 10 Potential, Feldstärke und Raumladungsdichte in sphärischer Schicht für $\alpha = 0$
- Abb. 11 Potential und reziproke Feldstärke in sphärischem Plasma für $\alpha = 0$

In den Abbildungen 2 - 10 gilt jeweils

für das Potential $\eta = - eU/kT_e$

und für den Ort $\xi = x/h$

$$h = \sqrt{\epsilon_0 kT_e / n_0 e^2}$$

= DEBYE-Länge im Zentrum

Als Ortsnullpunkt ist der optische Schichtrand gewählt. Die senkrechten Striche bei den Potentialkurven geben den Ort einer isolierten Wand für Hg^+ - und H^+ -Ionen an.

Bedeutung von s in Abb. 11: siehe Text

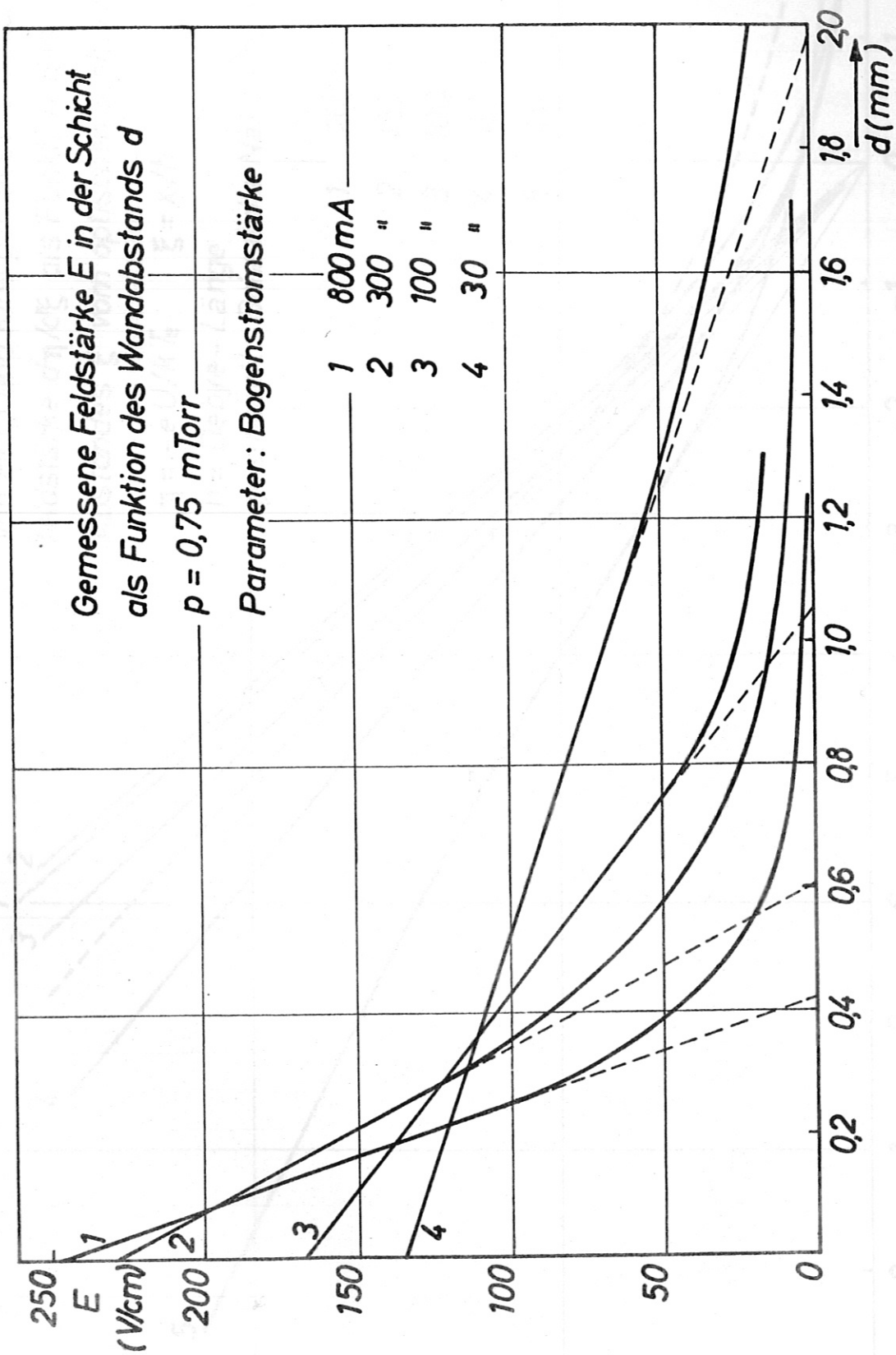


Abb. 1

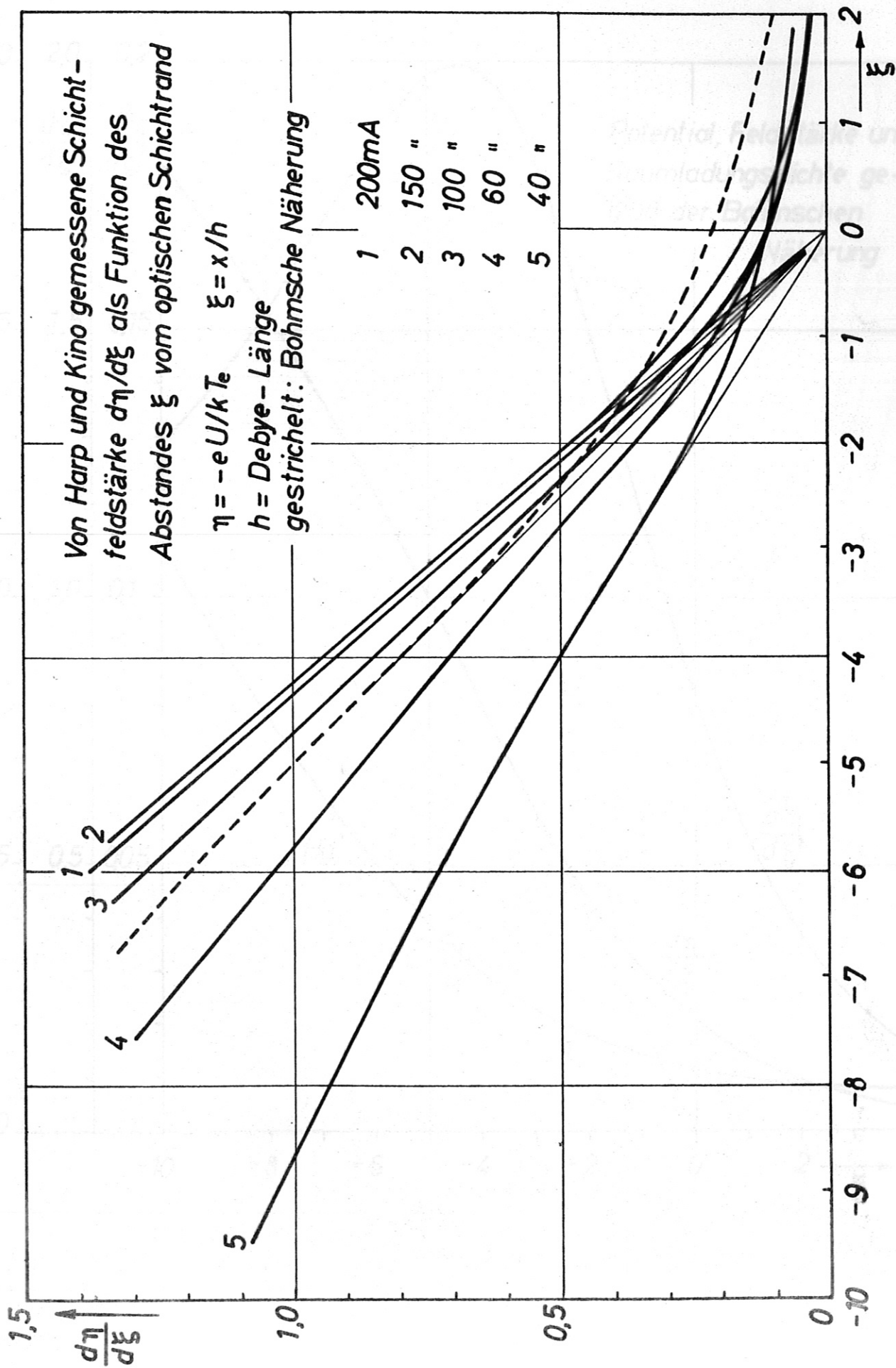


Abb. 2

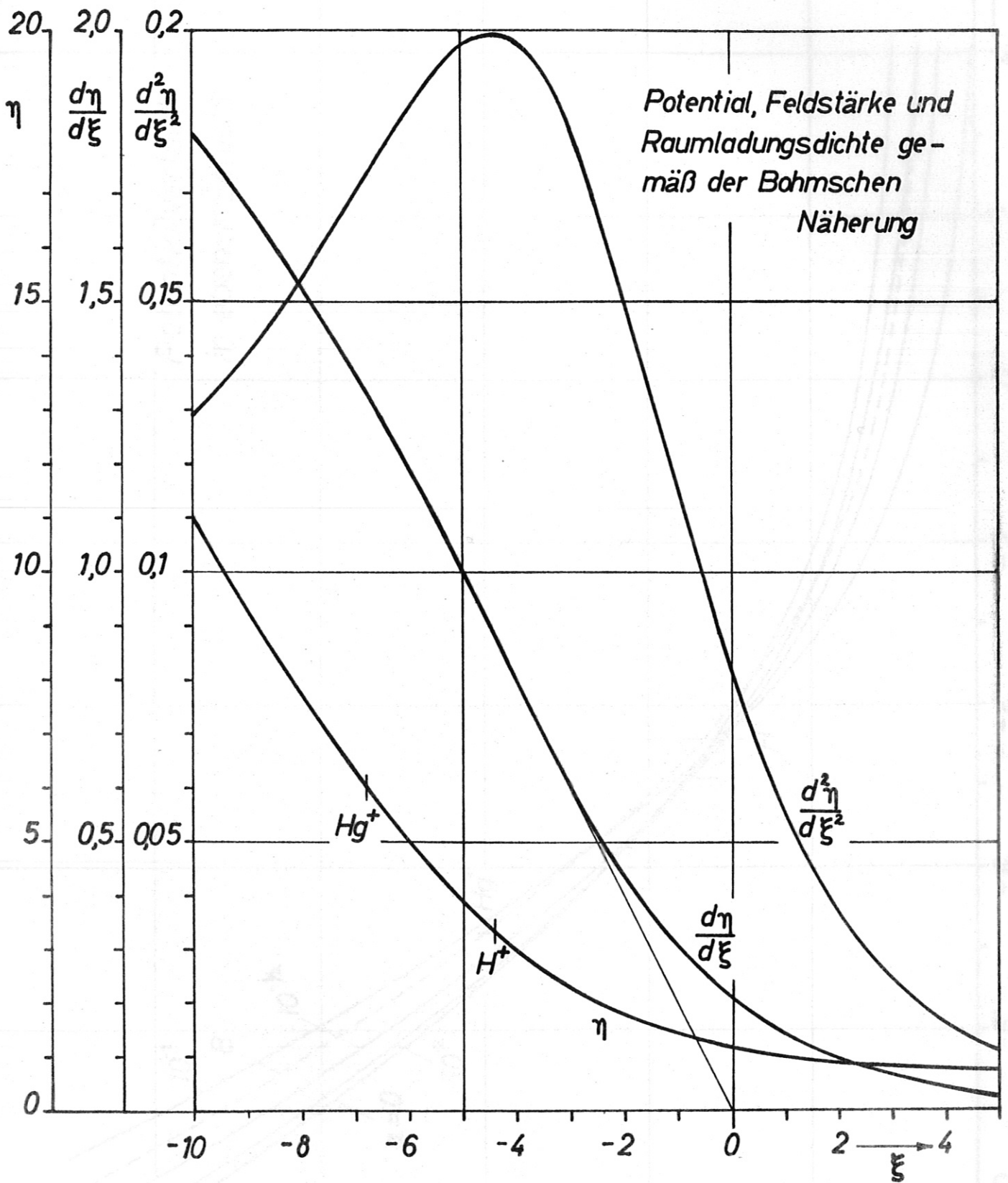


Abb. 3

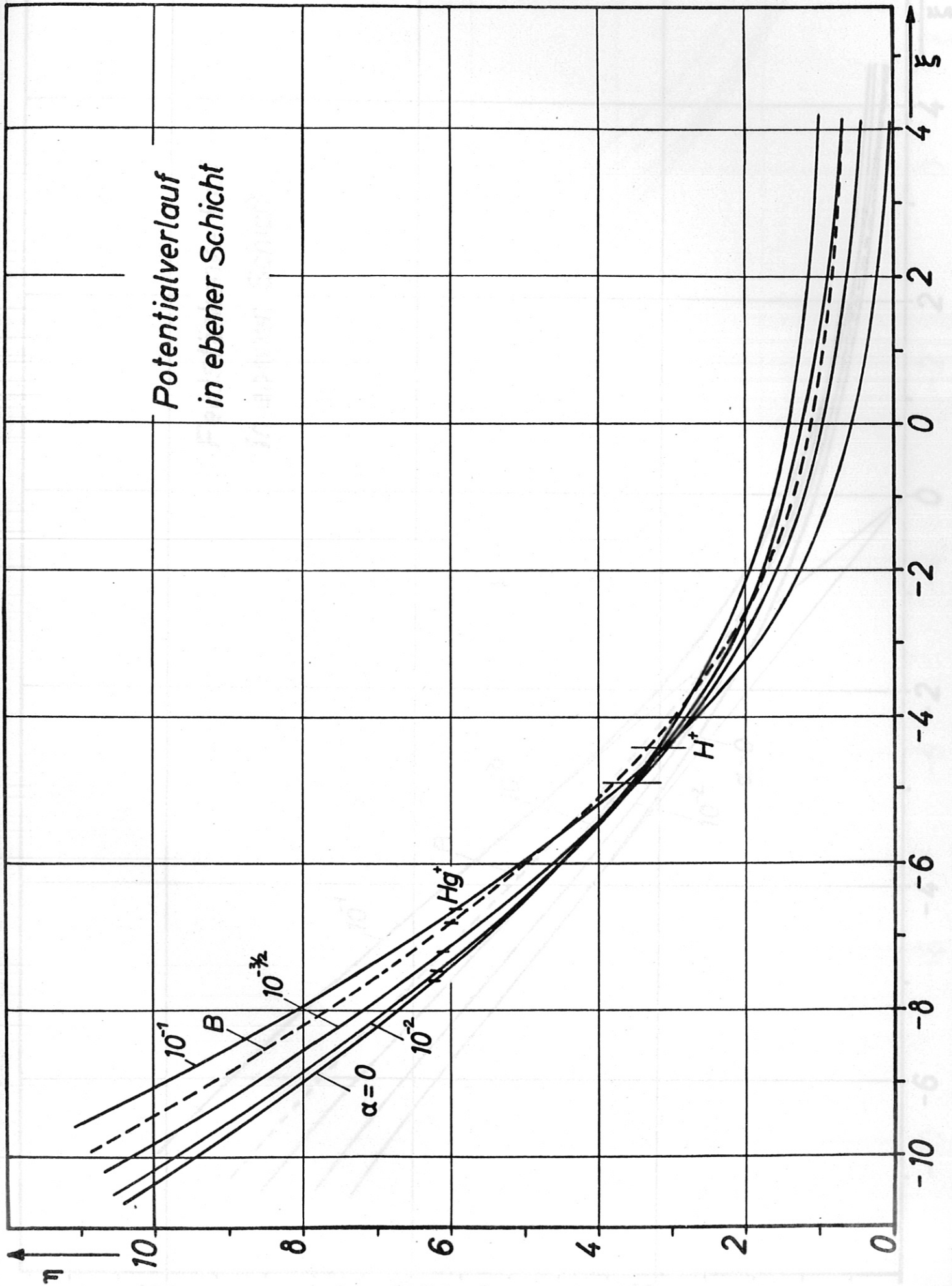
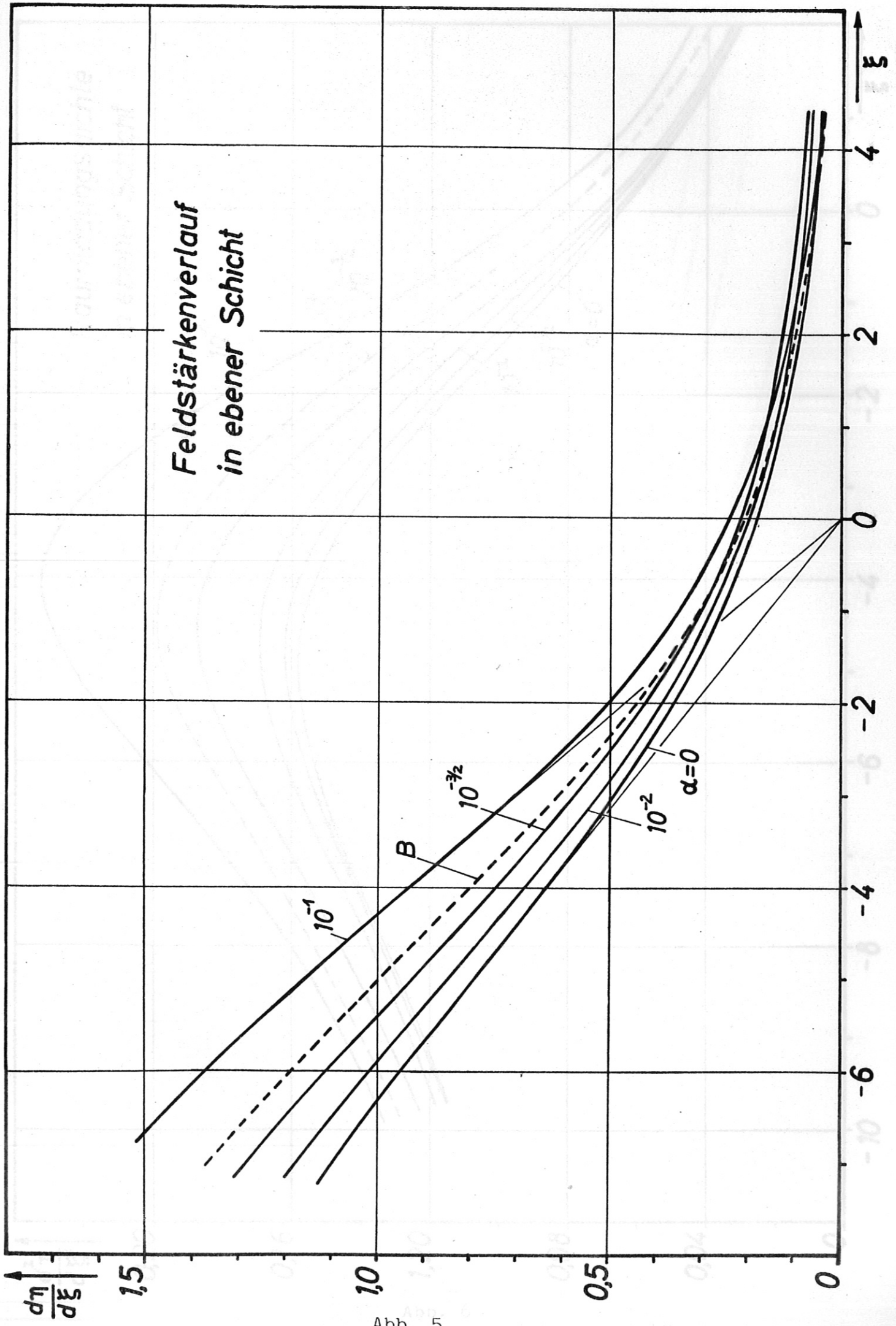


Abb. 4



Feldstärkenverlauf
in ebener Schicht

Abb. 5

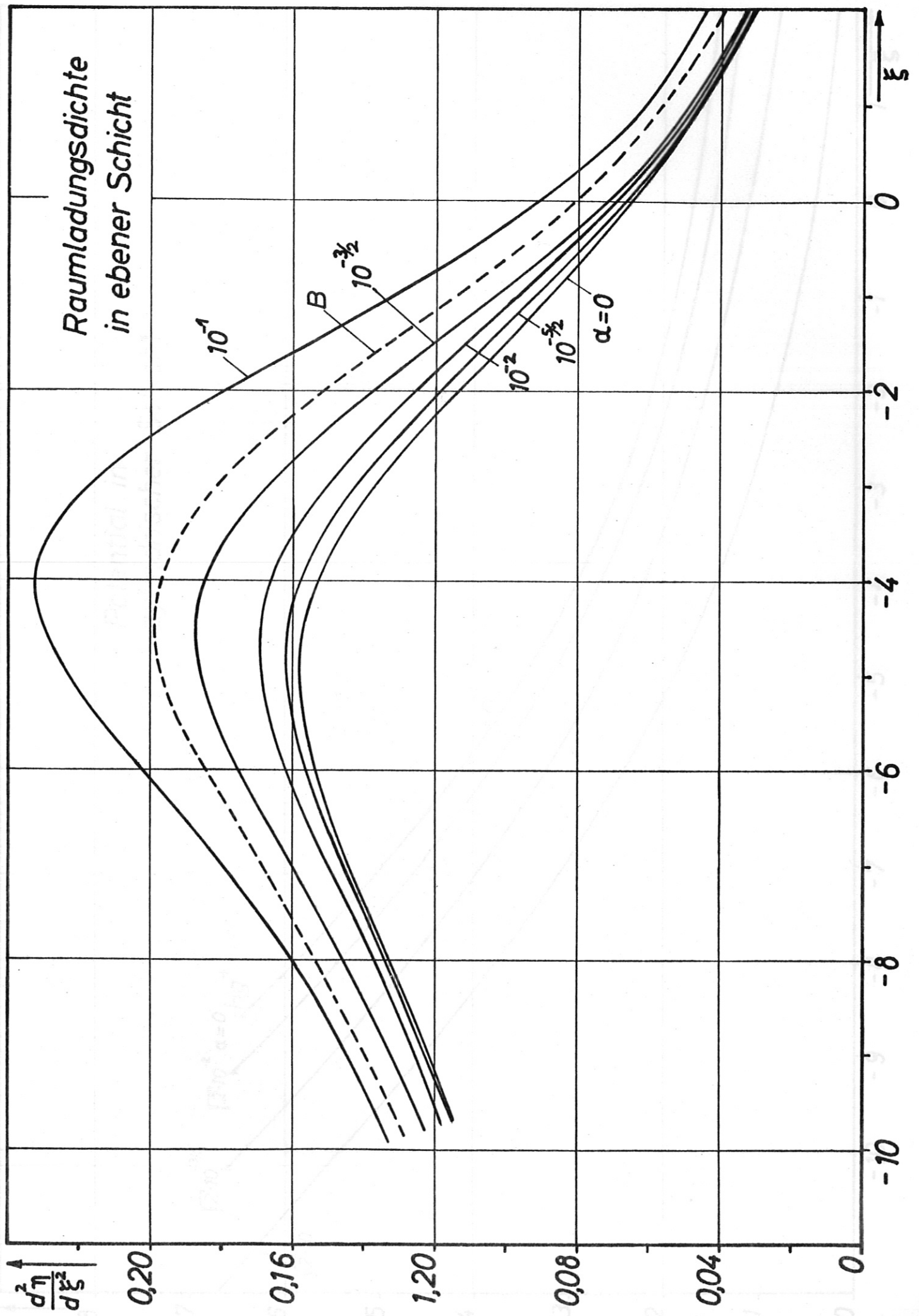


Abb. 6

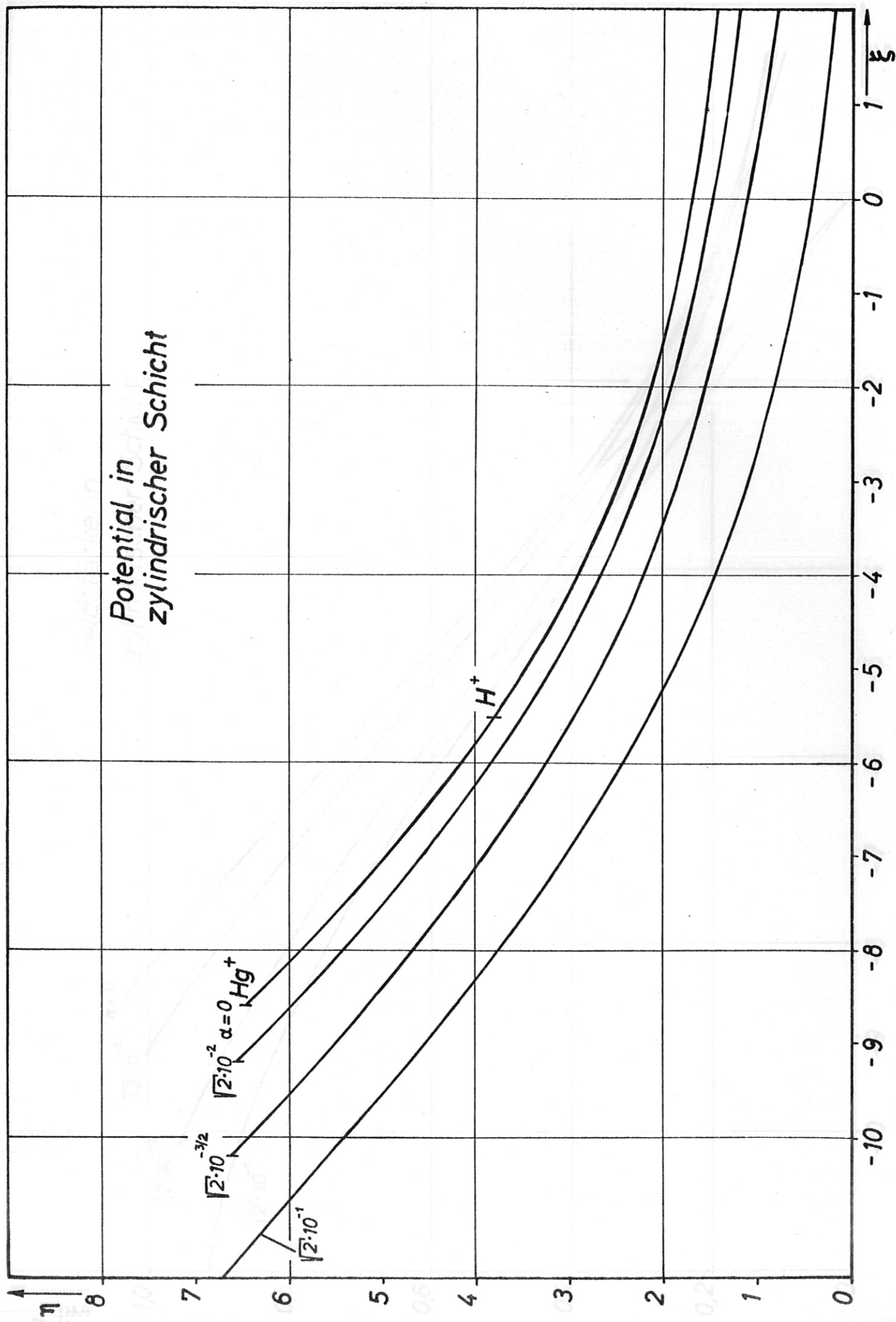


Abb. 7

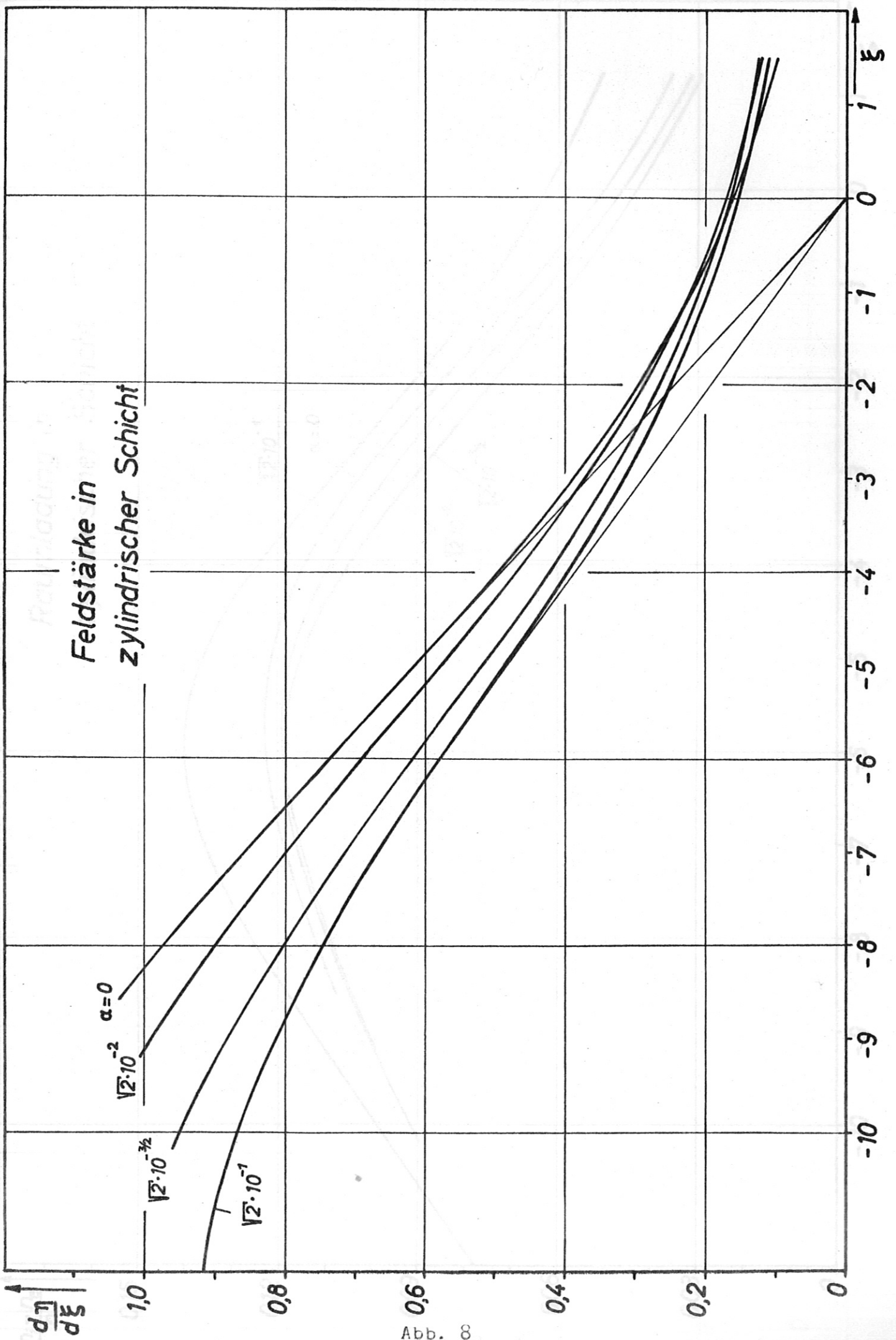


Abb. 8

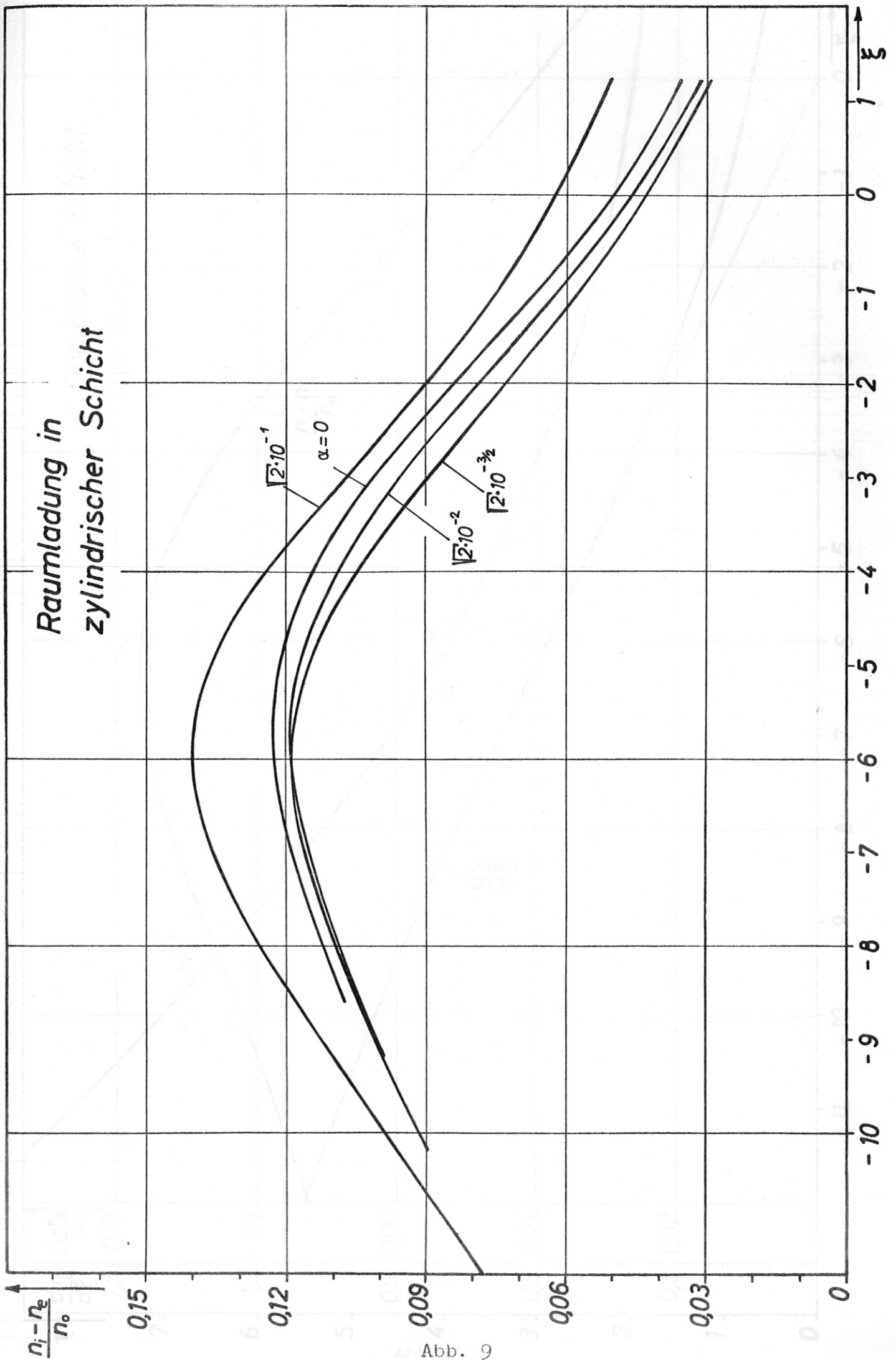


Abb. 9

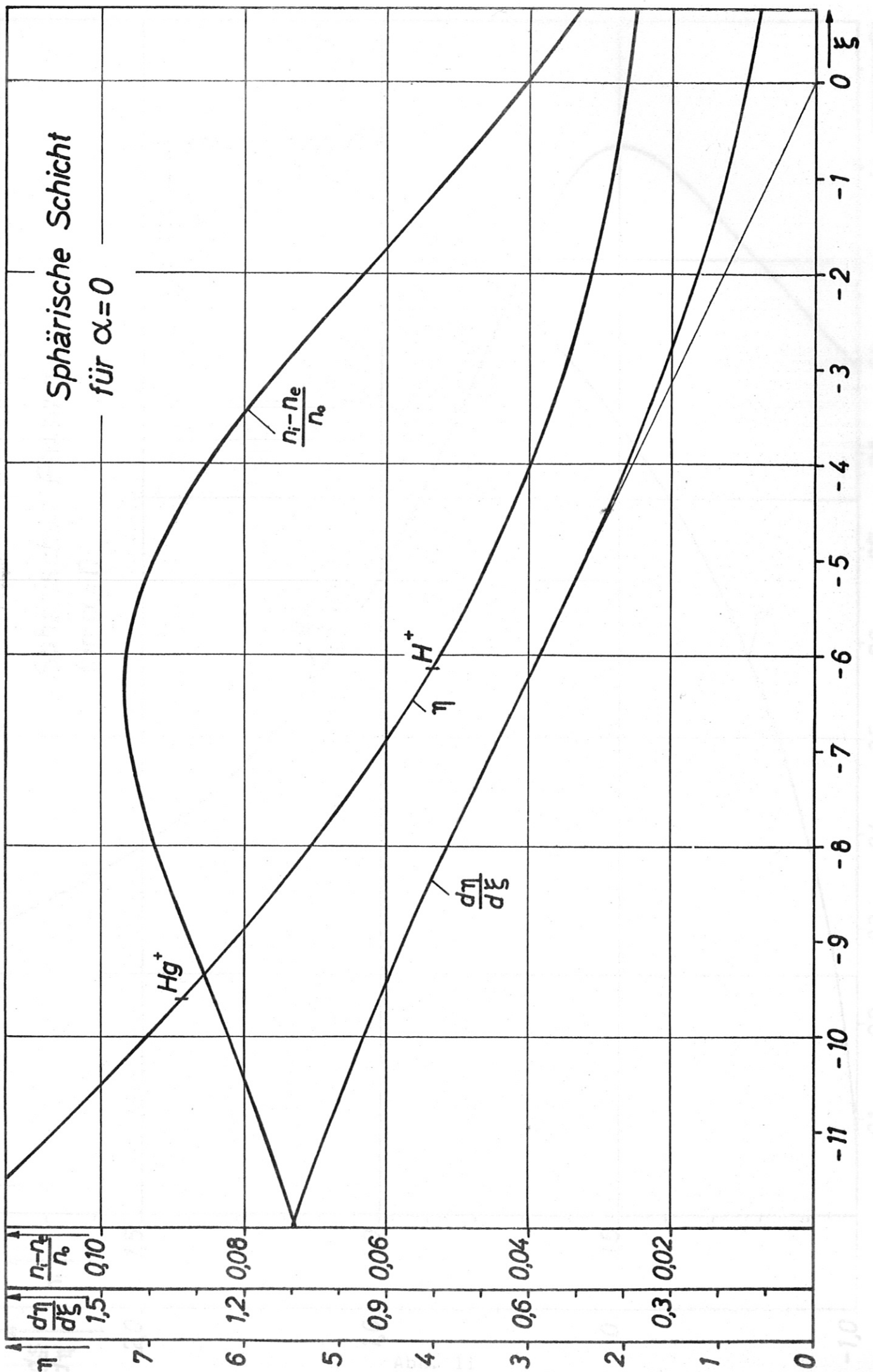


Abb. 10

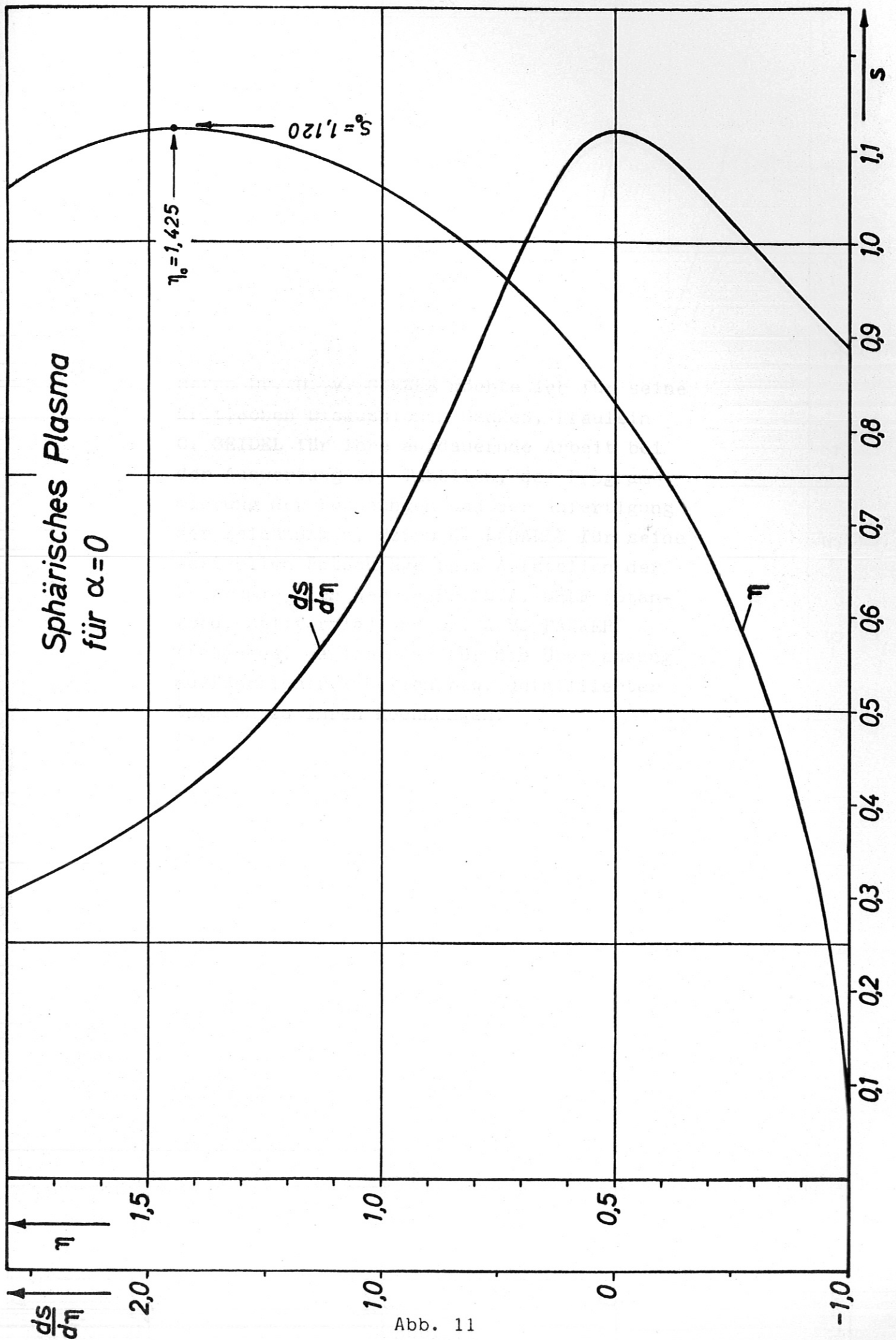


Abb. 11

Herrn Dr. G. v. GIERKE möchte ich für seine kritischen Diskussionen danken, Fräulein C. SEIDEL für ihre ausdauernde Arbeit bei der Auswertung der Tabellen, der Programmierung der Rechnungen und der Anfertigung der Zeichnungen, Herrn K. LAGALLY für seine wertvollen Ratschläge beim Aufstellen der Programme, den Herren Dr. S.A. SELF (Stanford, California) und Dr. J.V. PARKER (Pasadena, California) für die Überlassung ausführlicher Tabellen bzw. detaillierter Angaben zu ihren Rechnungen.