

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Plasmadiagnostik durch nichtlineare
Resonanzwinkelstreuung

(Plasma Diagnostics by Nonlinear
Resonant-Angle Scattering).

A. Salat

A. Schlüter

IPP 6/30

Dezember 1964

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

IPP 6/30

A.Salat
A.Schlüter

Plasma Diagnostics by Nonlinear
Resonant-Angle Scattering.
December 1964 (in German)

ABSTRACT:

Nonlinear scattered light with twice the frequency of the incident beam is in phase with the mechanism by which it is produced for some particular angle of emission, and hence has a resonant character in that direction. The angle is a function of the electron density in the plasma. The intensity and the angular width of the resonant beam are discussed. The experimental application to present laboratory plasmas may be practicable, when strong lasers are developed in the infrared region.

A. Einleitung.

Die Theorie der Lichtstreuung an Dichtefluktuationen im Plasma ist wohlbekannt und ihre Anwendung zur experimentellen Plasmadiagnostik mit Erfolg möglich [1,2,3,4]. Information gewinnt man dabei aus der Analyse der Streuspektren.

-
- [1] Fünfer E., Kronast B., Kunze H.-J.: Phys.Lett.5, 125 (63)
[2] Kunze H.-J., Fünfer E., Kronast B., Kegel W.: Phys.Lett.11, 42(64)
[3] Davies W.E., Ramsden S.A.: Phys.Lett.8, 179 (64)
[4] Ramsden S.A., Davies W.E.: Phys.Rev.Lett. 13, 227 (64)

In vorliegender Arbeit wird eine Methode diskutiert, durch nichtlineare Lichtstreuung auf geometrisch-optischem Weg die Elektronendichte zu bestimmen. Dabei wird ausgenutzt, daß der Brechungsindex für elektromagnetische Wellen im Plasma von der Elektronendichte abhängt, gemäß der Dispersionsrelation

$$k^2 c^2 - \omega^2 + \omega_p^2 = 0 \quad k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad (A1)$$

$k = n|k| = nk =$ Wellenzahlvektor $\omega =$ Frequenz

$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m}} =$ Plasmafrequenz

Der zur Beleuchtung verwendete Lichtstrahl habe Frequenz bzw. Wellenzahlvektor ω_1 bzw. k_1 . Dann entsteht bei ausreichender Lichtintensität durch nichtlineare Effekte harmonisches Streulicht mit der durch $2\omega_1$ und $2k_1$ bestimmten Phase. Es breitet sich vom Strahl weg mit der Frequenz $2\omega_1$ und der aus (A1) folgenden Wellenzahl k_2 aus. Erzeugung und Ausbreitung der Harmonischen bleiben genau nur für die Ausbreitungsrichtung n in Phase, für die die Projektion von $k_2 n$ auf die Strahlrichtung mit $2k_1$ zusammenfällt.

Aus (A1) errechnet sich leicht für den Resonanzstreuwinkel ϑ_1 :

$$\cos^2 \vartheta_1 = \left(\frac{2k_1}{k_2} \right)^2 \approx 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{\omega_p}{\omega_1} \right)^2 \quad \sin \vartheta_1 \approx \sqrt{3} \frac{\omega_p}{2\omega_1} \quad (A2)$$

so daß ϑ_1 ein eindeutiges Maß für die Elektronendichte des Streuvolumens ist.

B. Plasmagleichungen.

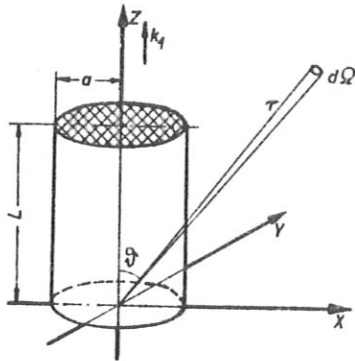


Abb. 1

Das nichtlineare Streulicht wird in zwei Schritten gewonnen. Im ersten Teil wird das Plasma der Störung durch die einfallende Lichtwelle ausgesetzt, und diese Störung als Größe erster Ordnung mit linearisierten Gleichungen behandelt. Größen erster Ordnung werden mit oberem Index (1) bezeichnet, so dass z.B. die einfallende Welle im Plasma das elektrische Feld $\mathcal{E}^{(1)}$ besitzt.

$$\mathcal{E}^{(1)}(r, t) = \mathcal{E}_1 \sin(k_1 r - \omega_1 t + \varphi) =: \mathcal{E}_1 \sin \Phi \quad (\text{B1})$$

Das Koordinatensystem wird mit der z-Achse in k_1 -Richtung gelegt. (Siehe Abb. 1)

Das ungestörte Plasma wird durch Größen nullter Ordnung gekennzeichnet, zu denen auch ein homogenes konstantes Magnetfeld

$$\mathcal{E}^{(0)} =: |\mathcal{E}^{(0)}| \cdot \hat{b} \quad (\text{B2})$$

gehört. Das Verhältnis von Gyro - zu Lichtfrequenz ω_H / ω_1 mit

$$\omega_H = \left| \frac{e \mathcal{E}^{(0)}}{m c} \right| \quad \begin{array}{l} e = \text{Elektronenladung} \\ m = \text{Elektronenmasse,} \end{array} \quad (\text{B3})$$

soll so klein sein, daß der Einfluß des Magnetfeldes auf die Ausbreitung des Lichtes zu vernachlässigen ist.

→ keine Änderung der Dispersionsber. durch Magnetfeld

In der zweiten Ordnung treten nichtlineare Effekte auf, darunter das Streulicht zweiter Ordnung mit der doppelten Frequenz. Da es sich um Streuung an erzwungenen kohärenten und nicht an thermischen Fluktuationen handelt, genügen zur Beschreibung makroskopische Plasmagleichungen.

Die Bewegungsgleichungen für ein kaltes Elektronenplasma lauten

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla \right) v = \frac{e}{m} \left(\mathcal{E} + \frac{v}{c} \times \mathcal{B} \right) \quad (\text{B4})$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n v) = 0 \quad (\text{B5})$$

Streuung an den Ionen ist wegen deren großer Masse zu vernachlässigen.

Dazu kommen die Maxwell'schen Gleichungen, die sich zur Differentialgleichung für das elektrische Feld umformen lassen

$$\left(c^2 \text{rot rot} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathcal{E} = -4\pi \frac{\partial}{\partial t} j \quad (\text{B6})$$

mit der Stromstärke

$$j = e n v \quad (\text{B7})$$

Die im folgenden auftretenden Verhältnisse ω_p/ω_1 , ω_H/ω_1 werden durchweg als klein gegen eins betrachtet und nur in niedrigster sinnvoller Ordnung mitgenommen.

C. Streulicht

(B4) lautet in erster Ordnung

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{w}}^{(1)}}{\partial t} = \frac{e}{m} \left(\dot{\mathbf{z}}^{(1)} + \frac{\dot{\mathbf{w}}^{(1)}}{c} \times \dot{\mathbf{z}}^{(0)} \right), \quad (\text{C1})$$

und nach der zweckmäßigen Zerlegung in Komponenten senkrecht und parallel zum Magnetfeld erhält man die Lösung

$$\dot{\mathbf{w}}^{(1)} = \frac{e}{m\omega_1} \left\{ \dot{\mathbf{z}}_1 \cos \Phi + \frac{\omega_H}{\omega_1} \mathbf{b} \times \dot{\mathbf{z}}_1 \sin \Phi \right\} \quad (\text{C2})$$

Aus (B5) folgt

$$\ddot{\mathbf{w}}^{(1)} = \frac{en\omega_H}{m\omega_1^3} (\mathbf{k}_i [\mathbf{b} \times \dot{\mathbf{z}}_1]) \cos \Phi \quad (\text{C3})$$

und für das $\dot{\mathbf{z}}$ -Feld der Welle

$$\dot{\mathbf{z}}^{(1)} = \frac{1}{\omega_1} \mathbf{k}_i \times \dot{\mathbf{z}}_1 \sin \Phi \quad (\text{C4})$$

Für das Feld zweiter Ordnung wird $\frac{\partial}{\partial t} \dot{\mathbf{z}}^{(2)}$ gebraucht:

$$\frac{\partial}{\partial t} \dot{\mathbf{z}}^{(2)} = en \frac{\partial}{\partial t} \dot{\mathbf{w}}^{(2)} + e \frac{\partial}{\partial t} (\dot{\mathbf{w}}^{(1)} \dot{\mathbf{z}}^{(1)}) \quad (\text{C5})$$

mit

$$\frac{\partial}{\partial t} \dot{\mathbf{w}}^{(2)} = \frac{e}{m} \ddot{\mathbf{z}}^{(2)} + \frac{e}{m\omega_1} \dot{\mathbf{w}}^{(2)} \times \dot{\mathbf{z}}^{(0)} + \frac{e}{m\omega_1} \dot{\mathbf{w}}^{(1)} \times \dot{\mathbf{z}}^{(1)} - \dot{\mathbf{w}}^{(1)} \cdot \nabla \dot{\mathbf{z}}^{(1)} \quad (\text{C6})$$

Da $\frac{(2)}{\omega \times \mathcal{L}}^{(0)}$ voraussetzungsgemäß klein ist, ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} (c^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_p^2) \mathcal{E}^{(2)}(r, t) = \\ = -4\pi \left\{ \frac{e^2 n}{m} \frac{(1)}{\omega \times \mathcal{L}}^{(1)} - e n \frac{(1)}{\omega} \cdot \mathcal{P} \frac{(1)}{\omega} + e \frac{\partial}{\partial t} (n \frac{(1)}{\omega}) \right\} \end{aligned} \quad (C7)$$

und nach elementaren Rechnungen mit (C3,4,5,)

$$= -4\pi e n \left(\frac{e}{m \omega_1} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2} k_1 \mathcal{E}_1^2 \sin 2\phi - \frac{\omega_H}{\omega_1} \mathcal{E}_1 (k_1 [\mathcal{L} \mathcal{E}_1]) \cos 2\phi \right\} \quad (C8)$$

Die rechte Seite von (C8) ist noch mit der Funktion $F(r_\perp) = F(x, y)$ zu multiplizieren, die angibt, wie die Laserenergie auf den Querschnitt des Strahles verteilt ist. Ferner verschwindet die rechte Seite außerhalb der durchstrahlten Plasmaschicht, also für z außerhalb $0 \leq z \leq L$.

Die Lösung von (C8) enthält longitudinale und transversale Wellen. In Anhang I ist gezeigt, wie man die Lösung der Differentialgleichung für den transversalen Teil unter Berücksichtigung der "Strahlungsbedingung" erhält.

Wenn der Beobachtungsort in der "Wellenzone" (siehe Anhang II) liegt, herrscht dort das Feld

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{(2)}(r, t) = \frac{e n}{c^2 r} \left(\frac{e}{m \omega_1} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2} [n [n k_1]] \mathcal{E}_1^2 \int_V d^3 r' F(r'_\perp) \sin [k_2 r - 2\omega_1 t - 2\phi + (2k_1 - n k_2) \cdot r'] + \right. \\ \left. - \frac{\omega_H}{\omega_1} [n [n \mathcal{E}_1]] (k_1 \mathcal{L} \mathcal{E}_1) \int_V d^3 r' F(r'_\perp) \cos [\quad \quad \quad] \right\} \end{aligned} \quad (C9)$$

$$\text{mit} \quad |r| = r \quad n = \frac{\pi}{r} \quad (C10)$$

k_2 ist die zu $2\omega_1$ gemäß (A1) gehörige Wellenzahl

$$k_2^2 c^2 = 4\omega_1^2 - \omega_p^2 \quad (C11)$$

Der Energiefluß in einen Raumwinkel $d\Omega$ ist

$$dI = \frac{c}{4\pi} \frac{k_2 c}{2\omega_1} \epsilon^2 r^2 d\Omega = \quad (C12)$$

$$= \frac{c}{4\pi} \left(\frac{en}{c^2}\right)^2 \left(\frac{e}{m\omega_1}\right)^4 \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4} [n[nk_1]]^2 \epsilon_1^4 + \left(\frac{\omega_H}{\omega_1}\right)^2 [n[n\epsilon_1]]^2 (k_1 \epsilon_1)^2 \right\} \cdot \int_V d^3\pi' F(\pi') \int_V d^3\pi'' F(\pi'') \cos[(2k_1 - k_2 n) \cdot (\pi' - \pi'')] d\Omega \quad (C13)$$

Die Integration über z', z'' ist elementar:

$$\int_0^L dz' \int_0^L dz'' \cos[A + 2\Delta k(z' - z'')] = \frac{\sin^2(\Delta k \cdot L)}{(\Delta k)^2} \quad (C14)$$

Wenn $F(\pi_{\perp})$ ein Symmetriezentrum besitzt, wird aus (C13)

$$dI = \frac{c}{8\pi} \left(\frac{e}{nc^2}\right)^2 \left(\frac{e}{m\omega_1}\right)^4 k_1^2 \epsilon_1^4 \left\{ \frac{1}{4} \sin^2(n_1 k_1) + \left(\frac{\omega_H}{\omega_1}\right)^2 \sin^2(n_1 \epsilon_1) \right\} \cdot \frac{\sin^2(\Delta k \cdot L)}{(\Delta k)^2} \cdot \left[\int d^2\pi_{\perp} F(\pi_{\perp}) \cos(k_2 \sin \vartheta n_{\perp} \cdot \pi_{\perp}) \right]^2 d\Omega \quad (C15)$$

mit den Bezeichnungen $\Delta k = k_1 - \frac{1}{2} k_2 n_z = \frac{1}{2} (2k_1 - k_2 \cos \vartheta)$ (C16)

$$n = (n_x, n_y, n_z) = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta) \quad |n_{\perp}| = 1 \quad (C17)$$

$$y = \frac{1}{k_1 |\xi_1|} (k_1 L \xi_1)$$

Der Resonanzwinkel ϑ_1 ist bestimmt durch $\Delta k = 0$:

$$\cos^2 \vartheta_1 = \frac{4k_1^2 c^2}{k_2^2} = 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{\omega_p}{\omega_1} \right)^2 \quad \sin^2 \vartheta_1 \approx \vartheta_1^2 = \frac{3}{4} \left(\frac{\omega_p}{\omega_1} \right)^2 \quad (C18)$$

Die Resonanz hat eine gewisse Breite, charakterisiert durch $\Delta k \cdot L < 1$. Dem entspricht ein Resonanzwinkelbereich von maximal

$$|(2k_1 - k_2 \cos \vartheta) \cdot L| = k_2 L \Delta \cos \vartheta = 1 \quad (C19)$$

$$\Delta \cos \vartheta \approx \sin \vartheta_1 \cdot \Delta \vartheta = \frac{1}{k_2 L}$$

Insgesamt wird daher in den Resonanzwinkelbereich $\Delta \Omega = \Delta \cos \vartheta \cdot \Delta \varphi$ pro Zeiteinheit die Energie gestrahlt

$$\Delta I = \frac{c}{8\pi} \xi_1^2 \left(\frac{e \xi_1}{m \omega_1 c} \right)^2 \left(\frac{\omega_p}{\omega_1} \right)^4 \frac{1}{32\pi^2} k_1 L \cdot k_1^2 \Delta \varphi \left\{ \frac{3}{16} \left(\frac{\omega_p}{\omega_1} \right)^2 + \left(\frac{\omega_H}{\omega_1} \right)^2 \sin^2(n, \xi_1) y^2 \right\} \cdot \left\{ \int d^2 \pi_{\perp} F(\pi_{\perp}) \cos \left(\sqrt{3} \frac{\omega_p}{c} n_{\perp} \cdot \pi_{\perp} \right) \right\}^2 \quad (C20)$$

$$= \left(\frac{c}{8\pi} \xi_1^2 \pi a^2 \right)^2 \left(\frac{\omega_p}{\omega_1} \right)^4 k_1 L \frac{e^2}{4\pi m^2 c^5} \Delta \varphi \cdot \left\{ \frac{3}{16} \left(\frac{\omega_p}{\omega_1} \right)^2 + \left(\frac{\omega_H}{\omega_1} \right)^2 \sin^2(n, \xi_1) y^2 \right\} \cdot \left\{ \int d^2 \pi_{\perp} F(\pi_{\perp}) \cos \left(\sqrt{3} \frac{\omega_p}{c} n_{\perp} \cdot \pi_{\perp} \right) \right\}^2 \left(\frac{1}{\pi a^2} \right)^2 \quad (C21)$$

wobei πa^2 die Querschnittsfläche des einfallenden Lichtstrahls sein soll, so daß (C21) direkt die Gesamtlaserleistung

$$I_1 \equiv \frac{c}{8\pi} \xi_1^2 \pi a^2 \quad (C22)$$

enthält.

Der Faktor $\eta \equiv \frac{1}{\pi a^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} d^2 r_{\perp} F(r_{\perp}) \cos(\sqrt{3} \frac{\omega_p}{c} r_{\perp} \cdot r_{\perp})$ (C23)

ist für $a \ll \frac{c}{\omega_p}$: $\eta = 1$ (C24)

Für $a\omega_p/c > 1$ wird η von der Form der Intensitätsverteilung bestimmt und nimmt im allgemeinen mit wachsender Strahlbreite ab.

Beispielsweise ist für einen kreisförmigen Strahlquerschnitt

$$F(r) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq r \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (C25)$$

$$\eta = \frac{2}{(\sqrt{3} \frac{a\omega_p}{c})^2} \sqrt{3} \frac{a\omega_p}{c} J_1(\sqrt{3} \frac{a\omega_p}{c}) \quad (C26)$$

$$\approx 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\sqrt{3} \frac{a\omega_p}{c})^{-3/2} \sin(\sqrt{3} \frac{a\omega_p}{c} - \frac{\pi}{4}) \quad \text{für } \frac{a\omega_p}{c} \gg 1$$

↓
0,5

Das Signal in den Resonanzwinkel hebt sich vom Streulicht in andere Richtungen nur ab, wenn der Resonanzfaktor $\Delta k^{-2} \sin^2(\Delta k \cdot L)$ zusammen mit $\sin^2(n_1 \cdot k_1)$ den Wert für andere Winkel ϑ' überwiegt. Das ist der Fall für

$$L^2 \gg \left(\frac{c}{\omega_p}\right)^2 \sin^2 \vartheta' \quad (C27)$$

Das Resonanzstreulicht fällt im Abstand r vom Plasma auf die Fläche ΔF :

$$\Delta F = r^2 \Delta \Omega = \frac{r^2}{k_z L} \Delta \varphi \quad (C28)$$

Für günstige Geometrie, $\gamma^2=1$, ist der vom Magnetfeld verursachte Anteil um den Faktor $(\omega_H/\omega_p)^2$ von dem ohne Magnetfeld verschieden.

D. Zahlenmäßige Auswertung.

Die folgende Tabelle mit charakteristischen Parametern ist für Rubinlaserlicht

$$k_1 = 0,9 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-1}$$

nach oben entwickelten Formeln zusammengestellt.

	n=	10^{14}	10^{16}	10^{18} cm^{-3}
ω_p	5,6 ·	10^{11}	10^{12}	10^{13} sec^{-1}
$(\omega_p/\omega_1)^2$	4,3 ·	10^{-8}	10^{-6}	10^{-4}
$\vartheta_1 = \sqrt{3/4} \omega_p/\omega_1$	1,8 ·	10^{-4}	10^{-3} m	10^{-2}
$\Delta\vartheta = \sqrt{4/3} c/\omega_p L$	$\frac{6,2}{L}$ ·	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
$L_1 = c/\omega_p$	5 ·	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4} cm
$L_2 = c\omega_1/\omega_p^2$	3 ·	10^2	10^0	10^{-2} cm

Tabelle 1

Die Länge L_1 ist bei der Diskussion von Strahlbreite und Intensität nach (C24,26) von Interesse.

L_2 ist die Mindestlänge, bei der die Winkel^{un}schärfe $\Delta\vartheta$ kleiner als der Resonanzwinkel ϑ_1 ist.

Ferner

$$\left(\frac{\omega_H}{\omega_1}\right)^2 \approx 2,5 \cdot 10^{-11} \cdot \mathcal{E}^2 [\text{Gauss}] \quad \frac{e^2}{4\pi m^2 c^5} = 0,9 \cdot 10^{-18} \text{ cgs-Einheiten} \quad (\text{D2})$$

Zahlenbeispiel:

$$I_1 = 1 \text{ Gigawatt} \quad |\mathcal{E}| = 10^5 \text{ Gau\ss} \quad n = 5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3} \quad (\text{D3})$$

$$a = 10^{-2} \text{ cm} \quad L = 10^{-1} \text{ cm}$$

$$\mathcal{E}^2 \approx \sin^2(n, \mathcal{E}_1) \approx 1$$

Wenn noch der mit a rasch oszillierende Faktor $\sin^2(\sqrt{3} \frac{a\omega_p}{c} - \frac{\pi}{4})$ in η^2 durch seinen Mittelwert $1/2$ ersetzt wird, geht in das Streulicht pro Zeiteinheit die Energie

$$\Delta I = I_1 \cdot 4 \cdot 10^{-10} \cdot (0,3 \cdot 10^{-4} + 2,5 \cdot 10^{-7}) \cdot \Delta \varphi \quad (\text{D4})$$

Das heißt, für gegenwärtige Rubinlaser und Laboratoriums-
plasmen ist das Streulicht noch knapp außerhalb des meßbaren
Bereiches.

Da die Lichtfrequenz mit der fünften Potenz eingeht, scheint
der Effekt von besonderem Interesse für künftige Laser hoher
Intensität im Infrarotbereich.

Denkbar ist auch die Anwendung von Mikrowellen zur Analyse
dünner Plasmen großer räumlicher Ausdehnung.

Es ist seit kurzem möglich mit Lasern Plasmen von sehr hoher
Dichte zu erzeugen [4]. Da der magnetfeldunabhängige Teil des
Streulichtes bei fester Frequenz für $a\omega_p/c \gg 1$ insgesamt der
Dichte proportional ist, liegt hier eine weitere Möglichkeit
in den experimentell interessanten Größenordnungsbereich

vorzudringen.

Beide erwähnten Richtungen führen zu einer Vergrößerung des Resonanzwinkels und wirken auch dadurch experimentell vorteilhaft.

Wir sind den Herren Dr. W. KEGEL und Dr. B. LAMBORN für wertvolle Diskussionen zu Dank verpflichtet.

Anhang I

Die "Strahlungslösung" der Gleichung

$$(c^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_p^2) \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{O}(\mathbf{r}) e^{-2i\omega_1 t} \quad (\text{I1})$$

läßt sich durch Fouriertransformation gewinnen. Mit dem Ansatz

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega d^3k \tilde{\mathcal{E}}(\omega, \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\tilde{\mathcal{E}}(\omega, \mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt d^3r \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \quad (\text{I2})$$

wird aus (I1)

$$-c^2 [\mathbf{k} [\mathbf{k} \tilde{\mathcal{E}}]] - (\omega^2 - \omega_p^2) \tilde{\mathcal{E}} = 2\pi \delta(\omega - 2\omega_1) \int d^3r \mathcal{O}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{I3})$$

Der Transversalteil der Wellen ist definiert als

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\perp} = -\frac{1}{k^2} [\mathbf{k} [\mathbf{k} \tilde{\mathcal{E}}]] \quad (\text{I4})$$

Aus (I3)

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\perp}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{-2\pi \delta(\omega - 2\omega_1)}{k^2 c^2 - \omega^2 + \omega_p^2} \frac{1}{k^2} \int d^3r [\mathbf{k} [\mathbf{k} \mathcal{O}]] e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{I5})$$

und nach Integration über Winkelvariable

$$\mathcal{E}_{\perp}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{rot} \operatorname{rot} e^{-2i\omega_1 t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\mathcal{O}(\mathbf{r}')}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{1}{k} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{k^2 c^2 - 4\omega_1^2 + \omega_p^2} \quad (\text{I6})$$

Der Integrationsweg muß in die komplexe k -Ebene verschoben werden. Die Wahl des Weges bedeutet die Auswahl bestimmter Lösungen der homogenen Gleichung (11) und jenachdem ein-oder auslaufende Wellen.

Für große Entfernungen: $|r| \gg |r'|$ gilt näherungsweise

$$|r - r'| = r - n \cdot r' \quad (17)$$

und nach Auswertung des Integrals mit Hilfe des Residuensatzes und den Bezeichnungen (C10,11)

$$\mathcal{E}_\perp(r, t) = \frac{-1}{4\pi c^2} \frac{1}{r} e^{i(k_2 r - 2\omega_1 t)} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 r' [n[n \alpha(r')]] e^{-i n k_2 \cdot r'} \quad (18)$$

Anhang II

Die Wellenzone ist als der Bereich definiert, in dem die Beziehung (I7) in der Wellenphase eine gute Näherung darstellt. Wegen

$$|\pi - \pi'| = \tau - n \cdot \pi' + \frac{1}{2\tau} [n[n\pi']]^2 + O\left\{\tau' \left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^2\right\} \quad (\text{II1})$$

bedeutet dies im vorliegenden Fall die Bedingung

$$\frac{k_1}{\tau} [n[n\pi']]^2 \ll 1 \quad (\text{II2})$$

und da n ziemlich genau in Strahlrichtung liegt,

$$\tau \gg k_1 a^2 \quad (\text{II3})$$