

Analyse der Arbeit von
Gleichstrom - MHD Generatoren
mit stationärer, linearer
Gasströmung mit Hilfe von
Vektordiagrammen

Z. Celinski

IPP 3/21

Mai 1964

I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K

G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Analyse der Arbeit von
Gleichstrom - MHD Generatoren
mit stationärer, linearer
Gasströmung mit Hilfe von
Vektordiagrammen

Z. Celinski

IPP 3/21

Mai 1964

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

Inhalt

	Seite
1. Einleitung	1
2. Annahmen	2
3. Allgemeines	3
4. Typ I-Generator	3
4.1. Typ I-Generator bei $\alpha > 0$	4
4.1.1. Vektordiagramme	4
4.1.2. Die Ortskurven der Vektoren der elektrischen Grössen	4
4.1.3. Praktische Ermittlung der elektrischen Grös- sen aus den Vektordiagrammen	12
4.2. Typ I-Generator bei $\alpha < 0$	14
4.2.1. Vektordiagramme	14
4.2.2. Die Ortskurven der Vektoren der elektrischen Grössen	14
5. Typ II-Generator	21
5.1. Vektordiagramme	21
5.2. Die Ortskurven der Vektoren der elektrischen Grössen	24
Bezeichnungen	26
Literatur	26

1. Einleitung

Die Beziehungen zwischen elektrischen Grössen in MHD-Generatoren sind vektoriell. Weil alle Vektoren der elektrischen Grössen in einer Ebene liegen, und zwar in der Ebene, die zu dem Vektor des Magnetfeldes senkrecht ist, ist es möglich, alle Beziehungen zwischen elektrischen Grössen in Form von Vektordiagrammen zu zeigen.

Die Vektordiagramme ermöglichen in einfacher und anschaulicher Weise die Beziehungen zwischen elektrischen Grössen bei variablen Leistungsparameter K , Hallparameter β und verschiedenen verbundenen Elektroden, zu analysieren.

Es wurde die Arbeit der Typen I und II der Gleichstrom-MHD-Generatoren (siehe [1]) analysiert (Fig. 1).

Es wird gezeigt, dass die Vektordiagramme [2] der in der Literatur [3] beschriebenen Generatoren der Typen A, B und C lediglich die Grenzfälle der Vektordiagramme der allgemeinen Typen I und II bilden.

Zusätzlich wurden die Diagramme entwickelt, die auf rasche und einfache Weise ermöglichen, direkt die Werte der elektrischen Grössen bei verschiedenen K , β und bei verschiedenen verbundenen Elektroden abzulesen.

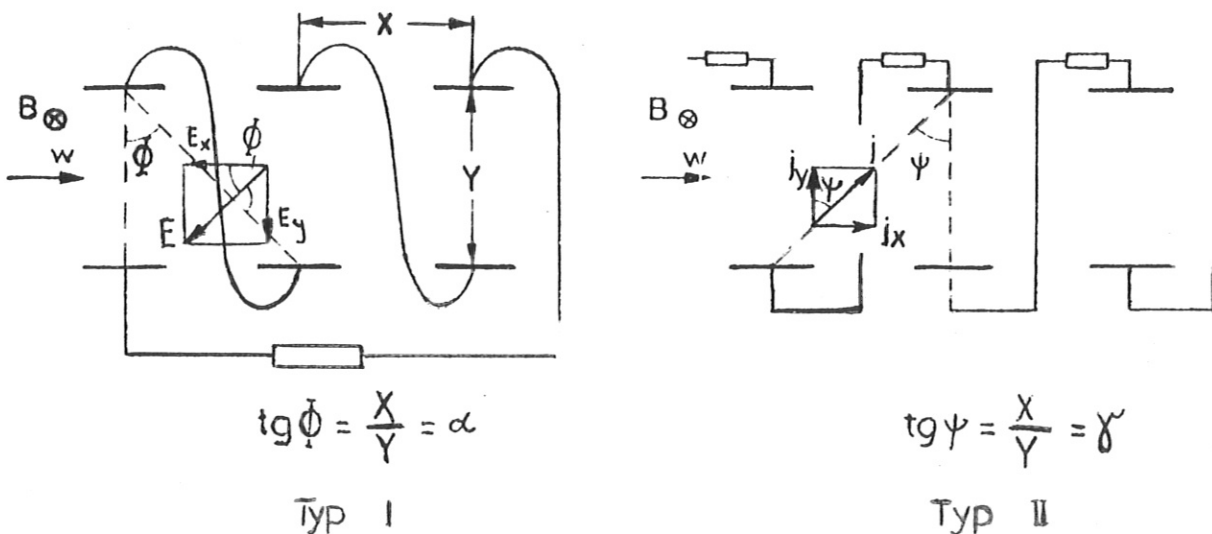


Fig. 1

2. Annahmen

In der Arbeit wurden folgende Voraussetzungen gemacht:

- alle gasdynamischen Parameter in der Generatorkammer bleiben konstant

$$\frac{\partial}{\partial(x,y,z,t)} (p, T, w_x) = 0$$

das ist gleichbedeutend mit

$$\frac{\partial \delta}{\partial(x,y,z,t)} = 0$$

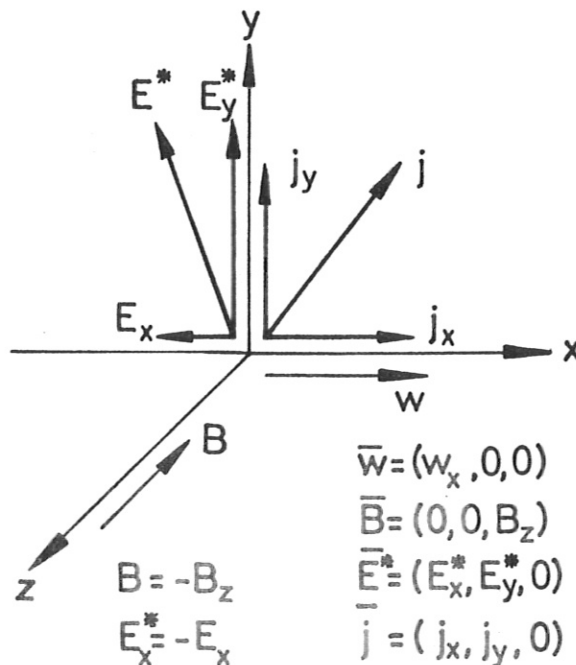
- die Generatorkammer hat konstanten Querschnitt
 - das elektrische und magnetische Feld, die elektrische Stromdichte sind homogen in der ganzen Generatorkammer.
- Die Homogenität des elektrischen Feldes und der elektrischen Stromdichte setzt die Aufteilung der Elektroden auf sehr kleine Segmente voraus.

- Der Effekt des sogenannten "ion slip's" wird vernachlässigt, das heisst

$$\omega e \tau \omega_i \tau_i \ll 1$$

- Das Koordinatensystem und die Vektorrichtungen der elektrischen Grössen wurden wie in Fig. 2 angenommen.

Fig. 2



3. Allgemeines

Als fundamentale Beziehung gilt die vereinfachte Form des verallgemeinerten Ohmschen Gesetzes.

$$\vec{j} = \sigma'_0 \vec{E}^* - \frac{\beta}{B} \vec{j} \times \vec{B} \quad (1)$$

Das ist eine vektorielle Gleichung und deswegen ist es möglich, sie in Form eines Vektordiagrammes zu zeigen.

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\left| \frac{\beta}{B} \vec{j} \times \vec{B} \right|}{|\vec{j}|} = \beta \quad (2)$$

Bei konstantem elektrischen Feld und variablem β ist die Ortskurve des \vec{j} -Vektors ein Halbkreis.

Man kann sich leicht überzeugen, dass bei beliebigen Richtungen von \vec{w} und \vec{B} im MHD Generator der Vektor \vec{j} immer vom Vektor \vec{E}^* in Strömungsrichtung abweicht.

Als zweite fundamentale Beziehung für die vektorielle Analyse der MHD Generatoren gilt die Beziehung zwischen dem elektrischen Feld im ruhenden (Labor-)System E und dem elektrischen Feld im mitbewegten Koordinatensystem E^*

$$\vec{E}^* = \vec{E} + \vec{w} \times \vec{B} \quad (3)$$

Die elektrischen Grössen in allen Vektordiagrammen werden in normierten Werten dargestellt. Als Einheitsgrössen für das elektrische Feld wurde wB und für die Stromdichte $\sigma'_0 wB$ angenommen.

4. Typ I-Generator

In der Tabelle 1 werden nach [1] die elektrischen Grössen für den Typ I-Generator, in normierten Werten ausgedrückt, zusammengestellt.

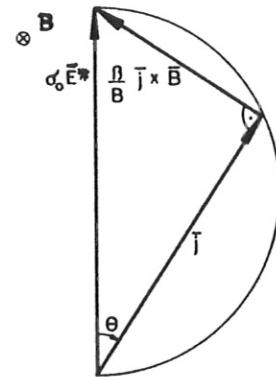


Fig. 3

Tabelle 1

	$0 < K < 1$	$K = 1$	$K = 0$
j'_x	$\frac{\beta}{1+\beta^2} \left(1 - \frac{1+\alpha\beta}{1+\alpha^2} \frac{\alpha+\beta}{\beta} K\right)$	$-\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$	$\frac{\beta}{1+\beta^2}$
j'_y	$\frac{1}{1+\beta^2} \left(1 - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{1+\alpha^2} K\right)$	$\frac{1}{1+\alpha^2}$	$\frac{1}{1+\beta^2}$
E'_x	$\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha^2} K$	$\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha^2}$	0
E'_y	$\alpha \frac{\alpha+\beta}{1+\alpha^2} K$	$\alpha \frac{\alpha+\beta}{1+\alpha^2}$	0
E^{*x}	$\sqrt{1 - 2K\alpha \frac{\alpha+\beta}{1+\alpha^2} + K^2 \frac{(\alpha+\beta)^2}{1+\alpha^2}}$	$\sqrt{\frac{1+\beta^2}{1+\alpha^2}}$	1
E^{*y}	$1 - \alpha \frac{\alpha+\beta}{1+\alpha^2} K$	$\frac{1-\alpha\beta}{1+\alpha^2}$	1

Die normierten elektrischen Grössen sind lediglich Funktionen von α, β und K . Die Ausdrücke in der Tabelle 1 gelten sowohl für $\alpha > 0$ wie auch für $\alpha < 0$.

4.1. Typ I-Generator bei $\alpha > 0$

4.1.1. Vektordiagramme

In Fig. 4 werden beispielsweise die Vektordiagramme für konstantes α und variablen β, K gezeigt.

Fig. 5 zeigt die Vektordiagramme für spezielle Fälle $\alpha = 0$ (Typ C) und $\alpha = \infty$ (Typ A) bei variablem K .

4.1.2. Die Ortskurven der Vektoren der elektrischen Grössen

Zur Analyse der Änderungen der elektrischen Grössen in Abhängigkeit von den Parametern α, β, K ist es günstig, die Ortskurven für

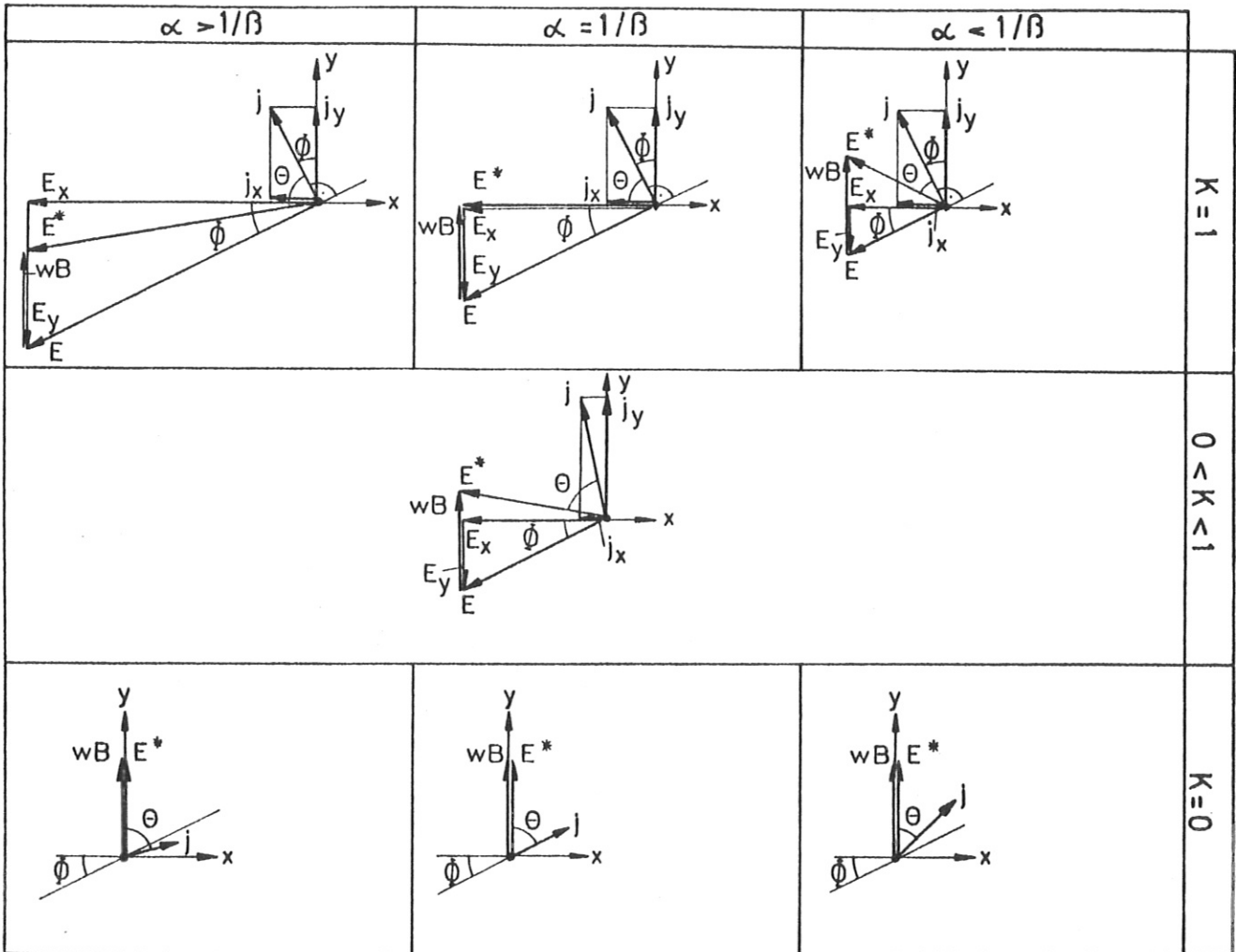


Fig. 4

die Vektoren der elektrischen Grössen zu suchen.

Die Ortskurve der \vec{j} -Vektorspitzen im Leerlauf ($K=1$) bei variablem α und β ist ein Halbkreis (Fig. 6 linker Halbkreis); im Kurzschluss ($K=0$) ebenfalls ein Halbkreis (Fig. 6 -rechter Halbkreis). Für $0 < K < 1$ befinden sich die Spitzen der \vec{j} -Vektoren innerhalb des Kreises.

Der linke Halbkreis ist mit α -Werten (von 0 bis ∞) beschrieben, der rechte mit β -Werten (von 0 bis ∞). Die Strecke $\alpha_1\beta_1$ ist in

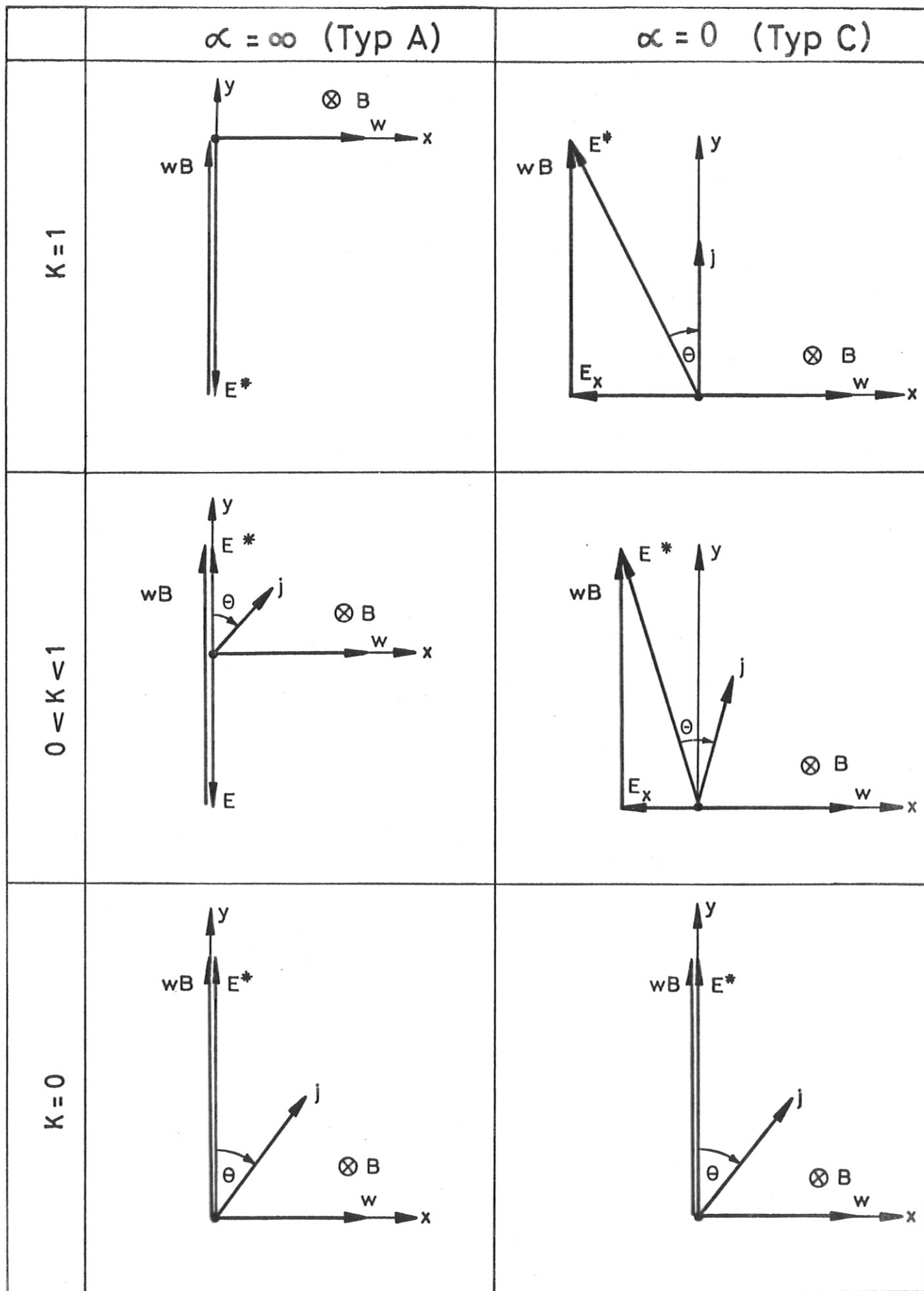


Fig. 5

K-Werte (von 0 bis 1) beschrieben, wobei dem Punkte α_1 der Wert $K = 1$ und für den Punkt β_1 der Wert $K = 0$ entspricht. Für bestimmte Werte von α und β entspringt der Vektor j in der Mitte des Koordinatensystems und endet auf der Strecke $\alpha_1\beta_1$ in dem Punkte, der K_1 entspricht.

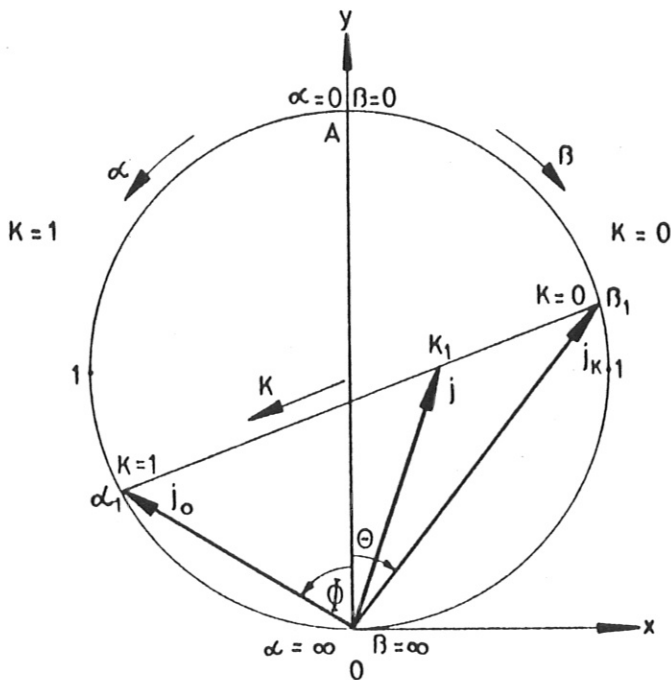


Fig. 6

Die Ortskurve für die \vec{E}^* -Vektoren bei bestimmten Werten β und α und variablem K ist die Strecke AB (Fig. 7). Die Vektoren entspringen in der Mitte des Koordinatensystems und enden auf der Strecke AB in dem Punkte, der K_1 entspricht. Die \vec{E} -Vektoren liegen auf der Strecke OC .

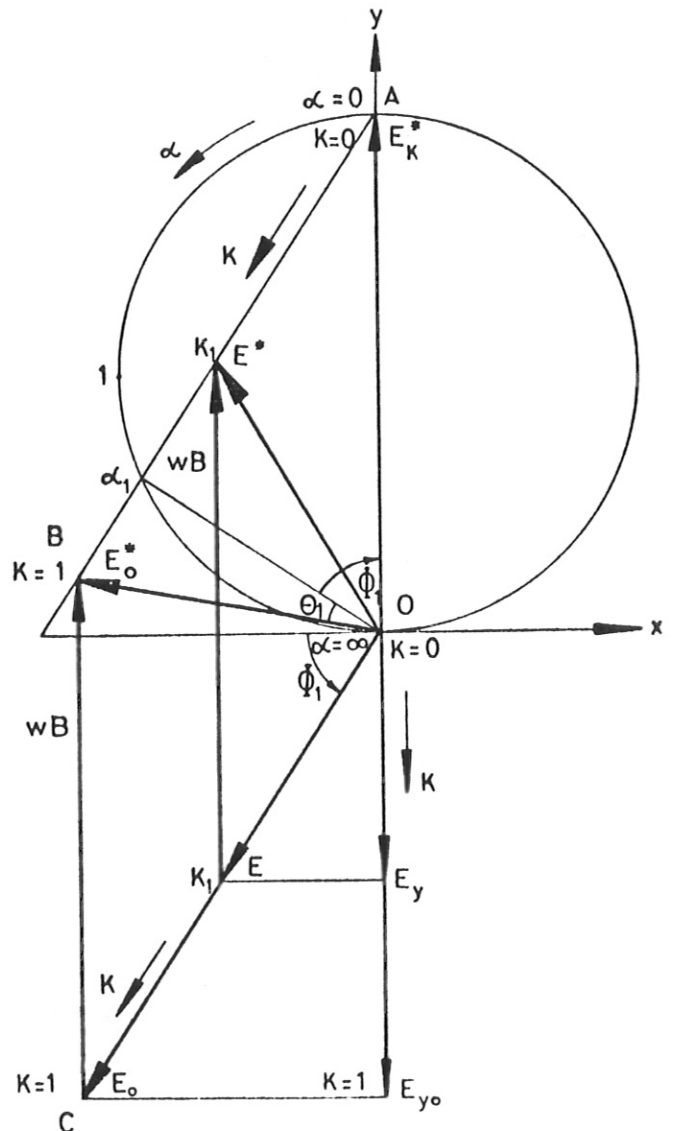


Fig. 7

Die speziellen Fälle

In der Tabelle 2 sind die elektrischen Größen für spezielle Werte α und β zusammengestellt.

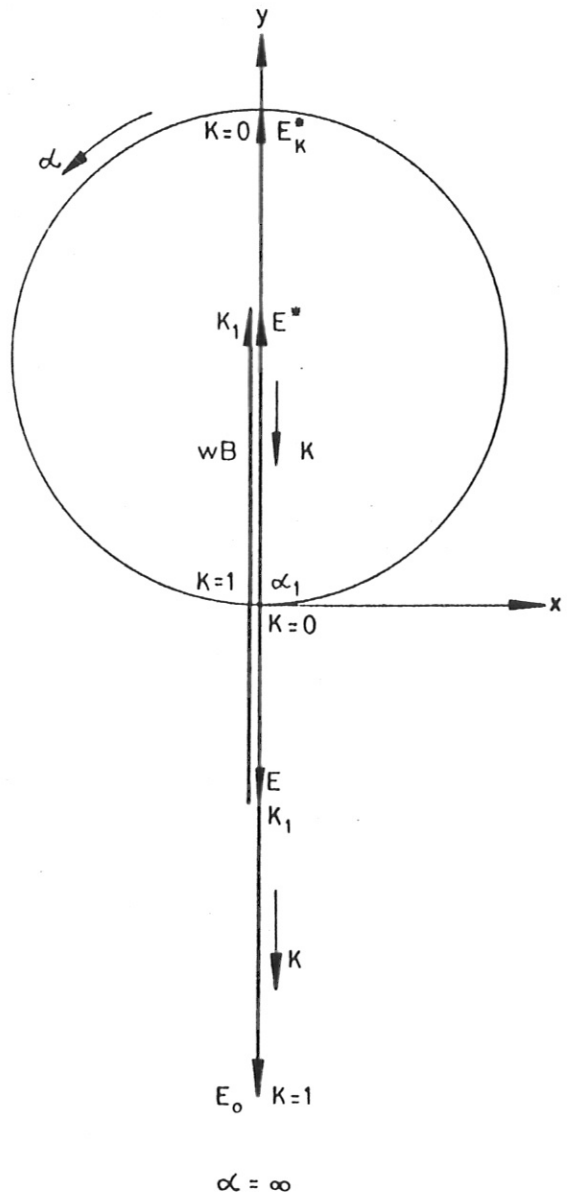
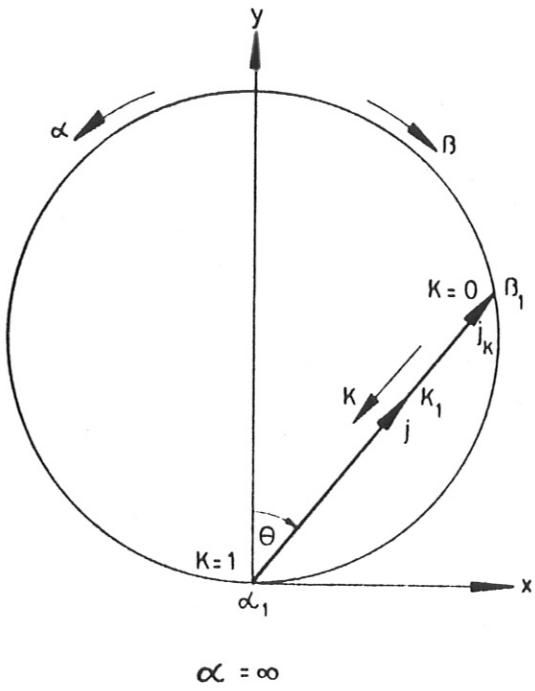


Fig. 8

A. $\alpha = \infty$ (Fig. 8) Dieser Fall entspricht formal dem Typ A-Generator. (Generator mit kontinuierlichen Elektroden)

B. $\alpha = 0$ Dieser Fall entspricht dem Typ C-Generator (Hallgenerator) (Fig. 9)

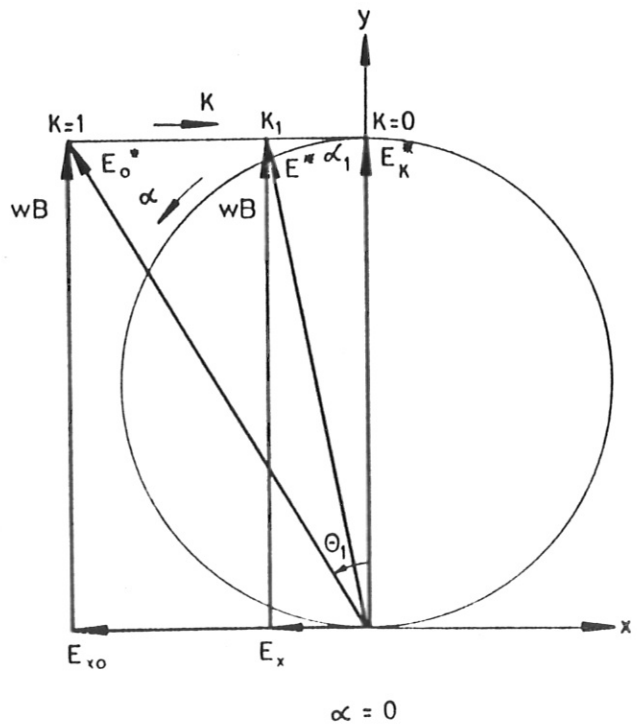
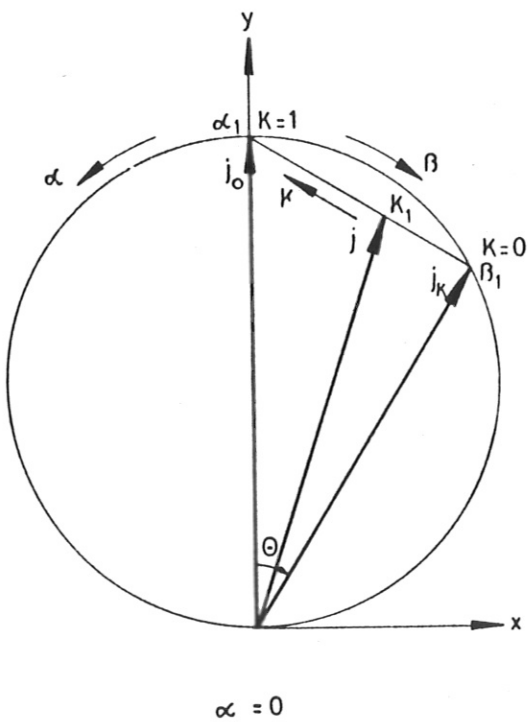


Fig. 9

Tabelle 2

	$\alpha=0$	$\alpha=\infty$	$\alpha=1/\beta$	$\alpha=\beta$
j_x^i	$\frac{\beta}{1+\beta^2} (1-K)$	$\frac{\beta}{1+\beta^2} (1-K)$	$\frac{\beta}{1+\beta^2} (1-2K)$	$\frac{\beta}{1+\beta^2} (1-2K)$
j_y^i	$\frac{1}{1+\beta^2} (1+K\beta^2)$	$\frac{1}{1+\beta^2} (1-K)$	$\frac{1}{1+\beta^2} [1+(\beta^2-1)K]$	$\frac{1}{1+\beta^2}$
E_x^i	βK	0	βK	$\frac{2\beta}{1+\beta^2} K$
E_y^i	0	K	K	$\frac{2\beta^2}{1+\beta^2} K$
E^{*i}	$\sqrt{1+\beta^2 K^2}$	1-K	$\sqrt{(1-K)^2 + \beta^2 K^2}$	$\sqrt{\frac{(1+\beta^2) - 4\beta^2 K(1-K)}{1+\beta^2}}$
E_y^{*i}	1	1-K	1-K	$1 - \frac{2\beta^2}{1+\beta^2} K$

	$\beta=0$	$\beta=0$	$\beta \rightarrow \infty$
j_x^i	0	$-\frac{\alpha}{1+\alpha^2} K$	$-\frac{\alpha}{1+\alpha^2} K$
j_y^i	$\frac{1}{1+\alpha\beta}$	$1 - \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} K$	$\frac{1}{1+\alpha^2} K$
E_x^i	$\frac{\beta}{1+\alpha\beta}$	$\frac{\alpha}{1+\alpha^2} K$	$\frac{\beta}{1+\alpha^2} K$
E_y^i	$\frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}$	$\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} K$	$\frac{\alpha\beta}{1+\alpha^2} K$
E^{*i}	$\frac{\sqrt{1+\beta^2}}{1+\alpha\beta}$	$\sqrt{1 - 2K \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} + K^2 \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}}$	$\frac{\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}} K$
E_y^{*i}	$\frac{1}{1+\alpha\beta}$	$1 - \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} K$	$-\frac{\alpha\beta}{1+\alpha^2} K$

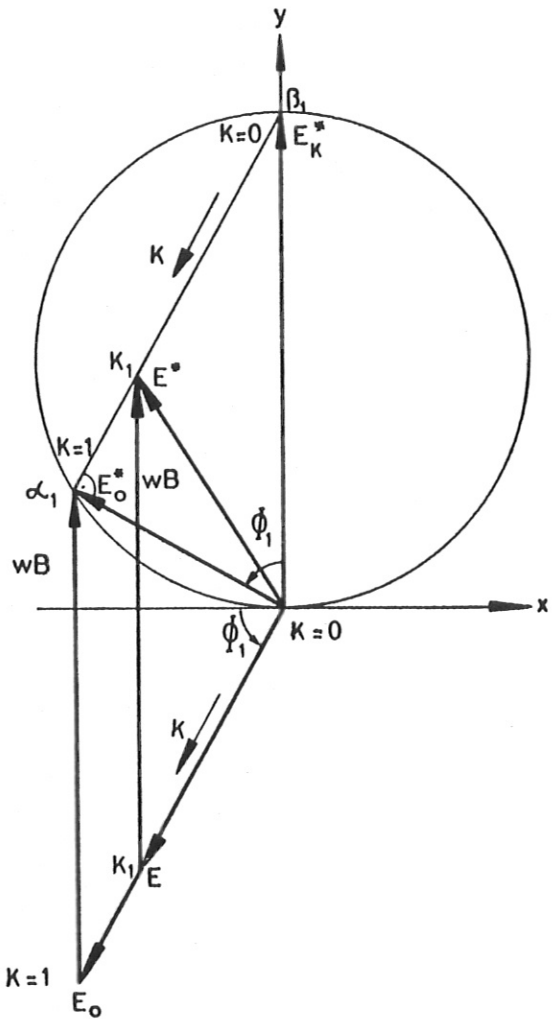
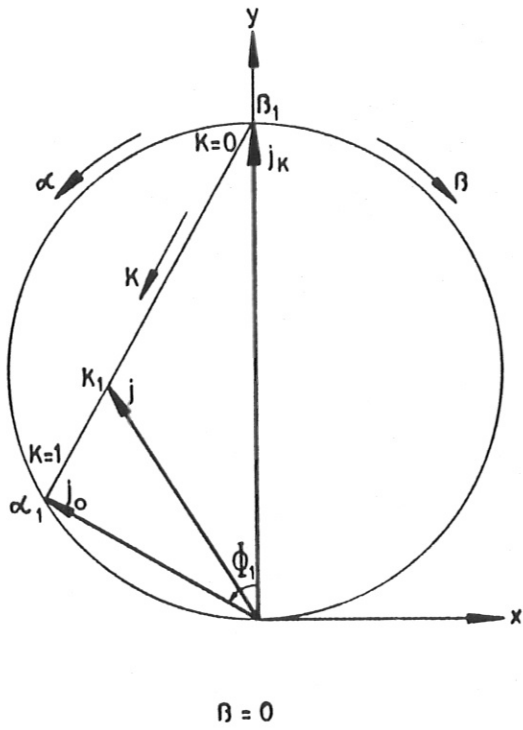


Fig. 10

C. $\beta = 0$ (Fig. 10)

D. $\alpha = \beta$ (Fig. 11)

In diesem Falle ist:

a) $j_y = \text{Konstante}$, das entspricht der konstanten Bremsleistungsdichte

b) $j_{x0} = -j_{xk}$

c) $j_x = 0$ bei $K = 0,5$

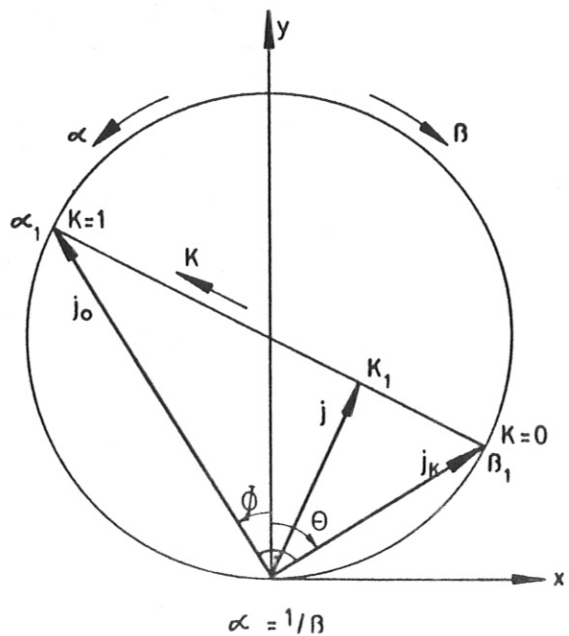
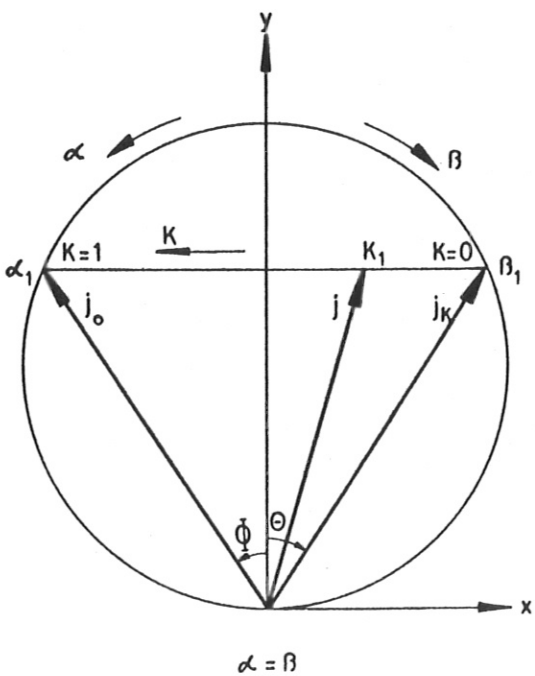


Fig. 11 u. Fig. 12

G. $E_y^* = 0$ (Fig. 14)

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{E_y - wB}{E_x} = \alpha - \frac{1 + \alpha^2}{(\alpha + \beta)K}$$

$$E_y^* = 0 \text{ wenn } \operatorname{tg} \xi = 0$$

$$\text{für } K = \frac{1 + \alpha^2}{(\alpha + \beta)\alpha}$$

$$E_{y0}^* = 0 \text{ wenn } 1 = \frac{1 + \alpha^2}{(\alpha + \beta)\alpha}$$

$$\text{dann } \alpha = 1/\beta$$

$$\text{oder } \theta + \alpha = 90^\circ$$

4.1.3. Praktische Ermittlung der elektrischen Grössen aus den Vektordiagrammen

Das in Fig. 15 gezeichnete Diagramm ermöglicht die elektrischen Grössen des Typ I-Generators bei $\alpha > 0$ ohne Hilfe der Gleichungen zu bestimmen.

Beispiel: Bestimmung der elektrischen Grössen für einen Typ I-Generator mit den Parametern:

$$\alpha_1 = 0,8; \beta_1 = 2; K_1 = 0,4; w = 1000 \text{ m/s}; B = 1 \text{ Vs/m}^2; \sigma_0 = 100^1/\Omega\text{m}$$

Die Punkte α_1 und β_1 auf dem linken und dem rechten Halbkreis bestimmt man mit Hilfe des oberen und unteren Maßstabes. Die Strecken für \bar{j} und \bar{E} , die Änderungen von K zwischen 0 und 1 entsprechen, teilt man gleichmässig und sucht den Punkt, der $K = 0,4$ entspricht.

Aus dem Diagramm kann man ablesen (vgl. mit Tabelle 1)

$$j'_x = 0,04 \quad E'_x = 0,69 \quad E^{*'} = 0,83$$

$$j'_y = 0,37 \quad E'_y = 0,55 \quad E^{*'}_y = 0,45$$

$$j' = 0,37 \quad E' = 0,89$$

Die elektrische Leistung, die Bremsleistungsdichte und die Leistung, die den Joule'schen Verlusten entspricht, drückt man in normierten

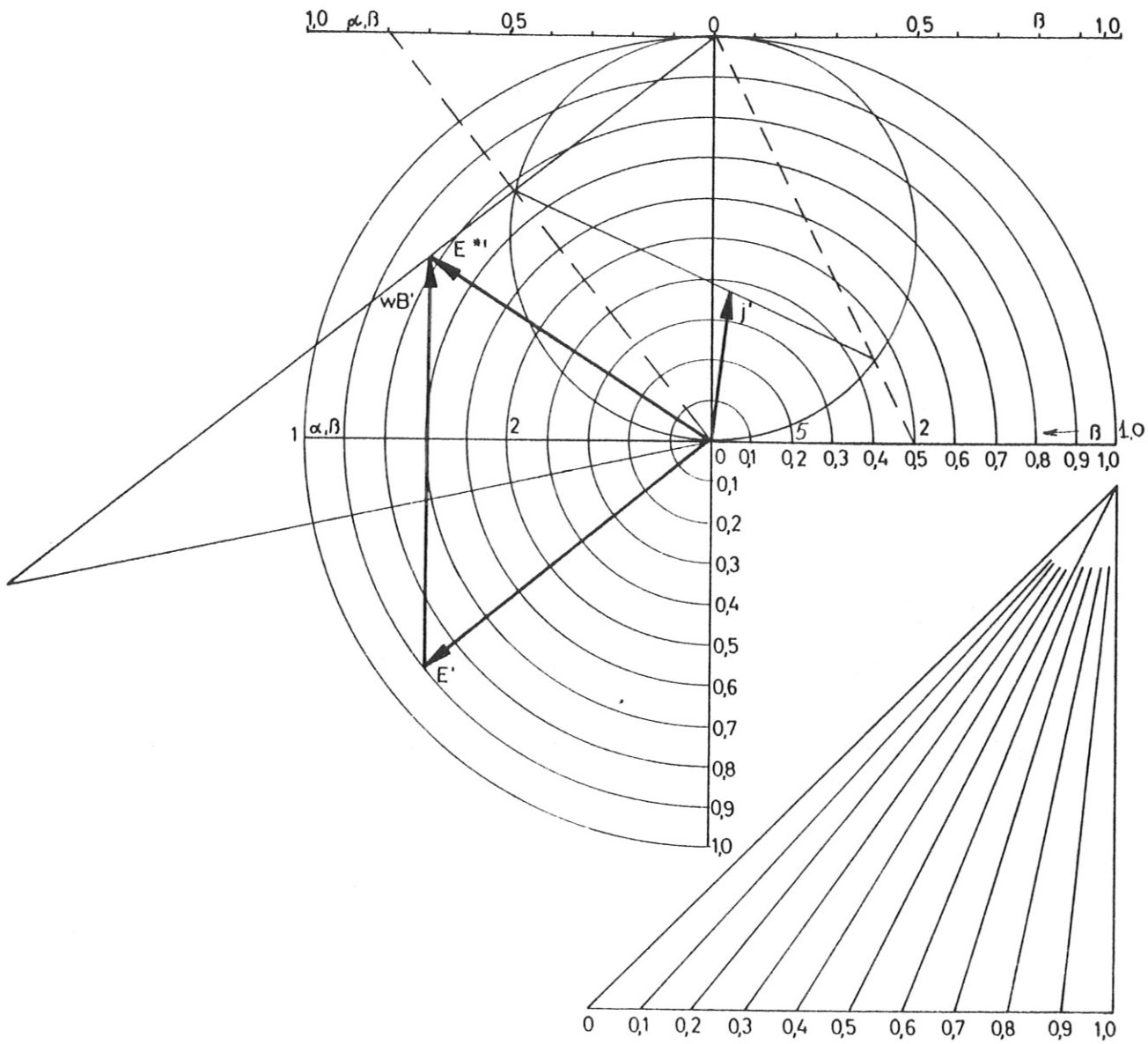


Fig. 15

Werten aus. Als Einheitsgrösse für die Leistungsdichte wurde $\epsilon_0 w^2 B^2$ angenommen.

$$P'_m = j'_y \quad ; \quad Q' = (j'_y)^2 \quad ; \quad P' = j'_y - (j'_y)^2 \quad , \quad \eta = \frac{P'}{P'_m}$$

Also

$$P'_m = 0,37 \quad ; \quad Q' = 0,137 \quad ; \quad P' = 0,233 \quad ; \quad \eta = 0,63$$

Die Einheitsgrösse für das elektrische Feld $wB = 10^3 \text{ V/m}$

Die Einheitsgrösse für die Stromdichte $\epsilon_0 wB = 10^5 \text{ A/m}^2$

Die Einheitsgrösse für die Leistungsdichte $\epsilon_0 w^2 B^2 = 10^8 \text{ W/m}^3$

Durch Multiplikation bekommt man:

$j_x = 400 \text{ A/m}^2$	$E_x = 690 \text{ V/m}$	$E^* = 830 \text{ V/m}$	$P_m = 37 \cdot 10^6 \text{ W/m}^3$
$j_y = 3700 \text{ A/m}^2$	$E_y = 550 \text{ V/m}$	$E_y^* = 450 \text{ V/m}$	$P = 23,3 \cdot 10^6 \text{ W/m}^3$
$j = 3700 \text{ A/m}^2$	$E = 890 \text{ V/m}$	$\eta = 0,63$	$Q = 13,7 \cdot 10^6 \text{ W/m}^3$

In Fig. 16 und 17 sind ähnliche Diagramme für die Spezialfälle $\alpha = 0$ (Typ C) und $\alpha = \infty$ (Typ A) gezeichnet.

4.2. Typ I-Generator bei $\alpha < 0$

4.2.1. Vektordiagramme

In Fig. 18 wurden beispielsweise die Vektordiagramme für zwei spezielle Fälle gezeigt.

4.2.2. Die Ortskurven der Vektoren der elektrischen Grössen

Die Ortskurve der \vec{j} -Vektorspitzen in Leerlauf ($K=1$) und Kurzschluss ($K=0$) bei variablen α und β ist ein Halbkreis (Fig. 19 -rechter Halbkreis).

Der Rechte Halbkreis in Fig. 19 ist mit Werten von α und β beschrieben. Die Grössen j_x und j_y können nur positive Werte annehmen (bzw. 0).

Die Ortskurve der \vec{E}^* -Vektoren ist die Strecke AC (Fig. 20) und für die \vec{E} -Vektoren die Strecke OD.

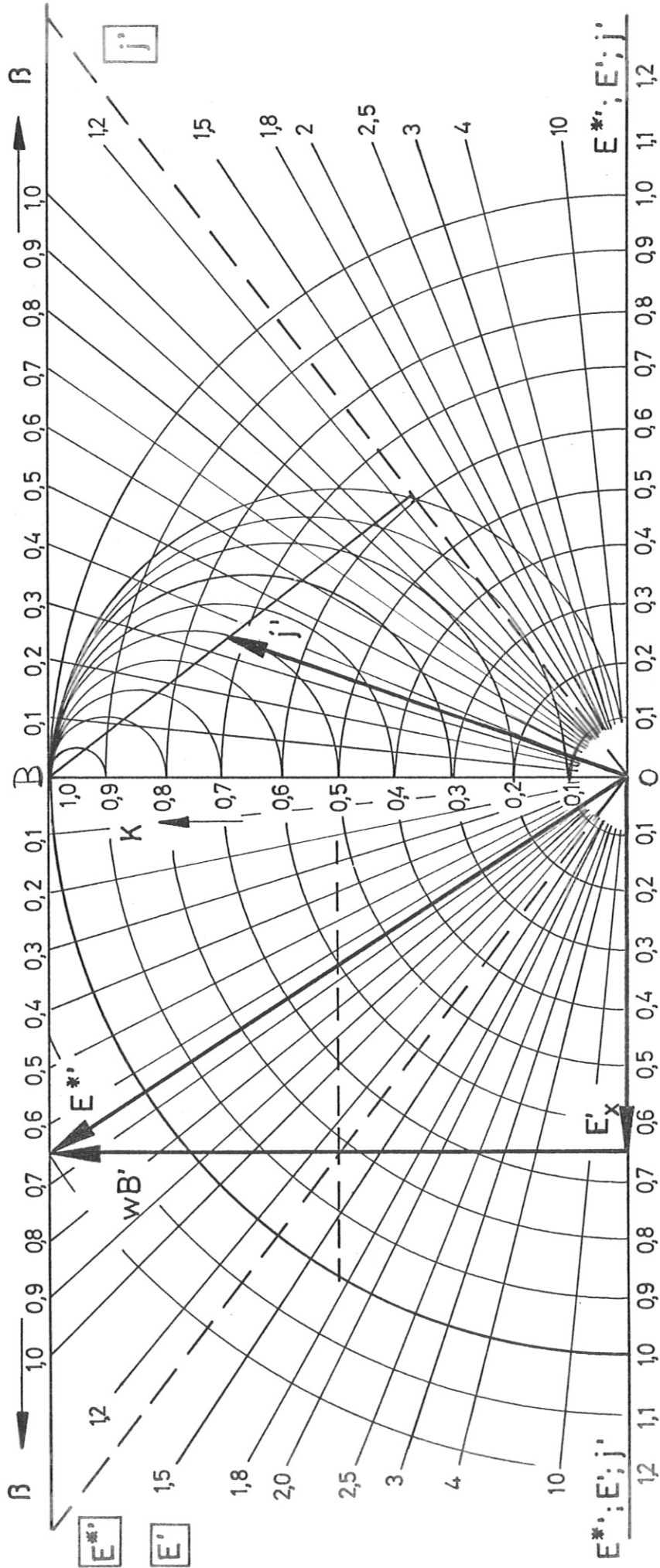


Abb. 11

Fig. 16

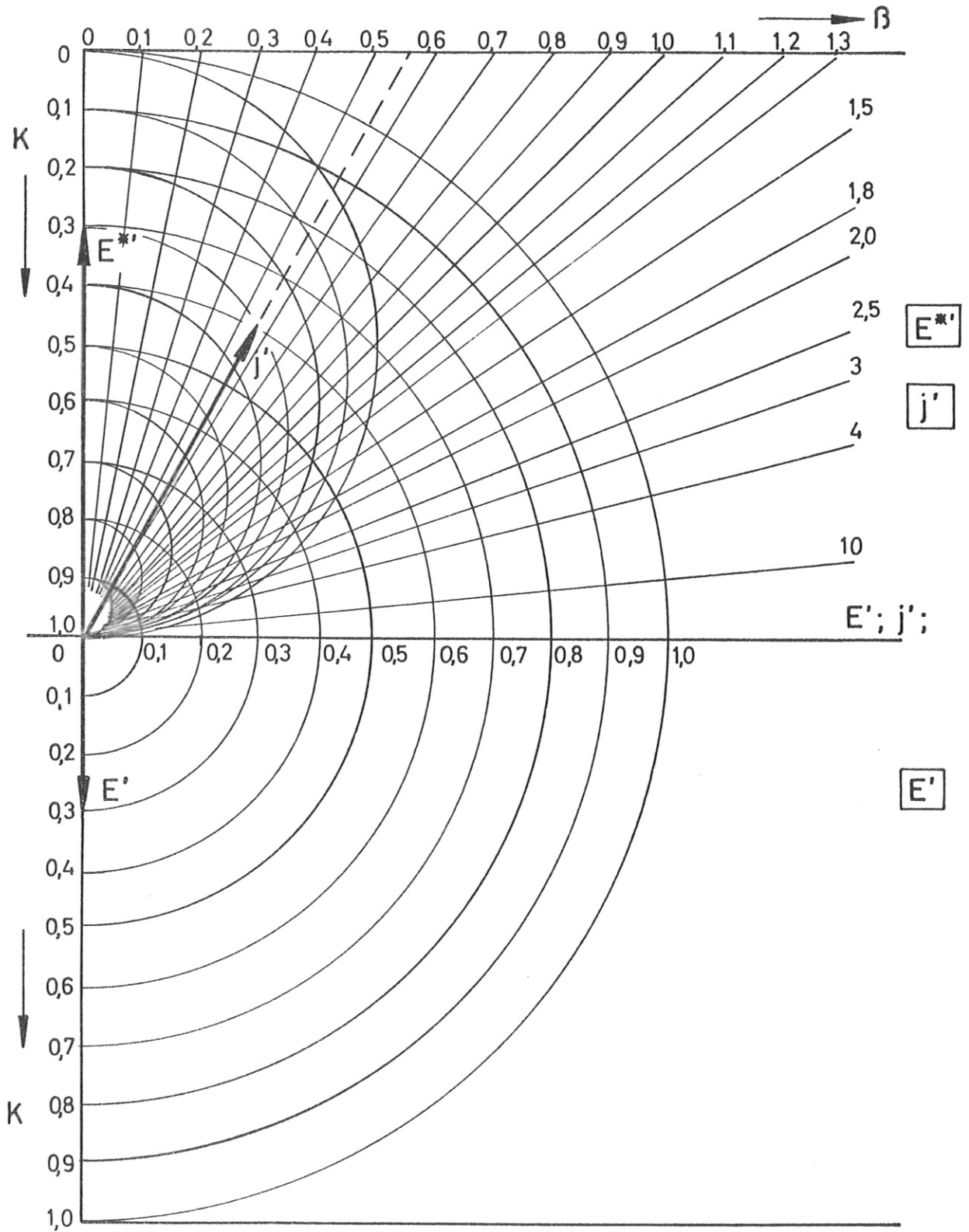


Abb. 9

Fig. 17

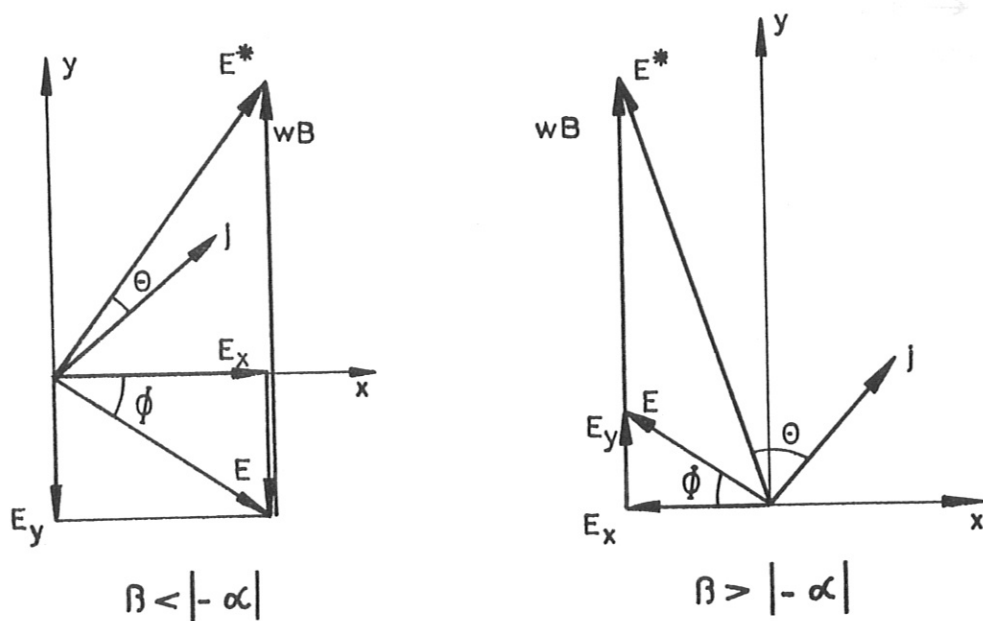


Fig. 18

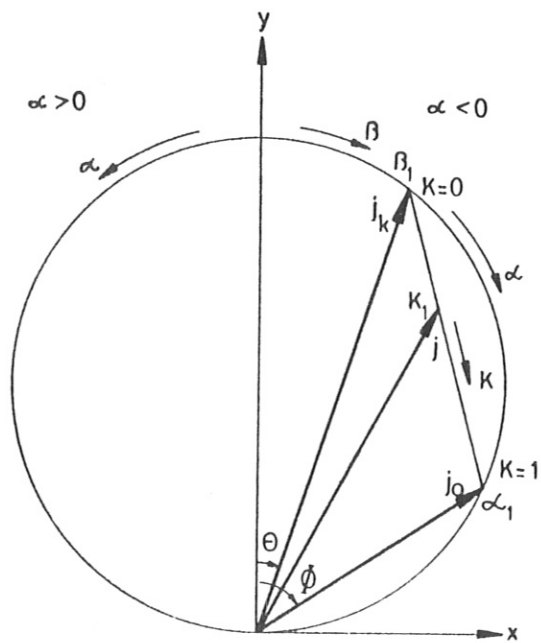


Fig. 19

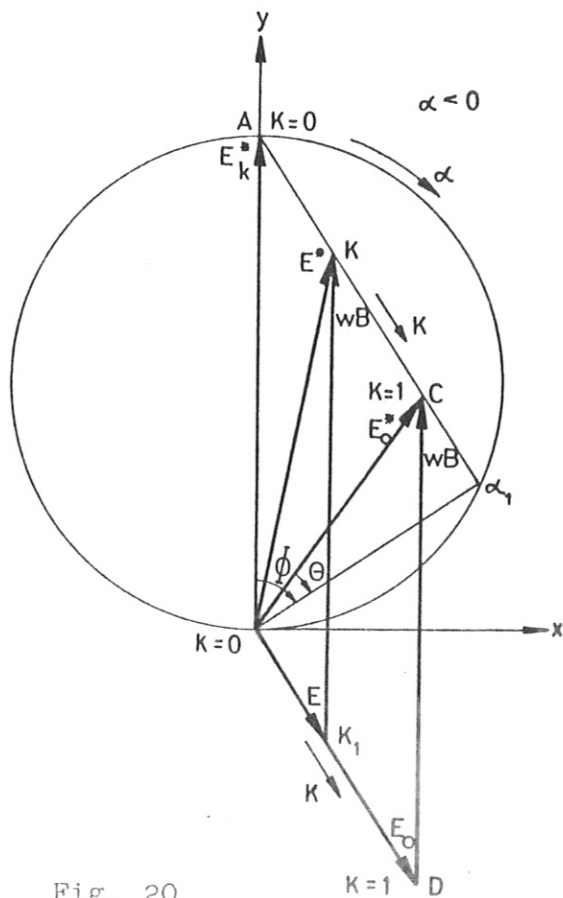


Fig. 20

Die speziellen Fälle

In der Tabelle 3 wurden die elektrischen Grössen für spezielle Werte von α zusammengestellt. Für die Fälle $\beta = 0$ und $\beta \rightarrow \infty$ sind die Ausdrücke gleich denen der Tabelle 2, wenn man statt "+ α " den Wert "- α " einsetzt.

A. $\beta = 0$ (Fig. 21)

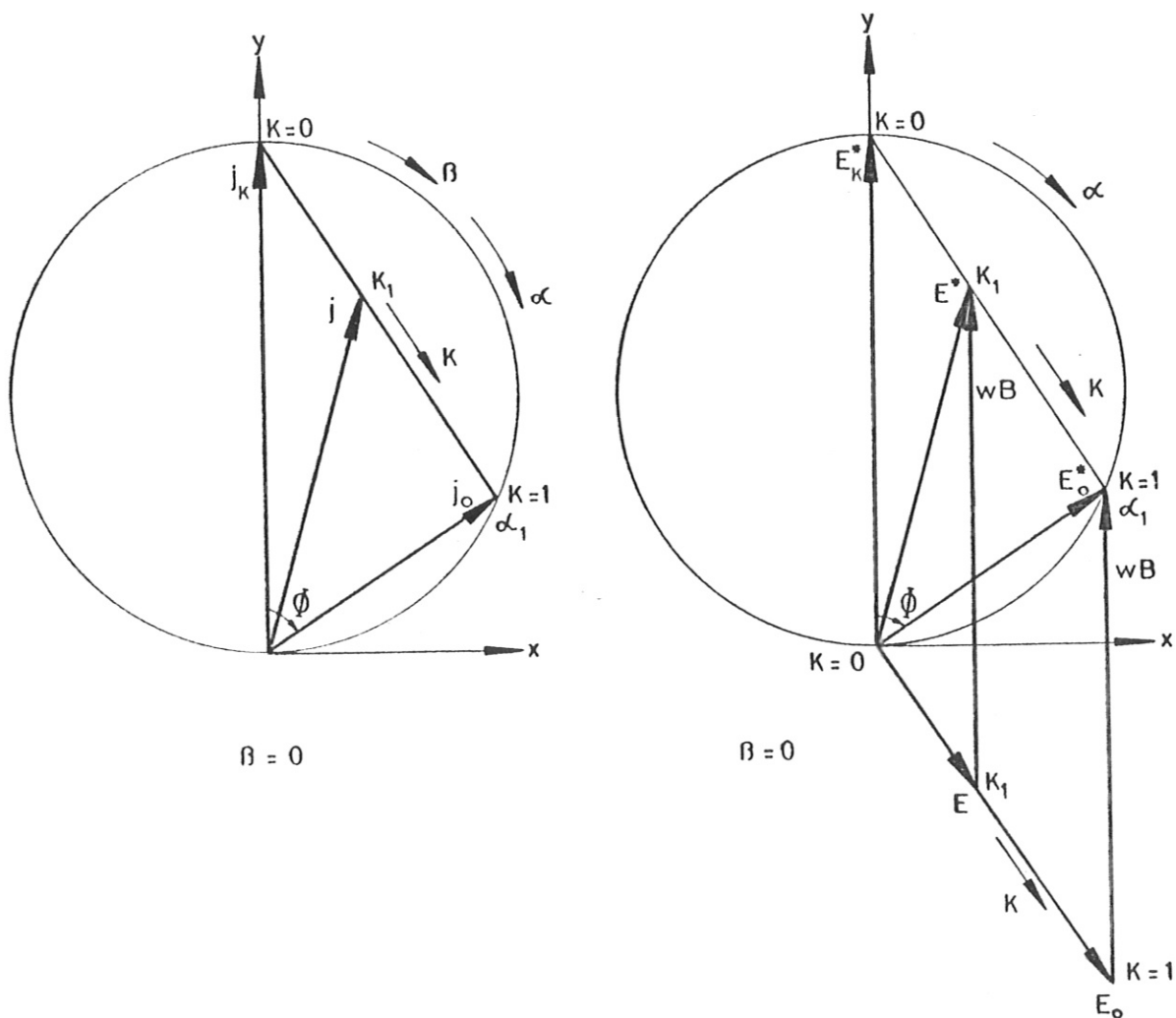


Fig. 21

B. $0 < \beta < |-\alpha|$ (s. Fig. 19 und 20)

C. $\beta = |-\alpha|$ (Fig. 22)

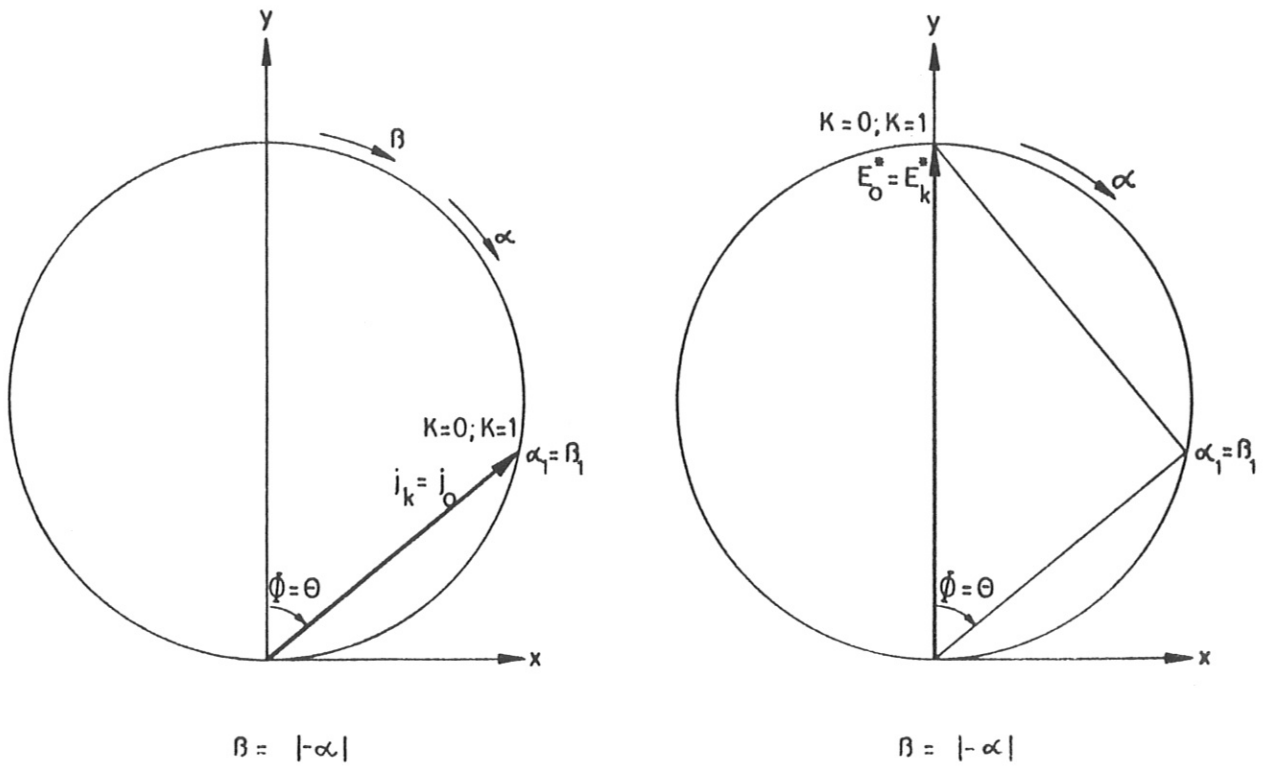


Fig. 22

In diesem Falle ist $E = 0$; j ist unabhängig von K .

E. $|\alpha| = 1/\beta$ (Fig. 24). In diesem Falle $j_x(K) = \text{Konstante}$

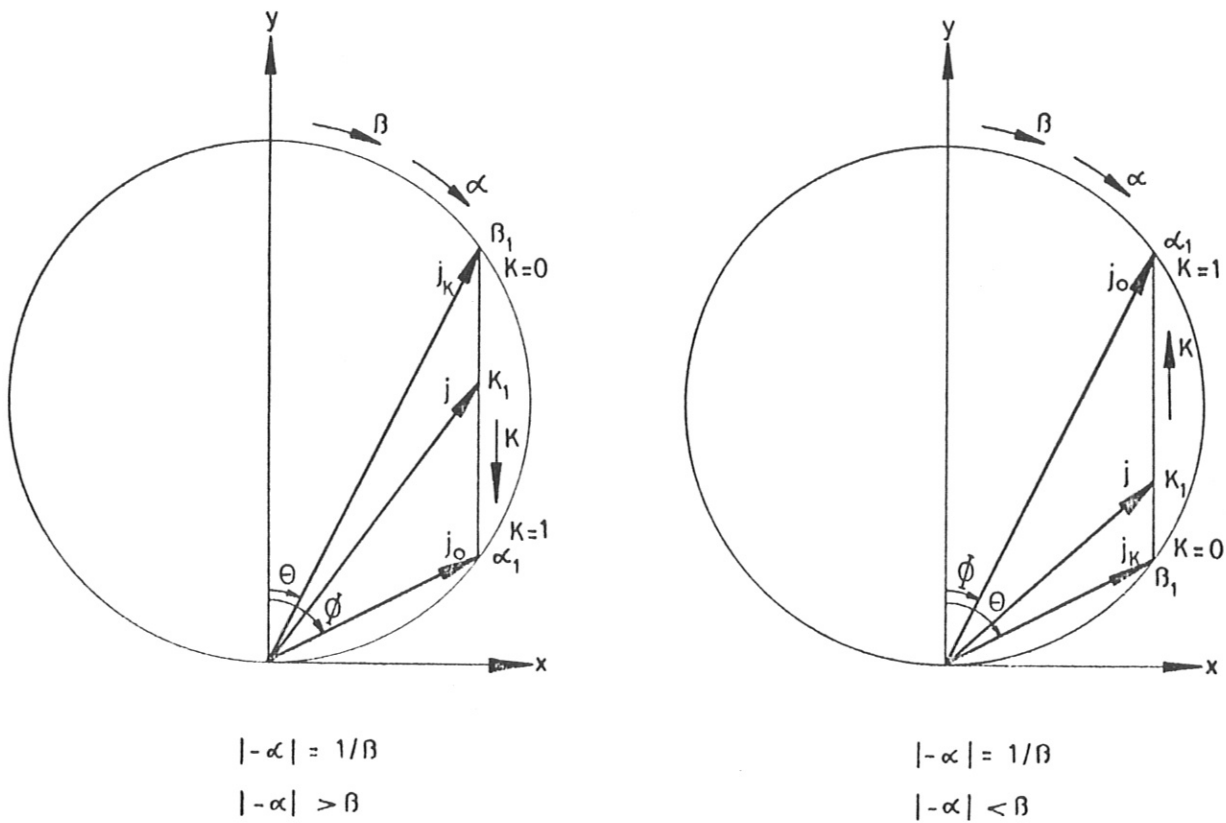


Fig. 24

5. Typ II-Generator

In der Tabelle 4 wurden die elektrischen Grössen für den Typ II-Generator, in normierten Werten ausgedrückt, zusammengestellt. Die normierten, elektrischen Grössen sind lediglich Funktionen von γ, β und K . Die Ausdrücke in der Tabelle 4 gelten sowohl für $\gamma > 0$ wie auch für $\gamma < 0$.

5.1. Vektordiagramme

In Fig. 25 werden beispielsweise die Vektordiagramme für verschiedene Parameter gezeigt.

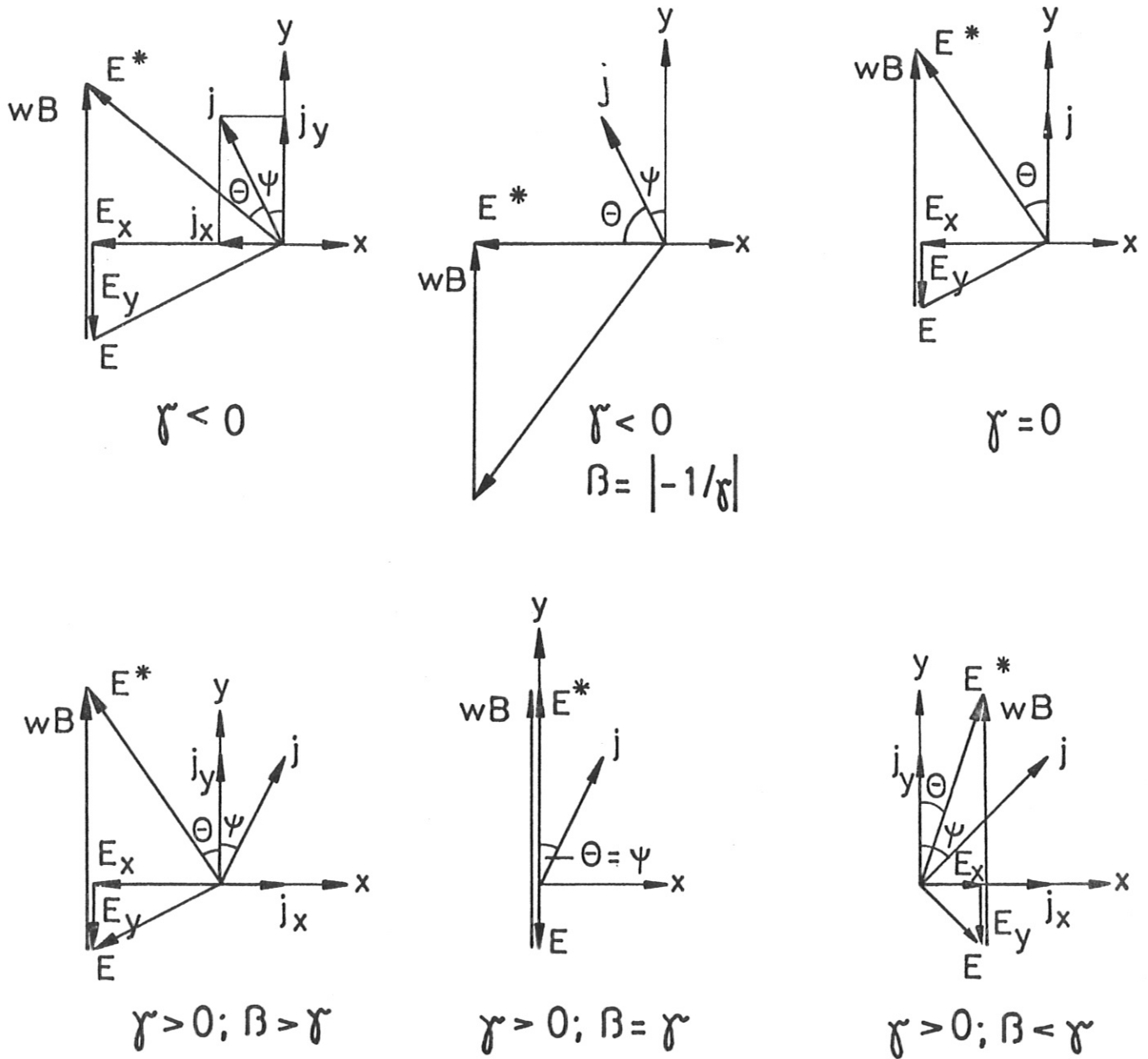


Fig. 25

In der Tabelle 5 sind die elektrischen Grössen für spezielle Werte von γ zusammengestellt.

Fig. 25 zeigt, dass der Fall $\gamma = 0$ genau dem Typ B-Generator entspricht (vgl. Tabelle 5)

Tabelle 4

	$0 < K < 1$	$K = 1$	$K = 0$
j'_x	$\frac{\gamma}{1+\gamma^2} (1-K)$	0	$\frac{\gamma}{1+\gamma^2}$
j'_y	$\frac{1}{1+\gamma^2} (1-K)$	0	$\frac{1}{1+\gamma^2}$
E'_x	$\frac{\beta - \gamma}{1+\gamma^2} (1-K)$	0	$\frac{\beta - \gamma}{1+\gamma^2}$
E'_y	$1 - (1-K) \frac{1+\gamma\beta}{1+\gamma^2}$	1	$1 - \frac{1+\gamma\beta}{1+\gamma^2}$
E^{*x}	$\sqrt{\frac{1+\beta^2}{1+\gamma^2}} (1-K)$	0	$\sqrt{\frac{1+\beta^2}{1+\gamma^2}}$
E^{*y}	$\frac{1+\gamma\beta}{1+\gamma^2} (1-K)$	0	$\frac{1+\gamma\beta}{1+\gamma^2}$

Tabelle 5

	$\gamma = 0$	$\gamma = \beta$	$\frac{1}{\gamma} = \beta$
j'_x	0	$\frac{\beta}{1+\beta^2} (1-K)$	$-\frac{\beta}{1+\beta^2} (1-K)$
j'_y	$1 - K$	$\frac{1}{1+\beta^2} (1-K)$	$\frac{\beta^2}{1+\beta^2} (1-K)$
E'_x	$\beta (1-K)$	0	$\beta (1-K)$
E'_y	K	K	1
E^{*x}	$\sqrt{1+\beta^2} (1-K)$	$1 - K$	$\beta (1-K)$
E^{*y}	$(1-K)$	$1 - K$	0

5.2. Die Ortskurven der Vektoren der elektrischen Größen

Die Ortskurve der Vektorspitzen von \vec{j} im Kurzschluss $K = 0$ (bei Leerlauf $j = 0$) bei variablem γ (\vec{j} ist von β unabhängig) ist der rechte Halbkreis in Fig. 26. Die Ortskurve bei variablem K und konstantem $\gamma = \gamma_1$ ist die Strecke $0 \gamma_1$.

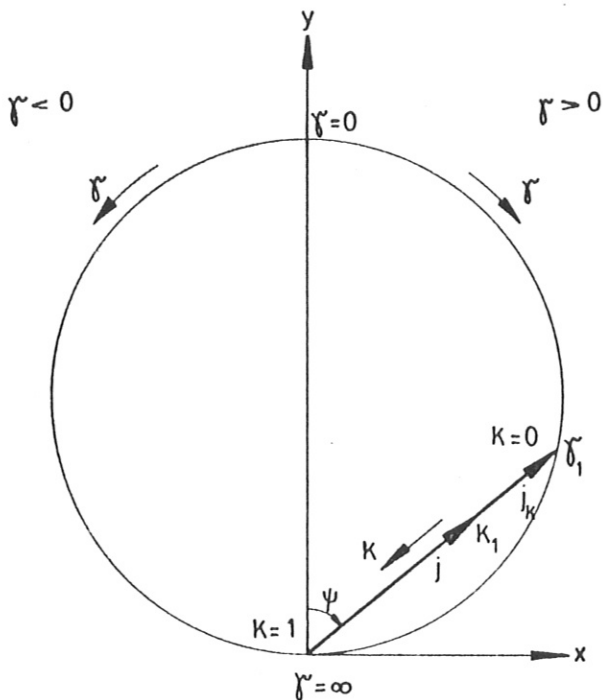


Fig. 26

Die Ortskurve der \vec{E}^* - Vektoren bei Kurzschluss ist die Linie AD, und der \vec{E} -Vektoren die Linie BO (Fig. 27). Die Ortskurve bei variablem K und konstanten γ und β ist für die \vec{E}^* - Vektoren die Strecke OA und für die \vec{E} -Vektoren die Strecke CB.

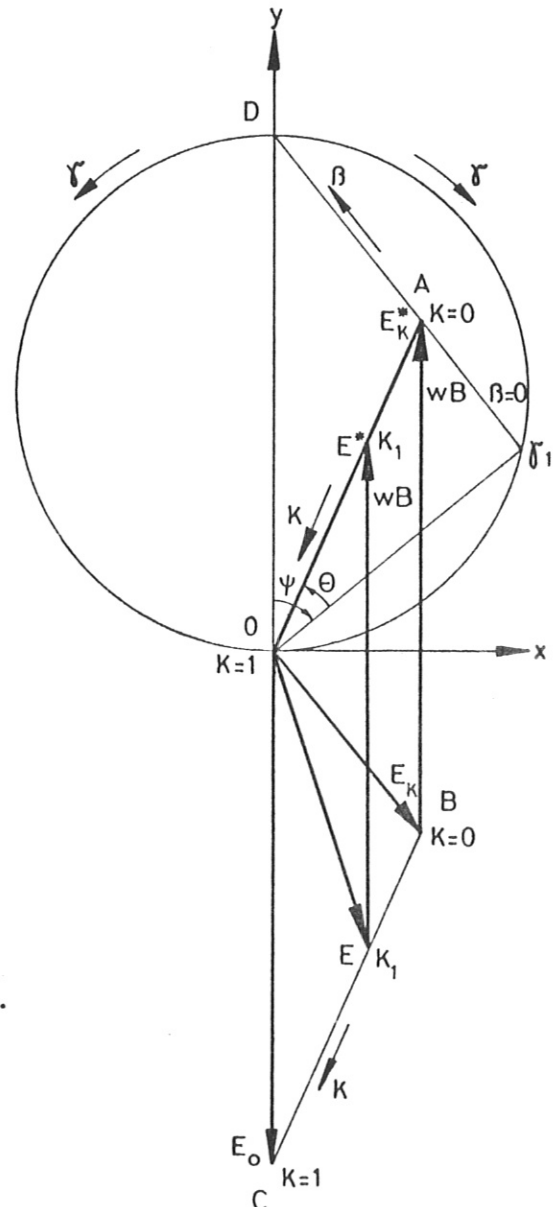


Fig. 27

Die Figuren 26 und 27 zeigen die Ortskurven für den Fall $\gamma > 0$. Die Ortskurve für den Fall $\gamma < 0$ zeigt Fig. 28.

Bezeichnungen

\bar{B}	magnetische Induktion, Vs/m ²
\bar{E}	elektrisches Feld im ruhenden System, V/m
\bar{E}^*	elektrisches Feld im mitbewegten System, V/m
K	Leistungsfaktor
Q	Joule'sche Wärme pro Zeit- und Volumeneinheit, W/m ³
P	Leistungsdichte, W/m ³
P _m	Bremsleistungsdichte, W/m ³
\bar{j}	Stromdichte, A/m ²
\bar{w}	Gasgeschwindigkeit, m/s
α	Parameter definiert in Fig. 1
β	Hallparameter
δ	Parameter definiert in Fig. 1
σ_0	elektrische Plasmaleitfähigkeit bei B = 0 ; 1/Ω · m
φ	Winkel definiert in Fig. 1
\emptyset	Winkel definiert in Fig. 1
θ	Winkel zwischen den Vektoren \bar{E}^* und \bar{j}
γ	Wirkungsgrad des Generators

Literatur

- [1] Celinski, Z.
Elektrische Theorie der Gleichstrom-MHD Generatoren mit stationärer, linearer Gasströmung
(IPP 3/20, April 1964, Institut für Plasmaphysik, Garching b. München)
- [2] Celinski, Z.
Analyse der Wirkungsweise von MHD Generatoren der Typen A, B und C mit Hilfe von Vektordiagrammen
(IPP 3/19 März 1964, Institut für Plasmaphysik, Garching b. München)

[3]

Harris, L.P. Cobine, I.D.

The significance of the Halleffect in three MHD generator configurations

(ASME Paper 60-WA-329, 1960)