Analyse der Wirkungsweise von MHD-Generatoren der Typen A,B und C mit Hilfe von Vektordiagrammen

Z. Celinski

IPP 3/19 März 1964

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Analyse der Wirkungsweise von
MHD-Generatoren der Typen
A,B und C mit Hilfe von
Vektordiagrammen

Z. Celinski

IPP 3/19 März 1964

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

Analyse der Wirkungsweise von MHD-Generatoren der Typen A,B und C mit Hilfe von Vektordiagrammen.

1. Einführung

Als MHD-Generatoren mit stationärer, linearer Gasströmung sind bisher drei verschiedene Typen mit unterschiedlicher Arbeitsweise vorgeschlagen worden (Abb. 1). Der Typ A arbeitet mit einem kontinuierlichen Elektrodenpaar und einem einzigen Verbraucher. Bei Typ B sind die Elektroden in viele Segmente unterteilt. Jedes Elektrodenpaar besitzt einen eigenen Verbraucher. Bei Typ C (Hallgenerator) schliesslich sind ebenfalls viele Elektroden aber nur ein Verbraucher vorhanden. Die Analyse der Arbeitsweise und der Beziehungen zwischen den elektrischen Grössen in den einzelnen Generatoren soll mit Hilfe von Diagrammen durchgeführt werden, die ein einfaches und anschauliches Hilfsmittel sind.

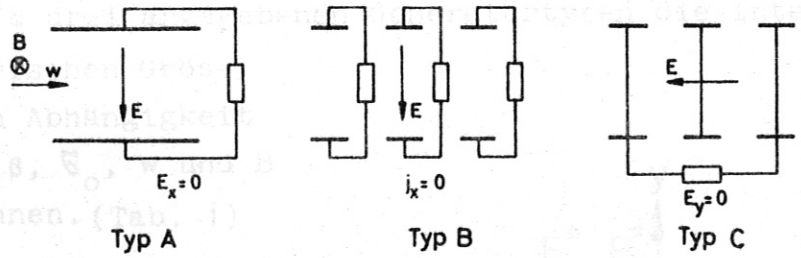

Abb. 1

2. Voraussetzungen

Für alle Betrachtungen soll vorausgesetzt werden, dass die Gasgeschwindigkeit nur eine x-Komponente habe und das Magnetfeld homogen in z-Richtung ist. Alle vorkommenden Grössen sollen ferner im Generator selbst homogen sein. Randeffekte werden nicht berücksichtigt. Der Ion-slip-Effekt

ist vernachlässigt. Dies bedeutet die Annahme, dass

(1) $\omega_i \tau_i \cdot \omega_e \tau_e \ll 1$, $\omega_{i,e}$ = Gyrationsfrequenz von Ionen und Elektronen

$\frac{1}{\tau_{i,e}}$ = Stossfrequenz von Ionen bezw. Elektronen

Das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz wird in der Form geschrieben:

(2) $\bar{j} = \sigma_o (\bar{E} + \bar{w} \times \bar{B}) - \frac{\beta}{B} (\bar{j} \times \bar{B})$, wobei $\beta = \omega_e \tau_e$ ist.

Für den Ausdruck $\bar{E} + \bar{w} \times \bar{B}$ kann abkürzend geschrieben werden:

(3) $\bar{E}^* = \bar{E} + \bar{w} \times \bar{B}$ $\bar{E}^*$ = elektrische Feldstärke im mitbewegten System.

Es ist üblich, die Grösse K einzuführen:

(4) $K = \frac{|\bar{E}|}{|\bar{E}_o|}$, wobei $\bar{E}$ und $\bar{E}_o$ die Feldstärken im belasteten bezw. offenen Zustand des Generators sind.

Der Leistungsfaktor K gehorcht der Beziehung $0 \leqslant K \leqslant 1$, K = 1 gilt bei offenem Generator, während K = 0 im Kurzschlussfall des Generators vorhanden ist.

Mit dem angenommenen Koordinatensystem (Abb. 2) kann man nun für die drei angegebenen Generatortypen die interessierenden elektrischen Grössen in Abhängigkeit von K, β, σ_o, w und B berechnen. (Tab. 1)

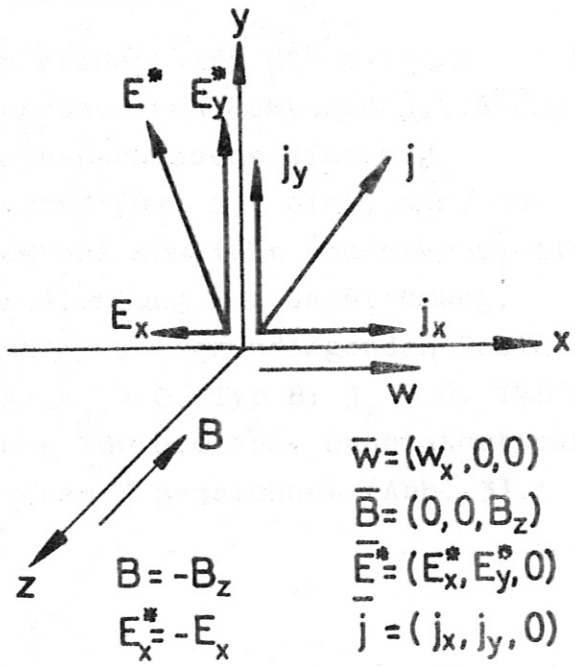

Tabelle 1 : Elektrische Grössen der drei Generatortypen nach [1]

	Typ A	Typ B	Typ C
E_x	0	$\beta(1-K)wB$	βKwB
E_y	KwB	KwB	0
j_x	$\frac{\beta}{1+\beta^2}(1-K)\sigma_0 wB$	0	$\frac{\beta}{1+\beta^2}(1-K)\sigma_0 wB$
j_y	$\frac{1}{1+\beta^2}(1-K)\sigma_0 wB$	$(1-K)\sigma_0 wB$	$\frac{1}{1+\beta^2}(1+K\beta^2)\sigma_0 wB$

Dabei ist angenommen, dass bei Typ A $E_x = 0$; beim Typ B $j_x = 0$ und bei Typ C $E_y = 0$ sind.

3. Vektordiagramme der MHD-Generatoren

In Anwesenheit des magnetischen Feldes wird die elektrische Leitfähigkeit des Gases eine Tensorgrösse und Vektoren $\bar{j}, \bar{E}, \bar{E}^*$ und $\bar{w} \times \bar{B}$ haben im allgemeinen eine verschiedene Richtung.
Das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz (Gl. 2) zeigt, dass der Vektor $\bar{j}$ von der Richtung des $\bar{E}^*$-Vektors abweicht und zwar um einen Winkel $\Theta = \mathrm{arctg}(\omega_e \tau_e)$ in der Richtung der Gasströmung.
Anlehnend an diese Beziehung und an die grundlegenden Bedingungen für die Generatoren - Typ A: $E_x = 0$, Typ B: $j_x = 0$, Typ C: $E_y = 0$ werden die Vektordiagramme für die drei Generatortypen bei verschiedenen Leistungsfaktoren K gezeichnet (Abb. 3).

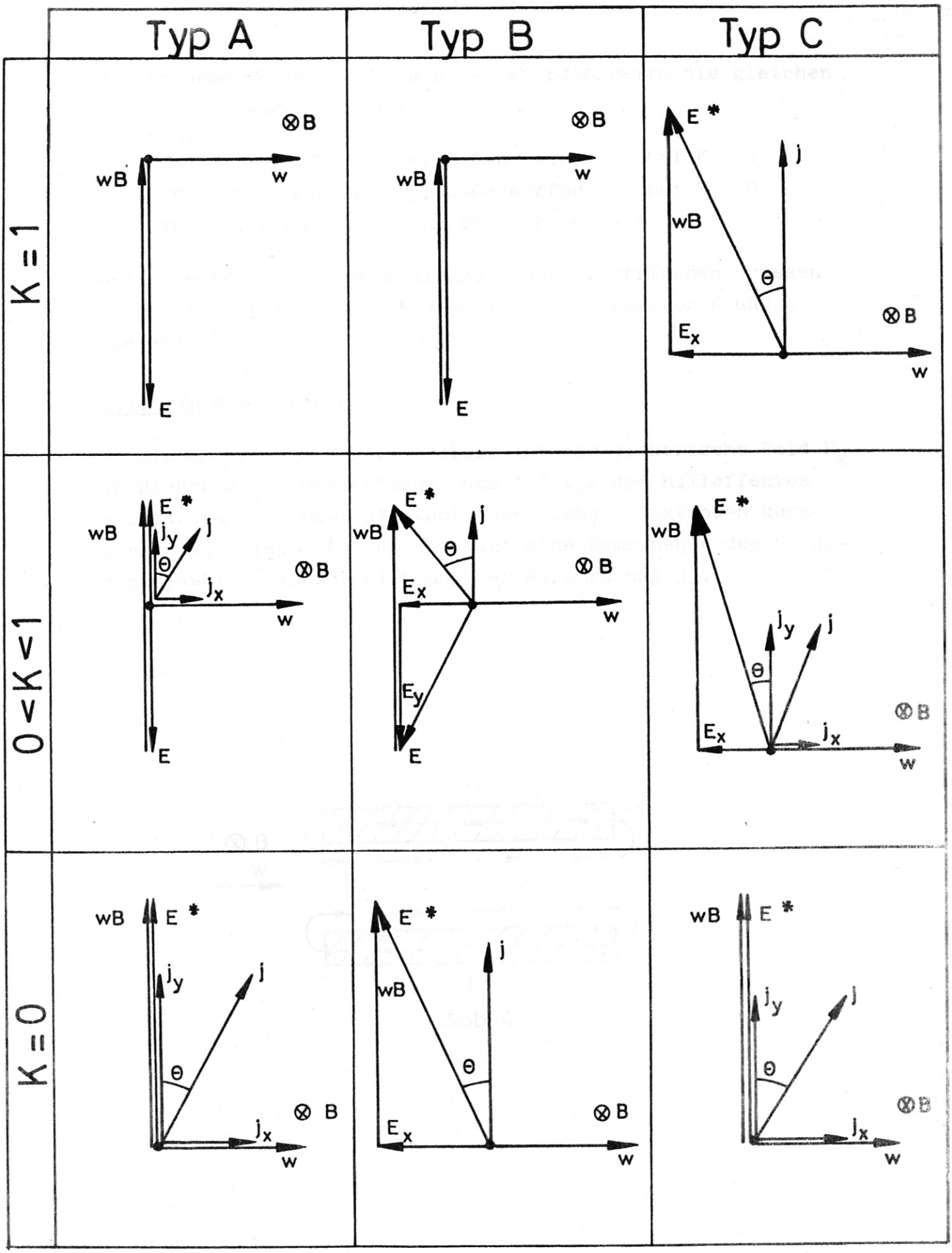

Abb. 3

Es ist bemerkenswert, dass die Vektordiagramme die gleichen sind in folgenden Fällen:

- für den Typ A- und Typ B-Generator bei $K = 1$
- für den Typ A- und Typ C-Generator bei $K = 0$
- für Typ B bei $K = 0$ und Typ C bei $K = 1$

Weiter wurde die Veränderlichkeit der elektrischen Grössen in Abhängigkeit von den Änderungen der Parameter K und β analysiert.

3.1. Typ A-Generator

In diesem Typ des MHD-Generators ist das elektrische Feld E_x in Richtung der Gasströmung, das infolge des Halleffektes entstanden ist, über die kontinuierlichen Elektroden kurzgeschlossen (Abb. 4). Es entsteht eine Komponente des Stromdichtevektors in der Richtung der Gasströmung j_x.

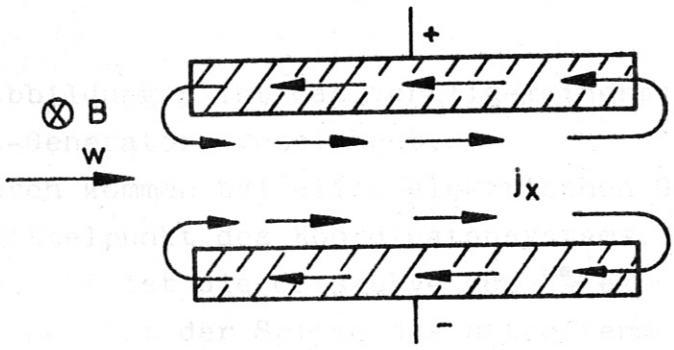

Abb. 4

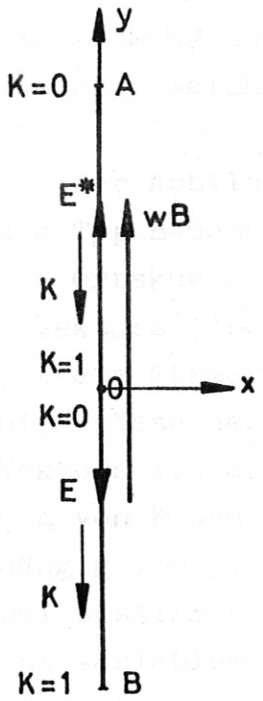

Abb. 5a

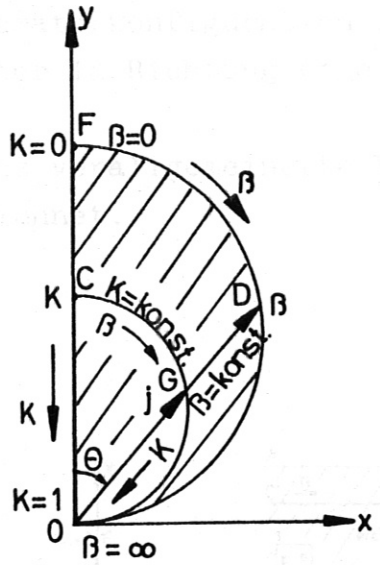

Abb. 5b

Abb. 5

In der Abbildung 5 ist das verallgemeinerte Vektordiagramm des Typ A-Generators gezeichnet.
Die Vektoren kommen bei allen elektrischen Grössen (ausser $\bar{w}\bar{B}$) aus dem Mittelpunkt des Koordinatensystems.
Die Strecke OA ist die Ortskurve des $\bar{E}^*$-Vektors (sie gibt den geometrischen Ort der Spitze des betreffenden Vektors an) und analog ist die Strecke OB die Ortskurve des $\bar{E}$-Vektors (Abb. 5a).
Die Strecken OA und OB sind gleich lang und jede ist gleich dem Betrag des $\bar{w}\bar{B}$-Vektors.
Die Ortskurve des $\bar{j}$-Vektors für β-Konstante und variables K ist die Strecke OD (Abb. 5b), für K = Konst. und variables β ist der Halbkreis OGC. Der Vektor der Stromdichte $\bar{j}$ kann beliebige Werte innerhalb des schraffierten Flächeninhaltes des Halbkreises ODF annehmen.

3.2. Typ B-Generator

In dem Typ B-Generator wird die senkrechte Stromrichtung zur Gasströmung durch die Generatorkonfiguration erzwungen. Der $\bar{E}^*$-Vektor weicht vom $\bar{j}$-Vektor in Richtung gegen den Gasstrom ab.

In der Abbildung 6 ist das verallgemeinerte Vektordiagramm des Typ B-Generators gezeichnet.

Die Ortskurve des $\bar{j}$-Vektors (Abb.6a) ist die Strecke OF. Die Grösse des $\bar{j}$-Vektors ist abhängig von K und unabhängig von β.

Bei bestimmtem K und variablem β ist die Ortskurve des $\bar{E}^*$-Vektors die Halbgerade CC' und des $\bar{E}$-Vektors die Halbgerade DD' (Abb.6b)

Bei bestimmtem β und variablem K ist die Ortskurve des $\bar{E}^*$-Vektors die Strecke OG und des $\bar{E}$-Vektors die Strecke BH (Abb. 6c).

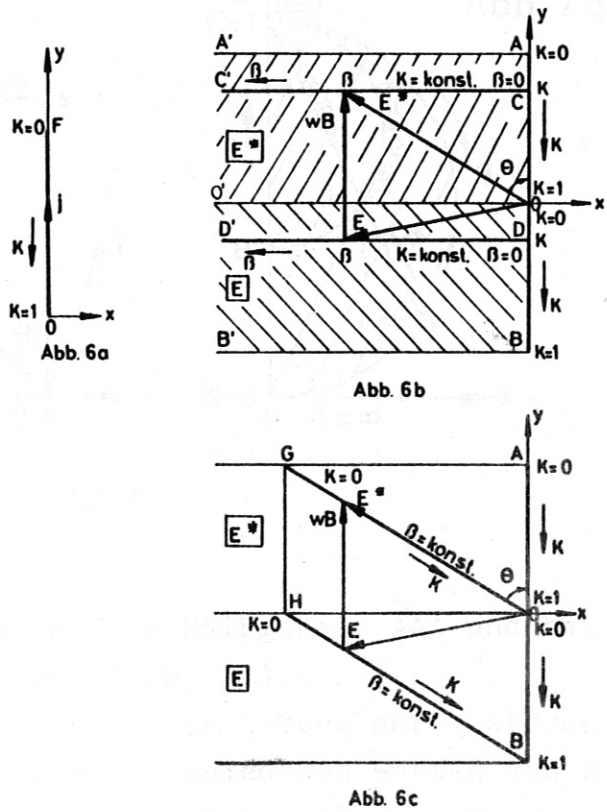

Abb. 6

Bei der Änderung der Parameter K und β nimmt der $\bar{E}^*$-Vektor beliebige Werte innerhalb der Fläche A'AOO' an, und der $\bar{E}$-Vektor analog, innerhalb der Fläche B'BOO' (Abb. 6b).

Es ist bemerkenswert, dass die Komponente der $\bar{E}^*$ und $\bar{E}$-Vektoren in die Richtung der y Achse von dem Parameter β unabhängig sind (Abb. 6b)

3.3. Typ C-Generator

In dem Typ C-Generator wird infolge der elektrischen Verbindung zwischen den gegenüberliegenden Elektroden die y-Komponente des elektrischen Feldes $\bar{E}$, kurzgeschlossen.
In der Abbildung 7 ist das verallgemeinerte Vektordiagramm des Typ C-Generators gezeichnet.

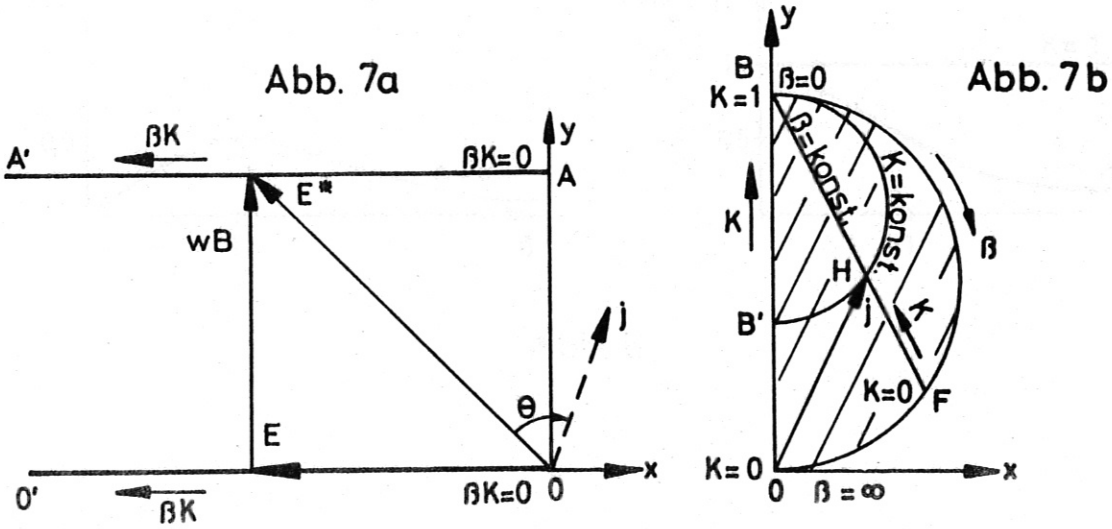

Abb. 7

Die Ortskurve des $\bar{E}^*$-Vektors ist die Halbgerade AA' und bei dem $\bar{E}$-Vektor die Halbgerade OO' (Abb. 7a).
Bemerkenswert ist die Abhängigkeit der Grösse der Vektoren $\bar{E}^*$ und $\bar{E}$ von dem Produkt Kβ. Bei verschiedenen Werten von β und K kann man dasselbe Dreieck $\bar{E}$-$\bar{w}\bar{B}$-$\bar{E}$ bekommen, nur muss die Bedingung βK=Konstante erfüllt sein.
Die Ortskurve des $\bar{J}$-Vektors bei konstantem K und variablem β ist der Halbkreis BHB'(Abb. 7b). Bei K = 0 vergrössert er sich zum Halbkreis BFO, bei K = 1 verkleinert er sich zum Punkt B.
Die Ortskurven des $\bar{J}$-Vektors bei konstantem β und variablem K sind die Strecken, die von dem Punkt B ausgehen und die Fläche des Halbkreises BFO durchlaufen. Der Vektor der Stromdichte $\bar{J}$ kann beliebige Werte innerhalb des schraffierten Flächeninhaltes des Halbkreises BFO annehmen.

Es ist bemerkenswert, dass bei $\beta = 0$ die Arbeitspunkte für $K = 1$ und $K = 0$ in Punkt B zusammenkommen.
Für die Veranschaulichung der Beziehungen zwischen j, j_y und den Parametern K, β wurden in Abb. 8 die Grösse j_x und j_y in der Funktion von β bei $K = 0$ gezeichnet.

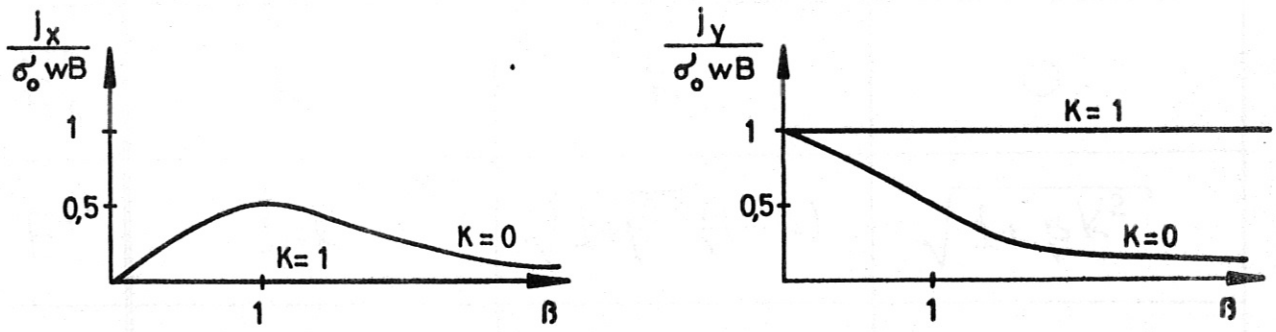

Abb. 8

4. Praktische Ermittlung der elektrischen Grössen aus dem Vektordiagramm

In Abb. 9, 10 und 11 sind die Diagramme zur praktischen Bestimmung der Vektoren der elektrischen Grössen $\bar{J}, \bar{J}_x, \bar{J}_y$, $\bar{E}, \bar{E}_x, \bar{E}_y, \bar{E}^*, \bar{E}^*_y$ konstruiert. Die Vektoren der Stromdichte und der elektrischen Feldstärke sind in relativen Grössen eingetragen. Als Stromdichteeinheit wurde σ_o wB und als elektrische Feldstärkeeinheit wB angenommen. Die relativen Grössen der $\bar{j}$- und $\bar{E}$-Vektoren sind nach der Tabelle 1 berechnet und in der Tabelle 2 zusammengestellt.

Tabelle 2: Die elektrischen Grössen in relativen Einheiten

	Typ A	Typ B	Typ C
E'_x	0	$\beta(1-K)$	βK
E'_y	K	K	0
$E^{*\prime}$	$1-K$	$\sqrt{1+\beta^2}\,(1-K)$	$\sqrt{1+\beta K^2}$
$E^{*\prime}_y$	$1-K$	$1-K$	1
j'_x	$\frac{\beta}{1+\beta^2}(1-K)$	0	$\frac{\beta}{1+\beta^2}(1-K)$
j'_y	$\frac{1}{1+\beta^2}(1-K)$	$1-K$	$\frac{1}{1+\beta^2}(1+K\beta^2)$

Die Benutzungsweise der Diagramme werden weiter mit Hilfe der praktischen Beispiele gezeigt.

4.1. Typ A-Generator (Abb. 9)

Beispiel: Bestimmung der Stromdichte und der elektrischen Felder bei $\beta = 0{,}56$ und $K = 0{,}3$.

Man bestimmt die Grössen von $E^{*\prime}$ und j' im oberen und von E' im unteren Teil des Diagrammes.
Verbindet man den Mittelpunkt des Diagrammes mit dem Punkte $K = 0{,}3$ auf der oberen, vertikalen Halbachse, so bekommt man den $E^{*\prime}$-Vektor. Analog bekommt man auf der unteren, vertikalen Halbachse den E'-Vektor. Verbindet man den Mittelpunkt des Diagrammes mit dem Punkte $\beta = 0{,}56$ auf der oberen, horizontalen

Halbachse, so bestimmt man die Richtung des $\bar{j}$-Vektors. Der Schnittpunkt dieser Linie mit dem Halbkreis, der über den $\bar{E}^{*\prime}$-Vektor gezogen ist, bestimmt die Spitze des $\bar{j}$- Vektors. Mit Hilfe der Halbkreise, die aus dem Mittelpunktdes Diagrammes gezogen sind, bestimmt man die Beträge der Vektoren $\bar{E}^{*\prime}$, $\bar{E}'$, $\bar{j}'$ und $\bar{j}'_y$ durch Ablesen auf der horizontalen Halbachse in der Mitte des Diagrammes. Den Betrag des $\bar{j}'_x$-Vektors liest man direkt auf der Halbachse ab.
Für die Werte $\beta = 0{,}56$ und $K = 0{,}3$ liest man von dem Diagramm ab:

$E^{*\prime} = E_y' = 0{,}7$; $E' = E'_y = 0{,}3$; $j'_y = 0{,}53$; $j'_x = 0{,}3$.

4.2. Typ B-Generator (Abb. 10)

Beispiel: Bestimmung der Stromdichte und der elektrischen Felder bei $\beta = 1{,}25$ und $K = 0{,}45$.

Man bestimmt die Grössen von $E^{*\prime}$ und j' auf dem oberen und von E' auf dem unteren Teil des Diagrammes.
Verbindet man den Mittelpunkt des Diagrammes mit dem Punkte $K = 0{,}45$ auf der oberen, vertikalen Halbachse, so bekommt man den $\bar{j}$-Vektor. Verbindet man den Mittelpunkt des Diagrammes mit dem Punkte $\beta = 1{,}25$ auf der oberen, horizontalen Halbachse, so erhält man die Richtung des $E^{*\prime}$-Vektors. Der Schnittpunkt dieser Linie mit der Horizontalen, die $K = 0{,}45$ entspricht, bestimmt die Spitze des $E^{*\prime}$-Vektors. Der Schnittpunkt der Vertikale, die über die Spitze des $E^{*\prime}$-Vektors gezogen ist, mit der Horizontalen in dem unteren Teil des Diagrammes, die $K = 0{,}45$ entspricht, bestimmt die Spitze des E'-Vektors. Auf der unteren, horizontalen Halbachse kann man den Winkel $\varphi = \mathrm{arctg}\,\alpha$ zwischen den Richtungen der Vektoren $\bar{j}$ und $\bar{E}$ ablesen.
Für die Werte $\beta = 1{,}25$ und $K = 0{,}45$ liest man aus dem Diagramm ab:

$E^{*\prime} = 0{,}88$; $E_y' = 0{,}55$; $E_x' = E'_x = 0{,}69$; $E' = 0{,}83$; $E'_y = 0{,}45$;
$j' = j'_y = 0{,}55$

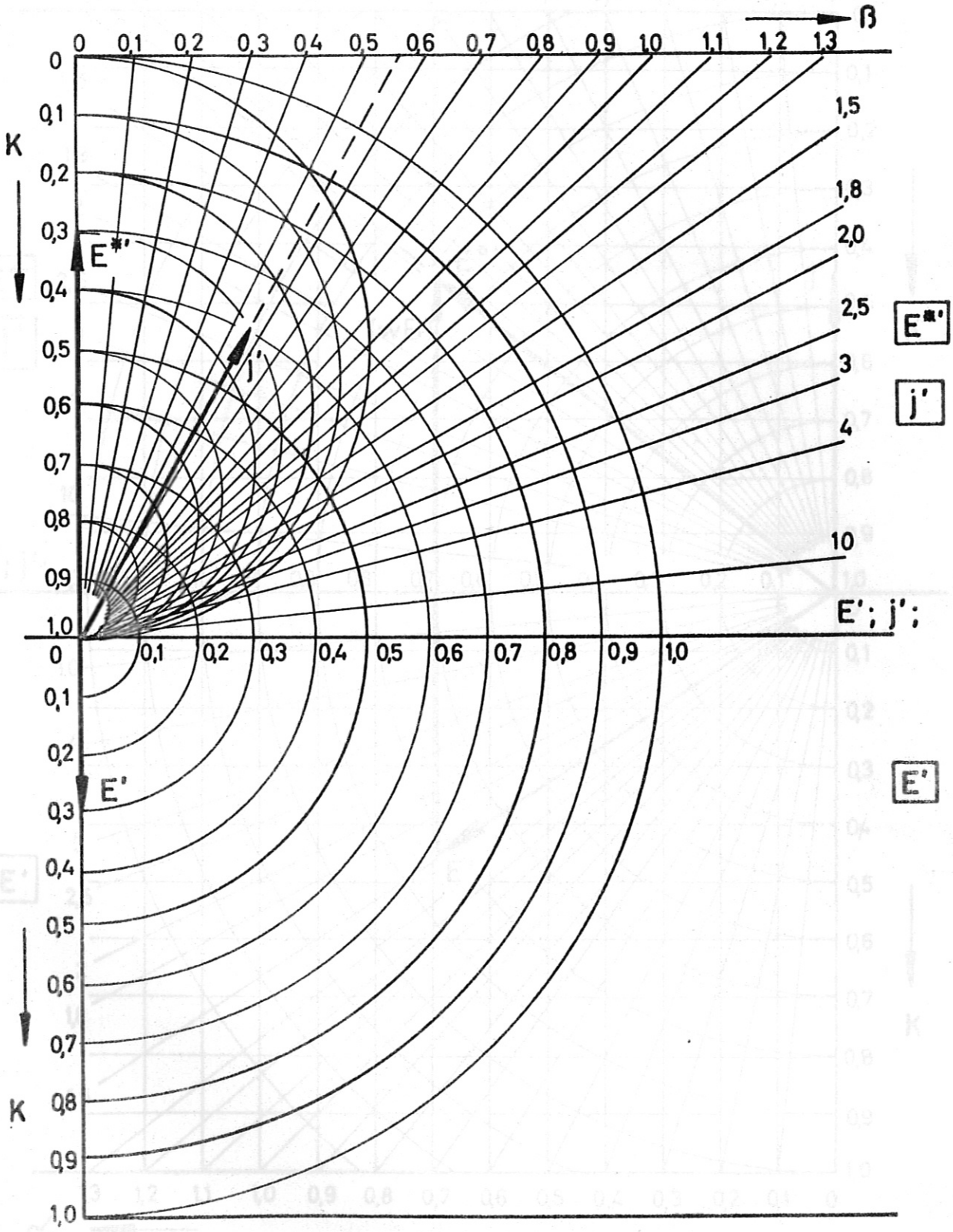
β
0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0 1,1 1,2 1,3
1,5
1,8
2,0
2,5
3
4
10
K
0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0
E*'
j'
E'; j';
E'
E*'
j'
E'
0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0
K
0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0

Abb. 9

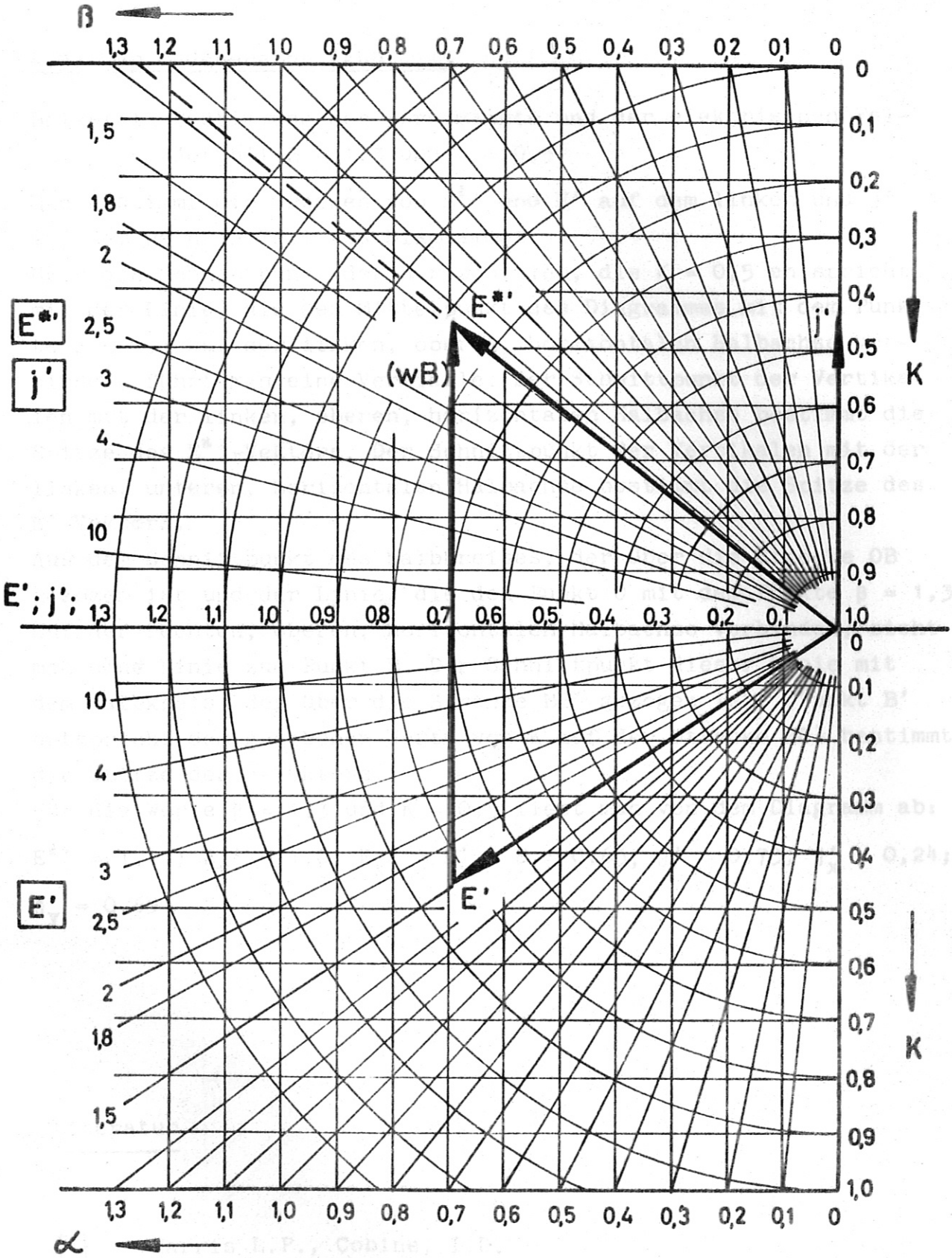
β
1,3 1,2 1,1 1,0 0,9 0,8 0,7 0,6 0,5 0,4 0,3 0,2 0,1 0
0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0
1,5 1,8 2 2,5 3 4 10
E*'
j'
E*'
(wB)
j'
K
E'; j';
E'
E'
K
α

Abb. 10

4.3. Typ C-Generator (Abb. 11)

Beispiel: Bestimmung der Stromdichte und der elektrischen Felder bei $\beta = 1{,}3$ und $K = 0{,}5$

Man bestimmt die Grössen von $E^{*\prime}$ und E' auf dem linken und j' auf dem rechten Teil des Diagrammes.
Über den Schnittpunkt der Horizontalen, die $K = 0{,}5$ entspricht mit der Linie, die den Mittelpunkt des Diagrammes mit dem Punkte $\beta = 1{,}3$ auf der linken, oberen, horizontalen Halbachse verbindet, führt man eine Vertikale. Der Schnittpunkt der Vertikalen mit der linken, oberen, horizontalen Halbachse bestimmt die Spitze des $E^{*\prime}$-Vektors. Der Schnittpunkt der Vertikalen mit der linken, unteren, horizontalen Halbachse bestimmt die Spitze des E'-Vektors.
Aus dem Schnittpunkt des Halbkreises, der über die Strecke OB gezogen ist und der Linie, die den Punkt O mit dem Punkte $\beta = 1{,}3$ auf der rechten, oberen, horizontalen Halbachse verbindet, zieht man eine Linie zum Punkt B. Der Schnittpunkt dieser Linie mit dem Halbkreis, der über die Strecke BB' gezogen ist, (Punkt B' entspricht dem gegebenen Werte von K auf der Strecke BO) bestimmt die Spitze des $\bar{j}$-Vektors.
Für die Werte $\beta = 1{,}3$ und $K = 0{,}5$ liest man von dem Diagramm ab:

$E^{*\prime} = 1{,}19$; $E_y' = 1{,}0$; $E_x' = E_x' = E = 0{,}65$; $j' = 0{,}73$; $j_x' = 0{,}24$; $j_y' = 0{,}69$

Literatur

[1] Harris L.P., Cobine, I.D.
The significence of the Hall effect in three MHD generator configurations-ASME Paper 60-WA-329, 1960

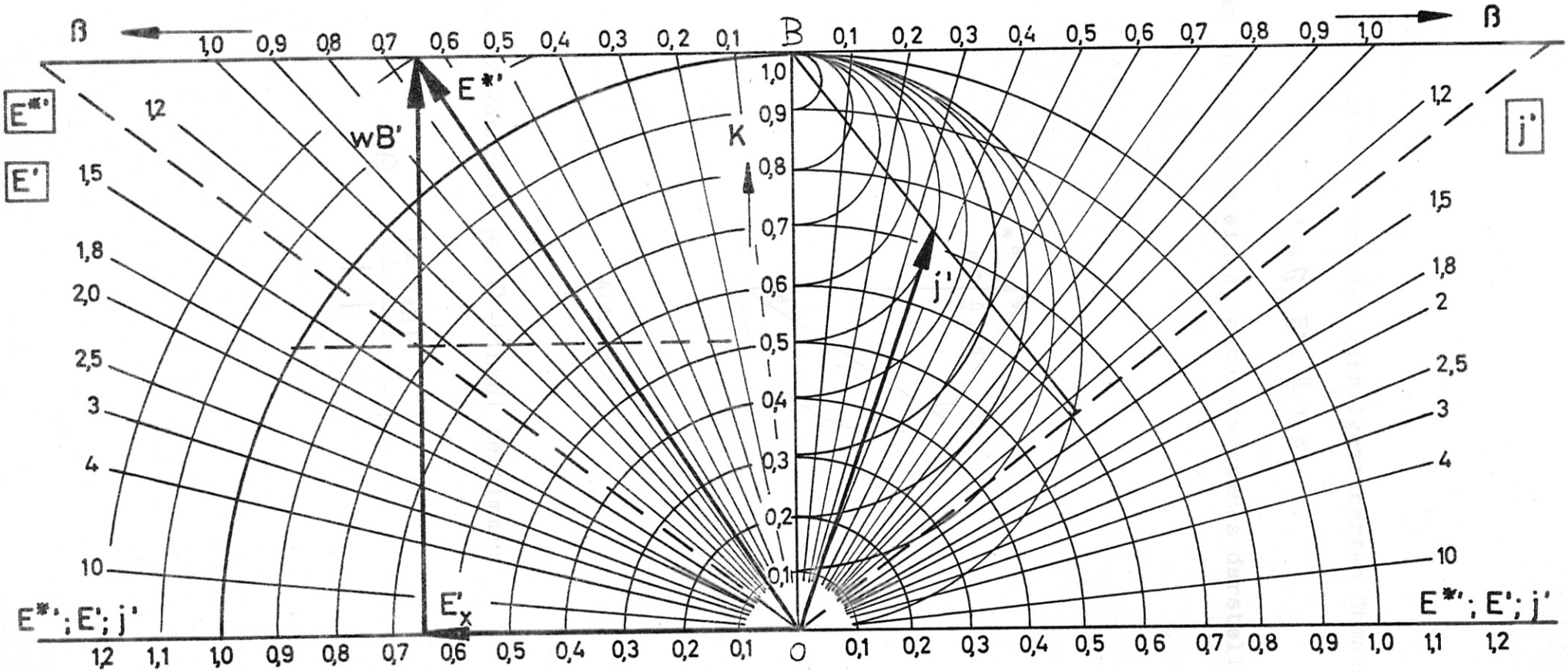
β
B
β
E*'
E'
j'
wB'
E*'
K
j'
E'x
E*'; E'; j'
E*'; E'; j'
1,0 0,9 0,8 0,7 0,6 0,5 0,4 0,3 0,2 0,1
0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0
1,2 1,1 1,0 0,9 0,8 0,7 0,6 0,5 0,4 0,3 0,2 0,1 0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0 1,1 1,2
1,2 1,5 1,8 2,0 2,5 3 4 10
1,2 1,5 1,8 2 2,5 3 4 10
1,0 0,9 0,8 0,7 0,6 0,5 0,4 0,3 0,2 0,1

Abb. 11

Anhang

A. Die vereinfachte Form des verallgemeinerten Ohmschen Gesetzes

$$\bar{J} = \sigma_o \bar{E}^* - \frac{\beta}{B} \bar{J} x \bar{B}$$

kann man in der Form eines Vektordiagrammes darstellen

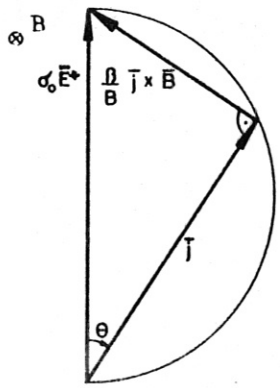

Abb. 12

Aus Abb. 12 kann man den Θ -Winkel bestimmen

$$tg\Theta = \frac{\left|\frac{\beta}{B} \bar{J} x \bar{B}\right|}{\left|\bar{J}\right|} = \beta$$

B. Zum Vektordiagramm des Typ C-Generators

Zur Abb. 7b:

Beim Kurzschluss

$\bar{E}_x = 0$ und $\bar{E}^* = \bar{w}\bar{B}$

$AC = \sigma_o wB = \sigma_o E^*$ (bei K=0)

$AB = AC \cdot \sin\Theta$

$FB = AB \cdot \cos\Theta = AC \sin\Theta \cos\Theta$

$tg\Theta = \beta;\ \cos\Theta = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}$;

$\sin\Theta = \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}$

$FB = \frac{\beta}{1+\beta^2} \sigma_o wB = j_x$ (bei K=0)

weil $CG = j_x \sim (1-K)$

$j_x = \frac{\beta}{1+\beta^2}(1-K)\ \sigma_o wB$

(vgl. Tabelle 1)

$AE + EC = AC = \sigma_o wB$

aus Δ AED

$AE = tg\Theta \cdot ED = \beta \cdot j_x$

$EC = j_y$

$EC = AC - AE$

$j_y = \sigma_o wB - \beta \frac{\beta}{1+\beta^2}(1-K)\ \sigma_o wB$

$j_y = \frac{1+\beta^2 K}{1+\beta^2} \sigma_o wB$ (vgl. Tabelle 1)

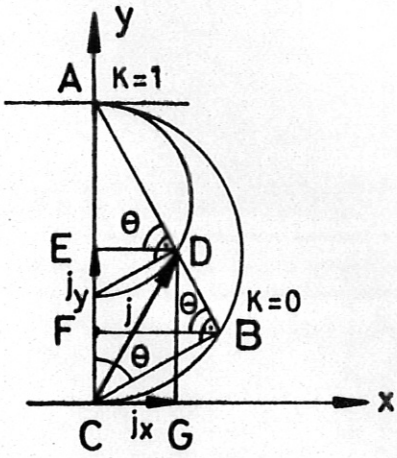

Abb. 13

Zur Abb. 11:

$AC = wB$

$FC = KwB$

$AB = tg\Theta \cdot AC = \beta wB$

$FH = tg\Theta \cdot FC = \beta KwB$

$E_x = \beta KwB$ (vgl. Tabelle 1)

$\bar{E}^* = \bar{E} + \bar{w}\bar{B}$

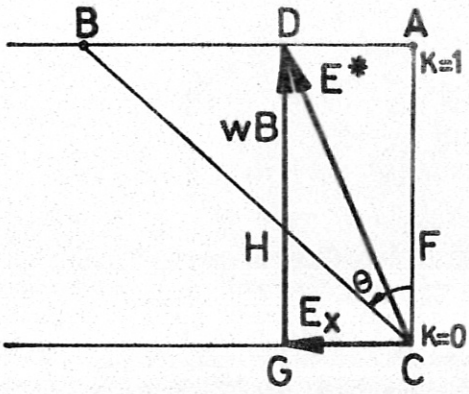

Abb. 14