

Druckerhöhung in der zylindersymmetrischen
Lichtbogensäule bei überlagertem axialem
Magnetfeld

(Pressure Increase in a Cylindrically Symmetric
Arc Column located in an Axial Magnetic Field)

S. Witkowski

IPP 3/23

Oktober 1964

I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K

G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Druckerhöhung in der zylindersymmetrischen
Lichtbogensäule bei überlagertem axialem
Magnetfeld

(Pressure Increase in a Cylindrically Symmetric
Arc Column located in an Axial Magnetic Field)

S. Witkowski

IPP 3/23

Oktober 1964

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

IPP 3/23 S. Witkowski Pressure Increase in a Cylindrically Symmetric
Arc Column located in an Axial Magnetic Field,
October, 1964 (in German).

ABSTRACT

Numerical calculations of pressure increase in the plasma of a cylindrical arc column are presented. We assume applicability of the Corona-equation. Results are given for magnetic fields up to 50 k Γ , external pressures of 10^{-1} to $2 \cdot 10^5$ dyn/cm² and temperatures up to 80 000°K. Finally, these results are compared with calculations using the Saha-equation. (R. Wienecke, IPP 3/3).

1. Einleitung

Überlagert man einer stationären, zylindrischen Lichtbogen-säule ein achsenparalleles, homogenes Magnetfeld, so erhält man einen Anstieg des Druckes in der Umgebung der Achse, der im wesentlichen dadurch bewirkt wird, daß das Magnetfeld den ambipolaren Diffusionsstrom der Ladungsträger in radialer Richtung vermindert. Der Druckanstieg wurde im Laborbericht IPP 3/3 für den Fall berechnet, daß im Bogen lokales thermisches Gleichgewicht herrscht. Die Zusammensetzung des Plasmas an jeder Stelle des Bogens wurde hierbei durch die Saha-Gleichung beschrieben. Bei kleinen Elektronendichten jedoch wird die Annahme lokalen thermischen Gleichgewichts und damit die Verwendung der Saha-Gleichung problematisch. Die Abweichungen der Besetzungszahlen der Energieniveaus der Atome und Ionen von denen im thermischen Gleichgewicht waren in den letzten Jahren Gegenstand zahlreicher Arbeiten, z.B. [1], [2]. Wir beschränken uns im folgenden auf die Annahme eines Grenzfalles der Abweichung bei kleinen Elektronendichten, der durch die Koronaformel beschrieben wird [3], [4]. Dieser Fall liegt vor, wenn in einem Plasma wegen der geringen Dichte Dreierstoßrekombinationen zu vernachlässigen sind, und sich ein stationäres Gleichgewicht dadurch einstellt, daß in der Zeiteinheit die Anzahl der Stoßionisationen aus dem Grundzustand gleich der Anzahl von Strahlungsrekombinationen in den Grundzustand wird.

2. Rechnungen

Wie im Laborbericht IPP 3/3 gehen wir aus von den Bewegungsgleichungen für ein Dreikomponenten-Plasma nach Schlüter [5] und spezialisieren die Gleichungen auf Zylindersymmetrie. Die kinetischen Temperaturen der Komponenten seien gleich: $T_i = T_e = T_o = T$, es herrsche Quasineutralität $n_i = n_e$, das Gesamtplasma sei in Ruhe $\mathcal{W} = 0$, das Magnetfeld habe nur eine z-Komponente und die radiale Komponente des elektrischen Stromes j_r verschwinde.

Die Umformungen bis Gl. (22) in IPP 3/3 werden unverändert übernommen. Gl. (22) in IPP 3/3 lautet

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{\frac{e^2}{c^2} B_z^2}{(n_i + n_o) [n_i \epsilon_{ie} (\epsilon_{io} + \epsilon_{eo}) + n_o \epsilon_{io} \epsilon_{eo}]} \frac{dp_o}{dr} \quad (1)$$

Aus dieser Gleichung sollen nun die Variablen p_o , n_o , n_i eliminiert werden. Den Zusammenhang zwischen Ionendruck p_i und Neutralteilchendruck p_o liefert hier die Koronaformel (nicht wie in IPP 3/3 die Sahaformel):

$$\frac{p_i}{p_o} = \frac{3\sqrt{3}}{16\alpha^3} \frac{1}{\gamma} \frac{e^{-\frac{E_i}{kT}}}{\frac{E_i}{kT}} \left(1 + \frac{0.3}{\frac{E_i}{kT}} \right) \quad (2)$$

$\alpha = \frac{1}{137}$ reziproke Sommerfeld'sche Feinstrukturkonstante

$E_i = 13,6$ eV Ionisationsenergie vom Wasserstoff

$\gamma =$ Faktor zwischen 1,4 und 4 (berechnet von Elwert)

Wir verwenden $\gamma = 1,6$ und erhalten damit für unseren Bereich (T in °K)

$$\frac{p_i}{p_o} = K(T) = 3,3 \cdot T e^{-\frac{15,8 \cdot 10^4}{T}} \quad (2a)$$

Weitere Beziehungen liefern das Dalton'sche Gesetz

$$p = 2 p_i + p_o \quad (3)$$

und die ideale Gasgleichung

$$p_K = n_K kT \quad (4)$$

Aus der Kombination von (2) und (3) erhält man

$$p_i = \frac{K \cdot P}{1 + 2K} \quad (5)$$

$$p_o = \frac{P}{1 + 2K} \quad (6)$$

Die Differentiation von (6) ergibt

$$\frac{dp_o}{dr} = \frac{1}{1+2K} \frac{dP}{dr} - \frac{2P}{(1+2K)^2} \frac{dK}{dr}$$

Da T eine monotone Funktion des Radius r ist, kann man auch schreiben

$$\frac{dp_o}{dr} = \frac{1}{1+2K} \frac{dP}{dT} \frac{dT}{dr} - \frac{2P}{(1+2K)^2} \frac{dK}{dT} \frac{dT}{dr} \quad (6a)$$

Berücksichtigt man die Beziehungen

$$\begin{aligned} n_i &= \frac{p_i}{kT} = \frac{KP}{(1+2K)kT} \\ n_o &= \frac{p_o}{kT} = \frac{P}{(1+2K)kT} \end{aligned} ,$$

so erhält man schliesslich nach einigen Umformungen

$$\frac{dP}{dT} = \frac{2P \frac{e^2}{c^2} B_z^2 \frac{dK}{dT}}{\frac{P^2(1+K)}{(kT)^2} \left[K \epsilon_{ie} (\epsilon_{io} + \epsilon_{eo}) + \epsilon_{io} \epsilon_{eo} \right] + (1+2K) \frac{e^2}{c^2} B_z^2} \quad (7)$$

Den Ausdruck für B_z entnehmen wir wie in IPP 3/3 der Druckbilanz

$$B_z^2 = B_A^2 + 8\pi (P_A - P) \quad (8)$$

Hierin ist B_A das von aussen angelegte Magnetfeld und P_A der zugehörige, ausserhalb der Bogensäule herrschende Druck. Die Reibungskoeffizienten können als Funktion des Gesamtdrucks und der Temperatur geschrieben werden, K ist eine reine Temperaturfunktion. (7) ist daher eine Differentialgleichung in p und T, die numerisch gelöst werden kann.

3. Numerische Auswertung

Die Rechnung wurde für ein Wasserstoffplasma durchgeführt.
Folgende Zahlenwerte und Funktionen wurden verwendet:

Konstanten:	Lichtgeschwindigkeit	$c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec
	Boltzmannkonstante	$k = 1,38 \cdot 10^{-16}$ erg/Grad
	Elementarladung	$e = 4,8 \cdot 10^{-10}$ CGS
	Elektronenmasse	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-28}$ g
	H-Atommasse	$m_o = 1,67 \cdot 10^{-24}$ g $\approx m_i$
	Wasserstoffionisations- energie	$E_i = 13,6$ eV

$$\text{Koronaformel: } K = 3,3 \cdot T \cdot e^{-\frac{15,8 \cdot 10^4}{T}} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} T \text{ in } ^\circ\text{K}$$
$$\frac{dK}{dT} = 3,3 \left(1 + \frac{15,8 \cdot 10^4}{T}\right) e^{-\frac{15,8 \cdot 10^4}{T}}$$

Reibungskoeffizienten:

$$\epsilon_{ie} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{8}{\pi} kT m_e} Q_{ie}$$

$$\epsilon_{io} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{8}{\pi} kT \frac{m_o}{2}} Q_{io}$$

$$\epsilon_{eo} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{8}{\pi} kT m_e} Q_{eo}$$

Wirkungsquerschnitte:

$$Q_{ie} = \frac{e^4}{(kT)^2} \ln \frac{kT}{e^2 n_e^{1/3}} = \frac{e^4}{(kT)^2} \ln \frac{(kT)^{4/3}}{e^2} \left(\frac{1+2K}{K\rho}\right)^{1/3} \text{ cm}^2$$

$$Q_{io} = 70 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2$$

$$Q_{eo} = 120 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2$$

Damit kommt man schliesslich zu folgender Form der Gl. (7)

$$\frac{dp}{dT} = \frac{2p B_z^2 \frac{dB_z}{dT}}{9.85 \cdot Q_{i0} \frac{p^2(1+K)}{T} \left\{ \frac{h\nu\Delta}{T^2} K (1 + 3.3 \cdot 10^{-2} \frac{Q_{e0}}{Q_{i0}}) + 3.6 \cdot 10^{-11} Q_{e0} \right\} + (1+2K) B_z^2} \quad (7a)$$

$$\text{mit } B_z^2 = B_A^2 + 2.51 \cdot 10^{-7} (P_A - P) \quad (8a)$$

in die Q_{i0} und Q_{e0} in Einheiten von $[10^{-16} \text{ cm}^2]$,
 die Feldstärke B_A in Einheiten $[\text{Tesla}] = [10^4 \text{ T}]$,
 der Druck p_A in $[\text{dyn/cm}^2]$

eingesetzt werden. Die Differentialgleichung (7a) wurde auf der IBM 7090 mit p_A und B_A als Parameter gelöst.

4. Diskussion der Ergebnisse

In den Fig. 1 - 9 ist der auf die beschriebene Weise berechnete Druckanstieg als Funktion der Temperatur für Aussendrucke P_A von 10^{-1} dyn/cm^2 bis $2 \cdot 10^5 \text{ dyn/cm}^2$ und Magnetfelder von 1 bis 50 kT dargestellt. Man kann demnach mit Magnetfeldern von einigen 10 kT Druckverhältnisse von mehreren Zehnerpotenzen zwischen Bogenachse und Umgebung stationär aufrechterhalten, ohne dass Massenströme fliessen, wenn der Aussendruck hinreichend klein ist (ca. 1 Torr und kleiner). In Fig. 10 sind für $p_A = 10^4 \text{ dyn/cm}^2$ und die beiden Magnetfeldstärken 10 und 50 kT die Ergebnisse der Rechnungen, die unter Verwendung von Saha- und Koronaformel gemacht wurden, miteinander verglichen.

Bei Gültigkeit der Koronaformel bemerkt man -dem späteren Einsetzen der Ionisation entsprechend- einen Druckanstieg erst bei höheren Temperaturen als im Sahafall.

Der erreichte Endwert (bei voller Ionisation) liegt meistens über dem Sahawert. Bei höheren Ausgangsdrucken und höheren Magnetfeldern kann es jedoch auch umgekehrt sein (Fig. 11). Verglichen mit den Abweichungen, die durch die Unsicher-

heiten in der Grösse der Wirkungsquerschnitte Q_{e0} und Q_{i0} verursacht werden (siehe IPP 3/3), sind die Unterschiede im Enddruck zwischen Saha- und Koronawert vernachlässigbar.

Die Rechnungen wurden für den weiteren Druckbereich von $1 \cdot 10^{-1}$ bis $2 \cdot 10^5$ dyn/cm² durchgeführt. Ob die Voraussetzungen für die Gültigkeit der Koronaformel in der benutzten Form jeweils erfüllt sind, hängt unter anderem von den geometrischen Abmessungen des Plasmas ab und muss von Fall zu Fall überprüft werden. Für die höheren Werte des Druckes im behandelten Bereich wird oft die Sahagleichung eine bessere Näherung für die Plasmazusammensetzung liefern. Bei den niedrigen Drucken hingegen können Abweichungen der Temperaturen der verschiedenen Teilchensorten voneinander die Anwendung der Rechenergebnisse auf experimentelle Plasmen erschweren.

Literatur

- [1] D.R. Bates, A.E. Kingston, R.W.P. Mc Whirter
Proc. Roy. Soc. 267A, 297 (1962)
- [2] D.R. Bates, A.E. Kingston, R.W.P. Mc Whirter
Proc. Roy. Soc. 270A, 155 (1962)
- [3] L. Biermann, Naturwiss. 34, 87 (1947)
- [4] G. Elwert, Z. Naturf. 7a, 432 (1952)
- [5] A. Schlüter, Z. Naturf. 6a, 73 (1951)

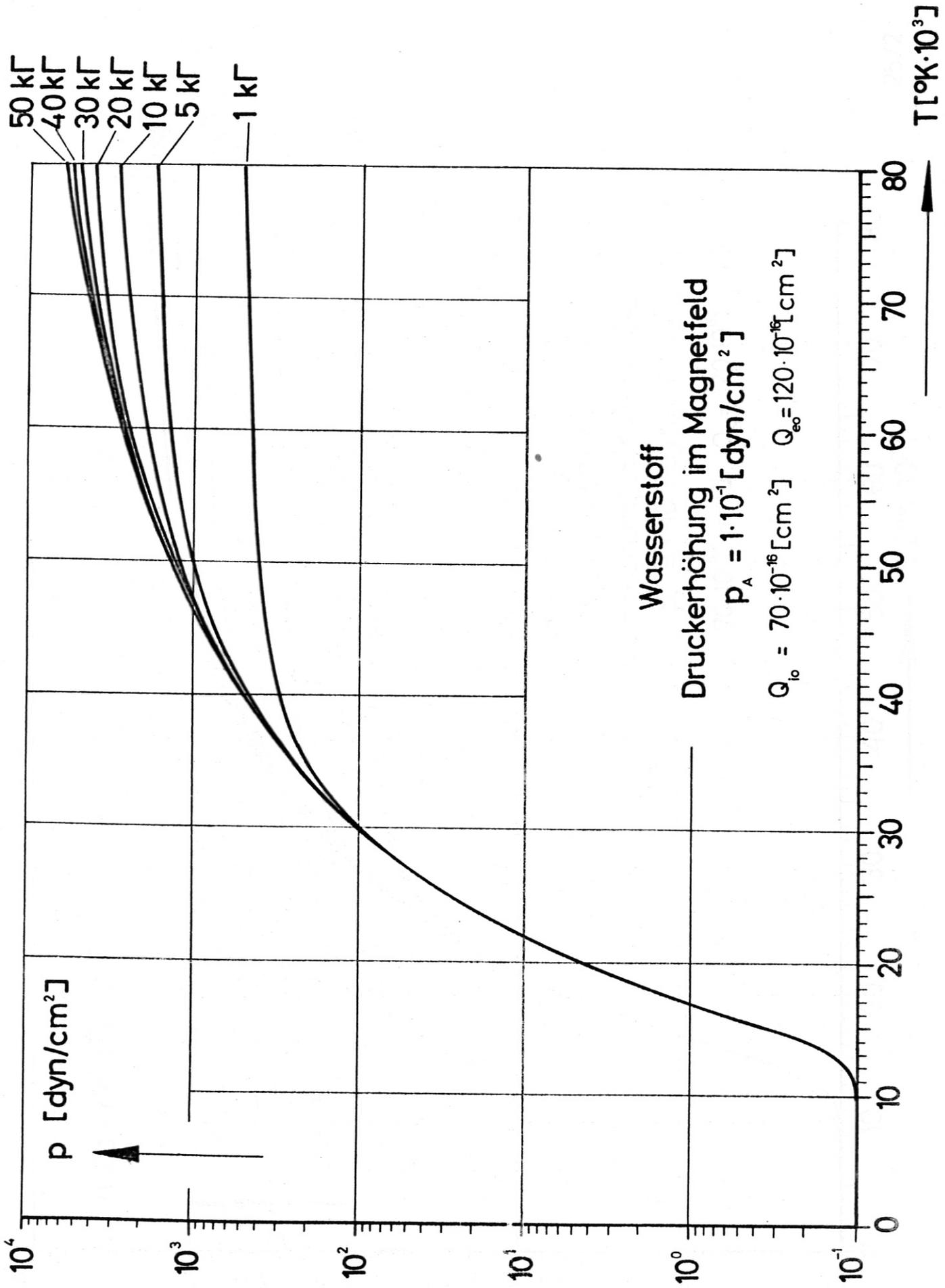


Fig.1

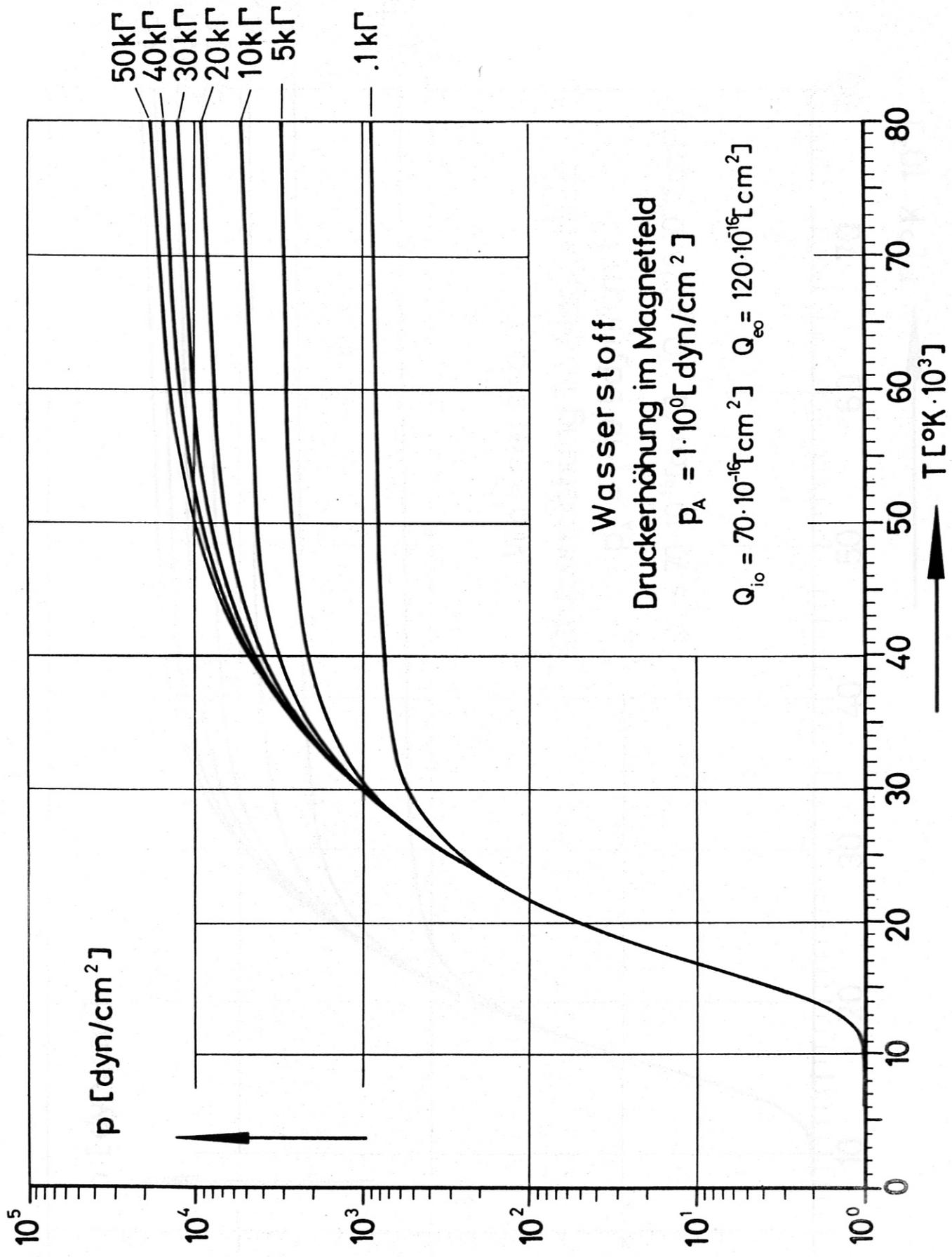


Fig. 2

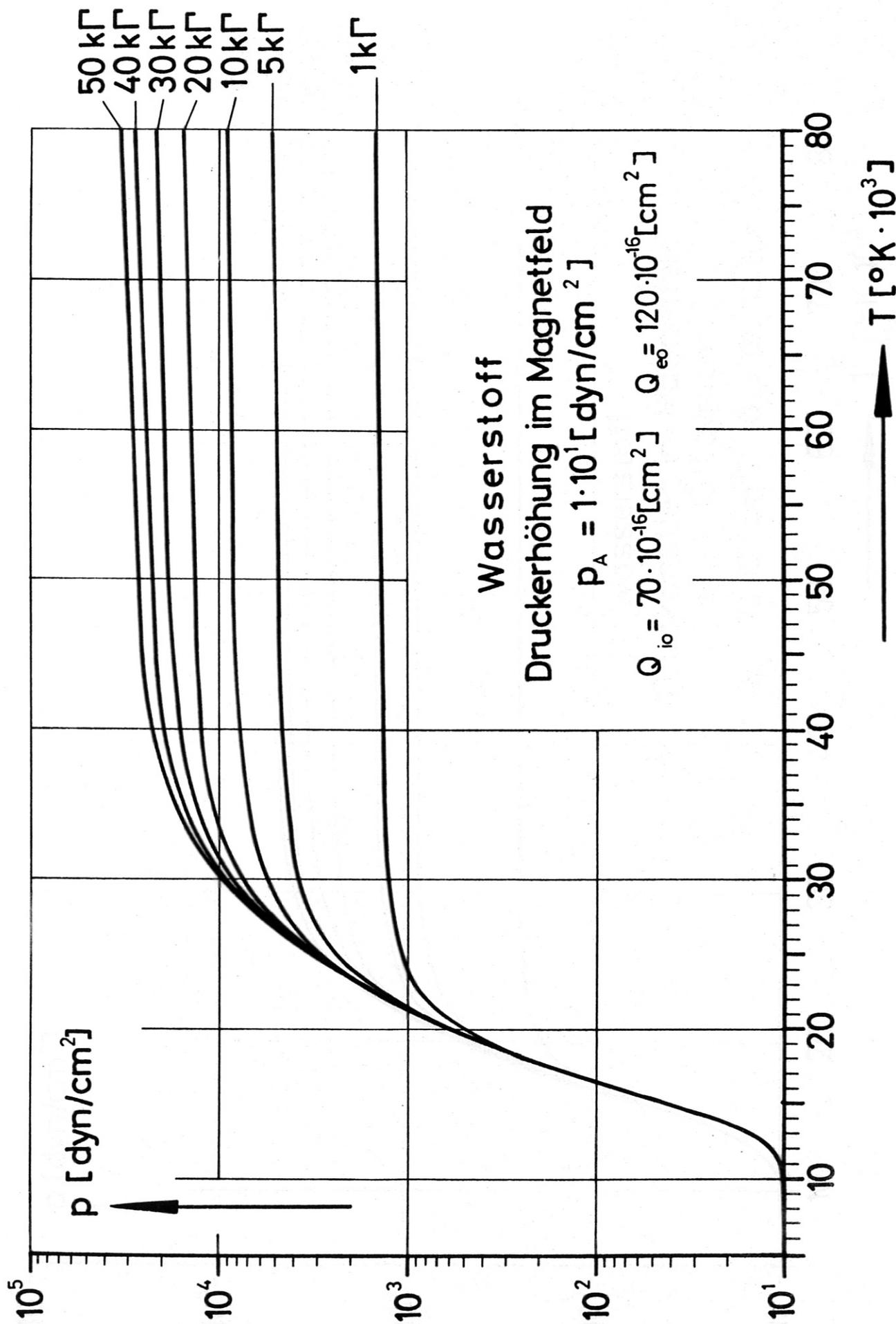


Fig.3

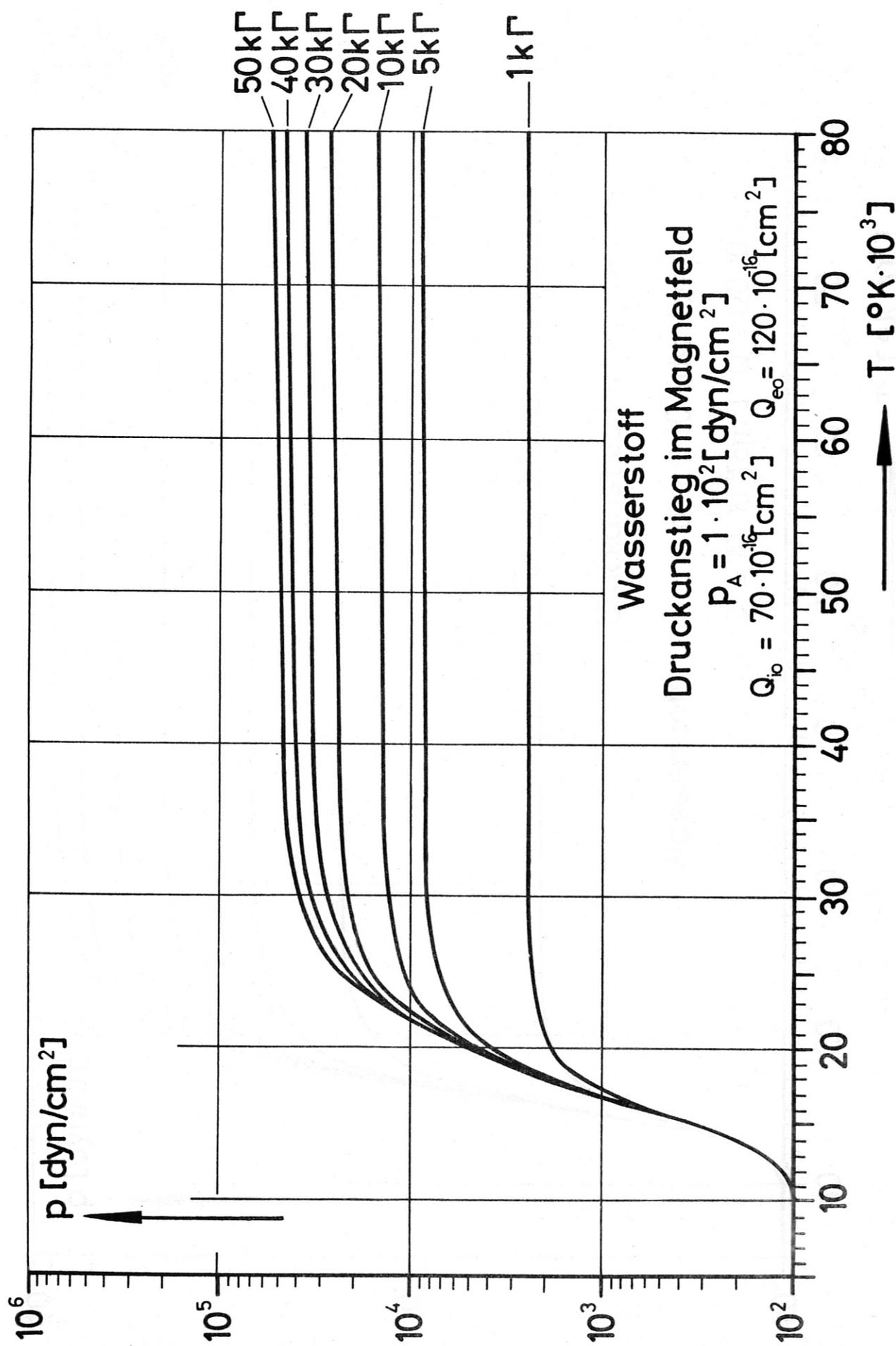


Fig. 4

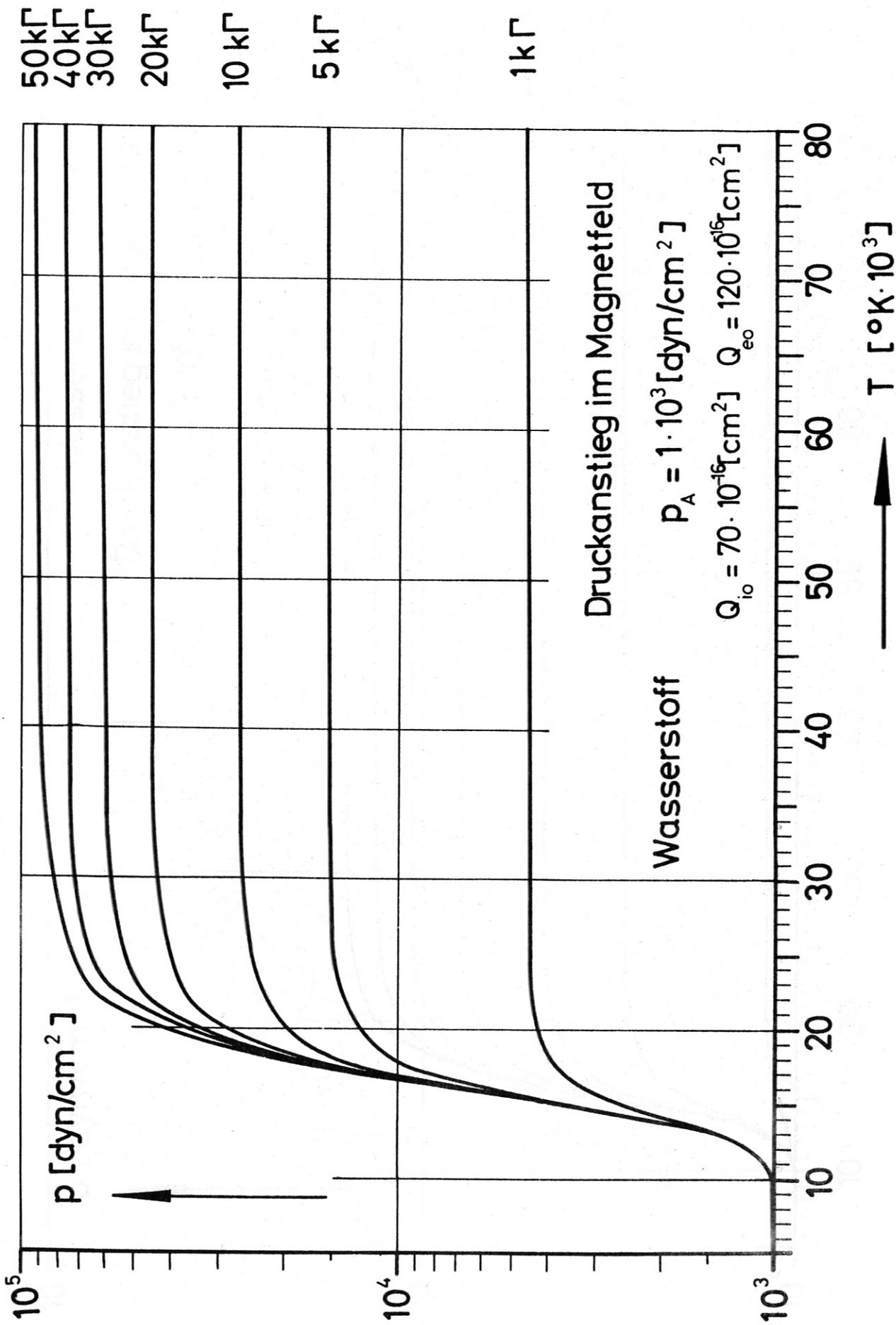


Fig.5

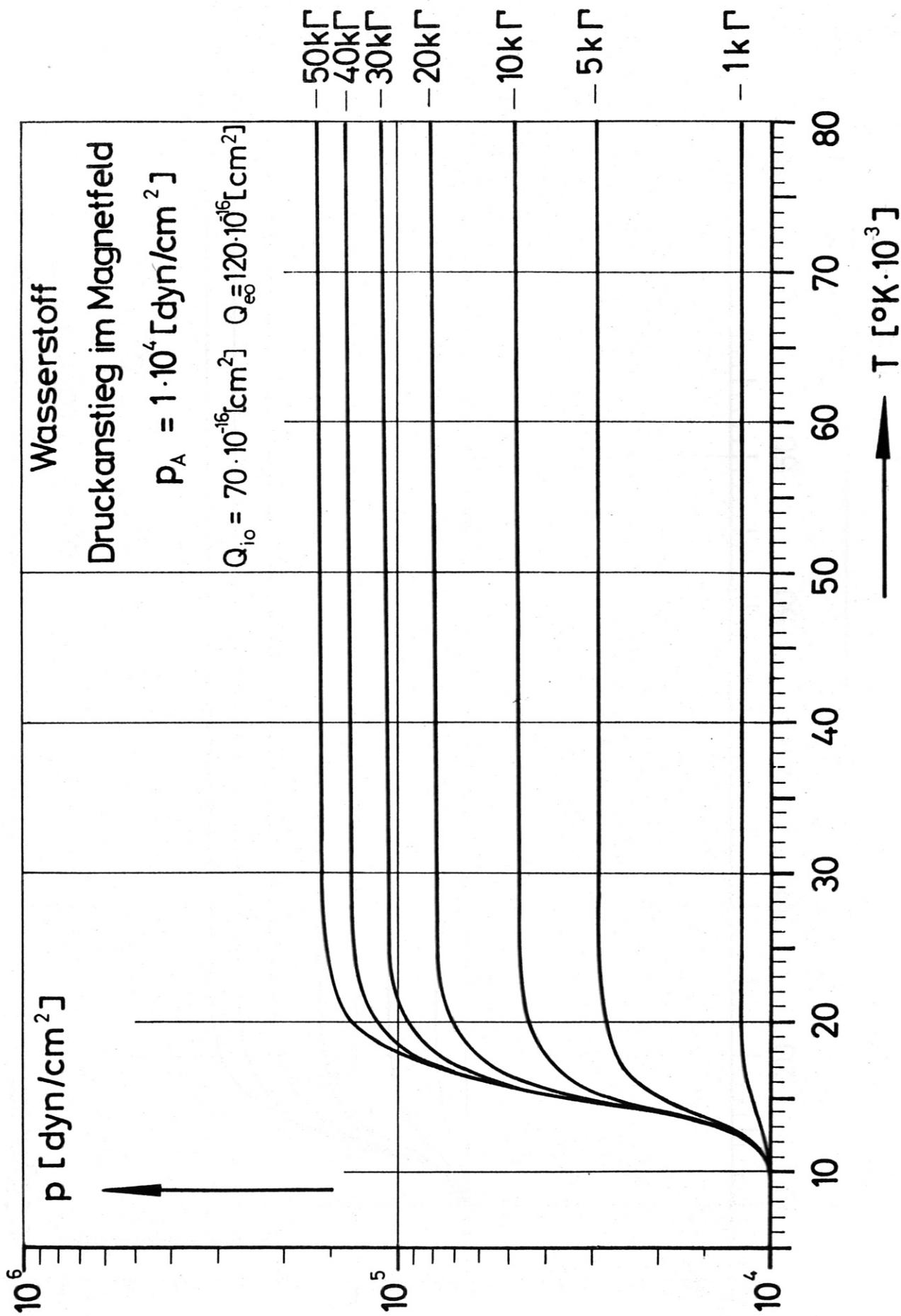


Fig. 6

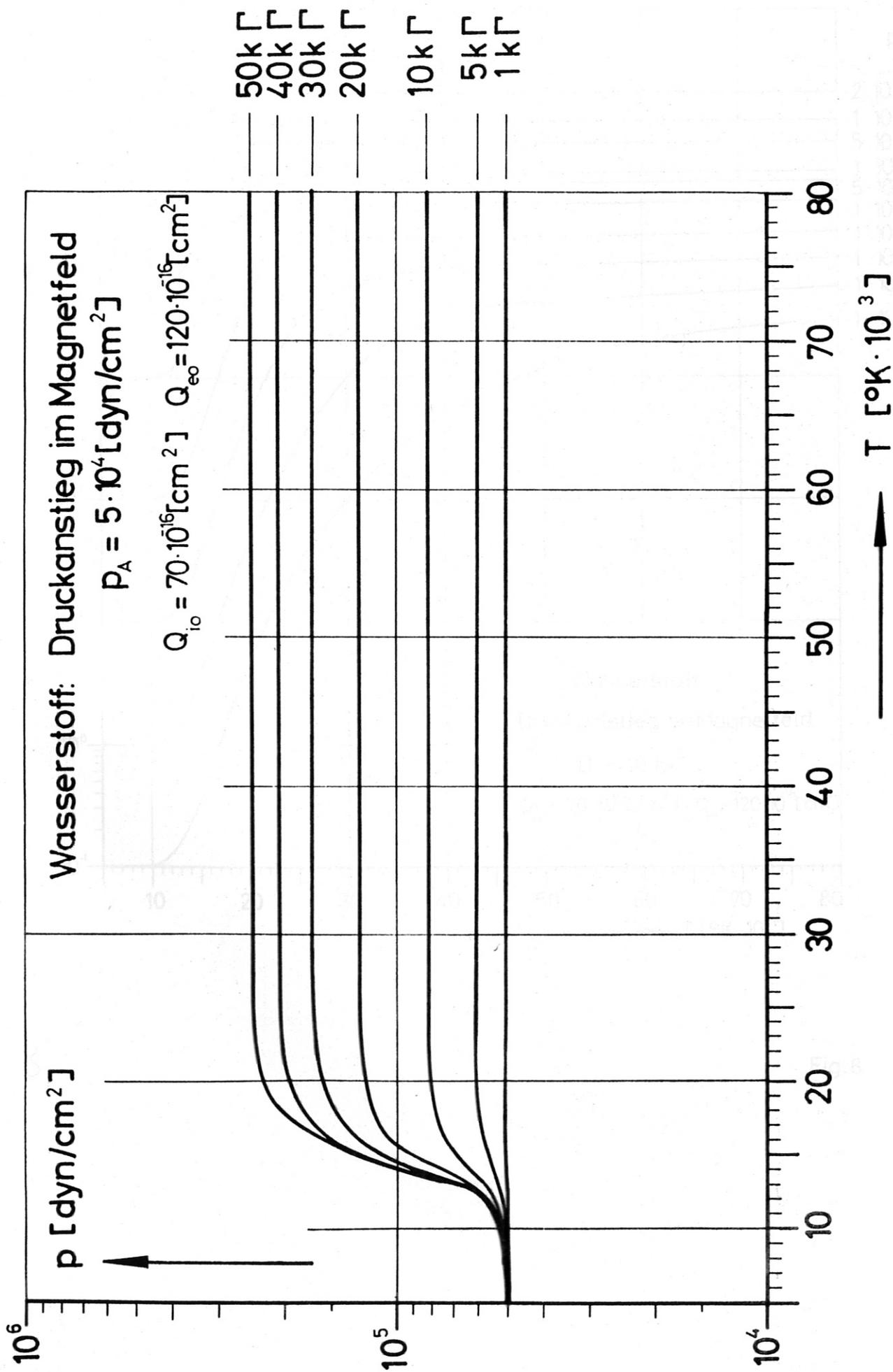


Fig.7

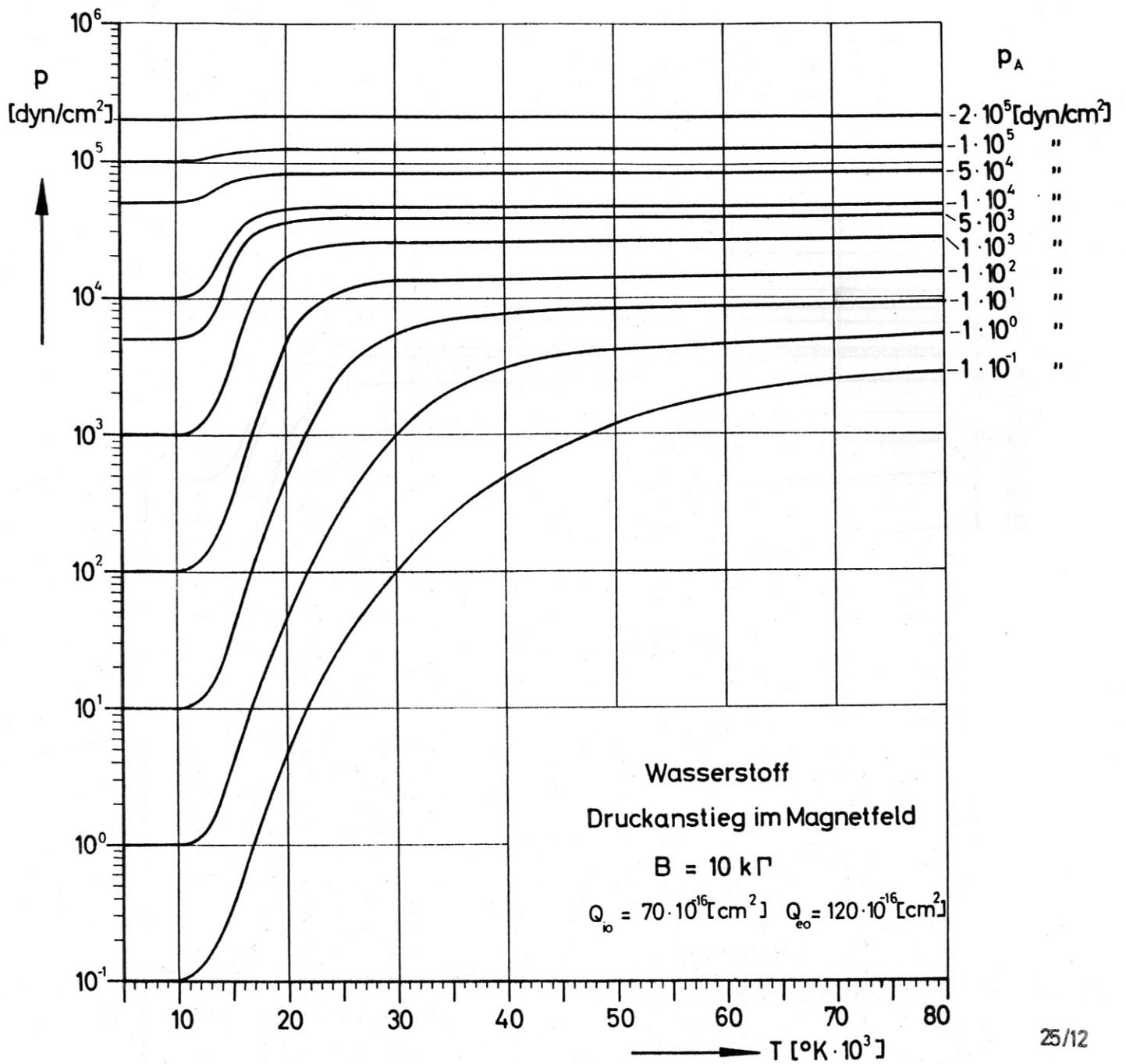
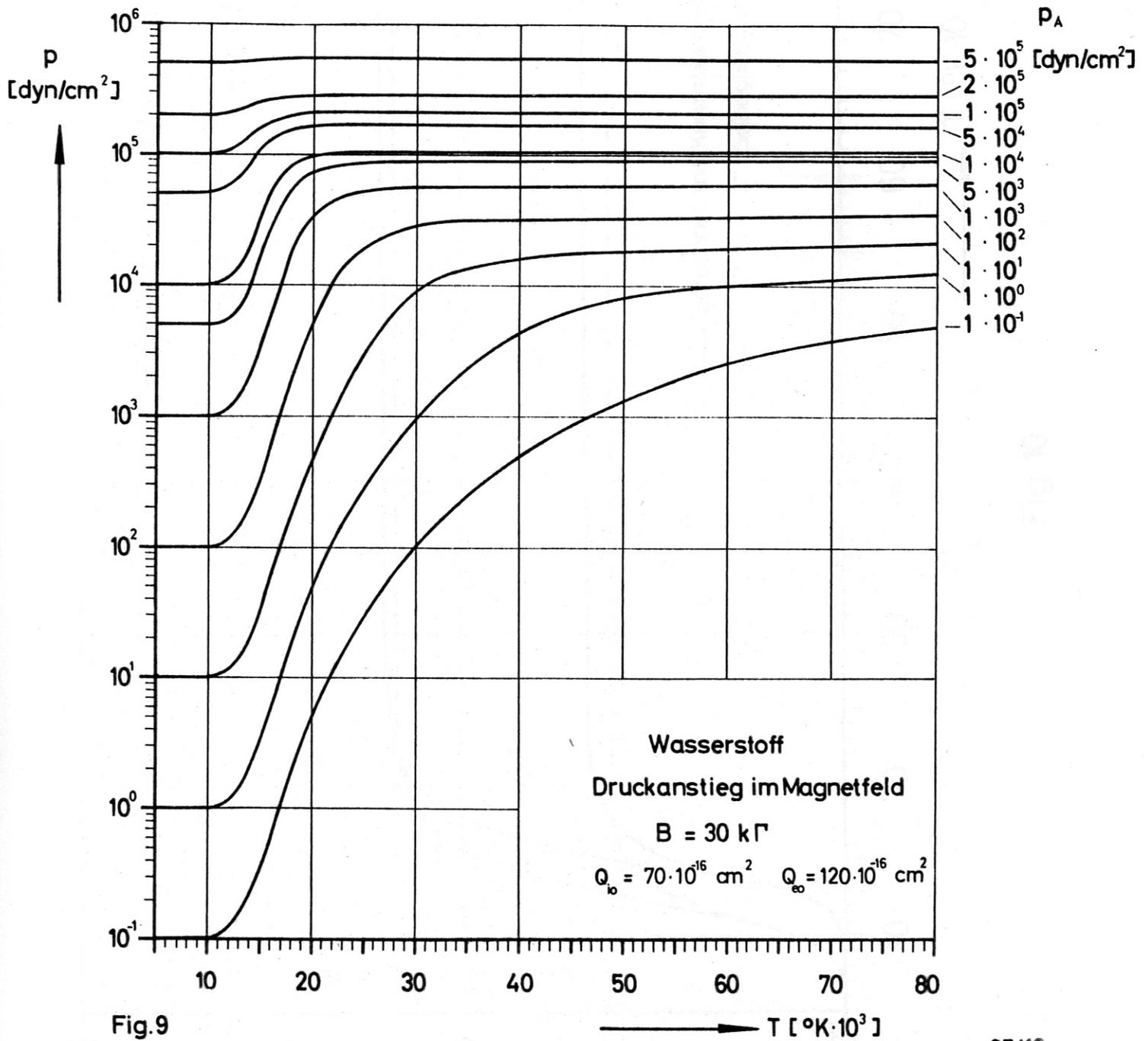


Fig. 8



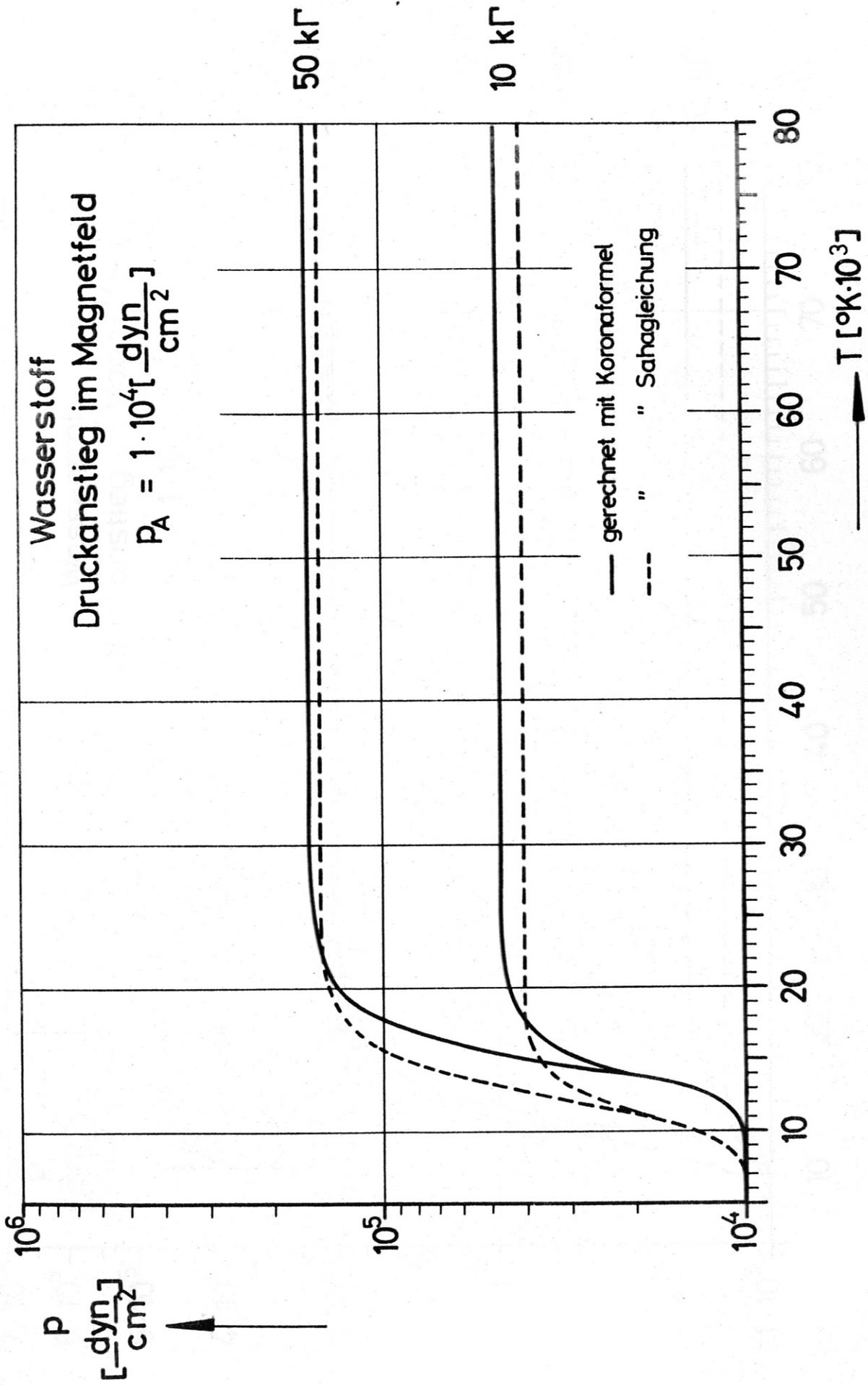


Fig. 10

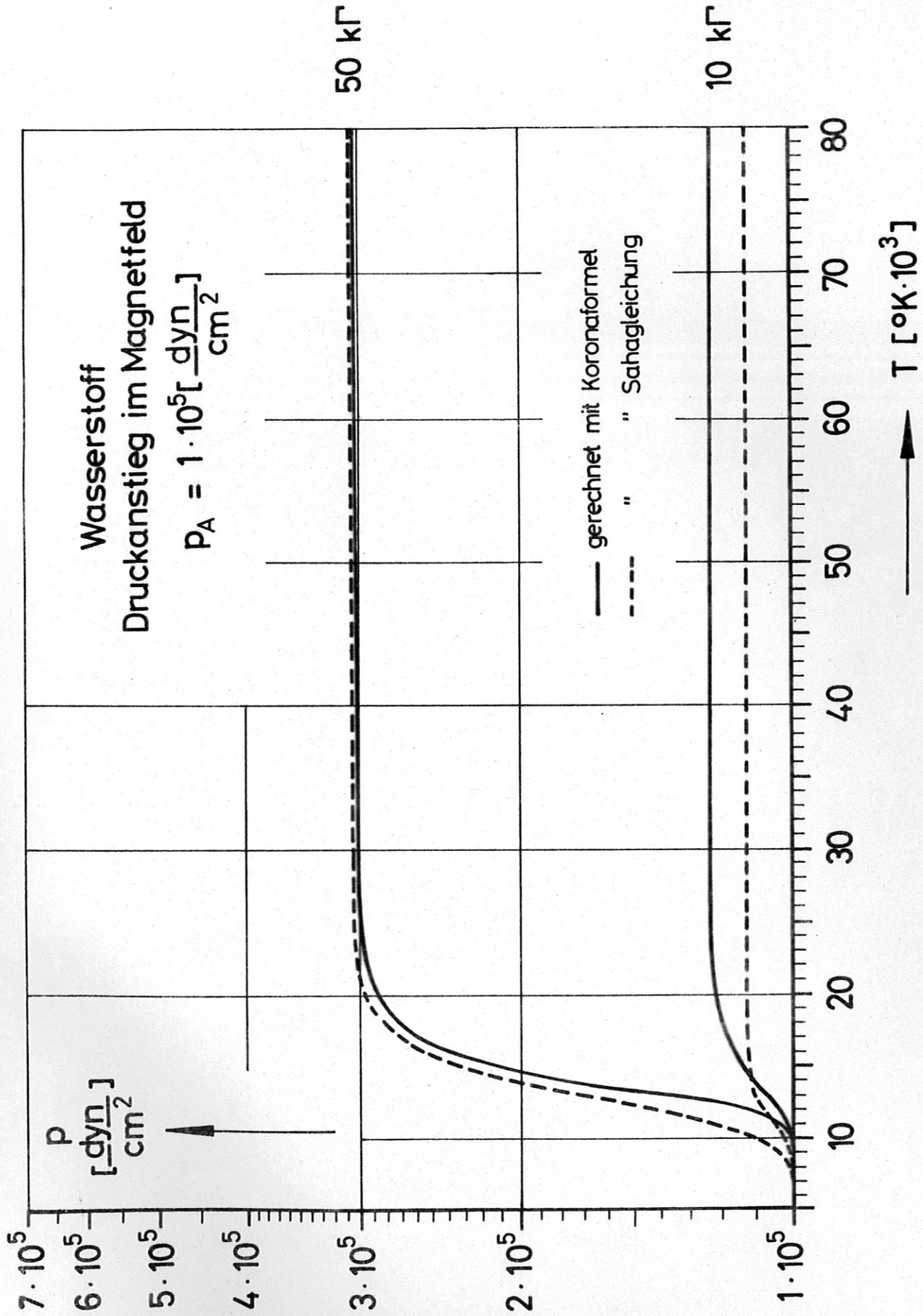


Fig.11