

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Zweidimensionale innenfeldfreie Plasma-
konfigurationen im Gleichgewicht mit
einem äußeren Magnetfeld

Rudolf Gorenflo

IPP/6/14

Januar 1964

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Zusammenfassung	1
1. Allgemeine Gestalt des zweidimensionalen Modells	2
2. Spezialisierung des Modells. Geometrische Bedingungen	4
3. Funktionentheoretische Formulierung und Lösung des Problems	7
4. Bilanz der Ströme durch Plasmarand und Außengebiet	13
5. Behandlung des speziellen Modells nach der allgemeinen Methode	17
Tabelle für den Fall $n = 4$	27
6. Anhang	28
Literaturverzeichnis	48

Zusammenfassung

Das zweidimensionale Analogon der torusartigen MEYER-SCHMIDT-Plasmakonfigurationen ¹⁾ ohne inneres Feld wird mit funktionentheoretischen Methoden behandelt. Wenn der Rand des zweifach zusammenhängenden Plasmagebiets aus zwei geschlossenen analytischen Kurven besteht, deren Gleichungen bekannt sind, können Struktur und Singularitäten (also die Ströme) des äußeren Magnetfeldes durch eine Kombination von analytischer Fortsetzung und konformer Abbildung ermittelt werden. Ein Beispiel wird ausführlich diskutiert.

The two-dimensional analogon of the toruslike MEYER-SCHMIDT plasma configurations ¹⁾ without interior field is treated by functiontheoretic methods. If the boundary of the doubly connected plasma domain consists of two closed analytic curves whose equations are known, the structure and the singularities (determining the currents) of the exterior magnetic field can be obtained by combining analytic continuation and conformal mapping. An example is discussed in detail.

¹⁾ Man vergleiche [4] (Eine Ziffer in eckigen Klammern bezieht sich stets auf das Literaturverzeichnis). MEYER und SCHMIDT werden im folgenden mit M und S abgekürzt.

1. Allgemeine Gestalt des zweidimensionalen Modells

x, y, h seien kartesische Koordinaten des dreidimensionalen euklidischen Raumes, r, φ seien Polarkoordinaten der (x, y) -Ebene, ferner sei $z = x + iy$. Die (x, y) -Ebene wird kurz z -Ebene genannt.

In der z -Ebene sei ein zweifach zusammenhängendes beschränktes Gebiet G_P mit der inneren glatten Randkurve Γ_0 und der äußeren glatten Randkurve Γ_1 gegeben; Γ_0 umschlieÙe ein einfach zusammenhängendes Gebiet G_0 , Γ_1 sei Rand eines einfach zusammenhängenden Gebietes G_1 , das sich ins Unendliche erstreckt. Senkrecht auf der z -Ebene stehend denken wir uns einen mit Plasma gefüllten zweifach zusammenhängenden Zylinder, der sich in $\pm h$ -Richtung bis ins Unendliche erstreckt und die z -Ebene gerade im Gebiet G_P schneidet. Die Oberfläche des Plasmas besteht also aus zwei getrennten Teilen, die man sich durch Verschiebung einer Parallelen zur h -Achse längs Γ_0 und Γ_1 entstanden denken kann. Das Plasma soll durch ein äußeres Magnetfeld im Gleichgewicht gehalten werden. Mit M und S sei das Plasma-Innere als feldfrei vorausgesetzt, so daß im Plasma und an seiner Oberfläche konstanter Druck herrscht und alle Plasmaströme an der Oberfläche fließen.

Alle Ströme sollen in $\pm h$ -Richtung fließen, die z -Ebene orthogonal durchsetzend. Man muß sich vorstellen, daß sich sowohl die Plasma-Oberflächenströme als auch die im Außenraum fließenden Ströme jeweils bei $h = \pm \infty$ (sehr weit draußen) schließen. Alle Feldlinien laufen parallel zur z -Ebene, für alle auftretenden Funktionen F ist $\partial F / \partial H \equiv C$. In diesem Sinne liegt eine zweidimensionale Anordnung vor, man kann sich auf Betrachtung der Situation in der z -Ebene beschränken.

Wie bei M und S ist die Stromdichte $|\vec{j}^*|$ auf der ganzen Plasma-Oberfläche konstant, mit $|\vec{j}^*| = j^* = \text{const} > C$ nehmen wir an, daß $\vec{j}^* = -j^* n_h$ auf Γ_0 , $\vec{j}^* = j^* n_h$ auf Γ_1 gilt. Das Außen-

feld, das hier aus zwei räumlich getrennten Feldern (in G_0 und G_1) besteht, hat an der Plasma-Oberfläche konstante Tangentialkomponente B_t und verschwindende Normalkomponente $E_n = 0$, in anderen Worten: Γ_0 und Γ_1 sind Feldlinien des Außenfeldes, wegen der vereinbarten Richtung der Oberflächenströme in mathematisch positivem Sinn orientierte Feldlinien (Antiuhrzeigersinn bei Fortschreiten in \mathcal{L} -Richtung). Durch G_0 und G_1 müssen geeignet verteilte Ströme fließen, deren Magnetfeld durch die Oberflächenströme gegen das Plasma-Innere gerade abgeschirmt wird. Die Überlagerung des von den Oberflächenströmen erzeugten Feldes mit dem von den Außenströmen erzeugten Feld soll gerade das Außenfeld \mathcal{B} in G_0 und G_1 mit der angegebenen Randbedingung längs Γ_0 und Γ_1 , das Innenfeld \mathcal{C} in G_P ergeben.

Fließt durch Γ_0 der Gesamtstrom $-I$, so fließt durch Γ_1 der Gesamtstrom $I > 0$, und aus der Konstanz der Stromdichte folgt, daß Γ_0 und Γ_1 umfangsgleich sind. Aus evidenten Bilanzgründen ist

$$\int_{\Gamma_0} dI = - \int_{\Gamma_1} dI = I.$$

Aus Gründen technischer Realisierbarkeit ist es erforderlich, daß die Außenströme einen positiven Abstand von $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ haben, das Außenfeld muß also bis zu einem positiven Abstand α vom Rand des Plasmas ein singularitätenfreies harmonisches Vektorfeld sein (das heißt, es muß dort ein nicht notwendig eindeutiges Potential u mit $\mathcal{B} = \nabla u$ und $\nabla^2 u = 0$ existieren). In 3. wird gezeigt, daß Glattheit des Randes dafür nicht hinreicht, wohl aber Analytizität des Randes. α ist allerdings nicht vorgebar, sondern ergibt sich erst nach Lösung der Aufgabe.

Das Maßsystem sei so gewählt, daß ein durch $z=c$ fließender Strom I das Magnetfeld $\mathcal{B}_r = \mu_p \cdot 2 I / (c r)$ erzeugt (c =Lichtgeschwindigkeit).

2. Spezialisierung des Modells. Geometrische Bedingungen

Aus der Forderung nach Umfangsgleichheit der Randkurven Γ_0 und Γ_1 folgt, daß G_0 kein konvexes Gebiet, Γ_0 also keine Eilinie sein kann. Anschaulich ist dies plausibel; ein strenger Beweis läßt sich mit Hilfe der Theorie der Eilinen ²⁾ erbringen, erfordert aber einigen Aufwand und wird deshalb hier nicht dargestellt.

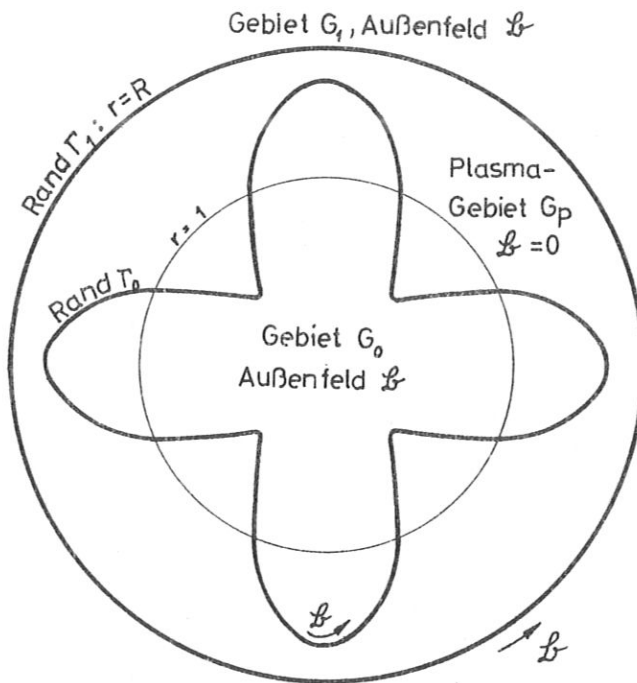


Abb. 1.

In Analogie zu M und S nehmen wir an, daß Γ_0 und Γ_1 spiegelbildlich zu den Strahlen $\varphi = \nu\pi/n$ liegen und bei Drehung um den Winkel $2\pi/n$ mit $z=0$ als Zentrum in sich übergehen. Dabei sei n eine natürliche Zahl $1, 2, 3, \dots$, und $\nu=0, 1, 2, \dots, 2n-1$. Speziell habe

²⁾ In [5], Seite 48, ist ein Eibereich definiert als konvexer Bereich mit stetig gekrümmtem Rand, eine Eilinie ist eben dort definiert als Randkurve eines Eibereichs. Einige Sätze über Eilinen findet man in [2], Seite 18 und 25/26, und in [5], Seite 47ff.

Γ_0 die Gestalt

$$(1) \quad r = r(\varphi) = 1 + \gamma \cos n\varphi, \quad 0 < \gamma < 1,$$

und Γ_1 sei ein Kreis

$$(2) \quad r \equiv R.$$

Bezeichnet man mit L_j den Umfang von Γ_j , so müssen 2 Bedingungen erfüllt sein. Wegen $L_0 = L_1$ muß

$$(3) \quad L_0 = 2\pi R$$

gelten; da Γ_0 und Γ_1 einander nicht schneiden und nicht berühren dürfen, muß

$$(4) \quad R > 1 + \gamma$$

sein. In Abbildung 1 ist der Fall $n=4$, $\gamma=0,5$ skizziert. Man könnte allgemeiner für Γ_1 eine Kurve $r_1(\varphi) = R_1 + \gamma_1 \cos n\varphi$ nehmen, da dies aber methodisch nichts neues bietet, wird der Einfachheit halber Γ_1 als Kreis angenommen. Die spezielle Wahl der Kurve Γ_0 bietet den Vorteil, daß die qualitativen Eigenschaften des Außenfeldes sich durch Auflösung quadratischer Gleichungen ermitteln lassen, wie in 5. ausgeführt wird.

Mittels elementarer Rechnung ^{a1)} findet man, daß die Kurve (1) für $0 \leq \gamma \leq 1/(n^2 + 1)$ eine Eilinie, für $\gamma > 1/(n^2 + 1)$ keine Eilinie ist. (1) ist nämlich genau dann Eilinie, wenn für alle φ die Krümmung $\kappa(\varphi) = (r^2 + r'^2)^{-3/2} (r^2 + 2r r'' - r r''') \geq 0$ (die Striche bedeuten Ableitungen nach φ).

Numerische Rechnungen zeigen aber, daß $\gamma > 1/(n^2 + 1)$ nicht für das Bestehen von (4) hinreicht. Mit $n=4$ ist $1/(n^2 + 1) \approx 0,0588$, aber (4) ist auch für $\gamma = 0,29$ noch nicht erfüllt; für $\gamma \geq 0,30$ ist (4) erfüllt. Man vergleiche hierzu die Tabelle am Schluß dieser Arbeit.

Wenn $n \geq 4$ ist, findet man auf anderem Wege eine zwischen 0 und 1 liegende hinreichende Schranke γ^* , mit der (3) und (4) gelten,

a1), a2), ... beziehen sich auf die ausführlicheren Darstellungen im Anhang

wenn nur $1 > \gamma \geq \gamma^*$. Offensichtlich ist $L_0 > L^*$, wenn L^* der Umfang des Polygons Γ^* mit den Ecken

$$P_\nu(n) = \left(r = 1 + (-1)^\nu \gamma, \varphi = \nu \pi / n \right), \nu = 0, 1, 2, \dots, 2n-1,$$

ist. Unter der Bedingung

$$(5) \quad L^* > 2R(1 + \gamma)$$

liegt der mit Γ^* umfangsgleiche Kreis $r \equiv R^* = L^*/(2\pi)$ ganz außerhalb von Γ^* . Aus (3), (5) und $L_0 > L^*$ folgt dann (4).

Längliche elementare Rechnung ^{a2)} liefert, daß (5) gilt, wenn

$$(6) \quad \gamma^* = \frac{\pi^2 + 2n(\pi^2 - n^2 \sin^2 \frac{\pi}{n})^{1/2}}{(1 + \cos \frac{\pi}{n}) \cdot 2n^2 - \pi^2} < \gamma < 1, \quad n \geq 4.$$

Mit $0 \leq \gamma \leq \gamma^*$, $n \geq 4$, gilt (5) nicht. Für $1 \leq n \leq 3$ ist (5) nirgends in $0 \leq \gamma < 1$ erfüllt. Wegen $L_0 > L^*$ gelten (3) und (4) auch noch für $\gamma = \gamma^*$, ja sogar noch in einem Intervall $0 < \gamma_0 < \gamma < \gamma^*$. Für $n=4$ ist $\gamma^* \approx 0,465$, während numerische Rechnung $\gamma_0 = 0,30$ liefert. Bei $n \rightarrow \infty$ gilt asymptotisch

$$\gamma^* = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \pi^2 n^{-2} + O(n^{-4}).$$

Die Herleitung zeigt, daß (6) für die Gültigkeit von (3) und (4) auch dann noch hinreicht, wenn man von der glatten Kurve Γ_0 lediglich verlangt, daß sie durch die Punkte $P_\nu(n)$ geht und r dort ein Maximum bzw. ein Minimum annimmt, wenn ν gerade bzw. ungerade ist. Da es Kurven Γ_0 dieser Art gibt, deren Umfang beliebig wenig größer als L^* ist, kann unter dieser schwachen Voraussetzung über Γ_0 die Bedingung (6) für das Bestehen von (3) und (4) nicht gelockert werden.

3. Funktionentheoretische Formulierung und Lösung des Problems

Wir verzichten in 3. und 4. auf die in 2. vereinbarte Spezialisierung.

Der magnetischen Feldstärke $\mathcal{L} = B_1 n_x + B_2 n_y$ ordnen wir die komplexe Zahl $B = B_1 + i B_2$ zu. \bar{a} sei stets die zu a konjugiert komplexe Zahl. $\omega(z) = u(z) + i v(z)$ sei das zum Magnetfeld \mathcal{L} gehörige komplexe Potential, es sei also $\overline{B(z)} = \omega'(z)$. Mit der reellen Funktion u ist dann $\mathcal{L} = \text{grad } u$, und die reelle Funktion v stellt die zweidimensionale Flußfunktion dar. Es ist

$$v(z_2) - v(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} \mathcal{L} \cdot n \, ds,$$

wenn über eine z_1 mit z_2 verbindende Kurve integriert wird, längs der \mathcal{L} singularitätenfrei ist, und n durch Drehung des Tangenteneinheitsvektors der Kurve um $-\pi/2$ entsteht. In einem Gebiet, in dem \mathcal{L} ein eindeutig harmonisches Vektorfeld ist, ist $\overline{B(z)} = b(z)$ holomorph⁺⁾ . Statt $\overline{B(z)}$ schreiben wir im folgenden $b(z)$, es ist $b(z) = \omega'(z)$. Die Funktion $\omega(z)$ kann mehrdeutig sein.

Da man sich bei der Darstellung der Lösungsmethode auf eines der Gebiete G_j mit seinem Rand Γ_j beschränken kann, läßt die zu lösende Aufgabe folgende Formulierung zu:

Gegeben ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet G , welches von einer doppelpunktfreien geschlossenen analytischen³⁾ Kurve Γ begrenzt wird. Man bestimme ein passendes Teilgebiet G^* von G und in G^* ein eindeutig harmonisches Vektorfeld \mathcal{L} , das auf $G^* \cup \Gamma$ stetig ist und längs Γ konstante nichtverschwindende Tangentialkomponente B_t und verschwindende Normalkomponente B_n hat. Γ soll im Rand von G^* enthalten sein, die Menge der nicht auf Γ liegenden Randpunkte von G^* soll einen positiven Abstand von Γ

+) "holomorph" bedeutet: "eindeutig regulär analytisch".

3) Damit der Begriff "Tangentialkomponente längs Γ " sinnvoll sei, muß Γ glatt sein. Glattheit wurde schon in 1. und 2. vorausgesetzt. Nach erfolgter Lösung wird gezeigt, daß das Problem unlösbar ist, wenn Γ aus verschiedenen analytischen Teilbögen glatt zusammengesetzt ist ("verschieden" bedeutet: "nicht durch analytische Fortsetzung auseinander hervorgehend").

haben, der allerdings nicht vorgegeben ist.

Im folgenden sei normiert auf $B_t = 1$ längs Γ .

Denkt man an die hydrodynamische Analogie, so erkennt man, daß eine Umkehrung des Helmholtz'schen Problems der freien Stromlinien ⁴⁾ vorliegt.

Aus der in anderen Worten formulierten Bedingung, Γ solle Feldlinie konstanter Feldstärke sein, folgt, daß u längs Γ proportional zur Bogenlänge s wächst, während v längs Γ konstant ist. Es ist zweckmäßig, auf $v \equiv 0$ längs Γ zu normieren. Man erkennt, daß das Vektorfeld \mathcal{L} bei Umlauf um die Randkurve Γ nichtverschwindende Zirkulation, mithin in G mindestens eine Singularität hat. Das Gebiet G^* ist also von mindestens zweifachem Zusammenhang.

Als Beispiel diene das Gebiet $G = \{|z| < 1\}$ mit dem Rand $\Gamma = \{|z| = 1\}$ und das in $G^* = \{0 < |z| < 1\}$ harmonische Vektorfeld $\mathcal{L} = r^{-1} n_\varphi$. Längs Γ ist $B_t = 1$, $B_n = 0$. Es ist $B(z) = i/\bar{z}$ und $\omega(z) = -i \log z$. Man könnte auch $G^* = \{s < |z| < 1\}$ nehmen, wenn nur $0 < s < 1$ ist; G^* ist also nicht eindeutig bestimmbar. Nimmt man $G = \{|z| > 1\}$, so ist $B(z) = i/\bar{z}$ Lösung in $G^* = \{1 < |z| < \infty\}$. Im ersten Fall liegt in $z=0$, im zweiten Fall in $z=\infty$ eine Singularität.

Zur Darstellung der Lösungsmethode nehmen wir an, Γ habe mit dem reellen Parameter t die Darstellung

$$z(t) = x(t) + i y(t), \quad z(t+2\pi) = z(t).$$

Analytizität der Kurve Γ bedeutet, daß $z(t)$ holomorph und $\dot{z}(t) \neq 0$ ist. Gesucht ist eine in einem passenden Gebiet G^* holomorphe Funktion $b(z)$, für welche $B(z) = \overline{b(z)}$ auf Γ die Randwerte $\dot{z}(t)/|\dot{z}(t)|$ annimmt ⁵⁾. $b(z)$ soll also die Randwerte $\bar{z}/|z|$

4) Hierzu vergleiche man [3], Seite 94ff.

5) Die allgemeinere Aufgabe, mit einer längs Γ holomorphen Funktion $k(z)$ solle $B(z)$ auf Γ die Randwerte $k(z) \dot{z}/|\dot{z}|$ annehmen, läßt sich auf analoge Weise lösen.

annehmen. Mit $z(t)$ sind längs Γ auch $x(t)$ und $y(t)$ holomorphe Funktionen des reellen Parameters t , wie Potenzreihenentwicklung von $z(t)$ in der Umgebung eines beliebigen reellen t sofort lehrt. Mithin ist auch

$$(7) \quad g(t) = |\dot{z}(t)| = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}$$

eine holomorphe Funktion der reellen Variablen t .

$z(t)$ und $g(t)$ können also auf komplexe t analytisch fortgesetzt werden, und nach dem Prinzip der Permanenz der Funktionalgleichungen ⁶⁾ bleibt dabei die 2π -Periodizität beider Funktionen erhalten. Man beachte aber, daß für nichtreelle t im allgemeinen $g(t) \neq |\dot{z}(t)|$ ist. Es ist zweckmäßig, vor Durchführung des Fortsetzungsprozesses in der komplexen t -Ebene t mit $t+2\pi$ topologisch zu identifizieren. Gleichbedeutend damit ist es, sich auf $0 \leq \operatorname{Re} t < 2\pi$ zu beschränken und $t = i\tau$ mit $t+2\pi$ als identisch zu betrachten (τ reell).

Topologisch gesagt liegt dann ein t -Zylindermantel M vor, auf dem die längs der geschlossenen Kurve

$$K = \{ 0 \leq t < 2\pi, \quad 0 \text{ identisch mit } 2\pi \}$$

gegebenen Funktionen $z(t)$ und $g(t)$ analytisch fortzusetzen sind.

Auf M gibt es ein Gebiet T mit folgenden Eigenschaften:

- 1) K verläuft ganz im Innern von T .
- 2) In T sind $z(t)$ und $g(t)$ holomorph.
- 3) In T ist $z = z(t)$ im Sinne der Existenz der Umkehrfunktion eindeutig nach $t = t(z)$ auflösbar. Wird also T durch $z(t)$ auf das z -Gebiet \tilde{G} abgebildet, so ist \tilde{G} schlicht und $t(z)$ ist in \tilde{G} holomorph. Speziell ist $\dot{z}(t) \neq 0$ in T .
- 4) Γ verläuft ganz im Innern von \tilde{G} . Der Rand von \tilde{G} hat mithin einen positiven Abstand von Γ .
- 5) In \tilde{G} ist die Funktion

$$(8) \quad b(z) = g(t(z)) / \dot{z}(t(z))$$

holomorph.

⁶⁾ Man vergleiche [1], Seite 203ff.

Die Existenz eines Gebietes T ergibt sich aus bekannten Sätzen mit üblichen Schlußweisen der Funktionentheorie.

Auf Γ ist t reell, und wegen (7) und (8) ist

$$b(z) = g(t) / \dot{z}(t) = |\dot{z}| / \dot{z} = \overline{\dot{z}} / |\dot{z}|,$$

auf Γ nimmt also $b(z)$ die geforderten Randwerte an. Man kann $G^* = \tilde{G} \cap G$ nehmen und hat damit das Problem gelöst, im allgemeinen hat man allerdings noch nicht das größtmögliche Gebiet G^* ermittelt. Gegebenenfalls kann man $b(z)$ aus $\tilde{G} \cap G$ heraus innerhalb G noch weiter analytisch fortsetzen; man muß dabei aus Gründen der physikalischen Deutbarkeit darauf achten, daß $b(z)$ eindeutig bleibt. Hierzu bringt man, falls erforderlich, in G passende Schnittlinien (Verzweigungsschnitte) an, die beim Fortsetzungsprozeß nicht überschritten werden dürfen. Auf diese Weise kann das Gebiet G^* erweitert werden.

Wenn die Umkehrfunktion $t(z)$ nicht explizit angebar ist, wird man es vorziehen, den Fortsetzungsprozeß über dem t -Zylindermantel M vorzunehmen. Durch gemeinsame Fortsetzung von $z(t)$ und $g(t)$ erzeuge man eine Riemann'sche Fläche. Auf dieser nehme man ein passendes Teilgebiet, in dessen Innerem die Kurve K verläuft und das durch $z = z(t)$ auf ein schlichtes z -Gebiet abgebildet wird, in dem $b(z)$ holomorph ist. Fortsetzung von Γ aus ins Innere von G hinein entspricht Fortsetzung von K aus in Richtung positiven bzw. negativen Imaginärteils, wenn G bei Durchlaufen von Γ in Richtung wachsender t links bzw. rechts liegt.

Mit $W(t) = w(z(t))$ geht wegen $\dot{W}(t) = w'(z) \dot{z}(t)$ die Randbedingung $b(z) = w'(z) = \overline{\dot{z}} / |\dot{z}|$, t reell, über in

$$\dot{W}(t) = |\dot{z}(t)| = g(t), \quad t \text{ reell.}$$

Analytische Fortsetzung von $g(t)$ liefert ein harmonisches Vektorfeld $\overline{g(t)}$ mit dem komplexen Potential $W(t) = \int_{\tau=0}^t g(\tau) d\tau$.

Verpflanzung dieses Potentials durch $z = z(t)$ liefert in der z -Ebene das komplexe Potential $w(z) = W(t(z))$ und das harmonische Vektorfeld $B(z) = \overline{w'(z)}$. Die Abbildung $z = z(t)$ führt Feldlinien in Feldlinien über. Man beachte, daß man wegen (8) zur Bestimmung der Feldstärke keine Integration ausführen muß. Die Feldlinien kann man durch Integration der Differentialgleichung $dz/dt = \beta(z)$, μ reell, erhalten. Kennt man $t(z)$ nicht explizit, so kann man einfach durch die Abbildung $z = z(t)$ die Potential- und Feldlinienkonfiguration von der über M aufgebauten Riemann'schen Fläche auf die z -Ebene übertragen. Da man dabei auf Eindeutigkeit in der z -Ebene achten muß, sind neben den singulären Stellen der Funktion $g(t)$ (diese bestimmen qualitativ die t -Konfiguration) auch die singulären Stellen von $z(t)$ und die Nullstellen von $\dot{z}(t)$ kritisch.

Als einfaches Beispiel diene wieder das Gebiet $G = \{|z| < 1\}$ mit dem Rand $\Gamma = \{z = e^{it}, 0 \leq t < 2\pi\}$. Evident ist, daß $z(t) = e^{it}$ in $|t| < \infty$ holomorph ist. Aus $\dot{z} = ie^{-t}$ folgt, daß $g(t) = |\dot{z}| = 1$ ist für reelle t , also $g(t) \equiv 1$ für beliebiges komplexes t . Mit (8) folgt $b(z) = 1/(ie^{it}) = -i/z$, also $B = r^{-1} n_{\Gamma}$. Ferner ist $W(t) = t$, $W'(t) \equiv 1$, $w(z) = -i \log z$. In der t -Ebene hat man ein homogenes Feld parallel zur reellen Achse, in der z -Ebene ein Potentialwirbelfeld um $z = 0$.

Noch einige Worte über die vorausgesetzte Analytizität der Randkurve Γ . Aus dieser Analytizität folgt die Holomorphie der Randwerte von $b(z)$ längs Γ , so daß es außerhalb Γ im wesentlichen nur eine Lösung $b(z)$ gibt, die man gerade durch analytische Fortsetzung der Randwerte erhält. Wir sagen "im wesentlichen nur eine Lösung $b(z)$ ", weil der einem nicht auf Γ liegenden Punkt z zugeordnete Wert $b(z)$ noch von der Lage der innerhalb G angebrachten Verzweigungsschnitte abhängen kann, die beim Fortsetzungsprozeß nicht überschritten werden dürfen. Falls solche erforderlich sind, so sind diese und ihre Lage nicht immer eindeutig bestimmbar.

Mithin ist $b(z)$ durch einen beliebig kleinen Teilbogen von Γ im wesentlichen schon bestimmt, die Randwertaufgabe ist unlösbar, wenn Γ aus verschiedenen analytischen Teilbögen glatt zusammengesetzt ist. Enthält Γ das Geradenstück

$$\Gamma_1 = \{-1 \leq x \leq 0, y = -1\} \quad \text{und daran glatt}$$

anschließend den Halbkreisbogen $\Gamma_2 = \{x \geq 0, x^2 + y^2 = 1\}$,

so bestimmt Γ_1 das Feld $\mathcal{G}_1 \equiv \pi_x$, Γ_2 das Feld

$$\mathcal{G}_2 = r^{-1} \pi_y \quad . \quad \text{Längs } L = \{x = 0, 0 > y > -1\}$$

ist bei fallendem y die Feldstärke \mathcal{G}_1 konstant, während $|\mathcal{G}_2|$ streng monoton fällt. Nimmt man $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1$ in $x < 0$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_2$ in $x > 0$, so ist L überall mit nichtverschwindender Quellung belegt, potentialtheoretisch gedeutet ist die bis an den Rand Γ reichende Kurve L überall mit einer stetigen nichtverschwindenden Singularitätendichte belegt.

Offen ist die Frage, ob das Problem lösbar ist für gewisse Randkurven Γ , die zwar überall glatt, aber nirgends analytisch sind.

4. Bilanz der Ströme durch Plasmarand und Außengebiet

Wie in 1. stellen wir uns vor, daß durch Γ_0 der Gesamtstrom $-\bar{I}$, durch Γ_1 der Gesamtstrom $+\bar{I}$ fließt ($I > 0$). Wie dort schon festgestellt wurde, muß dann durch G_0 der Gesamtstrom \bar{I} , durch G_1 der Gesamtstrom $-\bar{I}$ fließen. Alle Ströme fließen senkrecht zur z -Ebene. Wir können uns wie in 3. auf die Darstellung der auf $G_0 \cup \Gamma_0$ herrschenden Situation beschränken, in $G_1 \cup \Gamma_1$ herrscht eine analoge Situation. Wie in 3. schreiben wir wieder G statt Γ_0 , Γ statt Γ_0 .

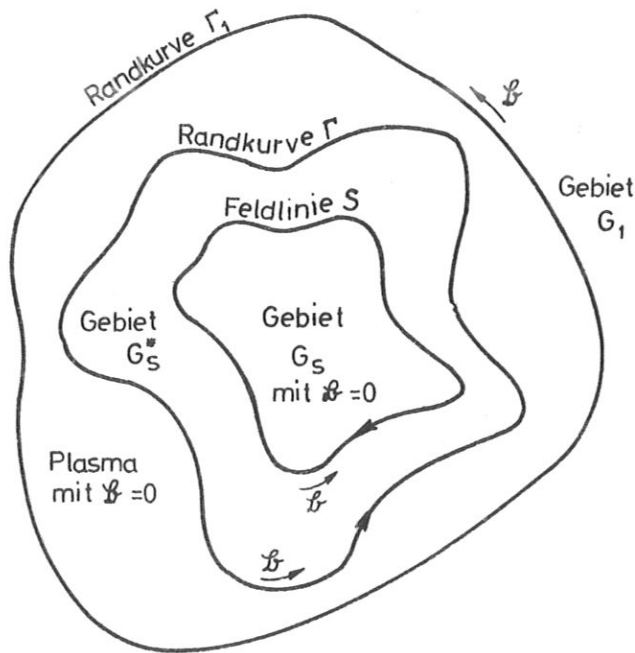


Abb. 2.

Wir nehmen an, wir hätten gemäß 3. die Funktion $b(z)$ und damit in einem passenden Gebiet G^* das Feld \mathcal{L} bestimmt. Die dem Rand Γ benachbarten Feldlinien sind doppelunftfrei und geschlossen und umschlingen alle in G liegenden Singularitäten und Verzweigungsschnitte von $b(z)$. Wir greifen solch eine Feldlinie heraus und nennen sie S . Man vergleiche Abbildung 2. Wir fragen, welche Stromverteilung das Feld

$$(9) \quad R(z) = \begin{cases} 0 & \text{außerhalb } G, \Gamma \\ \frac{1}{b(z)} & \text{in } G_S^* \cup \Gamma \cup S \\ 0 & \text{in } G_S \end{cases}$$

erzeugt. Hierbei sei G_S das von S umschlungene Gebiet, G_S^* das zwischen S und Γ liegende Gebiet.

Hierzu sei Q die orientierte Kurvenkette, die entsteht, wenn man zuerst Γ in mathematisch positivem Sinn und anschließend S in mathematisch negativem Sinn umläuft. In Richtung dieses Umlaufsinnns sei das Bogendifferential $ds > 0$. Bei Durchlaufen von Q liegt stets G_S^* zur Linken, und es gilt die Cauchy'sche Integralformel

$$(10) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_Q \frac{b(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

für die zum Magnetfeld (9) gehörende Funktion

$$(9') \quad f(z) = \overline{B(z)}.$$

Ferner gilt der Cauchy'sche Integralsatz

$$(11) \quad \int_Q b(\zeta) d\zeta = 0.$$

Da Γ und S Feldlinien sind, ist $\overline{b(\zeta)} = B_t \frac{d\zeta}{ds}$, also

$$b(\zeta) \frac{d\zeta}{ds} = B_t \quad \text{längs } Q.$$

Nun beachte man, daß der durch das Bogenelement ds fließende Strom $j^* ds$ zum Magnetfeld den Beitrag dB liefert, welchem

$$\overline{dB} = df = -2i j^* ds / (c(z - \zeta)) \quad \text{entspricht.}$$

Setzt man gemäß den Sprüngen des Magnetfeldes (9)

$$(12) \quad j^*(\zeta) = -\frac{c}{4\pi} B_t \quad \text{längs } Q,$$

so geht (10) über in

$$f(z) = -\frac{2i}{c} \int_Q \frac{j^*(\zeta) ds}{z - \zeta},$$

und aus (11) folgt

$$\int_Q j^*(\zeta) ds = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen lehrt, daß die Strombelegung (12) genau das Feld (9) erzeugt, die zweite besagt, daß durch S genau soviel Strom fließt wie durch Γ , aber in entgegengesetzter Richtung. Damit ist die Strombilanz gesichert. Man beachte noch, daß auf Γ $B_t = 1$, also $j^* = -c/(4\pi) < 0$ ist, während auf S wegen des umgekehrten Umlaufsinn $B_t < 0$, also $j^* = c|B_t|/(4\pi) > 0$ ist.

Die Feldlinie S wählt man nach Möglichkeit weit weg vom Plasmarand Γ . Wenn Γ ein Kreis wäre, könnte man S bis auf den Mittelpunkt zusammenziehen, der als einzige Singularität übrig bliebe (gerader stromdurchflossener Draht). Allgemein gilt: Man kann S solange zusammenziehen, bis man an eine singuläre Stelle oder einen Verzweigungsschnitt von $h(z)$ stößt, ja, man darf S sogar in geschlossene Teilkurven zerreißen. Die Kurve S darf sogar so deformiert werden, daß sie doppelt durchlaufene Teilbögen enthält (Abbildung 3), und diese brauchen noch nicht einmal Feld-

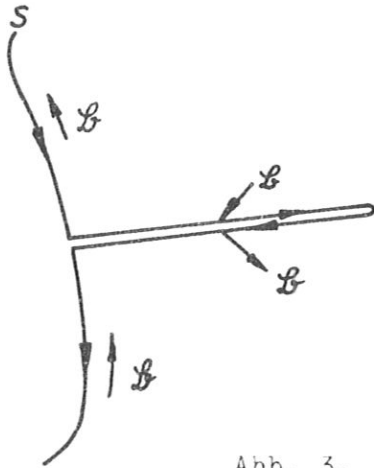


Abb. 3.

linien zu sein, sondern müssen lediglich von der Normalkomponente B_n des Feldes stetig durchsetzt werden, da ein Magnetfeld keine Quellen hat. Solche doppelt durchlaufenen Teilbögen sind natürlich Teile von Verzweigungsschnitten, falls bei ihrem Überschreiten B unstetig ist. Die einem Punkt eines solchen Schnittes zuzuordnende Stromdichte erhält man durch Addition der beiden Stromdichten $j^* = -\frac{c}{4\pi} B_t$, die man für jedes Schnittufer mit dem ihm zugehörigen B_t ausrechnet (bei Beachtung des Umlaufsinnns von S). Man kann mittels Integralformel und Integralsatz

von Cauchy nachrechnen, daß auch bei all diesen Deformationen von \int die Strombilanz gesichert bleibt.

Analog behandle man die in $G_1 \cup \Gamma_1$ herrschende Situation und überlagere dann das Feld \mathcal{L}_1 , das durch die dort fließenden Ströme erzeugt wird, über das Feld $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$. Da $\mathcal{L}_0 = 0$ außerhalb von $G_0 \cup \Gamma_0$ und $\mathcal{L}_1 = 0$ außerhalb von $G_1 \cup \Gamma_1$, und da $G_0 \cup \Gamma_0$ von $G_1 \cup \Gamma_1$ durch das feldfreie Plasma-gebiet getrennt wird, wird hierdurch die Bilanz der Ströme offensichtlich nicht gestört.

5. Behandlung des speziellen Modells nach der allgemeinen Methode

Wir beschränken uns wieder auf die in 2. vereinbarte Spezialisierung.

Für die äußere Kurve $\Gamma_1 = \{|z| = R\}$ und das Gebiet

$G_1 = \{|z| > R\}$ gilt, wie man mittels (8) nachrechnet,
 $E(z) = (R/r) i e^{i\varphi}$, also $\mathcal{L} = (R/r) n \varphi$. Einzige

Singularität ist $z = \infty$. Den G_1 -Strom kann man durch einen
 Kreis $|z| = R_1$, $R_1 > R$, fließen lassen, dort nach der Dichte

$j^* = -I / (2\pi R_1)$ verteilt. In $|z| > R_1$ hat man dann
 $\mathcal{L} = 0$. Wir brauchen mithin nur noch die innere Randkurve $\Gamma = \Gamma_0$,
 die durch

$$r = 1 + j \cos n\varphi, \quad 0 < j < 1, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

gegeben ist, und das von ihr umschlungene Gebiet $G = G_0$ zu betrach-
 ten. Auf Diskussion des etwas einfacheren Sonderfalles $n = 1$ sei
 verzichtet.

Aus der analytischen Darstellung

$$(13) \quad z(t) = (1 + j \cos nt) e^{it}, \quad 0 \leq t < 2\pi,$$

von Γ ergibt sich, daß G links von Γ liegt, und daß

$$\dot{z} = i e^{it} (1 + j \cos nt + i n j \sin nt),$$

für reelle t also nach (7)

$$(14) \quad g(t) = \left((1 + j \cos nt)^2 + n^2 j^2 \sin^2 nt \right)^{1/2}$$

gilt. Offensichtlich ist für komplexe t ebenfalls $g(\dot{t})$ von der Ge-
 stalt (14), wenn man sich für den Zweig entscheidet, der für
 reelle t positiv ist, und in der t -Ebene geeignete Verzweigungs-
 schnitte anbringt.

Wenn man nun aus (13) $t = t(z)$ explizit ausrechnen könnte, könnte
 man mit (8) $b(z)$ für beliebig vorgegebenes z in dem passend zu
 bestimmenden Gebiet G^x ausrechnen. Leider scheint dies nur in den
 technisch uninteressanten Fällen $n=1$ und $n=2$ möglich zu sein.

(13) ist nämlich äquivalent dem Gleichungssystem

$$(15) \quad \zeta = e^{it}, \quad j \zeta^{-n} + 2 \zeta^n - 2z \zeta^{n-1} + j = 0.$$

Wir bestimmen deshalb qualitativ die Konfiguration in der oberen t -Halbebene ($\text{Im } t > 0$) und übertragen diese durch $z = z(t)$ auf das z -Gebiet G . Abbildungen 4 und 5 illustrieren die folgenden Überlegungen (sie sind skizziert für $n = 4$, $\gamma = 0,5$, geben allerdings den Feldlinienverlauf nur qualitativ wieder).

Durch Ausnutzung der $\frac{2\pi}{n}$ -Periodizität und der Symmetrien zu den Strahlen $\varphi = \nu\pi/n$ kann man die weiteren Entwicklungen gegenüber denen in 3. etwas modifizieren. Für $\alpha > 0$ ist

$$z(i\alpha) = (1 + \gamma \cosh n\alpha) e^{-\alpha} > 0, \quad \text{also } \varphi = 0, \quad \text{für } 0 < \alpha < \alpha^*$$

$$\text{ist } z\left(\frac{\pi}{n} + i\alpha\right) = (1 - \gamma \cosh n\alpha) e^{-\alpha} e^{i\pi/n}, \quad \text{also } \varphi = \pi/n.$$

Es gibt in $\alpha > 0$ genau einen Wert $\alpha = \alpha^*$ mit $z\left(\frac{\pi}{n} + i\alpha^*\right) = 0$.

Mithin genügt es, die Feldkonfiguration im Elementarhalbstreifen

$$E = \left\{ 0 \leq \text{Re } t \leq \pi/n, \quad \text{Im } t \geq 0 \right\}$$

zu ermitteln, und diese dann (soweit umkehrbar eindeutig möglich) durch $z = z(t)$ in den Elementarsektor

$$E_z = \left\{ 0 \leq \varphi \leq \pi/n, \quad z \in G \right\}$$

abzubilden. Die Konfiguration der Feldlinien ohne Rücksicht auf ihre Richtung in $-\pi/n \leq \text{Re } t \leq 0$ bzw. in $-\pi/n \leq \varphi \leq 0$ erhält man dann durch Spiegelung an $\text{Re } t = 0$ bzw. $\varphi = 0$; eine anschließende Stetigkeitsbetrachtung ergibt sofort die Richtung der Feldlinien. Parallelverschiebungen um $2k\pi/n$ bzw. Drehungen um den Winkel $2k\pi/n$, k eine beliebige ganze Zahl, liefern die Konfiguration in den anderen t -Halbstreifen bzw.

z -Sektoren. Durch diese Verwertung der Symmetrien und Periodizitäten hat man zwangsläufig schon die Lage der noch anzubringenden Verzweigungsschnitte fixiert, die dann von selbst ebenfalls den Symmetriebedingungen genügen. Eine andere Wahl dieser Schnitte dürfte unzweckmäßig sein.

Von Bedeutung für das Feld $\overline{g(t)}$ in E sind die Verzweigungspunkte von g , also die Nullstellen des in (14) rechter Hand auftretenden Radikanden

$$(16) \quad G(t) = g^2(t) = (1 + \gamma \cos nt)^2 + n^2 \gamma^2 \sin^2 nt.$$

Da $G(t)$ eine ganze Funktion ist, treten andere Singularitäten (abgesehen von der wesentlich singulären Stelle $t = \infty$) nicht auf. Mit $\tau = \cos nt$ geht $G(t) = 0$ über in die quadratische Gleichung

$$y^2 (n^2 - 1) \tau^2 - 2y\tau - (1 + n^2 y^2) = 0,$$

die die Lösungen

$$(17) \quad \tau = \tau_{\pm} = \frac{1}{y(n^2 - 1)} \left(1 \pm n \sqrt{1 + y^2 (n^2 - 1)} \right)$$

hat. Man hat $\tau_+ > 1$, $\tau_- < -1$, und bei $y \rightarrow 1-0$ geht $\tau_- \rightarrow -1$. Von den unendlich vielen zugehörigen Werten t , die alle nichtreell sind, brauchen wir nur die in E liegenden Werte ^{a3)}

$$(18) \quad \begin{cases} t_+ = \frac{i}{n} \log (\tau_+ + \sqrt{\tau_+^2 - 1}) & \text{mit } \operatorname{Re} t_+ = 0 \\ t_- = \frac{\pi}{n} + \frac{i}{n} \log |\tau_- - \sqrt{\tau_-^2 - 1}| & \text{mit } \operatorname{Re} t_- = \pi/n. \end{cases}$$

Man kann nachrechnen ^{a3)}, daß

$$(19) \quad \operatorname{Im} t_+ > \operatorname{Im} t_- > 0.$$

Setzt man abkürzend

$$s_+ = \tau_+ - \sqrt{\tau_+^2 - 1}, \quad s_- = |\tau_- + \sqrt{\tau_-^2 - 1}|,$$

so ist

$$t_+ = \frac{i}{n} \log (1/s_+), \quad t_- = \frac{\pi}{n} + \frac{i}{n} \log (1/s_-),$$

und man findet

$$(18') \quad \begin{cases} z(t_+) = z_+ = s_+^{1/n} \left(1 + \frac{\gamma}{2} \left(s_+ + \frac{1}{s_+} \right) \right) \\ z(t_-) = z_- = s_-^{1/n} \left(1 - \frac{\gamma}{2} \left(s_- + \frac{1}{s_-} \right) \right) e^{i\pi/n}, \end{cases}$$

worin $\varphi_+ = 0$, $\varphi_- = \pi/n$ (daß $1 - \frac{\gamma}{2} \left(s_- + \frac{1}{s_-} \right) > 0$ ist, findet man durch elementare Rechnung) ^{a3)}.

Für die Abbildung in die z -Ebene sind wichtig die Nullstellen von $\dot{z}(t)$. Die Gleichung $\dot{z}(t) = 0$ ist äquivalent dem System

$$\zeta = e^{it}, \quad r(n+1)\zeta^{2n} + 2\zeta^n - (n-1)r = 0.$$

Von seinen unendlich vielen Lösungen t liegt nur eine in E , nämlich

$$t = t_1 = \frac{i}{n} \log \frac{r(n+1)}{\sqrt{1+r^2(n^2-1)}-1} \quad \text{mit} \quad \operatorname{Re} t_1 = 0.$$

Man zeigt leicht, daß $t_1 = t_+$ ist. a4)

Da der Punkt $z=0$ ein ausgezeichnete Punkt ist (in ihm treffen sich alle Symmetriestrahlen), benötigt man noch den Punkt $t=t^*$, für den $z(t^*)=0$ ist. Setzt man in (15) $z=0$ ein, so findet man als in E liegende Lösung a5)

$$(20) \quad t^* = \frac{\pi}{n} + \frac{i}{n} \log \frac{1 + \sqrt{1-r^2}}{r} \quad \text{mit} \quad \operatorname{Re} t^* = \pi/n.$$

Mit dem schon weiter oben eingeführten α^* ist $t^* = \frac{\pi}{n} + i\alpha^*$. Beachtet man, daß $z(t_-)$ auf dem Strahl $\varphi = \pi/n$ liegt (noch außerhalb des Punktes $z=0$) und daß $z(\frac{\pi}{n} + i\alpha) > 0$ genau für $0 < \alpha < \alpha^*$, so folgt aus Monotoniegründen a5)

$$(19') \quad \operatorname{Im} t^* > \operatorname{Im} t_-.$$

Um das harmonische Vektorfeld $\overline{g(t)}$ qualitativ zu skizzieren, a6) beachte man, daß $g(t) > 0$ für reelle t , und daß mit

$$(21) \quad t = t_{\pm} + is$$

$g^2(t) > 0$ für $s < 0$ (in E) und $g^2(t) < 0$ für $s > 0$ gilt. Es folgt, daß diese Geraden vom Vektor $\overline{g(t)}$ unterhalb der Punkte t_+ und t_- orthogonal durchsetzt werden, aus Stetigkeitsgründen nach rechts, während oberhalb dieser Punkte $\overline{g(t)}$ parallel zu diesen Geraden läuft. Verzweigungsschnitte in der t -Ebene sind die Strahlen (21) mit $s \geq 0$. Entwicklung von $g(t)$ in der Umgebung der Punkte t_+ und t_- liefert mit nichtverschwindenden Konstanten A_+ und A_- , auf deren genauen Wert es hier nicht ankommt a6),

$$g(t) \sim A_+ (t - t_+)^{1/2} \quad \text{und} \quad g(t) \sim A_- (t - t_-)^{1/2}$$

$$\text{also } W(t) - W_+ \sim \frac{2}{3} A_+ (t - t_+)^{3/2} \quad \text{und} \quad W(t) - W_- \sim \frac{2}{3} A_- (t - t_-)^{3/2}$$

Das komplexe Potential $\bar{w} = z^\alpha$, $\alpha > 0$, liefert im Sinne der hydrodynamischen Analogie Umströmung eines

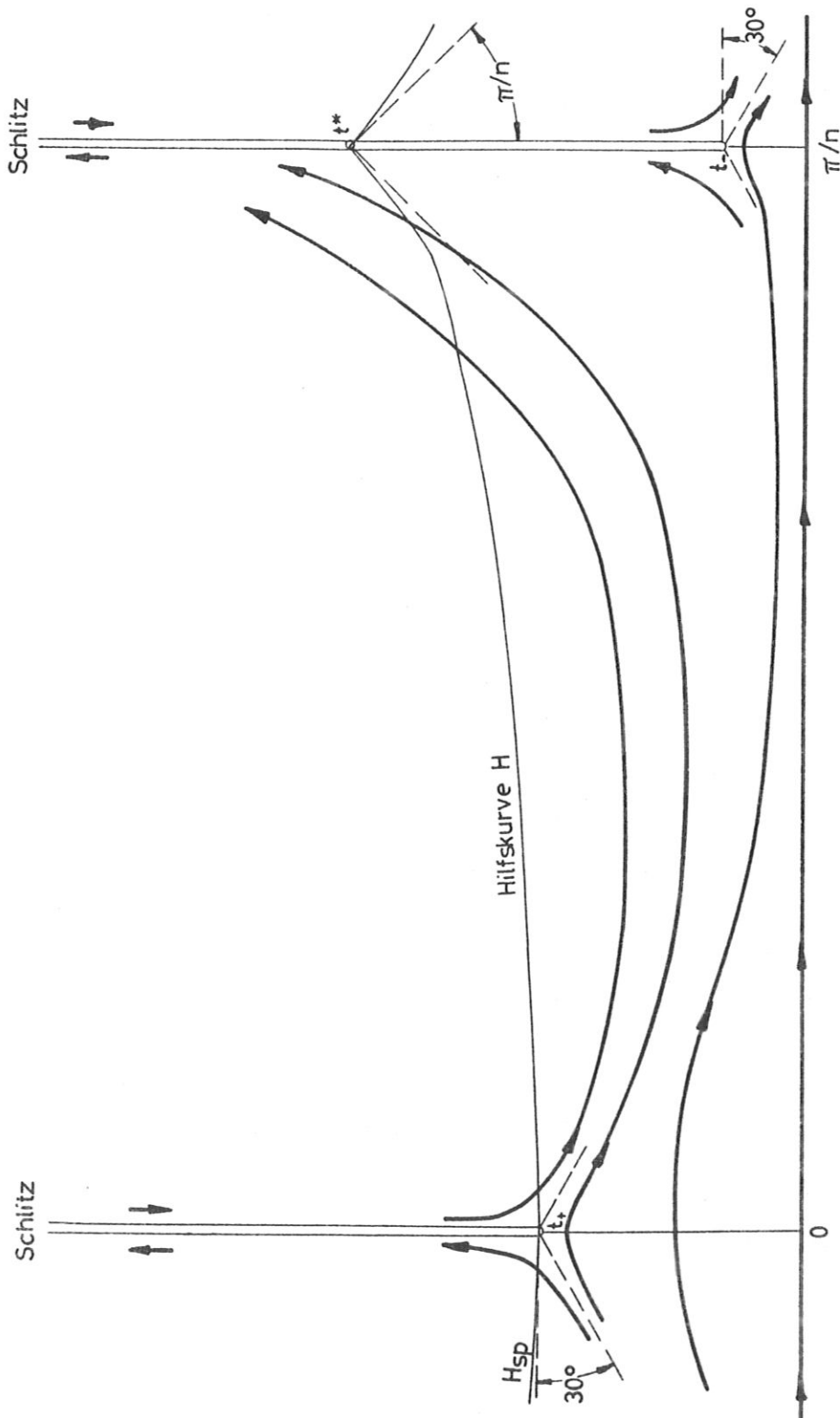


Abb. 4: Konfiguration im Elementarhalbstreifen der t -Ebene

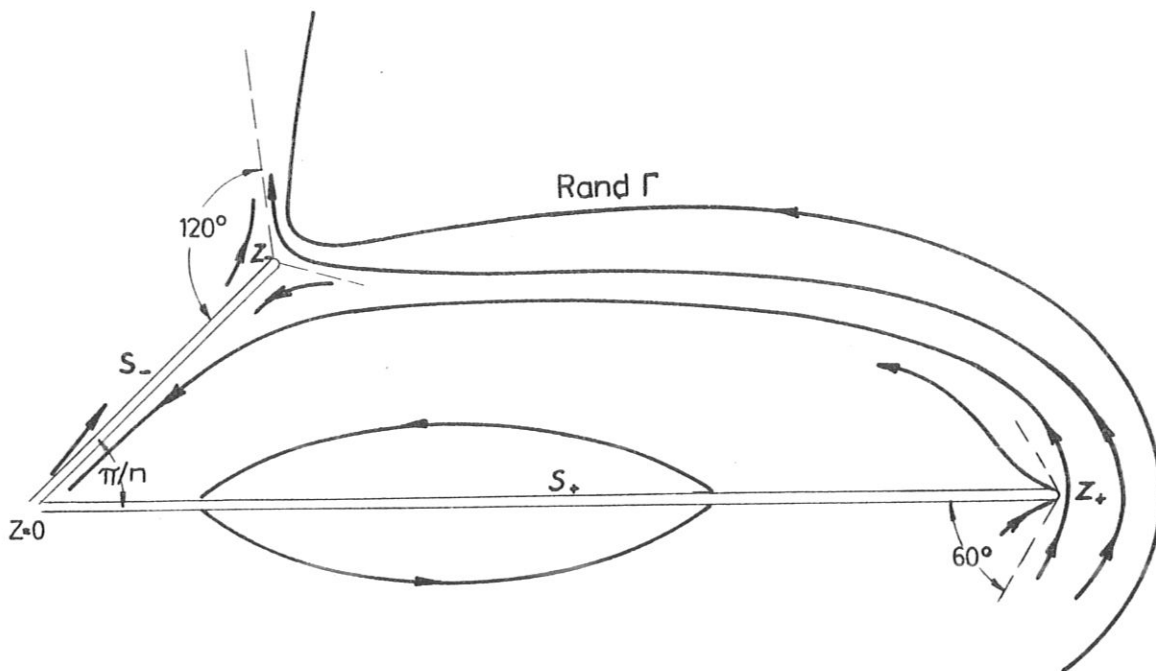


Abb. 5: Konfiguration im Elementarsektor der z -Ebene

Winkels der Größe π/α bei $z=0$. Analog haben wir an den Verzweigungspunkten t_+ und t_- Umströmung von Winkeln der Größe $2\pi/3 = 120^\circ$. Aus Symmetriegründen halbieren die Strahlen (21) mit $s < 0$ je einen der jeweils anliegenden drei Winkel, während aus Stetigkeitsgründen links von den Verzweigungsschnitten (21) mit $s > 0$ die Feldlinien nach oben (Im t wachsend), rechts nach unten laufen. Die in t bei $\text{Im } t = \infty$ liegende Singularität stellt eine Art Dipol dar; da in der z -Ebene das Bild der Umgebung von $t = \infty$ nicht erscheinen wird, sei auf detaillierte Durchrechnung verzichtet. ^{a6)}

Wichtig ist, daß zwischen 0 und t_+ "mehr" Feldlinien durchgehen als zwischen π/n und t_- . Zum Beweis normieren wir auf

$$W(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau, \quad \text{also } V=0 \quad \text{für reelle } t$$

(es sei $W = U + iV$ in Potentialfunktion U und Stromfunktion V zerlegt), und haben dann zu zeigen, daß

$$(22) \quad V(t_+) > V(t_-)$$

gilt. Da die Strecken zwischen 0 und t_+ und zwischen π/n und t_- von den Feldlinien orthogonal durchsetzt werden, hat man in

Form reeller Integrale

$$(23) \quad V(t_+) = \int_0^{\Im t_+} g(i\lambda) d\lambda, \quad V(t_-) = \int_0^{\Im t_-} g\left(\frac{\pi}{n} + i\lambda\right) d\lambda.$$

Aus

$$g(i\lambda) = (1 + n^2 \gamma^2 + 2\gamma \cosh n\lambda - (n^2 - 1)\gamma^2 \cosh^2 n\lambda)^{1/2} \quad \text{und}$$

$$g\left(\frac{\pi}{n} + i\lambda\right) = (1 + n^2 \gamma^2 - 2\gamma \cosh n\lambda - (n^2 - 1)\gamma^2 \cosh^2 n\lambda)^{1/2}$$

folgt mit (19) und (23) die Ungleichung (22).

Damit hat man die in Abb. 4 qualitativ skizzierte Konfiguration.

Die Abbildungen in den Elementarsektor E_z charakterisiert man am einfachsten durch Zuordnung der Ränder gemäß folgender Übersicht:

t	\longleftrightarrow	z
$0 \leq t \leq \pi/n$		$r = r(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/n$
$\Re t = \pi/n, \quad 0 \leq \Im t \leq \Im t_-$		$\varphi = \pi/n, \quad 1 - \gamma \geq r \geq z_- $
$\Re t = \pi/n, \quad \Im t_- \leq \Im t \leq \Im t^*$		$\varphi = \pi/n, \quad z_- \geq r \geq 0$
Kurve H von t^* bis t_+		$\varphi = 0, \quad 0 \leq r \leq z_+$
$\Re t = 0, \quad \Im t_+ \geq \Im t \geq 0$		$\varphi = 0, \quad z_+ \leq r \leq 1 + \gamma$

Die quer durch E laufende Hilfskurve H ist das Urbild in E von $0 \leq z \leq z_+$ und kann mit dem so beschränkten reellen

Parameter z numerisch punktweise bestimmt werden aus dem Gleichungssystem (15). Qualitativ ist wichtig, daß H die imaginäre t -Achse in t_+ orthogonal und die Gerade $\operatorname{Re} t = \pi/n$ in t^* von unten unter dem Winkel π/n trifft (π/n ist Zentriwinkel von E_z in $z=0$). Wegen der Invarianz der Randorientierung wird das von den angegebenen Kurvenstücken umschlungene t -Gebiet umkehrbar eindeutig und konform auf dasjenige z -Gebiet abgebildet, welches aus E_z durch Weglassen der Randpunkte entsteht.

Nur für das Wertepaar (t_+, z_+) ist die Konformität verletzt, da \dot{z} in E nur die Nullstelle t_+ hat. Da $\ddot{z}(t_+) \neq 0$ ist ^{a7)}, verdoppelt $z(t)$ alle bei t_+ anliegenden Winkel. Mithin hat man bei z_+ Umströmung eines Winkels der Größe $2 \cdot 2\pi/3 = 240^\circ$ mit der Halbierenden $\arg(z - z_+) = 0$, bei z_- aber Umströmung eines Winkels der Größe $2\pi/3 = 120^\circ$ mit der Halbierenden $\arg(z - z_-) = \pi/n$. Um die auf dem Rand von E_z liegenden Verzweigungsschnitte zu finden, bezeichnen wir mit H_φ die Kurve, die durch Spiegelung von H an der imaginären t -Achse entsteht, und mit S_+ die Strecke $\varphi = 0, 0 \leq r \leq z_+$. Wegen der Verdoppelung aller bei t_+ anliegenden Winkel wird durch $z(t)$ auch H_φ auf S_+ abgebildet. Es ist S_+ mit $\operatorname{Im} z = +0$ Bild von H , S_+ mit $\operatorname{Im} z = -0$ Bild von H_φ , die Strecke S_+ ist also Verzweigungsschnitt. Als Bild der auf einem t -Verzweigungsschnitt liegenden Strecke $\operatorname{Re} t = \pi/n, \operatorname{Im} t^* \geq \operatorname{Im} t \geq \operatorname{Im} t_-$, erhält man als weiteren Verzweigungsschnitt die Strecke $S_- = \{\varphi = \pi/n, 0 \leq r \leq |z_-|\}$. Ansonsten liegen keine weiteren Verzweigungsschnitte in E_z .

Die Richtung der Feldlinien in E_z erhält man durch Übertragung der entsprechenden Richtungen in E und Beachtung der Konformität. Die Strecken z_+ bis $(1+y)$ und z_- bis $(1-y) e^{i\pi/n}$ werden orthogonal von Feldlinien durchsetzt, in mathematisch positivem Drehsinn. Durch die erste Strecke geht ein größerer Fluß als durch die zweite. Die Feldlinien in den anderen Sektoren erhält man durch fortgesetzte Spiegelungen an den Strahlen $\varphi = \nu\pi/n$ und Ergänzung der Feldrichtung mittels Stetigkeitsbetrachtung. Unmittelbar bei S_- laufen die Feldlinien parallel zu S_- , auf beiden Seiten aber entgegengerichtet, in E in den Punkt $z=0$ hinein. Beim Überschreiten von S_+ bleibt B_n stetig, während B_t einen Sprung erleidet. Im

allgemeinen treffen die Feldlinien schräg auf S_+ .

Die das Feld erzeugenden Ströme (abgesehen vom Strom durch Γ) kann man durch eine noch geschlossene zur Randkurve Γ topologisch äquivalenten Feldlinie fließen lassen (in dem von dieser umschlossenen Gebiet ist dann $\mathcal{L} = 0$) oder aber durch die Schnitte S_+ und S_- und ihre Entsprechungen in den anderen Sektoren. Man vergleiche die in 4. angestellten Überlegungen. Es gibt natürlich noch mehr Möglichkeiten, man kann Ströme auch teilweise durch Feldlinien, teilweise durch Teile von S_+ und S_- fließen lassen. Läßt man nur durch die Verzweigungsschnitte die entsprechenden Ströme fließen, so hat man gerade die in Abb. 5 skizzierte Feldkonfiguration. Die Stromdichte j^* ist auf Γ konstant und negativ, auf S_- (abgesehen vom Punkt z_-) ebenfalls negativ, aber nicht konstant. Aus Bilanzgründen muß also durch S_+ ein positiver Gesamtstrom fließen. Daß j^* überall auf S_+ positiv sei, scheint plausibel, dürfte aber wegen der nicht explizit angebbaren Gestalt der Kurve H schwer beweisbar sein; H braucht ja nicht die in Abb. 4 skizzierte einfache Gestalt zu haben; wenn $\partial_n t^* < \partial_n t_+$ (die Tabelle zeigt, daß dies möglich ist), so muß H mindestens einen Wendepunkt haben. Bei z_- (Umströmung eines Winkels $< \pi'$) ist $\mathcal{L} = 0$ ^{a8)}, also $j^*(z_-) = 0$, bei Annäherung an z_- längs S_- strebt $j^* \rightarrow -0$. Bei z_+ (Umströmung eines Winkels $> \pi$) ist $|\mathcal{L}| = \infty$ ^{a8)}, unmittelbar neben z_+ erleiden die Feldlinien beim Überschreiten des Schnittes S_+ einen Knick um einen Winkel $\sim \pi/3 = 60^\circ$, wobei längs der orientierten Feldlinie r unterhalb des Schnittes wächst, oberhalb fällt. ^{a9)} Mithin ist $j^*(z_+) = +\infty$, bei Annäherung an z_+ längs S_+ strebt $j^* \rightarrow +\infty$. Bei Annäherung ans Zentrum $z=0$ strebt j^* gegen einen endlichen negativen Wert längs S_- , gegen einen endlichen positiven Wert längs S_+ ; gegen endliche Werte, da bei $t = t^*$ weder $g(t)$ noch $z(t)$ eine Besonderheit aufweist (außer der, daß $z(t^*) = 0$ ist und t^* auf einem Schnitt liegt).

Die Möglichkeit technischer Realisierung der diskutierten Anordnung soll hier nicht untersucht werden. Die Schwierigkeiten bestehen nicht nur darin, Ströme mit variabler Dichte durch

Drähte ⁷⁾ wirkungsvoll zu approximieren, sondern auch in der Wahl der Parameter n und γ . Wählt man γ zu klein (natürlich größer als der nach 2. zulässige Mindestwert γ_c), so ist das Plasmagebiet bei $\varphi = 2\pi r/n$ sehr dünn, da dann der Radius R des äußeren Kreises Γ_1 nur wenig größer ist als die Maximalentfernung $1+\gamma = \max r(\varphi)$ der inneren Kurve Γ_0 vom Punkt $z=0$. Andererseits rücken bei wachsendem γ die Singularitäten z_+ und z_- des G_c -Feldes schnell nahe an den inneren Rand Γ_0 des Plasmas. Zur Illustration diene die für $n=4$ berechnete Tabelle. Man beachte, daß schon für $\gamma = 0,01$ das G_c -Feld von dem mit $\gamma = 0$ (Potentialwirbel um $z=0$) erheblich abweicht. In der Tabelle sind die Singularitäten des G_c -Feldes auch für einige Werte $\gamma < \gamma_c \approx 0,30$ berechnet.

Offen ist die Frage, ob es auch Konfigurationen gibt, bei denen die G_c -Ströme nur durch isolierte Singularitäten (gerade Drähte) fließen, Verzweigungsschnitte also nicht erforderlich sind.

Herrn Professor Dr. A. Schlüter und Herrn Dr. K. Hain danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für zahlreiche Diskussionen. Für weitere Diskussionen danke ich Herrn Dr. W. Köppendörfer und Herrn Dr. H.U. Schmidt. Frau U. Berkl danke ich für Durchführung der numerischen Rechnungen auf der Garchinger IBM 7090 und für Aufstellung der zugehörigen Programme.

7) Die Ströme durch einen Verzweigungsschnitt, auf den die Feldlinien schräg (das heißt weder tangential noch orthogonal) auftreffen und dort einen Knick erleiden, müssen durch Drähte approximiert werden, die gegeneinander isoliert sind. Anderenfalls könnten die Ströme wegen der auftretenden Lorentz-Kräfte die z -Ebene nicht orthogonal durchsetzen (B_z ist ja stetig und $\neq 0$ beim Überschreiten des Schnittes).

Tabelle für den Fall $n = 4$

γ	$\operatorname{Im} t_+$	$\operatorname{Im} t_-$	$\operatorname{Im} t^*$	z_+	$ z_- $	$2\pi R$	R
0	∞	∞	∞	0	0	2π	1
0,01	1,050	0,922	1,325	0,467	0,318	6,29	1,0004
0,1	0,483	0,356	0,748	0,834	0,547	6,53	1,039
0,2	0,332	0,204	0,573	1,007	0,594	7,20	1,146
0,29						8,06	1,2834

0,3	0,259	0,131	0,468	1,139	0,577	8,17	1,3005
0,4	0,216	0,088	0,392	1,256	0,526	9,34	1,49
0,5	0,188	0,060	0,329	1,366	0,457	10,64	1,69
0,6	0,168	0,0407	0,275	1,471	0,376	12,04	1,92
0,7	0,154	0,0264	0,224	1,575	0,288	13,50	2,15
0,8	0,143	0,0155	0,173	1,677	0,195	15,01	2,39
0,9	0,135	0,0069	0,117	1,778	0,0990	16,55	2,63
0,95	0,131	0,0033	0,081	1,828	0,0498	17,34	2,76
0,99	0,128	0,0006	0,0355	1,868	0,0100	17,97	2,86

6. Anhang

Zu einigen knapp dargestellten Punkten dieser Arbeit sollen detaillierte Anmerkungen gemacht werden. Im Text sind diese Stellen mit ^{aj)} markiert, wobei j die Nummer der Anmerkung bedeutet.

a1) Zu Seite 5

Behauptung: Die Kurve

- (1) $r(\varphi) = 1 + \gamma \cos n\varphi$, $0 < \gamma < 1$,
ist für $0 < \gamma \leq 1/(n^2+1)$ eine Eilinie, für $\gamma > 1/(n^2+1)$
keine Eilinie.

Beweis: Man braucht nur zu zeigen, daß für die Krümmung

$$k(\varphi) = \frac{r^2 + 2r'^2 - r r''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$$

gilt

- (a) $k(\varphi) \geq 0$, wenn $0 < \gamma \leq 1/(n^2+1)$, φ beliebig,
(b) wenn $1 > \gamma > 1/(n^2+1)$, so gibt es Werte φ mit $k(\varphi) < 0$.

Da der Nenner von $k(\varphi)$ positiv ist, genügt es, den Zähler zu betrachten. Man findet $r' = -n\gamma \sin n\varphi$, $r'' = -n^2\gamma \cos n\varphi$, also $r^2 + 2r'^2 - r r'' = H(x, \gamma) = 1 + 2\gamma^2 n^2 + (2+n^2)\gamma x - (n^2-1)\gamma^2 x^2$, wenn man abkürzend $\cos n\varphi = x$ setzt.

Wir betrachten zuerst den Fall $n \geq 2$.

Da x in $J = \{-1 \leq x \leq 1\}$ variiert, und da der Koeffizient von x^2 negativ ist, ist in ganz J das quadratische Polynom $H(x, \gamma) \geq 0$ genau dann, wenn dies für die Randstellen $x=1$ und $x=-1$ zutrifft.

Nun ist

$$\begin{aligned} H(1, \gamma) &= 1 + 2\gamma^2 n^2 + (2 + n^2)\gamma - (n^2 - 1)\gamma^2 \\ &= (n^2 + 1) \left(\gamma + \frac{1}{n^2 + 1} \right) (\gamma + 1) > 0 \quad \text{für } 0 < \gamma < 1, \end{aligned}$$

während

$$\begin{aligned} H(-1, \gamma) &= 1 + 2\gamma^2 n^2 - (2 + n^2)\gamma - (n^2 - 1)\gamma^2 \\ &= (n^2 + 1) \left(\gamma - \frac{1}{n^2 + 1} \right) (\gamma - 1), \end{aligned}$$

also $H(-1, \gamma) \geq 0$ für $0 < \gamma \leq 1/(n^2 + 1)$,

aber $H(-1, \gamma) < 0$ für $1/(n^2 + 1) < \gamma < 1$.

Aus diesen Ungleichungen folgen (a) und (b).

Im Sonderfall $n=1$ ist $H(x, \gamma) = 1 + 2\gamma^2 + 3\gamma x$ monoton wachsend in x . Man braucht also nur $x = -1$ zu betrachten. Es ist $H(-1, \gamma) = 1 - 3\gamma + 2\gamma^2 = (1 - \gamma)(1 - 2\gamma)$, und dies ist ≥ 0 für $0 < \gamma \leq 1/2$, aber < 0 für $1/2 < \gamma < 1$. Wieder folgen (a) und (b).

Ohne lange Rechnung wird die Behauptung durch folgende Überlegung plausibel:

Für $\gamma = 0$ hat man einen Kreis (Krümmung > 0 und konstant).

Für sehr kleine γ ist die Krümmung nicht mehr konstant, aber immer noch überall positiv. Wenn γ einen gewissen Wert überschreitet, treten an den ungeradzahligem Vielfachen von π/n negative Werte der Krümmung auf (da dort $r(\varphi)$ minimal ist). Der Übergang von Eilinie zu Nichteilinie findet an dem Wert γ statt, für den $k(\pi/n) = 0$ ist. Aus der Bedingung

$$r^2 \left(\frac{\pi}{n} \right) + 2 r'^2 \left(\frac{\pi}{n} \right) - r \left(\frac{\pi}{n} \right) r'' \left(\frac{\pi}{n} \right) = 0$$

folgt wegen $r'(\pi/n) = 0$ die Bedingung

$$r \left(\frac{\pi}{n} \right) = r'' \left(\frac{\pi}{n} \right), \quad \text{also} \quad 1 + \gamma \cos \pi = -n^2 \gamma \cos \pi, \quad \text{und}$$

$$\text{daraus} \quad \gamma = 1 / (n^2 + 1).$$

a2) Zu Seite 6

Bedingungen für die Gültigkeit der Ungleichung (5)

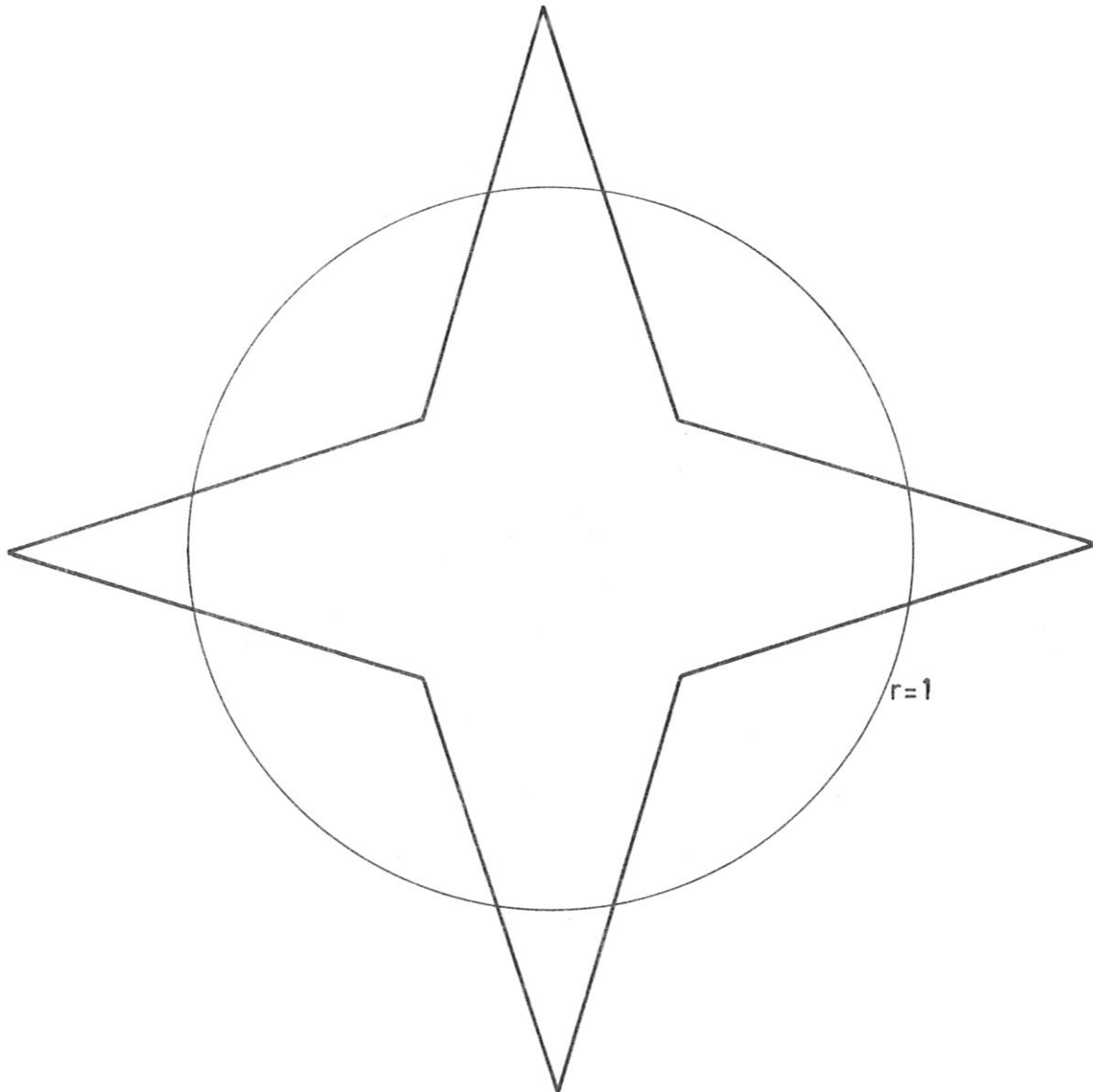


Abb. 6: Skizze von Γ^* für $n=4$, $\gamma = 0,5$

Das Polygon Γ^* hat $2n$ gleichlange Seiten. Jede Seite hat die Länge $|1 + \gamma - (1 - \gamma) e^{i\pi/n}|$, es ist also

$$L^* = 2n |1 + \gamma - (1 - \gamma) e^{i\pi/n}|.$$

Zur Abkürzung sei $\cos(\pi/n) = c_n$, $\sin(\pi/n) = s_n$ gesetzt.

Man findet

$$L^{*2} = 4n^2 (2 + 2\gamma^2 - 2(1 - \gamma^2)c_n).$$

Die Ungleichung (5) ist gleichbedeutend mit

$$(5') \quad H(\gamma) > 0,$$

wenn

$$H(\gamma) = \frac{1}{4} (L^{*2} - 4\pi^2 (1 + \gamma)^2).$$

Man findet

$$H(\gamma) = A\gamma^2 + B\gamma + C$$

mit

$$A = 2n^2(1 + c_n) - \pi^2, \quad B = -2\pi^2, \quad C = 2n^2(1 - c_n) - \pi^2.$$

Für die Diskussion des Verhaltens des quadratischen Polynoms

$H(\gamma)$ in Abhängigkeit von n und γ ist wichtig die Lage der Nullstellen

$$\gamma_{\pm} = (\pi^2 \pm 2n\sqrt{\pi^2 - n^2 s_n^2}) / A$$

und die Vorzeichen von A , $C = H(0)$ und $H(1) = 4(n^2 - \pi^2)$.

Wegen $s_n < \pi/n$ ist der Radikand positiv.

Die Stellen $\gamma = 0$ und $\gamma = 1$ sind deshalb wichtig, weil sie die Randpunkte des Intervalls $0 < \gamma < 1$ sind, in dem γ variiert.

Nützlich ist noch die Formel von VIETA

$$(6') \quad \gamma_+ \cdot \gamma_- = C/A,$$

aus der folgt, daß beide Nullstellen das gleiche Vorzeichen haben, falls $C/A > 0$ ist, aber verschiedene Vorzeichen, falls $C/A < 0$ ist.

Wir ermitteln die Vorzeichen von A , C und $H(1)$ für die verschiedenen Werte n und finden

$$A < 0 \quad \text{für } n=1 \quad \text{und } n=2,$$

$$A = 2n^2(1+c_n) - \pi^2 > 2n^2 - \pi^2 \geq 2 \cdot 3^2 - \pi^2 > 0 \quad \text{für } n \geq 3,$$

$$C = H(0) < 0 \quad \text{für alle } n,$$

$$H(1) = 4(n^2 - \pi^2) < 0 \quad \text{für } n \leq 3,$$

$$H(1) > 0 \quad \text{für } n \geq 4.$$

Daß $C < 0$ für alle n gilt, findet man für $1 \leq n \leq 3$ durch Einsetzen und Ausrechnen, für $n \geq 4$ wegen

$$0 < p = \pi/n < 1 \quad \text{aus der Reihenentwicklung}$$

$$C = 2n^2 \left(\frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{4!} p^4 + \dots \right) - \pi^2 = -\frac{1}{4!} p^4 + \dots$$

< 0 ; die Reihe alterniert nämlich und ihre Glieder nehmen dem Betrage nach monoton ab.

Für $n=1$ und $n=2$ ist $C/A > 0$, γ_+ und γ_- haben also beide das gleiche Vorzeichen, wegen $A < 0$ ist $\gamma_+ < 0$, also auch $\gamma_- < 0$. Wegen $A < 0$ ist $H(\gamma) \geq 0$ nur zwischen γ_+ und γ_- , in $0 < \gamma < 1$ ist also $H(\gamma) < 0$ (die Parabel $H = H(\gamma^-)$ ist dann nämlich nach unten geöffnet).

Für $n=3$ ist $A > 0$ (die Parabel $H = H(\gamma)$ also nach oben geöffnet); da aber $H(0)$ und $H(1)$ negativ sind, ist $H(\gamma) < 0$ in $0 < \gamma < 1$.

Man sieht, daß (5') für $1 \leq n \leq 3$ nicht erfüllbar ist.

Für $n \geq 4$ ist $C/A < 0$, also haben γ_+ und γ_- verschiedene Vorzeichen. Wegen $A > 0$ ist $\gamma_+ > 0$, also $\gamma_- < 0$. Wegen $H(0) < 0$ und $H(1) > 0$ liegt γ_+ zwischen 0 und 1, und in $\gamma^* = \gamma_+ < \gamma < 1$ ist $H(\gamma) > 0$. Es gilt also (5') und damit (5) unter der Bedingung (6). Für $0 < \gamma < \gamma^*$ ist $H(\gamma) < 0$, dort gilt also (5) nicht.

Das Verhalten von y^* bei $n \rightarrow \infty$ kann man durch Potenzreihenentwicklung ermitteln. Mit $p = \pi/n$ ist

$$s_n = p - \frac{1}{6} p^3 + O(p^5), \quad s_n^2 = p^2 - \frac{1}{3} p^4 + O(p^6), \quad c_n = 1 + O(p^2),$$

$$\pi^2 - n^2 s_n^2 = \pi^2 - \left(\pi^2 - \frac{1}{3} \pi^4 n^{-2} + O(n^{-4}) \right) = \frac{\pi^4}{3} n^{-2} (1 + O(n^{-2})),$$

$$\pi^2 + 2n (\pi^2 - n^2 s_n^2)^{1/2} = \pi^2 + \frac{2\pi^2}{\sqrt{3}} (1 + O(n^{-2})) = \pi^2 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) + O(n^{-2}),$$

$$(1 + c_n) 2n^2 - \pi^2 = 4n^2 + O(1) = 4n^2 (1 + O(n^{-2})).$$

Mithin ist

$$\begin{aligned} y^* &= (\pi/n)^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + O(n^{-2}) \right) / (1 + O(n^{-2})) \\ &= (\pi/n)^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + O(n^{-2}) \right) \end{aligned}$$

a3) Zu Seite 19

Die Nullstellen von $G(t)$

Es ist $G(t) = (1 + \gamma \cos nt)^2 + n^2 \gamma^2 \sin^2 nt$, $n \geq 2$, $0 < \gamma < 1$.

Wir interessieren uns nur für die in

$$E = \{ 0 \leq \operatorname{Re} t \leq \pi/n, \operatorname{Im} t \geq 0 \}$$

liegenden Nullstellen. Die Substitution $\tau = \cos nt$

liefert hierfür die quadratische Gleichung

$$\gamma^2 (n^2 - 1) \tau^2 - 2\gamma \tau - (1 + n^2 \gamma^2) = 0$$

mit den Lösungen

$$(17) \quad \tau = \tau_{\pm} = \frac{1}{\gamma(n^2 - 1)} \left(1 \pm n \sqrt{1 + \gamma^2 (n^2 - 1)} \right).$$

Beide Werte $\tilde{\tau}$ sind reell. Da nach VIETA

$$\tilde{\tau}_+ \cdot \tilde{\tau}_- = - (1 + n^2 \gamma^2) / (\gamma^2 (n^2 - 1)) < 0$$

ist, ist $\tilde{\tau}_+ > 0$, $\tilde{\tau}_- < 0$. Wegen

$$0 < (n^2 - 1)(1 - \gamma)^2 = n^2 (1 + \gamma^2 (n^2 - 1)) - (1 + \gamma (n^2 - 1))^2$$

ist

$$n \sqrt{1 + \gamma^2 (n^2 - 1)} > 1 + \gamma (n^2 - 1),$$

also

$$|\tilde{\tau}_-| = \frac{n \sqrt{1 + \gamma^2 (n^2 - 1)} - 1}{\gamma (n^2 - 1)} > 1.$$

Offensichtlich ist $\tilde{\tau}_+ > |\tilde{\tau}_-|$. Man hat also

$$(17') \quad \tilde{\tau}_- < -1, \quad \tilde{\tau}_+ > 1, \quad \tilde{\tau}_+ > |\tilde{\tau}_-|.$$

Da $|\cos nt| \leq 1$ für reelle t , sind die zugehörigen Werte t_{\pm} sicher nicht reell.

Mit $\zeta = e^{it}$, $\sigma = \zeta^n = e^{int}$ ist $\tau = \frac{1}{2} (\sigma + \frac{1}{\sigma})$,

also $\sigma^2 - 2\tau\sigma + 1 = 0$, $\sigma = \tau \pm \sqrt{\tau^2 - 1}$.

Es entsprechen sich

$$0 < 2m t < \infty, \quad 0 < |\zeta| < 1, \quad 0 < |\sigma| < 1.$$

Zu den Werten $\tilde{\tau}_{\pm}$ gibt es 4 Werte σ , nämlich

$$\sigma_{++} = \tilde{\tau}_+ + \sqrt{\tilde{\tau}_+^2 - 1},$$

$$\sigma_{+-} = \tilde{\tau}_+ - \sqrt{\tilde{\tau}_+^2 - 1},$$

$$\sigma_{-+} = \tilde{\tau}_- + \sqrt{\tilde{\tau}_-^2 - 1},$$

$$\sigma_{--} = \tilde{\tau}_- - \sqrt{\tilde{\tau}_-^2 - 1}.$$

Wegen (17') sind diese alle reell, und man sieht, daß

$$\sigma_{++} > 1, \quad \sigma_{--} < -1.$$

Nach VIETA ist

$$\sigma_{++} \cdot \sigma_{+-} = 1, \quad \sigma_{-+} \cdot \sigma_{--} = 1,$$

es folgt also

$$0 < \sigma_{+-} < 1, \quad -1 < \sigma_{-+} < 0.$$

Da uns nur das Gebiet $0 < |\sigma| < 1$ interessiert, benötigen wir nur noch die Werte σ_{+-} und σ_{-+} .

Wir setzen $\sigma_{+-} = s_+$, $|\sigma_{-+}| = s_-$, und beachten,

daß $t = -\frac{i}{n} \log \sigma = \frac{i}{n} \log \frac{1}{\sigma}$ ist. Wir haben

dann

$$t_+ = \frac{i}{n} \log \frac{1}{s_+} = \frac{i}{n} \log (\tau_+ + \sqrt{\tau_+^2 - 1}) \quad \text{mit} \quad \operatorname{Re} t_+ = 0,$$

$$t_- = -\frac{i}{n} \log \sigma_{-+} = -\frac{i}{n} (\log s_- + i\pi) = \frac{i}{n} \log \frac{1}{s_-} + \frac{\pi}{n}$$

$$= \frac{\pi}{n} + \frac{i}{n} \log |\tau_- - \sqrt{\tau_-^2 - 1}| \quad \text{mit} \quad \operatorname{Re} t_- = \frac{\pi}{n}.$$

Die anderen Lösungen

$t_+ + 2v\pi/n$, $t_- + 2v\pi/n$, $v = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$,
liegen nicht in E .

Wegen $1/s_{\pm} > 1$ ist $\operatorname{Im} t_{\pm} > 0$.

Wir zeigen noch, daß (19) gilt: Da

$$n \operatorname{Im} t_+ = \log (\tau_+ + \sqrt{\tau_+^2 - 1}),$$

$$n \operatorname{Im} t_- = \log |\tau_- - \sqrt{\tau_-^2 - 1}| = \log (|\tau_-| + \sqrt{|\tau_-|^2 - 1}),$$

und da $\log x$ monoton mit x wächst (für $x > 0$),

genügt es wegen $\tau_+ > |\tau_-| > 1$ zu zeigen, daß

$$x + \sqrt{x^2 - 1} > y + \sqrt{y^2 - 1}$$

ist, wenn nur $x > y > 1$ ist. Dies ist aber evident.

Mithin ist also $\operatorname{Im} t_+ > \operatorname{Im} t_-$.

Die Werte z_+ und z_- sind nun aus

$$z = (1 + \gamma \cos nt) e^{it} = \left(1 + \frac{\gamma}{2} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma}\right)\right) \sigma^{1/n}$$

zu bestimmen, wobei der Wert von $\sigma^{1/n}$ so gewählt werden muß, daß z in $E_z = G \cap \{0 \leq \varphi \leq \pi/n\}$ liegt. Diese Vorschrift liefert gerade die Werte (18'). Zu zeigen ist noch, daß $\varphi_- = \arg z_- = \pi/n$, das heißt, daß

$$(18'') \quad 1 - \frac{\gamma}{2} \left(s_- + \frac{1}{s_-}\right) > 0$$

ist. Äquivalent damit ist die Ungleichung

$$s_- + \frac{1}{s_-} < \frac{2}{\gamma}.$$

Wegen

$$s_- + \frac{1}{s_-} = |\sigma_{-+}| + \frac{1}{|\sigma_{-+}|} = \left| \sigma_{-+} + \frac{1}{\sigma_{-+}} \right|$$

$$= |\sigma_{-+} + \sigma_{--}| = 2 |\bar{c}_-| \quad \text{ist also zu zeigen, daß}$$

$$\gamma (n^2 - 1) |\bar{c}_-| < n^2 - 1, \quad \text{das heißt, daß}$$

$$(18''') \quad n \sqrt{1 + \gamma^2 (n^2 - 1)} - 1 < n^2 - 1.$$

Nun ist

$$1 + \gamma^2 (n^2 - 1) < 1 + 1 \cdot (n^2 - 1) = n^2,$$

die in (18''') linker Hand stehende Quadratwurzel ist also $< n$, und (18''') ist bewiesen. Es gilt also (18'').

a4) Zu Seite 20

Die Nullstelle t_+ von $\dot{z}(t)$

Wir verwenden wieder die Bezeichnungen, die wir bei der Ermittlung der Nullstellen von $\mathcal{G}(t)$ benutzt haben. Mit $\sigma = \zeta^n = e^{int}$ ist die Gleichung $\dot{z}(t) = 0$ äquivalent der quadratischen Gleichung

$$(c) \quad \gamma (n+1) \sigma^2 + 2\sigma - (n-1)\gamma = 0.$$

Ihre Lösungen sind

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{\gamma(n+1)} \left(-1 \pm \sqrt{1 + \gamma^2(n^2-1)} \right).$$

Lösungen, die in $|\sigma| > 1$ liegen, können wir nicht brauchen.

Die evidente Ungleichung

$$1 + \sqrt{\gamma^2 n^2 + (1-\gamma^2)} > \gamma + \gamma^n$$

ist äquivalent der Ungleichung

$$|\sigma_-| = \frac{1}{\gamma(n+1)} \left(1 + \sqrt{1 + \gamma^2(n^2-1)} \right) > 1.$$

Da nach VIETA $\sigma_+ \cdot \sigma_- = -(n-1)/(n+1) < 0$ und da $0 < \frac{n-1}{n+1} < 1$ ist, ist $|\sigma_+| < 1$.

Offensichtlich ist $\sigma_- < 0$, es ist also

$$0 < \sigma_+ < 1.$$

Wir brauchen also nur den in E liegenden zugehörigen Wert $t = t_+$ suchen. Dieser Wert ist identisch mit $t = t_+$, da, wie wir zeigen werden,

$$(d) \quad \sigma_+ = \sigma_{+-}$$

ist. t_+ ist nämlich der zu σ_{+-} gehörende Wert. Um (d) zu beweisen, führen wir zur Abkürzung die Größe $W = \sqrt{1 + \gamma^2(n^2-1)}$ ein und formen gemäß (17) den Ausdruck für σ_{+-} um. Man findet

$$\begin{aligned}
\sigma_{+-} &= \frac{1}{\gamma(n-1)(n+1)} \left(1 + nW - \sqrt{1 - \gamma^2 + n^2(1 + \gamma^2) + 2nW} \right) \\
&= \frac{1}{\gamma(n-1)(n+1)} \left(1 + nW - (n + W) \right) \\
&= \frac{1}{\gamma(n+1)} (-1 + W) = \sigma_+.
\end{aligned}$$

Mithin ist auch $t_1 = t_+$, die anderen zu σ_+ gehörenden Werte t liegen, wie bereits gezeigt (Seite 35) nicht in \bar{E} .

Wegen $\sigma_{+-} = s_+$ ist, wie wir noch anmerken wollen,

$$s_+ = \frac{\sqrt{1 + \gamma^2(n^2 - 1)} - 1}{\gamma(n+1)} = \frac{\gamma(n-1)}{\sqrt{1 + \gamma^2(n^2 - 1)} + 1}.$$

Analog kann man zeigen, daß

$$s_- = \frac{\sqrt{1 + \gamma^2(n^2 - 1)} - 1}{\gamma(n-1)} = \frac{\gamma(n+1)}{\sqrt{1 + \gamma^2(n^2 - 1)} + 1}.$$

a5) Zu Seite 20

Urbild t^* in \bar{E} von $z = 0$

Mit $\sigma = e^{\text{nit}}$ liefert $z = 0$ aus (15) die quadratische Gleichung

$$\gamma \sigma^2 + 2\sigma + \gamma = 0$$

mit den Lösungen

$$\sigma_1 = (-1 + \sqrt{1 - \gamma^2})/\gamma, \quad \sigma_2 = (-1 - \sqrt{1 - \gamma^2})/\gamma.$$

Da offensichtlich $\sigma_2 < -1$ ist, ist σ_2 unbrauchbar.

Nach VIETA ist $\sigma_1 \sigma_2 = 1$, also $-1 < \sigma_1 < 0$.

Man findet

$$\begin{aligned}
 t^* &= -\frac{i}{n} \log \sigma_1 = -\frac{i}{n} (\log |\sigma_1| + i\pi) \\
 &= \frac{\pi}{n} - \frac{i}{n} \log \frac{1 - \sqrt{1 - \gamma^2}}{\gamma} \\
 &= \frac{\pi}{n} + \frac{i}{n} \log \frac{1 + \sqrt{1 - \gamma^2}}{\gamma} \quad \text{mit } \operatorname{Re} t^* = 0, \operatorname{Im} t^* > 0.
 \end{aligned}$$

Die anderen Lösungen $t = t^* + 2\nu\pi/n$, $\nu = \pm 1, \pm 2, \dots$, liegen nicht in E .

Beweis von (19')

Für $\alpha > 0$ ist $z = \left(\frac{\pi}{n} + i\alpha\right) = f(\alpha) e^{i\pi/n}$ mit

$f(\alpha) = e^{-\alpha} (1 - \gamma \cosh n\alpha)$. Wegen der Monotonie von $\cosh n\alpha$ hat $f(\alpha)$ genau eine Nullstelle in $\alpha > 0$, nämlich

$\alpha = \alpha^*$, und es ist $t^* = \frac{\pi}{n} + i\alpha^*$. Für $0 < \alpha < \alpha^*$

ist $f(\alpha) > 0$, für $\alpha^* < \alpha$ ist $f(\alpha) < 0$. Es sei $t_- = \frac{\pi}{n} + i\alpha_-$.

Wie schon gezeigt, ist $\arg z_- = \varphi_- = \pi/n$, also $f(\alpha_-) > 0$.

Daraus folgt, daß $\operatorname{Im} t_- = \alpha_- < \alpha^* = \operatorname{Im} t^*$ ist.

a6) Zu Seite 20

Verhalten von $g(t)$

längs $\operatorname{Re} t = 0$, $\operatorname{Re} t = \pi/n$, in der Umgebung von t_+ und t_- , und für $\operatorname{Im} t \rightarrow \infty$. Wir benötigen die Beziehungen $\cos iz = \cosh z$, $\sin iz = i \sinh z$.

Verhalten von $G(t) = g^2(t)$ längs $t = i\alpha$, $0 \leq \alpha < \infty$

Aus (16) rechnet man aus, daß

$$G(i\alpha) = -\gamma^2(n^2 - 1) \cosh^2 n\alpha + 2\gamma \cosh n\alpha + (1 + n^2\gamma^2).$$

In $\alpha \geq 0$ hat $G(i\alpha)$ genau eine Nullstelle, die bereits berechnet ist, nämlich $\alpha = \alpha_+ = \operatorname{Im} t_+$. Da $G(i\alpha)$ ein

quadratisches Polynom der monoton wachsenden Funktion $\cosh n\alpha$ ist, da ferner $G(0) = (1+\gamma)^2 > 0$, aber $G(i\alpha) \rightarrow -\infty$ bei $\alpha \rightarrow +\infty$, folgt

$$(e1) \quad G(i\alpha) \begin{cases} > 0 & \text{für } 0 \leq \alpha < \alpha_+ \\ < 0 & \text{für } \alpha_+ < \alpha. \end{cases}$$

Verhalten von $G(t)$ längs $t = \pi/n + i\alpha$, $0 \leq \alpha < \infty$

Es ist

$$G\left(\frac{\pi}{n} + i\alpha\right) = -\gamma^2(n^2-1)\cosh^2 n\alpha - 2\gamma \cosh n\alpha + (1+n^2\gamma^2),$$

einzige Nullstelle in $0 \leq \alpha < \infty$ ist $\alpha = \alpha_- = \operatorname{Im} t_-$.

Wegen $G(\pi/n) = (1-\gamma)^2 > 0$ und $G(\frac{\pi}{n} + i\alpha) \rightarrow -\infty$ bei $\alpha \rightarrow +\infty$ gilt

$$(e2) \quad G\left(\frac{\pi}{n} + i\alpha\right) \begin{cases} > 0 & \text{für } 0 \leq \alpha < \alpha_- \\ < 0 & \text{für } \alpha_- < \alpha. \end{cases}$$

Verhalten von $G(t)$ bei $\operatorname{Im} t \rightarrow \infty$

Wir setzen $\tau = \cos nt$ und haben dann

$$(e3) \quad G(t) = H(\bar{\tau}) = -\gamma^2(n^2-1)\tau^2 + 2\gamma\bar{\tau} + (1+\gamma^2n^2).$$

Setzt man $nt = \mu + i\lambda$, so gelten für in E liegende t die Ungleichungen

$$0 \leq \mu \leq \pi, \quad 0 \leq \lambda < \infty.$$

Man hat dann

$$\tau = \cos(\mu + i\lambda) = \cos \mu \cosh \lambda - i \sin \mu \sinh \lambda,$$

$$|\tau|^2 = \cos^2 \mu \cosh^2 \lambda + \sin^2 \mu \sinh^2 \lambda,$$

und mit $\operatorname{Im} t \rightarrow \infty$ geht $\lambda \rightarrow \infty$, also

$|\tau|^2 \rightarrow \infty$, da $\cos \mu$ und $\sin \mu$ nicht gleichzeitig verschwinden können. Mithin ist

$$(e4) \quad G(t) \sim -\gamma^2(n^2-1)\cos^2 nt \quad \text{bei} \quad \operatorname{Im} t \rightarrow \infty.$$

Verhalten von $g(t)$ in den Umgebungen von t_+ und t_-

Es ist in der Nähe von t_{\pm}

$$G(t) \sim \dot{G}(t_{\pm}) (t - t_{\pm}), \quad \text{falls } \dot{G}(t_{\pm}) \neq 0.$$

Aus

$$\dot{G}(t) = H(\bar{t}) \frac{d\bar{t}}{dt} = -2n\gamma (1 - \gamma(n^2 - 1)\tau) \sin nt,$$

$$H(\bar{t}_{\pm}) = \pm 2\gamma n \sqrt{1 + \gamma^2(n^2 - 1)}, \quad \sin nt_{\pm} = \pm \sin\left(i \log \frac{1}{s_{\pm}}\right) = \pm \frac{i}{2} \left(\frac{1}{s_{\pm}} - s_{\pm}\right),$$

folgt

$$(e5) \quad \dot{G}(t_{\pm}) = i\gamma n^2 \sqrt{1 + \gamma^2(n^2 - 1)} \left(\frac{1}{s_{\pm}} - s_{\pm}\right).$$

Wegen $0 < s_{\pm} < 1$ ist $\frac{1}{s_{\pm}} - s_{\pm} > 0$, also

$$\dot{G}(t_{\pm}) \neq 0, \quad \arg \dot{G}(t_{\pm}) = \pi/2.$$

$$\text{Mit } C_{\pm} = \gamma n^2 \sqrt{1 + \gamma^2(n^2 - 1)} \left(\frac{1}{s_{\pm}} - s_{\pm}\right) > 0$$

ist

$$G(t) \sim i C_{\pm} (t - t_{\pm}) \quad \text{bei } t \rightarrow t_{\pm}.$$

Es folgt

$$g(t) \sim e^{i\pi/4} \sqrt{C_{\pm}} (t - t_{\pm})^{1/2},$$

wenn wir die t -Ebene längs $t = t_{\pm} + is$, $s \geq 0$,

aufschlitzen und uns für den Zweig von $(t - t_{\pm})^{1/2}$

entscheiden, der für positive Werte $t - t_{\pm}$ positiv ist.

Da $g(t) > 0$ ist für reelle t , folgt aus (e1) und (e2)

aus Stetigkeitsgründen, daß

$$(e6) \quad \begin{cases} g(t) > 0 & \text{für } t = i\alpha, \quad 0 \leq \alpha < \alpha_+, \\ \text{und für } t = \frac{\pi}{n} + i\alpha, \quad 0 \leq \alpha < \alpha_-. \end{cases}$$

Wählt man den oben angegebenen Zweig der Quadratwurzel, so

hat man für $t - t_{\pm} = -i\lambda$, $\lambda > 0$, in Überein-

stimmung mit (e6)

$$g(t) \sim e^{i\pi/4} \sqrt{C_{\pm}} \cdot e^{-i\pi/4} \sqrt{\lambda} > 0.$$

Für das komplexe Potential $W(t)$ erhält man durch Integration

$$W(t) - W_{\pm} \sim \frac{2}{3} e^{i\pi/4} \sqrt{C_{\pm}} (t - t_{\pm})^{3/2}.$$

Bis auf unwesentliche Konstante hat man qualitativ das gleiche Verhalten, wie es das Potential

$$w(z) = e^{i\pi/4} z^{3/2}$$

in der Umgebung von $z=0$ aufweist, wobei die z -Ebene längs der positiv-imaginären Achse aufgeschlitzt und $z^{3/2} > 0$ für $z > C$ ist. Mit $z = r e^{i\varphi}$ wird

$$w(z) = r^{3/2} e^{i\left(\frac{3}{2}\varphi + \frac{\pi}{4}\right)}, \quad -\frac{3\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2},$$

die zugehörige Stromfunktion ist

$$\psi(z) = r^{3/2} \sin\left(\frac{3}{2}\varphi + \frac{\pi}{4}\right).$$

Die Nullstromlinien sind gegeben durch $\psi = 0$, also

$\frac{3}{2}\varphi + \frac{\pi}{4} = \nu\pi$, $\varphi = \frac{2}{3}\nu\pi - \frac{\pi}{6}$, ν ganzzahlig,
woraus 3 Nullstromlinien folgen, nämlich

$$\varphi_0 = -\pi/6 = -30^\circ, \quad \varphi_1 = \varphi_0 + \frac{2}{3}\pi = 90^\circ, \quad \varphi_{-1} = \varphi_0 - \frac{2}{3}\pi = -150^\circ.$$

Man vergleiche Abbildungen 7 und 4. Es ist $\varphi_{\nu+1} - \varphi_{\nu} = 120^\circ$.

Das allgemeinere komplexe Potential $w = e^{i\beta} z^\alpha$, $\alpha > 0$, β reell, wird in a8) untersucht.

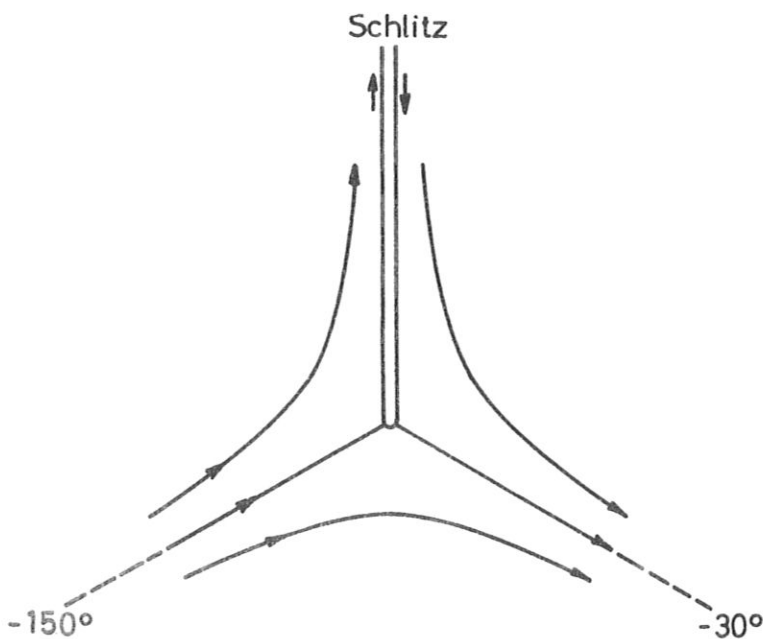


Abb. 7: Das Feld $\overline{g(t)}$ in der Umgebung der Stellen $t = t_{\pm}$

Verhalten von $g(t)$ längs $\operatorname{Re} t = 0$ und $\operatorname{Re} t = \pi/n$

Da mit der Bezeichnung

$$(21) \quad t = t_{\pm} + i s$$

nach (e6) $g(t) > 0$ ist für $s < 0$, brauchen wir nur noch $s > 0$ zu betrachten. Aus (e1) und (e2) folgt, daß $\overline{g(t)}$ dort rein imaginär ist. Aus der Skizze des Vektorfeldes $\overline{g(t)}$ in der Umgebung der Stellen t_{\pm} ersieht man, daß links vom Schlitz $\operatorname{Im} \overline{g(t)} > 0$, rechts vom Schlitz $\operatorname{Im} \overline{g(t)} < 0$ ist. Mithin gilt

$$(e7) \quad g(t) = \begin{cases} -i \sqrt{|G(t)|} & \text{für (21) mit } s > 0, \text{ links vom Schlitz} \\ +i \sqrt{|G(t)|} & \text{für (21) mit } s > 0, \text{ rechts vom Schlitz.} \end{cases}$$

Verhalten von $g(t)$ für $\operatorname{Im} t \rightarrow \infty$

Wir beschränken uns auf den Halbstreifen E und brauchen dann zu jedem Schlitz nur ein Ufer zu betrachten. Beachtet man, daß $\cos i\alpha = \cosh \alpha > 0$ für $\alpha \geq 0$ ist, und daß für $\alpha \rightarrow \infty$ rechts vom Schlitz $\operatorname{Im} g(t) > 0$ ist, so folgt aus (e4)

$$(e8) \quad g(t) \sim i \gamma \sqrt{n^2 - 1} \cos n t \quad \text{bei } \operatorname{Im} t \rightarrow \infty.$$

Mit $t = \beta + i\alpha$, $0 \leq \beta \leq \pi/n$, $\alpha \geq 0$, resultiert

$$g(t) \sim \gamma \sqrt{n^2 - 1} (\sin n\beta \sinh n\alpha + i \cos n\beta \cosh n\alpha).$$

Wegen $\cosh n\alpha \sim \sinh n\alpha \sim \frac{1}{2} e^{n\alpha}$ folgt

$$\begin{aligned} |g(t) / (\gamma \sqrt{n^2 - 1})|^2 &\sim \sin^2 n\beta \sinh^2 n\alpha + \cos^2 n\beta \cosh^2 n\alpha \\ &\sim \frac{1}{4} e^{2n\alpha} \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

bei $\operatorname{Im} t \rightarrow \infty$ wächst also die Feldstärke über alle Grenzen.

Die Feldrichtung bestimmen wir aus $\arg \overline{g(t)}$.

Es ist

$$\operatorname{tg} \arg \overline{g(t)} \sim -\cot n\beta \operatorname{coth} n\alpha \sim -\cot n\beta = \operatorname{tg} \left(n\beta - \frac{\pi}{2} \right),$$

da $\operatorname{coth} n\alpha \rightarrow 1$ geht. Also ist

$$\arg \overline{g(t)} \sim n\beta - \frac{\pi}{2}.$$

Die Richtung des Feldes wächst bei $\operatorname{Im} t \gg 1$ linear mit β , und zwar von $-\pi/2$ bis $\pi/2$. Mit der Feldrichtung längs der Schlitzes stimmt dies überein.

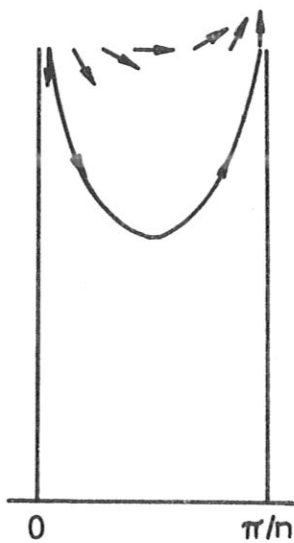


Abb. 8: Das Feld $\overline{g(t)}$ für $\operatorname{Im} t \rightarrow \infty$

a7) Zu Seite 24

Behauptung: $\ddot{z}(t_+) \neq 0$.

Beweis: Mit $\zeta = e^{it}$ ist $\dot{\zeta} = i\zeta$ und

$$2z(t) = 2\zeta + \gamma \zeta^{n+1} + \gamma \zeta^{-n+1},$$

$$2\dot{z}/i = 2\zeta + \gamma(n+1)\zeta^{n+1} + \gamma(-n+1)\zeta^{-n+1},$$

$$-2\ddot{z} = 2\zeta + \gamma(n+1)^2\zeta^{n+1} + \gamma(n-1)^2\zeta^{-n+1},$$

also

$$K(t) = -2\ddot{z}/\zeta = 2 + \gamma(n+1)^2\zeta^n + \gamma(n-1)^2\zeta^{-n}.$$

Zur Abkürzung führen wir wieder (man vergleiche Seite 37/38)

$$W = \sqrt{1 + \gamma^2 (n^2 - 1)}$$

ein. Dann ist

$$t_+ = t_1 = \frac{i}{n} \log \frac{\gamma(n+1)}{W-1} = \frac{i}{n} \log \frac{W+1}{\gamma(n-1)},$$

also

$$\zeta_+^n = e^{nit_+} = \frac{W-1}{\gamma(n+1)}, \quad \zeta_+^{-n} = \frac{W+1}{\gamma(n-1)}.$$

Man sieht, daß $\zeta_+ \neq 0$ ist. Zu beweisen bleibt nur, daß $K(t_+) \neq 0$ ist: Es ist

$$K(t_+) = 2 + (n+1)(W-1) + (n-1)(W+1) = 2nW \neq 0.$$

a8) Zu Seite 25

Feldstärke bei z_+ und z_-

Das komplexe Potential

$$w = z^\alpha, \quad \alpha > 0,$$

charakterisiert die Umströmung eines Winkels der Größe π/α bei $z=0$. Aus

$$w = r^\alpha e^{i\alpha\varphi}$$

folgen nämlich als Nullstromlinien $v = r^\alpha \sin \alpha\varphi = 0$ die Strahlen

$$\varphi = v\pi/\alpha, \quad v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Es ist $w' = \alpha z^{\alpha-1} = \alpha r^{\alpha-1} e^{i(\alpha-1)\varphi}$,

als Strömungsgeschwindigkeit hat man also

$$\overline{w'} = \alpha r^{\alpha-1} e^{i\varphi} e^{-i\alpha\varphi}.$$

Durchläuft man zyklisch die Strahlen $v\pi/\alpha$, $v = 0, 1, 2, \dots$; so zeigt auf ihnen $\overline{w'}$ abwechselnd vom Ursprung $z=0$ weg oder auf ihn zu. Allgemein erhält man die Richtung des Vektors $\overline{w'}$ durch Drehung des vom Ursprung wegzeigenden Vektors $e^{i\varphi}$ um $-\alpha\varphi$.

Es ist

$$\left| \overline{\omega'(0)} \right| = \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha > 1 \\ \infty & \text{für } 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Das komplexe Potential $w = e^{i\beta} z^\alpha$, β reell,
 liefert wegen $w = r^\alpha e^{i\alpha(\varphi + \frac{\beta}{\alpha})}$ die
 Konfiguration, die aus der zu $w = z^\alpha$ gehörenden durch Dre-
 hung um den Winkel $-\beta/\alpha$ entsteht. Abbildung 7 stellt den Fall
 $\alpha = 3/2$, $\beta = \pi/4$ dar, Abbildung 9 den Fall $\alpha = 3/4$, $\beta = -\pi/2$.

a9) Zu Seite 25

Verhalten des Feldes in der Umgebung von z_+

Wir denken uns die singuläre Stelle z_+ in den Nullpunkt ver-
 schoben und haben dann in der Umgebung von $z=0$ qualitativ das
 komplexe Potential

$$w = e^{-i\pi/2} z^{3/4}.$$

Längs der negativ reellen Achse ist die z -Ebene aufgeschlitzt,
 $z^{3/4}$ soll positiv sein für positive z . Also ist

$$w = r^{3/4} \exp\left(i\left(\frac{3}{4}\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right), \quad -\pi < \varphi < +\pi.$$

Wegen $w = r^{3/4} \sin\left(\frac{3}{4}\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$ findet man die Nullstrom-
 linien aus $\frac{3}{4}\varphi - \frac{\pi}{2} = \nu\pi$ als die Strahlen

$$\varphi = \frac{4}{3}\nu\pi + \frac{2}{3}\pi, \quad \nu \text{ ganzzahlig,}$$

also $\varphi = \nu \cdot 240^\circ + 120^\circ$. Man hat also die Strahlen

$$\varphi_0 = 120^\circ, \quad \varphi_{-1} = -120^\circ.$$

Die Strahlen $\varphi_1 = 360^\circ$ und $\varphi_{-2} = -360^\circ$ liegen außer-
 halb $-\pi < \varphi < \pi$.

Die Feldstärke ist

$$\overline{w'} = \frac{3}{4} r^{-1/4} e^{i\varphi} \exp\left(i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\varphi\right)\right),$$

für $\varphi = 0$ (auf der Halbachse $z > 0$) ist also

$\overline{\omega^{-1}} = i \cdot \frac{z}{4} \uparrow^{-1/4}$, $\overline{\omega^{-1}}$ steht senkrecht auf der

Halbachse $z > 0$ und weist nach oben.

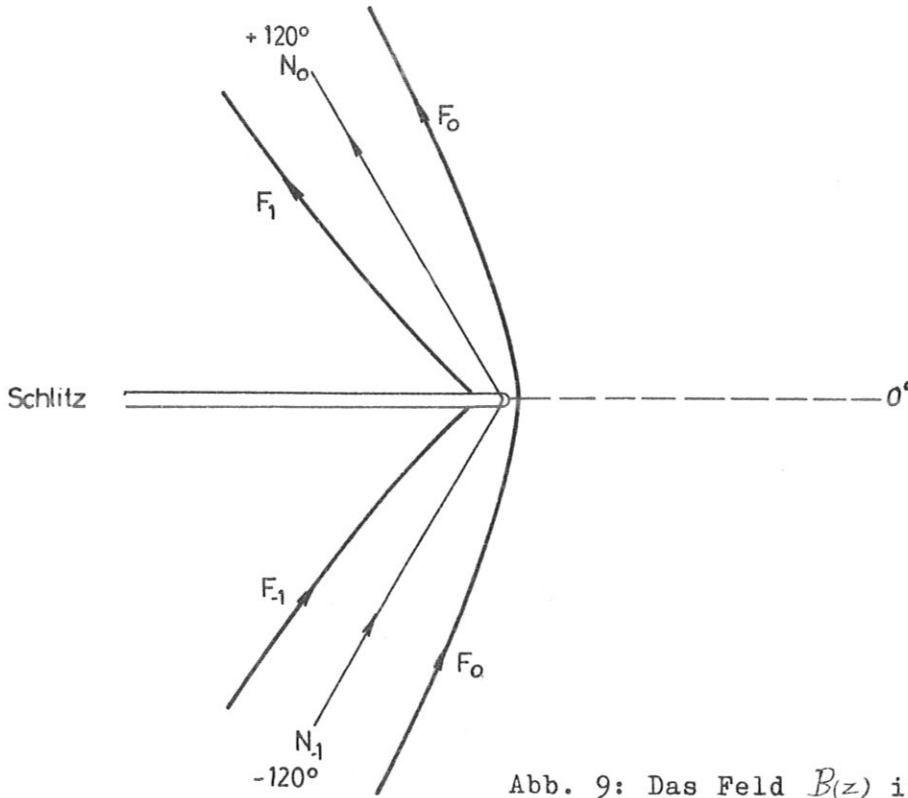


Abb. 9: Das Feld $B(z)$ in der Umgebung von z_+

Unmittelbar neben $z = 0$ betrachten wir die Feldlinien

F_{-1}, F_0, F_1 . Mit N_0 und N_{-1} sind die Nullstromlinien

bezeichnet. Man sieht, daß die Stromlinie F_0 senkrecht die Halbierende des Winkels (N_{-1}, N_0) schneidet, die aus

N_{-1} durch Drehung um $+120^\circ$ entsteht. Analog schneidet die

Fortsetzung von F_1 über den Schlitz hinaus senkrecht den Strahl N_{-1} , der aus N_0 durch Drehung um $+120^\circ$ entsteht. N_0

geht durch Drehung um $+60^\circ$ in die negativ reelle Achse über, ebenso N_{-1} durch Drehung um -60° . Also bildet F_1 mit der negativ reellen Achse einen Winkel von $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Das

gleiche gilt für F_{-1} . Mithin erleiden die Feldlinien beim Überschreiten des Schlitzes einen Knick von $60^\circ = 2 \cdot 30^\circ$.

Unmittelbar bei z_+ ist längs des Schlitzes $|B_t| = |B| \cdot \cos 30^\circ$, wegen $|B| \rightarrow \infty$ geht also auch $|B_t| \rightarrow \infty$ bei $z \rightarrow z_+$

längs des Schlitzes. Wegen des Knicks geht dort also

$j^*(z) \rightarrow +\infty$ auf dem Schlitz.

Literaturverzeichnis

- [1] L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, Band I, Chelsea Publishing Company, New York 1945.
- [2] W. Blaschke und H. Reichardt, Einführung in die Differentialgeometrie, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1960.
- [3] H. Lamb, Hydrodynamics, Dover Publications, New York 1945.
- [4] F. Meyer und H.U. Schmidt, Torusartige Plasmakonfigurationen ohne Gesamtstrom durch ihren Querschnitt im Gleichgewicht mit einem Magnetfeld. Zeitschrift für Naturforschung 13a, Seite 1005 - 1015 (1958).
- [5] K. Strubecker, Differentialgeometrie I, Sammlung Göschen 1113 / 1113a, Berlin 1955.