

**INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK**  
**GARCHING BEI MÜNCHEN**

Über stoßwellenartige Lösungen  
der Momentengleichungen  
für ein Plasma mit anisotropem Druck

Helmut Bergold

IPP/6/22

Juli 1964

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

# I n h a l t

	Seite
Einleitung . . . . .	1
1. Die Grundgleichungen	
1.1 Momentengleichungen . . . . .	5
1.2 Impulssatz, Energiesatz . . . . .	7
1.3 Die 13-Momenten-Näherung . . . . .	8
1.4 Ebene stationäre Wellen . . . . .	10
1.5 Gleichgewichtslösungen; stoßwellenartige Lösungen	15
2. Die 10-Momenten-Näherung	
2.1 Gleichungssystem; Integrale der Bewegung . . . . .	17
2.2 Das linearisierte Gleichungssystem . . . . .	18
2.3 Der Grenzübergang $\lambda \rightarrow 0$ . . . . .	23
2.4 Symmetrie-Eigenschaften der stoßfreien Momentengleichungen . . . . .	25
2.5 Numerische Ergebnisse zur 10-Momenten-Näherung .	26
3. Die 13-Momenten-Näherung	
3.1 Nachträgliche Berechnung der Wärmeströme . . . . .	32
3.2 Linearisierte 13-Momenten-Gleichungen . . . . .	33
3.3 Numerische Ergebnisse über die stoßfreien Gleichungen . . . . .	37
Zusammenfassung . . . . .	40
Anhang . . . . .	41
Abbildungen . . . . .	46
Literatur . . . . .	47

### Einleitung und Übersicht

Bei Untersuchungen über Stoßwellen in einem Plasma unter dem Einfluß eines Magnetfeldes ist immer wieder die Vermutung ausgesprochen worden, daß auch ohne die Mitwirkung von Zusammenstößen der Teilchen eine stoßwellen-artige Struktur möglich sein sollte ([1] S. 930; [6]).

Die "Stoßwelle" kann in diesem Fall natürlich nicht eine Übergangsregion von einem Gleichgewichtszustand in einen davon verschiedenen, mit den Erhaltungssätzen verträglichen, sein, denn ein solcher Übergang wäre mit einer Entropieänderung verbunden. Stattdessen kann man höchstens folgendes Bild erhoffen: Ausgehend vom Gleichgewichtszustand vor der Front (mit einer Massengeschwindigkeit, die auf die Front zu gerichtet ist) steigen z. B. Druck und Dichte an bis zu einem Maximalwert, und es folgen anschließend Oszillationen, etwa um den zweiten Gleichgewichtszustand, der zu einer echten Stoßwelle gehören würde, herum, aber mit nicht abnehmender Amplitude. Denkt man sich bei einer solchen Struktur die Teilchenstöße in geringem Maße "dazugeschaltet", so könnten sie eine allmähliche Auslöschung der Oszillation und die Annäherung an den zweiten Gleichgewichtszustand bewirken, sodaß eine wirkliche Stoßwellenstruktur entstehen würde.

Nun ist bekannt, daß mit den einfacheren Modellen für eine Welle in einem stoßfreien Plasma eine Struktur der gewünschten Art nicht herstellbar ist. Unter den nachstehend aufgezählten Annahmen erhält man nur periodische symmetrische Wellenzüge, als Grenzfall "solitäre Wellen" mit einem einzigen Extremum und asymptotischer Annäherung an ein und denselben Gleichgewichtszustand auf beiden Seiten davon im Unendlichen [1,7].

Die Annahmen sind dabei: Zweiflüssigkeitsmodell und

1. stationäre, eindimensionale Konfiguration mit Magnetfeld konstanter Richtung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung,
2. Quasineutralität,
3. Druck  $p_{\perp}$  in den Richtungen senkrecht zum Magnetfeld isotrop und für beide Teilchensorten gleich groß. (Der Druck parallel zu  $\mathcal{B}$  kann davon verschieden sein.)
4. Bestehen einer Zustandsgleichung  $p_{\perp} \cdot \xi^{-\gamma} = S = \text{const.}$

Die Wirkung einer schwachen Dissipation wird in diesem Modell in der "adiabatischen" (d.h. genügend langsamen) Erhöhung der Konstanten  $S$  bestehen. Man kann dann zeigen [7], daß, wenn man mit einer (fast) solitären Welle beginnt, auf den ersten Anstieg ein gedämpfter Wellenzug folgt. Im Grenzfall geringer Dissipation werden die Täler dieses Wellenzuges beliebig breit, und die Wellenberge rücken beliebig weit von einander ab, wobei sie jedoch ihre Breite behalten.

Dieselben Verhältnisse erhält man mit einem Modell, das von vornherein eine Dissipation in der Form der skalaren Leitfähigkeit  $\sigma$  mitnimmt [2,3]<sup>1)</sup>. Für  $\sigma \rightarrow \infty$  wird die Wellenlänge des gedämpften Wellenzuges, der auf den Anstieg aus dem Gleichgewicht folgt, beliebig groß.

Wenn man ein komplizierteres Modell behandeln will, in dem die eindimensionale Konfiguration aber in einem geeigneten Koordinatensystem wieder stationär ist, wenn man also m.a.W. wieder Wellen von unveränderlicher Gestalt und Geschwindigkeit betrach-

<sup>1)</sup> Die Gleichung  $p \cdot \xi^{-\gamma} = \text{const.}$  kann dann natürlich nicht mehr bestehen; als Ersatz dafür hat man den Energie-Erhaltungssatz in der Form

$$v \cdot \left[ \frac{\rho}{2} v^2 + \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2) \frac{j^2}{2c^2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} p \right] + E \frac{B}{\mu_0} = \text{const.}$$

mit der Massengeschwindigkeit  $v$  in x-Richtung und der Stromdichte  $j$  in y-Richtung. Vgl. auch Seite 31.

ten will, so muß man die Isotropie des Drucktensors aufgeben. In einem Plasma ohne die ausgleichende Stoß-Wechselwirkung zwischen den Teilchen ist ohnehin anzunehmen, daß beim Fehlen geeigneter Symmetrie unter dem Einfluß eines Magnetfeldes eine ursprünglich bestehende Maxwell-Verteilung deformiert wird. An die Stelle der Zustandsgleichung treten dann Momentengleichungen der Boltzmann-Gleichung. Sie bilden den Ausgangspunkt für diese Arbeit.

Im Abschnitt 1 werden die Grundgleichungen des Modells aufgestellt, Erhaltungssätze formuliert und die Erzeugung "stoßwellenartiger", d.h. wenigstens nach einer Seite asymptotisch konstanter Lösungen des 1-dimensionalen stationären Problems beschrieben.

Mit der im Abschnitt 2 behandelten "10-Momenten-Näherung" wurden von Hain, Lüst & Schlüter [4] einige stoßwellenartige Lösungen auf numerischem Wege gefunden. Diese Lösungen haben zwar z.T. mehrere Maxima, sind aber symmetrisch und daher als Modelle von Stoßwellen ebensowenig zu gebrauchen wie die Lösungen mit isotropem Druck. Es stellt sich nun heraus, daß die in [4] mitgeteilten Lösungen zufällig getroffene Ausnahmefälle zu singulären Parameterwerten bilden, und daß die Lösungen im allgemeinen höchstens nach sehr vielen Maxima zum Gleichgewichtswert zurückkehren und somit geeignet erscheinen, ein brauchbares Bild für Plasma-Stoßwellen abzugeben. In 2.52 wird ein Beispiel für eine Stoßwelle angegeben, bei der die Dissipation durch die von Hertweck [5] berechneten Stoßglieder bewirkt wird.

Ein Charakteristikum der 10-Momenten-Gleichungen gegenüber dem Modell mit isotropem Druck ist, daß in sie das  $M a s s e n -$   
 $v e r h ä l t n i s$  der Plasmakomponenten als wesentlicher Parameter eingeht. Eine ausführliche Diskussion der linearen Näherung in der Umgebung eines Gleichgewichtszustandes zeigt in 2.2, wie der Bereich der Gleichgewichts-Parameter, in dem stoßwellenartige Lösungen zu erwarten sind, vom Massenverhältnis abhängt.

Es darf nämlich im Gleichgewicht die Massengeschwindigkeit nicht kleiner als die Schallgeschwindigkeiten in jeder der beiden Plasmakomponenten sein. Daher läßt sich auch der Grenzübergang Elektronenmasse  $\rightarrow 0$  im 10-Momenten-Modell nicht durchführen. Bei der praktischen Lösung der nichtlinearen Differentialgleichungen wird eine entsprechende untere Grenze für das Massenverhältnis schon wesentlich früher erreicht, als es aus der linearisierten Theorie zu erwarten wäre.

Im Abschnitt 3 wird schließlich die Grad'sche 13-Momenten-Methode auf das Problem der ebenen stationären Plasmawellen angewandt. Bei dieser Methode werden auch die zuvor vernachlässigten Wärmeströme berücksichtigt. Die lineare Theorie bestätigt und ergänzt die Ergebnisse der 10-Momenten-Näherung. Die nachträgliche Berechnung von Wärmeströmen aus Lösungen der 10-Momenten-Näherung und der Vergleich von Lösungen der beiden Näherungen liefern eine Kritik der Momentenverfahren im Hinblick auf das vorliegende spezielle Problem.

## 1. Die Grundgleichungen

### 1.1 Die Momentengleichungen

Wir gehen aus von zwei Boltzmann-Gleichungen für die Komponenten des Plasmas:

$$\frac{\partial f^s}{\partial t} + u_\mu^s \frac{\partial f^s}{\partial x_\mu} + (\epsilon_\mu^s + \omega_{\mu\nu}^s) \frac{\partial f^s}{\partial u_\mu^s} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{Stoß}}$$

Erläuterung:

Über untere Indices ist von 1 bis 3 zu summieren. Der obere Index bedeutet die Teilchensorte;  $s = i$  (einfach geladene Ionen),  $e$  (Elektronen).

$x_\mu$  Komponenten des Ortsvektors

$t$  Zeit

$u_\mu^s$  Komponenten der Geschwindigkeit eines Teilchens der Sorte  $s$

$\epsilon_\mu^s = \frac{Q^s}{m^s} E_\mu(\varrho, t)$  Beschleunigung des Teilchens der Ladung  $Q^s$  und der Masse  $m^s$  durch ein elektrisches Feld  $\mathcal{E}$

$\omega_{\mu\nu}^s = \frac{Q^s}{m^s} B_{\mu\nu}(\varrho, t)$  Gyrofrequenz dieses Teilchens im Magnetfeld  $B_{\mu\nu}$ . ( $B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$ )

$f^s(\vec{u}^s, \varrho, t)$  Verteilungsfunktion für die Teilchensorte  $s$ .

Jede der beiden Boltzmann-Gleichungen werde nun ersetzt durch eine Anzahl von Momentengleichungen, die man aus ihr durch Multiplikation mit Faktoren  $1, u_\alpha^s, u_\alpha^s u_\beta^s, \dots$  und Integration über den  $\vec{u}$ -Raum gewinnt. Die niedrigeren Momente der Verteilungsfunktion bzw. gewisse Linearkombinationen aus ihnen entsprechen anschaulichen makroskopischen Größen:

$$n^s(\varrho, t) = \int f^s(\vec{u}, \varrho, t) d\vec{u} \quad \text{Anzahldichte}$$

$$v_\alpha^s(\varrho, t) = \frac{1}{n^s} \int u_\alpha f^s(\vec{u}, \varrho, t) d\vec{u} \quad \text{mittlere Geschwindigkeit}$$

$$(1) \quad P_{\alpha\beta}^s(\varrho, t) = m^s \int (u_\alpha - v_\alpha^s)(u_\beta - v_\beta^s) f^s(\vec{u}, \varrho, t) d\vec{u} \quad \text{Drucktensor}$$

$$q_{\alpha\beta\gamma}^s(\varrho, t) = m^s \int (u_\alpha - v_\alpha^s)(u_\beta - v_\beta^s)(u_\gamma - v_\gamma^s) f^s(\vec{u}, \varrho, t) d\vec{u}$$

Drucktransporttensor,  
jeweils für die Sorte  $s$ .

Die Momentengleichungen 0. und 1. Ordnung lauten wie folgt (der Sorten-Index ist überall weggelassen):

$$(2) \quad \frac{\partial n}{\partial t} + (n v_{\mu})_{|\mu} = 0 \quad \text{Kontinuitätsgleichung}$$

$$(3) \quad \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial t} + v_{\mu} v_{\alpha|\mu} + \frac{1}{m n} p_{\alpha\mu|\mu} - \varepsilon_{\alpha} - \omega_{\alpha\mu} v_{\mu} = \frac{1}{m n} \gamma_{\alpha}$$

Impulsbilanz  
("Bewegungsgleichung")

Es bedeutet  $\mu = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}}$ . Für die Stoßintegrale wird allgemein die Bezeichnung eingeführt

$$\delta_{\alpha\beta}^{\mu} \dots = m^3 \int (u_{\alpha}^2 - v_{\alpha}^2)(u_{\beta}^2 - v_{\beta}^2) \dots \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{Stoß}}^2 d\tilde{u}^3.$$

In der Kontinuitätsgleichung verschwindet das entsprechende Stoßintegral rechts, weil die Teilchenzahl für jede Sorte einzeln erhalten bleibt.

Momentengleichungen 2. und 3. Ordnung:

$$(4) \quad \frac{\partial p_{\alpha\beta}}{\partial t} + v_{\mu} p_{\alpha\beta|\mu} + q_{\alpha\beta\gamma|\mu} + v_{\mu} p_{\alpha\beta} + [(v_{\alpha|\mu} + \omega_{\mu\alpha}) p_{\beta\mu}] + [\alpha \leftrightarrow \beta] = \gamma_{\alpha\beta};$$

$$(5) \quad \frac{\partial q_{\alpha\beta\gamma}}{\partial t} + v_{\mu} q_{\alpha\beta\gamma|\mu} + q_{\alpha\beta\gamma\mu}^* + v_{\mu} q_{\alpha\beta\gamma} +$$

$$+ [(v_{\alpha|\mu} + \omega_{\mu\alpha}) q_{\beta\gamma\mu} + (\gamma_{\alpha} - p_{\alpha\mu|\mu}) \cdot \frac{1}{m n} p_{\beta\gamma}] +$$

$$+ [\beta; \gamma, \alpha] + [\gamma; \alpha, \beta] = \gamma_{\alpha\beta\gamma}.$$

Wegen des Faktors  $u_{\mu}$  im 2. Term der Boltzmann-Gleichung enthält die n-te Momentengleichung immer noch ein (n+1)-tes Moment. Es bedeutet

$$(6) \quad q_{\alpha\beta\gamma\mu}^* = m^3 \int (u_{\alpha} - v_{\alpha}^2) \dots (u_{\mu} - v_{\mu}^2) f^2(\tilde{u}, \varrho, t) d\tilde{u}.$$

Will man einen Satz von Momentengleichungen zu einem abgeschlossenen System machen, so muß man einen Ansatz einführen, der die Momente höchster Ordnung durch niedrigere Momente ausdrückt.



## 1.2 Impulssatz, Energiesatz

a) Multipliziert man die Bewegungsgleichung (3) mit  $\mathbf{q}^s = m^s \mathbf{u}^s$ , so steht rechts diejenige Kraftdichte, die auf ein Volumenelement einer einzelnen Teilchensorte  $\alpha$  wirkt. Diese Kraftdichte kann erstens nur von den Zusammenstößen von Teilchen  $\alpha$  herrühren, und zweitens muß sie für die beiden Sorten entgegengesetzt gleich sein:

$$\gamma_{\alpha}^i = -\gamma_{\alpha}^e.$$

b) Die Energiebilanz im Plasma lautet:

$$(7) \quad \nabla \mathcal{W} + \frac{\partial E_n}{\partial t} = l$$

mit  $\mathcal{W} = \mathcal{W}^i + \mathcal{W}^e =$  Energiestromdichte, verursacht durch die Teilchenbewegung,

$E_n = E_n^i + E_n^e =$  Energiedichte der Teilchenbewegung,

$l = l^i + l^e =$  Dichte der Leistung des elektromagnetischen Feldes an den Teilchen.

(Energieumsetzungen durch Ionisation, Rekombination und Strahlung sind in dieser Bilanz nicht berücksichtigt.)

Für die Teilchensorten gilt einzeln mit  $\mathcal{W}^s = \{W_{\alpha}^s\}$ ,  $c_{\alpha}^s = u_{\alpha}^s - v_{\alpha}^s$  (der Sortenindex bei  $W$ ,  $v$  usw. sei weggelassen):

$$(8) \quad \begin{aligned} W_{\alpha} &= \frac{m}{2} \int v_{\mu} v_{\mu} f(\tilde{n}, \mathbf{v}, t) \cdot v_{\alpha} d\tilde{n} \\ &= \frac{m}{2} \int (v_{\mu} v_{\mu} + 2c_{\mu} v_{\mu} + c_{\mu} c_{\mu}) f(\tilde{n}, \mathbf{v}, t) \cdot (c_{\alpha} + v_{\alpha}) d\tilde{n} \\ &= \frac{g}{2} v_{\mu} v_{\mu} v_{\alpha} + p_{\mu\mu} v_{\alpha} + \frac{1}{2} p_{\mu\mu} v_{\alpha} + \frac{1}{2} q_{\mu\mu\mu}, \end{aligned}$$

entsprechend der Aufspaltung in den Transport von (makroskopischer) kinetischer Energie und innerer Energie und in den Wärmestrom;

$$(9) \quad E_n = \frac{m}{2} \int v_{\mu} v_{\mu} f(\tilde{n}, \mathbf{v}, t) d\tilde{n} = \frac{g}{2} v_{\mu} v_{\mu} + \frac{1}{2} p_{\mu\mu}$$

(makroskopische kinetische Energie und innere Energie);

$$l = \mathbf{e} \cdot \frac{\mathbf{Q}}{4\pi} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{v}_{\mu} \cdot \mathbf{e}_{\mu}.$$

Summiert man die Momentengleichungen 2. Ordnung (4) über gleiche Indices, so erhält man

$$\frac{\partial p_{\alpha\alpha}}{\partial t} + (p_{\alpha\alpha} v_{\mu} + q_{\alpha\alpha\mu})_{|\mu} + 2v_{\alpha|\mu} p_{\alpha\mu} = \delta_{\alpha\alpha}.$$

Mit Hilfe der Bewegungsgleichungen (3) erhält man hieraus (immer noch für jede Sorte einzeln):

$$(10) \quad \frac{\partial E_{\mu}^{\alpha}}{\partial t} + W_{\mu|\mu}^{\alpha} - l^{\alpha} = \frac{1}{2} \delta_{\mu\mu}^{\alpha} + \delta_{\mu}^{\alpha} v_{\mu}^{\alpha}.$$

Der Energie-Erhaltungssatz (7) liefert hiernach für die Stoßmomente  $\delta_{\alpha\beta}^i$  und  $\delta_{\alpha}^i$  die Bedingung:

$$(11) \quad \frac{1}{2} (\delta_{\mu\mu}^i + \delta_{\mu\mu}^e) + (v_{\mu}^i - v_{\mu}^e) \delta_{\mu}^i = 0$$

(Es ist noch  $\delta_{\mu}^i = -\delta_{\mu}^e$  aus a) benützt). Macht man für die Stoßglieder irgendeinen Ansatz, so muß jedenfalls diese Bedingung zusammen mit der Impulsbedingung aus a) identisch in den vorkommenden Argumenten erfüllt sein.

### 1.3 Die 13-Momenten-Näherung

Wir wollen die Momentengleichungen später höchstens bis zur 3. Ordnung benützen. Nach Grad und Schlüter verfährt man folgendermaßen:

Die Verteilungsfunktion wird als Reihe in orthogonalen Funktionen der "Pekuliargeschwindigkeiten"  $u$  dargestellt. Als Orthogonalsystem werden dabei die Orthogonalpolynome über einer elliptisch-symmetrischen (und nicht\* kugelsymmetrischen) Gewichtsfunktion

$$\exp\left(-\frac{G_{\mu\nu}(e,t)}{2} (u_{\mu} - v_{\mu})(u_{\nu} - v_{\nu})\right)$$

genommen. Das hat den Vorteil, daß man bereits durch geeignete Wahl der Parameter der Gewichtsfunktion die Fourierkoeffizienten 1. und 2. Ordnung zu Null machen kann. Bricht man nun außer-

\* notwendig

dem die Entwicklung nach der 3. Ordnung ab und verwendet die so entstehende Funktion als Näherung für die Verteilungsfunktion, so ergibt sich für die 4. Momente

$$(12) \quad q_{\alpha\beta\gamma\delta}^* = \frac{1}{\xi} (p_{\alpha\beta} p_{\gamma\delta} + p_{\alpha\gamma} p_{\beta\delta} + p_{\alpha\delta} p_{\beta\gamma}),$$

also ein Ansatz, wie er zum Abrechnen des Systems der Momentengleichungen gebraucht wird.

Bis jetzt enthalten die Momentengleichungen für eine Teilchensorte noch 20 Momente, nämlich  $n$ ,  $v_{\alpha}$ ,  $p_{\alpha\beta}$  und  $q_{\alpha\beta\gamma}$ . Durch eine weitere Symmetrie-Annahme über die letzten in der Entwicklung von  $f$  verbliebenen Fourierkoeffizienten höherer Ordnung, nämlich die zu Polynomen 3. Grades, erreicht man nun, daß sich das verbliebene System von Momentengleichungen noch reduzieren läßt [5, S.23]. Statt des Tensors  $q_{\alpha\beta\gamma}$  kommt dann nur noch seine Spur nach 2 Indices  $q_{\alpha\beta\beta} = 2s_{\alpha}$  vor, die eine physikalisch anschauliche Deutung als Wärmestromdichte erlaubt. Es ergibt sich nämlich aus dem erwähnten Symmetrie-Ansatz:

$$(13) \quad q_{\alpha\beta\gamma} = q_{\alpha} p_{\beta\gamma} + q_{\beta} p_{\gamma\alpha} + q_{\gamma} p_{\alpha\beta};$$

die neuen Größen  $q_{\alpha}$  (3 Stück) treten an die Stelle des Tensors  $q_{\alpha\beta\gamma}$  (10 Komponenten). Durch Verjüngung der Gleichung (13) erhält man sofort den Zusammenhang der  $q_{\alpha}$  mit den  $s_{\alpha}$ :

$$(14) \quad s_{\alpha} = \frac{1}{2} p_{\mu\mu} q_{\alpha} + p_{\alpha\mu} q_{\mu}.$$

Wir sind damit bei einer "13-Momenten-Näherung" angekommen. Die 13 Differentialgleichungen für die 13 gesuchten Funktionen sind:

die Kontinuitätsgleichung (2),

die Bewegungsgleichungen (3),

die "Druckgleichungen" (4), in denen jeweils  $q_{\alpha\beta\gamma}$  durch  $q_{\alpha}$  und  $p_{\alpha\beta}$  mit Hilfe von (13) ausgedrückt ist,

und schließlich die "Wärmestromgleichungen", die man aus den Gleichungen (5) durch Verjüngung erhält:

$$(15) \quad \frac{\partial s_{\alpha}}{\partial t} + v_{\mu} s_{\alpha\mu} + v_{\mu\mu} s_{\alpha} + \left[ \frac{1}{\xi} (p_{\alpha\nu} p_{\nu\mu} + \frac{1}{2} p_{\alpha\mu} p_{\nu\nu}) \right]_{|\mu} + \\ + (v_{\alpha|\nu} + \omega_{\mu\alpha}) s_{\mu} + \frac{1}{2\xi} p_{\nu\nu} (\delta_{\alpha} - p_{\alpha\mu|\mu}) + \\ + v_{\nu|\mu} q_{\alpha\nu\mu} + \frac{1}{\xi} p_{\alpha\nu} (\delta_{\nu} - p_{\nu\mu|\mu}) = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\mu\mu}.$$

#### 1.4 Ebene stationäre Wellen

Es sollen nun Lösungen der 13-Momenten-Gleichungen gesucht werden unter den folgenden vereinfachenden Bedingungen:

- 1) Stationarität  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- 2) Ortsabhängigkeit nur in der  $x_1$ -Richtung ( $\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_3} = 0$ , künftig  $x_1 = x$ ),
- 3) Quasineutralität  $n^i = n^e$  (siehe hierzu S.13!);
- 4) das Magnetfeld habe die  $x_3 = z$ -Richtung:

$$(B_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & B & 0 \\ -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für das elektromagnetische Feld sollen die Maxwell-Gleichungen gelten. Unter unseren Voraussetzungen bedeutet

$$(16) \quad \text{rot } \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} : \quad \mathcal{E} = (E_x, E, E_3) \text{ mit } E = \text{const.}, \\ E_3 = \text{const.};$$

$$(17) \quad \text{rot } \mathcal{L} = \mu_0 \vec{j} : \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{-dB}{dx} = e\mu_0 n(v_2^i - v_2^e); \\ v_3^i = v_3^e \\ v_1^i = v_1^e = v \quad (\text{zur Abkürzung}). \end{array} \right.$$

$\text{div } \mathcal{L} = 0$  ist identisch erfüllt, und aus  $\mathcal{E} \text{ div } \mathcal{E} = e(n^i - n^e)$  könnte man die Ladungsdichte  $n^i - n^e$  nachträglich berechnen und so die Berechtigung unserer Annahme der Quasineutralität prüfen. Siehe aber zu diesem Punkt die Diskussion auf S.13.

Wir machen nun außerdem noch den **A n s a t z** :

$$(18) \quad E_3 = 0; \quad q_3^s = v_3^s = 0; \quad p_{13}^s = p_{23}^s = 0.$$

Dann verbleibt das folgende System von gewöhnlichen Differentialgleichungen (Bezeichnungen: Punkt bedeutet  $v \cdot d/dx$ ;  $w^s = v_2^s$ ):

$$(19) \quad \underline{\text{Kontin.}} \quad n \cdot v = \frac{F}{m} = \text{const.} \quad (m = m^i + m^e)$$

Beweg.gl.(x)

$$F^s \dot{v} + \dot{p}_n^s - F^s (\varepsilon_1^s + \omega^s w^s) = v \dot{\gamma}_1^s \quad (F^s = \frac{m^s}{m} F)$$

Beweg.gl.(y)  $F^4 \dot{w}^4 + \dot{p}_{12}^4 - F^4 (\varepsilon_2^4 - \omega^4 v) = v \delta_{12}^4$

Druck (11)  $[(v + 3q_1^4) p_{11}^4]^* + 2 \dot{v} p_{11}^4 - 2v \omega^4 p_{12}^4 = v \delta_{11}^4$

Druck (12)  $[(v + 2q_1^4) p_{12}^4 + q_2^4 p_{11}^4]^* + \dot{v} p_{12}^4 + \dot{w}^4 p_{11}^4 + v \dot{\omega}^4 (p_{11}^4 - p_{22}^4) = v \delta_{12}^4$

Druck (22)  $[(v + q_1^4) p_{22}^4 + 2q_2^4 p_{12}^4]^* + 2 p_{12}^4 (\dot{w}^4 + v \omega^4) = v \delta_{22}^4$

Druck (33)  $[(v + q_1^4) p_{33}^4]^* = v \delta_{33}^4$

Wärmestrom ( $\alpha = 1, 2$ ) (Summierung über 1, 2, 3)

$$(v s_\alpha^4)^* + \frac{1}{F^4} \left[ \frac{1}{2} p_{\alpha\mu}^4 (v p_{\mu\mu}^4)^* + p_{\mu\alpha}^4 (v p_{\alpha\mu}^4)^* \right] + \dot{v}_\alpha^4 s_\alpha^4 + v \omega_{\mu\alpha}^4 s_\mu^4 + \dot{v}_\mu^4 (q_1^4 p_{\alpha\mu}^4 + q_2^4 p_{1\mu}^4 + q_3^4 p_{\mu\alpha}^4) = v \left( \frac{1}{2} \delta_{\alpha\mu\mu}^4 - \frac{1}{2F^4} p_{\mu\mu}^4 \delta_{\alpha\alpha}^4 - \frac{1}{F^4} p_{\alpha\nu}^4 \delta_{\nu\nu}^4 \right)$$

Die Gleichungen Beweg.gl.(z), Druck (13), (23), Wärmestrom (3) sind identisch erfüllt. Dies muß vor allem auch an den verwendeten Formeln für die Stoßglieder  $\delta$  geprüft werden. Für die Formeln von Hertweck [5], die aus der Fokker-Planck-Gleichung gewonnen sind, ist die Behauptung richtig.

Der Energiesatz (7) läßt sich zunächst, da die Maxwell-Gleichungen gelten, in "Erhaltungsform" schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{E}_x + \mathcal{E}_z + \frac{1}{2} \mathcal{E}_y^2 + \frac{1}{2} \mathcal{Z}_y^2) + (W_\mu^i + W_\mu^e + (\mathcal{E} \times \mathcal{H})_\mu)_{|\mu} = 0,$$

denn der Energiesatz für das elektromagnetische Feld lautet ja

$$\nabla(\mathcal{E} \times \mathcal{H}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{E}^2 + \mathcal{Z}^2) = -l.$$

Im eindimensionalen stationären Fall läßt sich daraus ein Integral der Bewegung gewinnen, nämlich die Energiestromdichte in der x-Richtung

$$W_x^i + W_x^e + (\mathcal{E} \times \mathcal{H})_x = \text{const. oder nach (8)}$$

$$(20) \sum_{s,i,e} \left[ \frac{1}{2} F^4 (v^2 + w^2) + s_x^4 + \left( \frac{3}{2} p_{11}^4 + \frac{1}{2} p_{22}^4 + \frac{1}{2} p_{33}^4 \right) v + p_{12}^4 w^3 \right] + \frac{1}{\mu_0} EB = \text{const.}$$

Zwei weitere Integrationen im Gleichungssystem der 13-Momenten-Methode lassen sich durchführen, wenn man in den Bewegungsgln. (19) einmal die Summe über  $s$  und einmal (nach Division durch  $F^s$ ) die Differenz für verschiedene  $s$  bildet. (Praktisch läuft das darauf hinaus, daß man statt der Geschwindigkeiten  $v^s$  die Gesamt-Massengeschwindigkeit  $\frac{1}{m}(m^i v_a^i + m^e v_a^e)$  und den elektrischen Strom  $en(v_a^i - v_a^e)$  als gesuchte Funktionen einführt). Man erhält aus (19) Beweg.gl.(x):

$$(21) \text{ Summe: } F\dot{v} + \dot{p}_{11}^i + \dot{p}_{11}^e - \frac{F}{m} eB(w^i - w^e) = 0$$

Differenz: Die einzige Differentialgleichung des Systems, in der  $E_x$  vorkommt. Sie könnte zur nachträglichen Berechnung von  $E_x$  dienen. Wir wollen uns dafür nicht interessieren und können diese Gleichung deshalb weglassen.

- aus (19) Beweg.gl.(y):

$$(22) \text{ Summe: } F^i \dot{w}^i + F^e \dot{w}^e + \dot{p}_{12}^i + \dot{p}_{12}^e = 0$$

$$(23) \text{ Differenz: } (w^i - w^e + \frac{p_{12}^i}{F^i} - \frac{p_{12}^e}{F^e})' - \frac{em}{m^i m^e} (E - vB) = v \gamma_2^i \frac{m^i}{F m^i m^e}$$

Aus der Gl. (21) erhalten wir den Satz: "Impulsstromdichte in der x-Richtung = const.":

$$(24) \quad Fv + p_{11}^i + p_{11}^e + \frac{B^2}{2\mu_0} = \Pi.$$

(Es ist noch (17) benützt worden.) Der Impulsstrom in y-Richtung ist nach (22) ebenfalls konstant. Wir wollen annehmen, daß es (wenigstens asymptotisch) eine Stelle gibt, wo die Gesamt-Massengeschwindigkeit in y-Richtung = 0 und der Drucktensor isotrop ist. Dann gilt identisch

$$(25) \quad F^i w^i + F^e w^e + p_{12}^i + p_{12}^e = 0.$$

Wir benützen die konstanten Parameter  $\Pi$  und  $F$  zur Einführung von Einheiten für eine Formulierung des Gleichungssystems in dimensionslosen Größen (Bezeichnung durch  $\hat{\quad}$ ). Der Übergang

wird durch die folgende Tabelle erklärt:

$\lambda = \sqrt{m^e/m^i}; \quad \sigma^{-1} = \lambda + \lambda^{-1}; \quad \lambda^i = \lambda; \quad \lambda^e = \lambda^{-1} \quad \text{stets } \lambda < 1$	
$v = \frac{\Pi}{\sigma F} \hat{v}, \text{ für alle Geschwindigh.}$	$\omega^s = \frac{e}{m\sigma} (\Pi\mu_0)^{\frac{1}{2}} \hat{\omega}^s; \quad \hat{\omega}^{i(e)} = \hat{\omega}^s \lambda^{i(e)} \hat{B}$
$p = \Pi \hat{p}, \text{ für alle Drücke}$	$\hat{\Sigma} = \hat{v} \frac{m}{F_e(\Pi\mu_0)^{\frac{1}{2}}} \hat{\gamma}_z^i; \quad \hat{\Sigma}^{i(e)} = \hat{\Sigma} \lambda^{i(e)}$
$B = (\Pi\mu_0)^{\frac{1}{2}} \hat{B}$	$\hat{\Sigma}_{\alpha\beta}^s = \hat{v} \frac{m\sigma}{\Pi e (\Pi\mu_0)^{\frac{1}{2}}} \hat{\gamma}_{\alpha\beta}^s$
$t = \frac{m\sigma}{e(\Pi\mu_0)^{\frac{1}{2}}} \hat{t}; \quad \hat{v} dt = d\hat{t}$	$\hat{\Sigma}_{\alpha}^s = \hat{v} \frac{m\sigma^2 F}{\Pi^2 e (\Pi\mu_0)^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{2} \hat{\gamma}_{\alpha\mu}^s - \frac{1}{2F^s} p_{\mu}^s \hat{\gamma}_{\alpha}^s \right)$
$E = \frac{\Pi}{\sigma F} (\Pi\mu_0)^{\frac{1}{2}} \hat{E}; \quad \hat{E}^{i(e)} = \hat{E} \lambda^{i(e)}$	$-\frac{1}{F^s} p_{\alpha\mu}^s \hat{\gamma}_{\mu}^s$

Bemerkung zur Annahme der Quasineutralität:

Diese Annahme ist physikalisch nur dann berechtigt, wenn die Plasmafrequenz  $\omega_p = (\epsilon^2 n m / \epsilon_0 m^i m^e)^{\frac{1}{2}}$  groß gegenüber den charakteristischen Frequenzen des Problems ist. Nun gilt

$$\omega_p t = \frac{F_c}{\Pi} \sqrt{\sigma} \frac{\hat{t}}{\hat{v}}; \quad \left( \frac{\omega^s}{\omega_p} \right)^2 = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\lambda^s \Pi}{F_c} \right)^2 \hat{B}^2 \hat{v}$$

mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$ .

Die Lösungen des neuen Differentialgleichungssystems in den dimensionslosen Größen hängen von den Parametern  $\Pi$  und  $F$  nicht ab. Sie gelten also insbesondere für solche  $\Pi$  und  $F$ , für die  $F_c \gg \Pi$  ist; dann aber ist die Annahme  $n^i \approx n^e$  berechtigt, solange  $\hat{B}$  und  $\hat{v}$  in der Größenordnung von 1 oder darunter liegen. Übrigens muß  $F_c \gg \Pi$  im nichtrelativistischen Fall stets gelten, falls der Massenstrom ( $F$ ) überhaupt einen endlichen Beitrag zum gesamten Impulsstrom ( $\Pi$ ) liefert.

Künftig lassen wir den Akzent  $\hat{\phantom{x}}$  wieder weg. Wir behandeln das folgende Gleichungssystem, in dem noch mit Hilfe von (25) eines der beiden  $\hat{\omega}^s$  eliminiert und das andere durch die symmetrische Größe

$$(26) \quad \hat{J} = -(\hat{\omega}^i - \hat{\omega}^e + \lambda \hat{p}_z^i - \frac{1}{\lambda} \hat{p}_z^e)$$

ersetzt ist:

$$(27) \quad \dot{B} = J + \lambda p_{12}^i - \frac{1}{\lambda} p_{12}^e \quad (\text{Maxwell-Glch.})$$

$$(28) \quad \dot{J} = \frac{1}{\sigma} (\nu B - E - \Sigma) \quad (\text{"Ohmsches Gesetz"})$$

(29) die Gleichungen (19) Druck ( $\alpha\beta$ ), wobei die rechten Seiten zu ersetzen sind durch  $\Sigma_{\alpha\beta}^s$  (8 Gleichungen),

(30) die Gleichungen (19) Wärmestrom ( $\alpha$ ), rechte Seiten ersetzt durch  $\Sigma_{\alpha}^s$ ,  
 $1/F^s$  ersetzt durch  $\lambda^s$  (4 Gleichungen).

Dabei bedeutet überall

$$(31) \quad \begin{aligned} \dot{\omega}^s &= -\lambda^s \dot{p}_{12}^s + \varepsilon^s - \nu \omega^s + \Sigma^s, \\ \nu &= \sigma \left( 1 - p_{11}^i - p_{11}^e - \frac{1}{2} B^2 \right), \\ \dot{\nu} &= -\sigma \left( \dot{p}_{11}^i + \dot{p}_{11}^e + B \dot{B} \right). \end{aligned}$$

Wir haben 14 Differentialgleichungen für die Funktionen

$$B, J, p_{11}^s, p_{12}^s, p_{22}^s, p_{33}^s, q_1^s, q_2^s \quad (s = i, e).$$

Die sich ergebende Zeitabhängigkeit  $B(t)$  usw. bezieht sich darauf, welche Größen ein einzelnes Volumenelement auf seinem Wege durch die Konfiguration im Lauf der Zeit vorfindet. (Der Punkt bedeutet die substantielle Zeitableitung).

Als einziges Integral des Systems (27 bis 31) ist uns der Energiesatz (20) bekannt; er lautet in den neuen Größen:

$$(32) \quad \frac{1}{2\sigma} \nu^2 + \frac{\sigma}{2} J^2 + \sum_{s=i,e} \left[ \left( \frac{3}{2} p_{11}^s + \frac{1}{2} p_{22}^s + \frac{1}{2} p_{33}^s \right) (\nu + q_1^s) + p_{12}^s q_2^s - \frac{1}{2} \lambda^s p_{12}^{s2} \right] + EB = \text{const.}$$

Die Stoßglieder  $\Sigma$  hängen von den Ableitungen der gesuchten Funktionen nicht ab. Daher ist das System linear in den Ableitungen.



### 1.5 Gleichgewichtslösungen; stoßwellenartige Lösungen

Für ein homogenes Plasma im Gleichgewichtszustand gilt:

$$p_{\alpha\beta}^S = d_{\alpha\beta} \cdot p_0 \quad (\text{isotrope Drucke, gleiche Temperaturen der Komponenten des Plasmas});$$

$$q_{\alpha}^S = 0 \quad (\text{kein Wärmestrom});$$

$$w^i = w^e = 0 \quad (\text{kein elektrischer Strom}), \text{ also } J = 0.$$

Unter diesen Annahmen verschwinden auch die  $\Sigma$ , und wir erhalten konstante Lösungen (Gleichgewichtslösungen, singuläre Lösungen) unseres Differentialgleichungssystems genau dann, wenn außerdem noch gilt:

$$v_0 B_0 = E \quad (\text{d.h. die mittlere Lorentz-Kraft auf die Teilchen verschwindet}).$$

Solche Gleichgewichtslösungen sind durch zwei Parameter festgelegt, z.B. durch  $p_0$  und  $B_0$ . (Dann ist nämlich

$$E = \sigma(1 - 2p_0 - \frac{1}{2}B_0^2)p_0;$$

damit sind alle Größen des Systems (27 bis 31) bekannt.) Wir wählen als dimensionslose Parameter mit anschaulicher Bedeutung zwei Mach-Zahlen oder vielmehr deren reziproke Quadrate:

$$(33) \quad M = 6 \cdot \frac{p_0}{v_0/\sigma}, \quad \text{d.h. } M = c_{\text{Schall}, \gamma=3}^2 / v^2$$

$$L = \frac{B_0^2}{v_0/\sigma}, \quad \text{d.h. } L = c_{\text{Aeferon}}^2 / v^2$$

Es wird damit

$$(34) \quad v_0 = \sigma(1 + \frac{1}{2}L + \frac{1}{3}M)^{-1}; \quad p_0 = \frac{1}{6}M \frac{v_0}{\sigma}; \quad B_0^2 = L \frac{v_0}{\sigma}.$$

NB: Wegen  $nv = \text{const.}$  kann  $v$  nicht das Vorzeichen wechseln. Wir haben  $v > 0$  angenommen.

Es sollen nun solche Lösungen des Dgl.systems gesucht werden, die für  $t \rightarrow -\infty$  asymptotisch einer Gleichgewichtslösung zustreben. Man wird dann das Gebiet großer negativer  $t$  als Vorderseite einer Stoßfront ansehen können. Das Koordinatensystem ist so gewählt, daß die Front ruht und das Plasma mit der Front-

geschwindigkeit  $v_0$  auf sie zuströmt.

Es soll weiterhin angenommen werden, daß sich die gesuchte Lösung in der Umgebung des Gleichgewichts näherungsweise aus dem linearisierten Gleichungssystem berechnen läßt.

Denkt man sich das System nach den Ableitungen aufgelöst und in der Form  $\dot{\eta} = f(\eta)$  geschrieben, wobei  $\eta = \eta_0$  dem Gleichgewicht entsprechen soll, also  $f(\eta) = A(\eta_0)(\eta - \eta_0) + O((\eta - \eta_0)^2)$  ( $A$  ist eine quadratische Matrix), so heißt mit  $\delta\eta = \eta - \eta_0$

das linearisierte System:  $\delta\dot{\eta} = A \delta\eta$ , und seine Hauptlösungen haben in komplexer Schreibweise die Form

$$\delta\eta = \delta\eta_0 \cdot e^{\Omega t},$$

wobei  $\Omega$  Eigenwert und  $\delta\eta_0$  ein Eigenvektor der Matrix  $A$  ist.

Eine stoßwellenartige Lösung des nichtlinearen Dgl.systems wird man nur erhoffen können, wenn es einen Eigenwert  $\Omega$  mit positivem Realteil gibt. Man kann dann einen zu  $\Omega$  gehörenden Eigenvektor  $\delta\eta_0$  als Anfangswert für die numerische Lösung des Originalsystems verwenden:  $\eta(0) = \eta_0 + \delta\eta_0$ . Die Normierung von  $\delta\eta_0$  ist dabei so zu wählen, daß im Rahmen der erstrebten Rechengenauigkeit noch  $|\delta\eta_0| \ll |\eta_0|$  gilt, sodaß die Linearisierung gerechtfertigt ist.

Bei der Behandlung des linearisierten Problems werden im Folgenden stets die Stoßterme  $\Sigma$  vernachlässigt.

## 2. Die 10-Momenten-Näherung

### 2.1 Gleichungssystem; Integrale der Bewegung

Für ein stoßfreies Plasma (alle  $\Sigma = 0$ ) dürfte es sinnvoll sein, der Einfachheit halber die Wärmeströme zu vernachlässigen, d.h. alle  $q_{\alpha}^4 = 0$  zu setzen. Für ein Plasma mit Stößen bedeutet diese Annahme, daß man nur elektrische Leitfähigkeit und Viskosität als dissipierende Prozesse einbezieht.

Für  $q_{\alpha}^S \approx 0$  hat man die Wärmestrom-Gleichungen in (19) (als die "höchste Näherung") wegzulassen und in den übrigen Gleichungen  $q_{\alpha}^4 = 0$  zu setzen. Die Auflösung von (19) bzw. (27 bis 31) nach den Ableitungen ergibt dann noch verhältnismäßig einfache Formeln:

$$(35) \quad \begin{aligned} \dot{B} &= J + \lambda p_{12}^i - \frac{1}{\lambda} p_{12}^e \\ \dot{J} &= \frac{1}{\sigma} (vB - E - \Sigma) \\ \dot{p}_{11} &= -3 p_{11} \frac{\dot{v}}{v} + 2 \omega p_{12} + \frac{1}{v} \Sigma_{11} \\ \dot{p}_{12} &= (v - \lambda p_{11})^{-1} (-2 \dot{v} p_{12} + v \omega p_{22} - (\epsilon + \Sigma) p_{11} + \Sigma_{12}) \\ \dot{p}_{22} &= -p_{22} \frac{\dot{v}}{v} + \frac{2}{v} p_{12} (\lambda \dot{p}_{12} - (\epsilon + \Sigma)) + \frac{1}{v} \Sigma_{22} \\ \dot{p}_{33} &= -p_{33} \frac{\dot{v}}{v} + \frac{1}{v} \Sigma_{33} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \dot{p}_{11} \\ \dot{p}_{12} \\ \dot{p}_{22} \\ \dot{p}_{33} \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{je 2 Gleichungen} \\ \text{Alle Größen} \\ \text{außer } v \text{ tragen} \\ \text{den Index } s. \end{array}$$

Es bedeutet dabei

$$(36) \quad \begin{aligned} v &= \sigma (1 - p_{11}^i - p_{11}^e - \frac{B^2}{2}) \\ \dot{v} &= [-vB(J + 3(\lambda p_{12}^i - \frac{1}{\lambda} p_{12}^e)) - \Sigma_{11}^e - \Sigma_{11}^i] \cdot (\frac{v}{\sigma} - 3(p_{11}^i + p_{11}^e))^{-1} \end{aligned}$$

Im Falle des stoßfreien Plasmas kann man außer dem Energiesatz (32) noch 4 weitere Integrale dieser Gleichungen angeben:

$$(37) \quad p_{33}^s v = \text{const.}; \quad \left| \begin{array}{cc} p_{11}^s & p_{12}^s \\ p_{12}^s & p_{22}^s \end{array} \right| \cdot v^4 = \text{const.} \quad (s = i, e),$$

[4]. Dies sind also die "Adiabatengleichungen" für anisotropen Druck, die sich übrigens aus den Druckgleichungen (29) allein, ohne Benützung der anderen Gleichungen, ableiten lassen. (Wenn  $p_{12} = 0$ , kann man schreiben  $(p_{11} p_{22} p_{33})^{1/3} v^{5/3} = \text{const.}$  analog zu  $p \varrho^{-5/3} = \text{const.}$  beim idealen Gas.)

## 2.2 Das linearisierte Gleichungssystem

Die Eigenwertgleichung zur Linearisierung um eine Gleichgewichtslösung im oben besprochenen Sinne erhält nach etlichen Umformungen die folgende Gestalt:

$$(38) \quad \begin{vmatrix} 1-x & L & +x & -x \\ 1 & 1-M & +2 & -2 \\ -\frac{M}{6} & -\frac{ML}{2} & u^i & 0 \\ +\frac{M}{6} & +\frac{ML}{2} & 0 & u^e \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Gleichung} \\ \text{3. Grades für } x \end{array}$$

Es bedeutet:

$$x = \frac{\Omega^2}{v_0^2 \epsilon}$$

(Diese Abkürzung hat nichts mit der Ortskoordinate  $x$  zu tun.)

$$u^i = x \cdot (\lambda^2)^{-2} \left( 1 - \frac{\lambda^2}{\epsilon} \cdot \frac{M}{6} \right) + 4L.$$

Von der ursprünglichen Eigenwertgleichung ist hierbei der mehrfache Eigenwert Null bereits abgespalten. - Für spezielle Wertebereiche der Parameter  $L$ ,  $M$  und  $\lambda$  lassen sich die Lösungen  $x$  analytisch diskutieren.

a)  $M = 0$ , d.h.  $p_0 = 0$ . Die Determinante (38) zerfällt in die Faktoren

$$\begin{vmatrix} 1-x & L \\ 1 & 1-M \end{vmatrix} \cdot u^i \cdot u^e.$$

Lösungen:  $x_1 = 1 - L$ ,

reelle Frequenz für  $L \leq 1$ , rein imaginäre Frequenz für  $L > 1$ .

$$x_2 = -4L\lambda^2$$

$$x_3 = -4L/\lambda^2$$

$|\Omega|$  ist hier die doppelte Gyrofrequenz der Ionen bzw. Elektronen im Feld  $B_0$ .  $\Omega_{2,3}$  ist rein imaginär.

Der Fall  $M = 0$  liefert also für  $L \leq 1$  einen Verlauf der Eigenfrequenzen, bei dem man stoßwellenartige Konfigurationen erwarten kann. In der Tat würde die weitere Behandlung dieses Falles gerade auf diejenigen Lösungen unseres nichtlinearen Differentialgleichungssystems führen, bei denen  $p_{\alpha\beta}^S \equiv 0$  ist. Diese Lösungen

aber sind vollständig überschaubar, siehe [1], und enthalten auch wirklich solitäre Wellen mit einem einzigen Extremum, die außerdem für  $t \rightarrow +\infty$  wieder demselben Grenzwert wie für  $t \rightarrow -\infty$  zustreben. Unsere Bedingung  $L < 1$ , d.h.  $c_0 \text{ Alfvén} > v_0$ , ergibt sich übrigens auch aus der Betrachtung der nichtlinearen Differentialgleichungen als Bedingung dafür, daß überhaupt Lösungen existieren, die nicht identisch konstant sind.

Eine zweite Begrenzung der Alfvén-Machzahl in  $t = +\infty$ , nämlich nach oben durch den Wert 2 für  $p_{\alpha\beta}^1 \equiv 0$ , ergibt sich aus der Begrenzung des Maximalwerts von B durch die Bedingung

$$\frac{v}{c} = 1 - \frac{B^2}{2} \geq 0,$$

vgl. (36). Eine solche Begrenzung kann natürlich nicht von der Linearisierung um den Gleichgewichtswert geliefert werden. In unseren Parametern würde dieser Grenze  $L \geq 1/4$  entsprechen.

b)  $\lambda = 1$ , d.h.  $m^i = m^e$ , und  $M < 1$ .

Es ist  $u^i = u^e = x(1 - M/3) + 4L$ ; von der Determinante (38) läßt sich dann der Faktor  $u^i$  abspalten. Das ergibt die erste Lösung

$$\alpha_1 = -\frac{4L}{1 - \frac{M}{3}} \quad (\text{rein imaginäre Frequenzen } \Omega).$$

Die restliche Gleichung (2. Grades in x) läßt sich auf die Form bringen:

$$(39) \quad \begin{vmatrix} 1 - x & L & x \\ 1 & 1 - M & +2 \\ -M/3 & -ML & u^i \end{vmatrix} = 0$$

Man kann zeigen (siehe A.4), daß für ihre Lösungen  $x_2$  und  $x_3$  gilt:

$x_2, x_3$  stets reell; von verschiedenem Vorzeichen für

$$L < 1 - \frac{2}{3}M;$$

$x_2, x_3$  beide negativ für  $L > 1 - \frac{2}{3}M$ .

Wir haben also auch in diesem Spezialfall denselben qualitativen Verlauf der Eigenfrequenzen wie in a), der auf Lösungen von Stoßwellencharakter hoffen läßt. Siehe Bild 1.

Die numerische Auflösung der allgemeinen Eigenwertgleichung (38) ergibt dieses qualitative Bild - "Muster 1"-auch für  $1 > M > 0$  und  $0 < \lambda < 1$  in einem gewissen Bereich der  $M$ - $\lambda$ -Ebene. Als Beispiel sind in Bild 2a,b die Lösungen für  $\lambda = 0.3$  dargestellt. Dem Muster 1 entsprechen die Kurven zu den Parameterwerten  $M = 0, \dots, 0.4$ . Die obere Grenze in  $L$  für die Existenz der positiven Lösung  $x$  ist dabei stets wie für  $\lambda = 1$ :

$$L \leq 1 - \frac{2}{3}M,$$

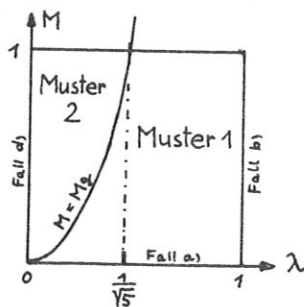
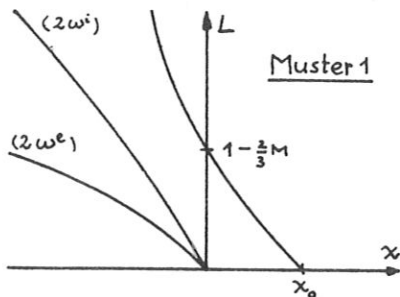
wie man aus dem von  $x$  freien Term der Eigenwertgleichung ersieht. (Dieser lautet nämlich  $16L^2(1 - 2M/3 - L)$ .)

Dies ist die Verallgemeinerung der Bedingung  $L \leq 1$  aus a). Wir berechnen noch die Stelle  $x_0$  in "Muster 1":

c)  $L = 0$

Die Determinante (38) spaltet den Faktor  $x^2(1 - M)$  ab; also  $x_1 = x_2 = 0$ . Für die dritte Lösung der Eigenwertgleichung ergibt sich

$$x_0 = \left(1 - \frac{M}{3}\right) \left(1 - \frac{M}{6} \frac{\lambda}{\sigma}\right)^{-1} \left(1 - \frac{M}{6} \frac{1}{\lambda \sigma}\right)^{-1}.$$



Offenbar gilt  $x_0 \rightarrow +\infty$  für  $M \rightarrow 6\sigma\lambda^{\pm 1} - 0$  (immer  $M < 1$  vorausgesetzt). Die Stellen  $M = M_g = 6\sigma\lambda^{\pm 1} = 6/(1 + \lambda^{\pm 2})$  sind zugleich singuläre Stellen für die allgemeine Eigenwertgleichung, deren höchster Koeffizient (bei  $x^3$ ) lautet

$$(40) \quad (1-M) \left(1 - \frac{M}{6} \frac{\lambda}{\sigma}\right)^{-1} \left(1 - \frac{M}{6} \frac{1}{\lambda\sigma}\right)^{-1}.$$

Von den beiden singulären Stellen ist wegen  $\lambda \leq 1$  nur diejenige mit  $M_g = 6/(1 + \lambda^{-2})$  für uns relevant. Sie schränkt den Gültigkeitsbereich von "Muster 1" in der  $M$ - $\lambda$ -Ebene auf das skizzierte Gebiet ein\*. Für  $M > M_g$  muß man mit einem anderen qualitativen Bild rechnen. Wir erschließen es aus einem weiteren Spezialfall.

#### d) $\lambda = 0$

Nach Multiplikation der Eigenwertgleichung (38) mit  $\lambda^2$  und Abspalten der Lösung  $x_1 = 0$  verbleibt die Gleichung

$$(41) \quad \begin{vmatrix} x-1 & -L & x \\ 1 & 1-M & -2 \\ M/6 & ML/2 & -Mx/6 + 4L \end{vmatrix} = 0.$$

Ihre Diskussion (siehe A.4) ergibt:

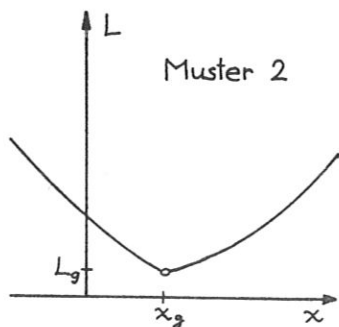
$x_2, x_3$  nichtreell, konjugiert komplex für  $0 < L < L_g$ ,

beide positiv für  $L_g < L < 1 - 5M/6$ ,

von verschiedenem Vorzeichen für  $1 - 5M/6 < L$ ,

wobei  $L_g = \frac{M}{6} \frac{1-M}{1-M/3}$  und  $x_g = 2 \frac{1 - \frac{2}{3}M}{1 - M/3} = x_2(L_g) = x_3(L_g)$ .

Die numerische Rechnung ergibt für  $M > M_g$  auch bei von Null verschiedenem  $\lambda$  dieses qualitative Bild "Muster 2" (S. 22). Siehe Bild 3 ( $\lambda = 0$ ) und Bild 2a, b (Parameterwerte  $M = 0.6, \dots, 0.8$ ).



Es zeigt sich ferner, daß die neu hinzukommende reelle Lösung  $x$  durchwegs sehr groß ist, also für eine numerische Lösung der nichtlinearen Differentialgleichungen in diesem Bereich jedenfalls genommen werden müßte, da sich eine Lösung mit hoher Anstiegsrate infolge der Rechenunge nauigkeit stets "durchsetzt". Man müßte also aus Gründen des Rechen-

verfahrens die Störung mit "stärkstem zeitlichen Anstieg" (für ein individuelles Volumenelement - vgl. S. 14) auswählen, was auch physikalisch sinnvoll erscheint. Lösungsversuche in diesem Parametergebiet führten aber zu keinem Erfolg (vgl. 2.51). Die Ursache für das Auftreten von Unendlichkeitsstellen der Frequenz sind die drei Nenner  $v - \lambda^2 p_{11}^2$  und  $\frac{v}{\sigma} - 3(p_{11}^2 + p_{22}^2)$  im Gleichungssystem (35).  $M = M_g$  entspricht  $v_0 = p_0/\lambda$ , d.h. aber "Schall-Machzahl der Elektronen (mit entsprechendem  $c_p/c_v$  definiert) = 1". - Zu  $v_0/\sigma = 3 \cdot 2 p_0$  gehört  $M = 1$ .

Lösung des linearisierten Differentialgleichungssystems

Es werde für die unbekanntenen Funktionen stets  $y = y_0 + \delta y \cdot e^{\Omega t}$  gesetzt.  $x = \Omega^2 / (v_0/\sigma)$ . Die Auflösungsformeln lauten dann:

$$(42) \quad \frac{\delta v}{v_0} = - \frac{1 - \frac{3}{2}x}{1 - \frac{1-M}{2L}x} \frac{\delta B}{B_0}$$

$$\frac{\delta y}{v_0} = - \frac{B_0/\sigma}{\Omega} \left( \frac{\delta B}{B_0} + \frac{\delta v}{v_0} \right)$$

$$\frac{\delta p_{12}^2}{p_0} = \frac{\Omega}{\omega_0^2} \left( \frac{\delta v}{v_0} + 3 \frac{\delta B}{B_0} \right) \cdot \left[ \frac{x}{(\lambda^2)^2 L} \left( 1 - \frac{\lambda^2}{\sigma} \cdot \frac{M}{6} \right) + 4 \right]^{-1}$$

$$\frac{\delta p_{11}^2}{p_0} = -3 \frac{\delta v}{v_0} + 2 \frac{\omega_0^2}{\Omega} \frac{\delta p_{22}^2}{p_0}$$

$$\frac{\delta p_{22}^2}{p_0} = -\frac{\delta v}{v_0} - 2 \frac{\omega_0^2}{\Omega} \frac{\delta p_{12}^2}{p_0}$$

$$\frac{\delta p_{33}^2}{p_0} = -\frac{\delta v}{v_0}$$



$v_0 + \delta v$  etc. sind die Anfangswerte für die Lösung der nicht-linearen Differentialgleichungen (35). In den numerischen Rechnungen wurde stets  $\delta B/B_0 = 10^{-3}$  genommen.

Bemerkungen zu den vorhin untersuchten Spezialfällen:

$\underline{M} = 0$ . Es folgt  $\delta p_{\alpha\beta}^S = 0$ ; weil die Lösungen der nichtlinearen Gleichungen durch Anfangswerte eindeutig bestimmt sind (die rechten Seiten sind analytische Funktionen -), sind die Lösungen mit  $p_{\alpha\beta}^S \equiv 0$  die einzigen mit diesen Anfangswerten.

$\underline{\lambda} = 1$ . Führt man  $-p_{12}^e$  statt  $p_{12}^e$  als unbekannte Funktion ein, so sind ersichtlich die Anfangswerte für verschiedene Indices  $s$  gleich. Dasselbe gilt für die rechten Seiten der nichtlinearen Gleichungen (35) ohne Stoßglieder. Das System reduziert sich damit von 8 auf 5 Differentialgleichungen.

### 2.3 Der Grenzübergang $\lambda \rightarrow 0$

Aus der physikalischen Bedeutung der vorkommenden Funktionen folgt für diesen Grenzübergang, wenn man noch die Dimensions-Umrechnungstabelle Seite 13 beachtet, daß man die folgenden Annahmen machen muß:

$$B, J, v/\sigma = V, p_{\alpha\beta}^S, E/\sigma = \tilde{E} \quad \text{endlich für } \lambda \rightarrow 0 \text{ (was } \sigma \rightarrow 0 \text{ entspricht).}$$

Dann ergibt aber (27): Sogar  $p_{12}^e/\lambda = -P_{12}$  muß endlich bleiben für  $\lambda \rightarrow 0$ . Man erhält im stoßfreien Fall aus (27 bis 31) mit den eben neu eingeführten Bezeichnungen folgendes Gleichungssystem:

$$(43) \quad \begin{aligned} B &= J + P_{12} \\ \gamma &= \sqrt{B} - \tilde{E} \\ \dot{p}_{11}^e &= -3 p_{11}^e \frac{\dot{V}}{V} + 2 B P_{12} \\ \dot{P}_{12} &= \tilde{E} - \sqrt{B} \frac{p_{12}^e}{p_{11}^e} \\ (p_{11}^e V^3)' &= 0. \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$V = 1 - p_{11}^i - p_{11}^e - B^2/2$$

$$\frac{\dot{V}}{V} = -B(J + 3P_{12})(V - 3(p_{11}^i + p_{11}^e))^{-1}$$

$$p_{22}^e = \frac{p_0^2 V_0^4}{p_{11}^e V^4}$$

Für  $p_{12}^i$  ergibt sich Null,  $p_{22}^i = \text{const.}/V$ . Die Dgl. für  $p_{11}^i$  entfällt, wenn man dafür die Gleichung 4. Grades für  $V$ :

$$V = 1 - \frac{p_0 V_0^3}{\sqrt{3}} - p_{11}^e - \frac{1}{2}B^2$$

löst. Wie es sein soll, ergibt dieses System bei der Linearisierung um eine Gleichgewichtslösung dieselben Formeln, wie man sie aus den vollen linearisierten lo-Momenten-Gleichungen für  $\lambda \rightarrow 0$  erhält. Die Anfangswertformeln vereinfachen sich zu

$$(44) \quad \begin{aligned} \frac{dV}{V_0} &= - \frac{L + \frac{1}{12}Mx}{1 - \frac{5}{6}M} \frac{dB}{B_0} \\ \frac{dJ}{V_0} &= \sqrt{\frac{L}{x}} \left( \frac{dB}{B_0} + \frac{dV}{V_0} \right); & \frac{dP_{12}}{p_0} &= \sqrt{\frac{x}{L}} \left( \frac{1}{2} \frac{dV}{V_0} + \frac{x}{4} \frac{dB}{B_0} \right) \\ \frac{dp_{11}^i}{p_0} &= -3 \frac{dV}{V_0}; & \frac{dp_{11}^e}{p_0} &= -4 \frac{dV}{V_0} - \frac{x}{2} \frac{dB}{B_0}, \end{aligned}$$

und das Energie-Integral lautet

$$\frac{1}{2} [ V^2 + J^2 - P_{12}^2 + V(3(p_{11}^i + p_{11}^e) + p_{22}^e) ] + \tilde{E}B = \text{const.}$$

Will man weiter vereinfachen, indem man sogar  $P_{12} = 0$  annimmt und dafür die Gleichung mit  $P_{12}$  wegläßt, so kommt man auf das System

$$\begin{aligned} \ddot{B} &= VB - \tilde{E} \\ pV^3 &= \text{const.} \quad \text{mit } p = p_{11}^i + p_{11}^e \\ V + p + B^2/2 &= 1 \end{aligned}$$

mit dem Energie-Integral

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{1}{2}B^2 + 3Vp + \tilde{E}B = \text{const.}$$

Dies entspricht genau dem von Lüst [7] behandelten Modell (stoßfreies Plasma mit isotropem Druck in der x-y-Ebene), wenn man dort mit  $\gamma = 3$  arbeitet und  $p = p_{11}^i + p_{11}^e$  statt des isotropen Drucks der x-y-Ebene einsetzt.

Inwiefern die letzte Vereinfachung erlaubt ist, möge folgende Abschätzung zeigen: Für den Anstieg aus dem Gleichgewicht folgt aus der Dgl.  $\dot{p}_{22} = \tilde{E} - \sqrt{B} p_{22}^e / p_{21}^e$ , solange  $p_{22}^e$  noch nicht sehr verschieden von  $p_{11}^e$  ist:  $\dot{p}_{12} \approx \dot{J}$ . Für die Anfangswerte gilt

$$\frac{dJ}{dp_{22}} = \frac{6L}{Mx} \frac{\delta B/B_0 + \delta V/V_0}{\frac{1}{4}x \cdot \delta B/B_0 + \frac{1}{2}\delta V/V_0}$$

Da x, wie oben gesagt, für wachsendes L rasch ansteigt, kann auch für kleine M dieser Quotient durchaus in die Größenordnung von 1 kommen; dann aber ist die Vernachlässigung  $p_{12} \ll J$  in den Differentialgleichungen nicht mehr statthaft.

#### 2.4 Symmetrie-Eigenschaften der stoßfreien Momentengleichungen

Im Zusammenhang mit den später zu besprechenden numerischen Resultaten ist es wichtig, auf die folgenden Symmetrien der nichtlinearen 13-Momenten-Gleichungen (27 f.) hinzuweisen. In den Gleichungen ohne die Stoßglieder lassen sich die gesuchten Funktionen derart in 2 Gruppen  $\varphi(t)$  und  $\eta(t)$  einteilen, daß mit  $\varphi(t)$  und  $\eta(t)$  auch der folgende Satz von Funktionen eine Lösung des Systems ist:

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi(-t), \quad \tilde{\eta}(t) = -\eta(-t).$$

Und zwar gehören zu der Gruppe  $\varphi$  der "geraden" Variablen:  $E, p_{11}^s, p_{22}^s, p_{33}^s, q_1^s$ , während die "ungeraden" Variablen  $J, p_{12}^s$  und  $q_2^s$  sind. Aus diesen Eigenschaften der Gleichungen folgt:

Gilt für eine Lösung  $\varphi(t), \eta(t)$  des Systems an irgendeiner Stelle  $t_0$ :  $\eta(t_0) = 0$ , so ist diese Lösung in Bezug auf  $t_0$  symmetrisch in der Gruppe  $\varphi$  und antimetrisch in der Gruppe  $\eta$ .

Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt ohne weiteres aus den Symmetrie-Eigenschaften, aus der Tatsache, daß die rechten Seiten der Gleichungen  $t$  nicht explizit enthalten und aus der Eindeutigkeit der Lösungen.

Tritt der Fall  $\psi_0(t_0) = 0$  nun insbesondere ein für eine Lösung von der Art, wie sie durch unser numerisches Verfahren ausgesondert wird, nämlich  $\psi(t) \rightarrow 0$ ,  $\varphi(t) \rightarrow \text{const.} \neq 0$  für  $t \rightarrow -\infty$ , so gilt dasselbe auch für  $t \rightarrow +\infty$ ; wir bekommen eine "solitäre Welle", natürlich u.U. mit mehreren Maxima und Minima.

## 2.5 Numerische Ergebnisse zur 10-Momenten-Näherung

### 2.51 Stoßfreie Gleichungen

Von Hain, Lüst & Schlüter [4] wurden einige Beispiele für numerisch gewonnene stoßwellenartige Lösungen der 10-Momentengleichungen angegeben. In diesen Beispielen besitzen die Lösungen eine erstaunlich einfache Struktur. Nach einem monotonen Anstieg aus der Nähe des Gleichgewichtswertes heraus vollführen die Funktionen einige wenige Schwingungen, nach denen sie sich wieder sämtlich stark den alten Gleichgewichtswerten nähern. Dies hat zur Folge, daß eine breite Mulde entsteht, die schließlich zu erneutem Anstieg und zur Wiederholung des Bildes führt. Es liegt natürlich nahe, diese Mulde als das numerische Abbild eines in Wirklichkeit asymptotischen Verlaufes aufzufassen. Diese Vermutung wird durch zwei Tatsachen gestützt:

1) Die Schwingungen sind nahezu symmetrisch. In ihrem Symmetriezentrum (bei  $x \approx 4.5$  in [4], S. 968) liegen eng benachbarte Nullstellen von  $p_{12}^i$ ,  $p_{12}^e$  und  $J$ . Aus dem vorigen Abschnitt wissen wir, daß das exakte Zusammenfallen von Nullstellen dieser drei Funktionen (der "ungeraden" Variablen des Dgl.-Systems) zu einer exakt symmetrischen bzw. antimetrischen Lösung und damit

wirklich zu konstantem Verlauf für  $t \rightarrow +\infty$  führen würde.

2) Die Breite der geschilderten Mulde läßt sich durch Ändern der Integrations-Schrittweite stark variieren, während der übrige Funktionsverlauf gegen eine solche Änderung der Rechengenauigkeit unempfindlich ist. Die Annäherung aller Funktionen an ihren jeweiligen Gleichgewichtswert ist also so stark, daß nur die Ungenauigkeiten der numerischen Rechnung überhaupt wieder zu einem Anstieg führen.

Es erhebt sich nun die Frage, ob möglicherweise alle Lösungen der 10-Momenten-Gleichungen, die für  $t \rightarrow -\infty$  konstant sind, symmetrisch sind oder wenigstens solitäre Wellen mit konstantem Verlauf auch für  $t \rightarrow +\infty$  bilden. Eine analytische Behandlung dieses Problems scheint ziemlich aussichtslos zu sein, da das Differentialgleichungssystem im einfachsten Fall ( $\lambda = 1$ ) noch von der Ordnung 5 ist und nur 2 Integrale (nämlich der Energiesatz (32) und die Relation  $(p_{11}p_{22} - p_{12}^2)v^4 = \text{const.}$ ) zur Elimination von unbekanntem Funktionen zur Verfügung stehen. Eine genügend allgemeine und weitreichende Theorie über den Verlauf der Lösungen im Großen gibt es aber nur für autonome Differentialgleichungssysteme der Ordnung 2. Um auf numerischem Wege zu einer Aussage zu gelangen, wurde das 10-Momenten-System - ausgehend von den bereits bekannten Beispielen - für zahlreiche Werte der 3 Parameter  $L$ ,  $M$  und  $\lambda$  integriert. Das charakteristische Ergebnis zeigt Bild 4. Hier sind  $L = 0.48$  und  $M = 0.01$  fest gewählt, während  $\lambda$  längs der Ordinate variiert (logarithmischer Maßstab). Als Kennzeichen für die Struktur der betreffenden Lösung sind jeweils die Nullstellen der Funktion  $J$  auf der Abszisse  $x$  eingetragen. Die Ortskoordinate  $x$  ergibt sich als Funktion von  $t$  aus der zusätzlichen Diff.gl.  $\dot{x} = v$ . Die Funktion  $J$  unterscheidet sich von  $\dot{B}$  nur durch Glieder mit  $p_{12}^S$  (vgl. 35), die in den betrachteten Fällen durchwegs so klein bleiben, daß man die Nullstellen von  $J$  praktisch als die Extremalstellen von  $B$  ansehen kann. Die Maxima von  $B$  sind dick, die Minima dünn ausgezogen. Wie zu erwarten ist, wird die Wellen-

struktur mit abnehmendem  $\lambda$  feiner und komplizierter. Es gibt aber immer wieder diskrete Werte  $\lambda$ , bei denen ein Minimum verhältnismäßig niedriger Nummer  $k$  stark vom vorhergehenden Maximum abrückt und der Wert von  $B$  in diesem Minimum dem Gleichgewichtswert  $B_0$  sehr nahe kommt. Für diese  $\lambda$ -Werte hat man also eine (fast) solitäre Welle mit  $k$  Maxima (von  $B$ ). Beispielsweise ist das für  $k = 1$  nur bei  $\lambda = 1$ ; für  $k = 3$  bei  $\lambda = 0.47, 0.39, 0.18$ ; für  $k = 5$  bei  $\lambda = 0.306$  der Fall. Zwischen diesen diskreten  $\lambda$ -Stellen scheint es jedoch Wellen von beliebiger Kompliziertheit zu geben. Man sieht nunmehr, daß die einfache Struktur des Beispiels [4, S.968] durchaus nur der zufälligen Parameterwahl ( $\lambda = 0.3$ ) zu verdanken ist. Andererseits ist z.B. die Struktur zu  $\lambda = 0.18$  noch viel einfacher, obwohl sie zu einem niedrigeren Massenverhältnis gehört.

Qualitativ dasselbe Bild ergibt sich auch für andere Werte von  $L$  und  $M$ : Solitäre Wellen von einfacher Struktur gibt es nur für diskrete Werte von  $\lambda$ . Als Ergänzung zu den in [4] gegebenen Beispielen für Wellenstrukturen ist in Bild 5 eine extrem einfache solitäre Welle ( $\lambda = 0.18$ ) mit nur 3 Maxima und in Bild 6 eine Welle dargestellt, die frühestens nach 13 Maxima - wenn überhaupt je - zum Gleichgewichtszustand zurückkehrt ( $\lambda = 0.25$ ; die Integration wurde bis  $x = 21$  geführt in 3500 Schritten). Neben  $B$  ist noch das Verhältnis der Eigenwerte des Drucktensors  $p_{\alpha\beta}^4$  ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ) dargestellt als Maß für die Abweichung vom thermodynamischen Gleichgewicht. Die Funktionen  $a_{1,2}^{i,e}$  werden in 3.1 auf Seite 32 erklärt.

Das numerische Ergebnis schließt natürlich nicht die Möglichkeit aus, daß die Menge derjenigen Parameterwerte ( $L, M, \lambda$ ), für die eine "solitäre Wellengruppe" mit endlich vielen Maxima existiert, trotzdem im  $L$ - $M$ - $\lambda$ -Raum überall oder gebietsweise dicht liegt. Es macht aber die Annahme plausibel, daß es zu einer festen Zahl  $k$  höchstens abzählbar viele Werte  $\lambda$  (bei festem  $L$  und  $M$ ) gibt, für die eine solitäre Wellengruppe mit genau  $k$  Maxima existiert. Daraus folgt, daß die Menge aller Lösungen (zu festem  $L$  und

M) mit endlich vielen Maxima höchstens abzählbar ist, daß also die Lösungen "normalerweise" unendlich lange Wellenzüge sind.

Aus den linearisierten Gleichungen wurde in 2.2 erschlossen, daß das eben besprochene Lösungsbild bei festem L und M nur für Werte  $\lambda$  oberhalb einer gewissen Grenze zu erwarten ist.  $M < M_g$  bedeutet

$$\lambda^2 > \left( \frac{6}{M} - 1 \right)^{-1}.$$

In unserem näher betrachteten Beispiel von Bild 4:  $L = 0.48$ ,  $M = 0.01$  liegt diese Grenze bei  $\lambda = 0.04$ . In den Lösungen der nichtlinearen Gleichungen wird die zugehörige singuläre Stelle ( $v \rightarrow \frac{1}{\lambda} p_{11}^e$ ,  $\dot{p}_{12}^e \rightarrow \infty$ ) aber schon für wesentlich größere Werte ( $\lambda \lesssim 0.15$ ) erreicht, und zwar im ersten monotonen Anstieg von B.  $p_{11}^e$  steigt dort auch monoton, v fällt monoton.

Der Versuch, das System für ein  $M > M_g$  zu integrieren, scheitert an der Singularität  $\frac{v}{\sigma} \rightarrow 3(p_{11}^i + p_{11}^e)$ ,  $\dot{v} \rightarrow \infty$ , die ebenfalls bei monotonem Anwachsen der Drucke und monotoner Abnahme von v erreicht wird. Es wird durch diese Ergebnisse die Vermutung nahegelegt, daß Stoßwellenstrukturen nur für solche Fälle existieren, wo in der Umgebung des Gleichgewichts vor der Front das "Muster 1" (S. 20) gilt, wo also insbesondere keine Wahl zwischen verschiedenen Anstiegswerten bleibt.

### 2.52 Gleichungen mit Stoßgliedern

In denjenigen Bereichen der Parameter, wo Lösungen der "stoßfreien" Gleichungen existieren, gelingt auch die numerische Lösung der Gleichungen mit Stoßgliedern. Für die Stoßglieder wurden die von Hertweck [5] bereitgestellten Formeln benützt, die auf die Fokker-Planck-Gleichung für ein Plasma zurückgehen. Diese Formeln enthalten allerdings als wesentliche Annahme,

daß  $\lambda \ll 1$  ist. Genauer: In einer Potenzreihenentwicklung nach  $\lambda$  sind die Glieder von der Ordnung  $\lambda^2$  weggelassen. Andererseits erlaubt ja das Verhalten der stoßfreien Gleichungen nicht, beliebig kleine  $\lambda$  zu nehmen; die Singularitäten für zu kleines  $\lambda$  treten auch schon dort auf (nämlich im ersten monotonen Anstieg), wo die Stoßglieder noch keinen wesentlichen Einfluß auf den Verlauf der Lösungen haben. Ein Kompromiß ist,  $\lambda$  wenigstens möglichst klein zu wählen <sup>1)</sup>.

Ein Berechnungsbeispiel zeigt Bild 7. Der zusätzliche Parameter  $Z$  beschreibt die Stärke des Einflusses der Stöße (die Stärke der "Dämpfung") als Funktion der Konstanten  $F$  und  $\Pi$  der Plasmaströmung. Zur Berechnung von  $Z$  sowie zur Definition der freien Weglänge  $l$  siehe A.3. Den Gyrationradius eines Teilchens beschreibt in unserem System dimensionsloser Größen

$$(45) \quad r^{\perp} = \lambda^{\perp} \frac{v}{B}.$$

Der Verlauf von  $B$  zeigt einen monotonen Anstieg ("Stoßfront") und anschließend eine Oszillation mit abnehmender Amplitude und Annäherung an eine zweite Gleichgewichtslösung. Der Gleichgewichtszustand hinter der Stoßfront ist eindeutig bestimmt durch die Rankine-Hugoniot-Relationen, die für unsere Größen lauten (s. z.B. [1] S. 934)

$$\begin{aligned} v_0 B_0 &= v_1 B_1 && (= E) \\ v_0 + 2p_0 + \frac{1}{2} B_0^2 &= v_1 + 2p_1 + \frac{1}{2} B_1^2 && (\sim \text{Impulsstromdichte}) \\ \frac{v_0^2}{2\sigma} + 5p_0 v_0 + EB_0 &= \frac{v_1^2}{2\sigma} + 5p_1 v_1 + EB_1 && (\text{Energiestromdichte}) \end{aligned}$$

(Index 1: Werte hinter der Stoßfront). Die beiden Gleichgewichts-

<sup>1)</sup> In den numerischen Rechnungen Hertwecks (Run-away-Elektronen) taucht dieses Problem nicht auf, da wegen der vereinfachenden Annahmen dort  $\lambda$  in den Gleichungen nicht mehr vorkommt. Bekanntlich erhält man ja auch von  $\lambda$  freie Gleichungen, wenn man in der 10-Momenten-Näherung die Druckgleichungen wegläßt und dafür Isotropie des Druckes in der  $x$ - $y$ -Ebene und das Bestehen einer Zustandsgleichung  $p v^{\gamma} = \text{const.}$  annimmt [4,7].



werte sind für B in Bild 7 ebenfalls eingetragen. Für  $d = w^i - w^e$  sind sie Null. Lösungen von ähnlicher Struktur kann man auch schon aus einfacheren Modellen des Plasmas erhalten: Isotroper Druck  $p^e = p^i$ , skalare Leitfähigkeit  $\sigma$  als Dissipationsmechanismus; siehe [2,3]. (In den genannten Arbeiten wurde außerdem noch im Energiesatz das Glied mit  $J^2$  vernachlässigt - eine Annahme, deren Berechtigung an den gewonnenen Lösungen erst noch geprüft werden müßte.) Jedoch zeigt Bild 7 (obere Kurven), daß selbst in einem Fall von verhältnismäßig starker Dämpfung, wie ihn das gewählte Beispiel ja darstellt, die Anisotropie noch recht groß werden kann.

Der Ausgleich von Elektronen- und Ionentemperatur auf der Rückseite der Stoßfront erfolgt viel langsamer, als es bei dem angenommenen Massenverhältnis von 1/25 zu erwarten wäre. Dies rührt natürlich von der Näherung  $\lambda \ll 1$  in den Formeln für die Stoßglieder her. Übrigens gilt für die Hertweckschen Stoßformeln auch der Energiesatz nicht mehr exakt. Man kann statt der Gleichung

$$\frac{1}{2} (\sum_{\mu\mu}^i + \sum_{\mu\mu}^e) + (w^i - w^e) \Sigma = 0,$$

die der Bedingung (11) entsprechen würde, die folgende Relation beweisen:

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu\mu}^e + (w^i - w^e) \Sigma = 0.$$

Die Energie-Übertragung von den Elektronen auf die Ionen, wie sie in dem Term  $\frac{1}{2} \sum_{\mu\mu}^i$  zum Ausdruck kommt, wirkt daher wie ein zusätzlicher Energiestrom: Energiestromdichte = const. +  $\int_0^t \frac{1}{2} \sum_{\mu\mu}^i dt$ . Die Abweichung des Energiestroms vom ursprünglichen Gleichgewichtswert bleibt jedoch in dem Beispiel von Bild 7 unter 0.6%.

Einzelheiten zur numerischen Auswertung der Stoßformeln siehe A.2.

### 3. Die 13-Momenten-Näherung

#### 3.1 Nachträgliche Berechnung der Wärmeströme

Es ist natürlich grundsätzlich wichtig, nach der Güte der 10-Momenten-Näherung zu fragen. Ganz besonders nahegelegt wird diese Frage aber durch das Auftreten von Singularitäten in den Lösungen bei Parameterwerten, die durchaus von physikalischem Interesse sind.

Die in 1.3 besprochene Reihenentwicklung der Verteilungsfunktion werde als konvergent angenommen. Bricht man die Reihe an irgendeiner Stelle ab, so ergibt sich höchstens dann eine gute Näherung, wenn die Koeffizienten des ersten weggelassenen Gliedes klein sind im Vergleich zu den beibehaltenen Koeffizienten. Die 10-Momenten-Näherung entspricht der Annahme, daß die Verteilungsfunktion mit der elliptisch-symmetrischen Gewichtsfunktion von S. 8 identisch ist. Die ersten weggelassenen Koeffizienten sind demnach von 3. Ordnung:  $a_{ijk}$ . Es sei angenommen, daß die Symmetriebedingung für diese Koeffizienten, welche der 13-Momenten-Näherung zugrunde liegt, näherungsweise erfüllt sei:

$$(46) \quad a_{ijk} = a_i \delta_{jk} + a_j \delta_{ki} + a_k \delta_{ij}$$

(vgl. [5] S. 23 f.) und daß ferner alle Koeffizienten höherer als dritter Ordnung verschwinden. Dann hängen die  $a_i$  mit den  $q_i$  der 13-Momenten-Gleichungen auf einfache Weise zusammen:

$$(47) \quad \alpha_i^3 = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\bar{p}_i^3}{q_i^3} \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{\alpha=1}^3 \mathcal{O}_{\alpha i} q_\alpha^3$$

( $\bar{p}_i^s$  Eigenwert Nr. i des Drucktensors,  $\mathcal{O}_{\alpha\beta}$  Orthogonalmatrix), und sie erhalten zugleich eine anschauliche physikalische Bedeutung:  $a_i$  hat dieselbe Größenordnung wie

Geschwindigkeit des Wärmetransportes / Schallgeschwindigkeit.

Hat man die 10-Momenten-Gleichungen gelöst, so kann man die  $q_i$

und damit die  $a_i$  nachträglich näherungsweise bestimmen, indem man in die Wärmestrom-Gleichungen aus (19) die 10 bekannten Momente und B einsetzt und die so entstehenden Differentialgleichungen für die  $q_i$  löst.<sup>1)</sup> Die Ergebnisse sind in den Bildern 5 und 6 eingezeichnet. Die Formel (47) zeigt, daß bei starker Druck-Anisotropie zu dem kleinen der Eigenwerte  $\bar{p}_i$  ein großes  $a_i$  gehört. Darüber hinaus zeigen aber die Beispiele, daß die starken Abweichungen vom Gleichgewicht in den Maxima von B ein sprunghaftes Ansteigen der Entwicklungskoeffizienten verursachen, das natürlich die Anwendbarkeit der Momentengleichungen sehr in Frage stellt.

### 3.2 Linearisierte 13-Momenten-Gleichungen

Bei der vollständigen 13-Momenten-Näherung wirken die  $q_i$  über die Druckgleichungen auch zurück auf die niedrigeren Momente. Dort, wo die 10-Momenten-Näherung "gut" im Sinne des vorigen Abschnitts ist, wird man erwarten, daß diese Rückwirkung klein ist und die Struktur der Lösungen nicht verändert. Zunächst sei der Einfluß auf das linearisierte System und seine Eigenfrequenzen studiert.

Die Eigenwertgleichung läßt sich in Determinantenform analog zu Gl. (38) schreiben. Die dortige Determinante erhält einen Rand angefügt, der von den Wärmestromgleichungen herrührt. Zu beachten ist jedoch die leicht geänderte Bedeutung von  $u^i$  und  $u^e$ , in der sich die Rückwirkung auf die Druckgleichungen bemerkbar macht: Mit

<sup>1)</sup> Die Anfangswerte  $\delta q_\alpha^4$  hat man dabei in den linearisierten Wärmestromgleichungen zu entnehmen, in denen ebenfalls  $\delta p_{\alpha\beta}^3$  usw. als bekannt einzusetzen sind. Diese Gleichungen lauten:

$$5 \frac{v_0}{\lambda^4 p_0} \left( \frac{\delta q_1^4}{v_0} - \frac{\omega_0^4}{\Omega} \frac{\delta q_2^4}{v_0} \right) + 4 \frac{\delta v}{v_0} + 3 \frac{\delta p_{21}^3}{p_0} + \frac{\delta p_{22}^3}{p_0} = 0$$

$$5 \frac{v_0}{\lambda^4 p_0} \left( \frac{\omega_0^4}{\Omega} \frac{\delta q_2^4}{v_0} + \frac{\delta q_1^4}{v_0} \right) + 2 \frac{\delta p_{12}^3}{p_0} = 0.$$

$$x = \frac{\Omega^2}{v_0^2 \sigma}$$

$$u^4 = x \cdot \frac{1}{\lambda^2} \left( 1 - \frac{7}{5} \frac{\lambda^4 M}{\sigma} \right) + 4L$$

$$v^4 = \lambda^2 \sigma \left[ x \cdot \frac{1}{\lambda^2} \left( 1 - \frac{11}{5} \frac{\lambda^4 M}{\sigma} \right) + L \right]$$

gilt:

$$(48) \quad \begin{vmatrix} 1-x & L & +x & -x & 0 & 0 \\ 1 & 1-M & +2 & -2 & -\frac{M}{2} & -\frac{M}{2} \\ -\frac{M}{6} & -\frac{ML}{2} & u^i & 0 & -\frac{ML}{2} & 0 \\ +\frac{M}{6} & +\frac{ML}{2} & 0 & u^e & 0 & +\frac{ML}{2} \\ 0 & -\frac{M}{5}x & \frac{6}{5}x & 0 & v^i & 0 \\ 0 & -\frac{M}{5}x & 0 & -\frac{6}{5}x & 0 & v^e \end{vmatrix} = 0; \text{ Gleichung 5. Grades} \\ \text{für } x.$$

(Es ist wieder der mehrfache Eigenwert 0 abgespalten). Wir führen die Diskussion von interessanten Spezialfällen analog zu Seite 18 f.

a)  $M = 0$  (d. h.  $p_0 = 0$ ). Die Determinante läßt sich schreiben als Produkt

$$\begin{vmatrix} 1-x & L \\ 1 & 1-M \end{vmatrix} \cdot u^i u^e v^i v^e.$$

Dementsprechend sind die Lösungen der Gleichung (48)

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 1 - L \\ x_{2,3} &= -4L\lambda^{\pm 2} \end{aligned} \right\} \text{ wie bei der 10-Momenten-Näherung}$$

$$\left. \begin{aligned} x_4 &= -L\lambda^2 \\ x_5 &= -L/\lambda^2 \end{aligned} \right\} \Omega \text{ rein imaginär.}$$

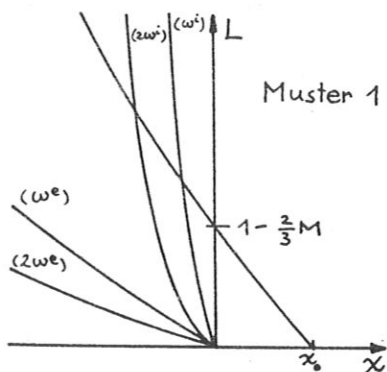
Den Lösungen  $x_{4,5}$  entspricht  $|\Omega|$  = einfache Gyrofrequenz der Ionen bzw. Elektronen im Felde  $B_0$ . Wir haben also wie bei der 10-Momenten-Näherung in diesem Fall höchstens 1 positive Frequenz. Die Berücksichtigung der Wärmeströme bringt lediglich zwei neue rein imaginäre Frequenzen hinzu.

b)  $\lambda = 1$  (d.h.  $m^i = m^e$ ) und  $M < 1$ .

$$u^i = u^e = x \left( 1 - \frac{7}{5} \cdot \frac{M}{3} \right) + 4L; \quad v^i = v^e = \frac{1}{2} \left[ x \left( 1 - \frac{11}{5} \cdot \frac{M}{3} \right) + L \right].$$

Wie in A.5 gezeigt wird, läßt sich dann von der Determinante (48) der in  $x$  quadratische Faktor  $u^i v^i + \frac{3}{5} M L x$  abspalten. Er hat (für  $M < 1$ ) stets 2 negative Nullstellen  $x_{1,2}$ , die mit  $M \rightarrow 0$  nach  $-L$  bzw.  $-4L$  streben. Von den 3 Lösungen der verbleibenden Gleichung nähern sich zwei für  $M \rightarrow 0$  asymptotisch den schon gefundenen Lösungen  $x_{1,2}$ , sind also - jedenfalls für kleine  $M$  - sicher ebenfalls negativ. (Für diejenige Lösung, die gegen  $-L$  strebt, ist die Annäherung sogar von der Ordnung  $M^3$ ; Beweis in A.5, in Bild 8 mit "Doppelwurzeln" bezeichnete zusammenfallende Kurven). Für die letzte Lösung  $x_5$  der Gl. (48) ergibt schließlich die numerische Rechnung, daß sie stets reell und positiv für  $0 \leq L < 1 - 2M/3$  ist. Siehe Bild 8. Man hat also hier wie im Fall a) das qualitative Lösungsbild "Muster 1" (s. Skizze), und die numerische Rechnung ergibt dieses Bild auch in einem Bereich  $\lambda < 1$  und  $M > 0$ . Die Nullstelle der für kleine  $L$  positiven Lösung  $x$  liegt wieder auch im allgemeinen Fall bei  $L = 1 - 2M/3$ , wie der von  $x$  freie Koeffizient der Eigenwertgleichung zeigt.

c)  $L = 0$ . Die Stelle  $x_0$  ergibt sich als Lösung der Gleichung



$$(49) \quad \begin{vmatrix} 1-x & 1 & -1 \\ -M/6 & u^i/x & 0 \\ +M/6 & 0 & u^e/x \end{vmatrix} = 0,$$

wie man durch einige Umformungen der Determinante (48) und Abspalten des Faktors  $x^4$  sowie konstanter Faktoren erkennt.

$$x_0 = \frac{1 - \frac{M}{3} \left( \frac{1}{5\sigma^2} + 1 - \frac{M}{6} \cdot \frac{7}{25\sigma^2} \right)}{\left( 1 - \frac{7}{5} \frac{\lambda}{\sigma} \frac{M}{6} \right) \left( 1 - \frac{7}{5} \frac{1}{\lambda\sigma} \frac{M}{6} \right)}$$

Die Nullstellen des Nenners von  $x_0$  liefern wieder 2 Werte  $M_g(\lambda)$ , die gegenüber denen der 10-Momenten-Näherung leicht verschoben sind (infolge des zusätzlichen Faktors 7/5). Diese Werte  $M_g$  liefern auch wieder Unendlichkeitsstellen für die Lösungen der allgemeinen Gleichung (48), jedoch nicht alle, wie der allgemeine Koeffizient von  $x^5$  zeigt: Er lautet

$$(50) \quad \left( 1 - \frac{7}{5} \frac{\lambda}{\sigma} \frac{M}{6} \right) \left( 1 - \frac{7}{5} \frac{1}{\lambda\sigma} \frac{M}{6} \right) \left[ 5\sigma^2(1-M) \left( 1 - \frac{11}{5} \frac{\lambda}{\sigma} \frac{M}{6} \right) \left( 1 - \frac{11}{5} \frac{1}{\lambda\sigma} \frac{M}{6} \right) - \frac{M^2}{2} \left( 1 - \frac{11}{5} \frac{\lambda}{\sigma} \frac{M}{6} \right) \right]$$

Es gibt also im allgemeinen noch 3 weitere Werte  $M_g$ . Die Zahlen  $M_g$  verlaufen (nach Ausweis numerischer Rechnungen: monoton) zwischen den folgenden Grenzen:

	$M_g =$				
$\lambda = 0$	$\frac{30}{7}$	0	1.097	5.46	0
$\lambda = 0.3$	3.93	0.354	1.130	5.22	0.21
$\lambda = 1$	$\frac{15}{7}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{15}{11}$	4.54	0.66

Graphische Darstellung s. Bild 9. Als Beschränkung des Gültigkeitsbereiches von "Muster 1" tritt also noch ein zweites  $M_g$  auf (letzte Spalte), das stets kleiner als das zum 10-Momenten-Fall analoge  $M_g$  ist (2. Spalte) und auch schon für  $\lambda = 1$  eine Rolle spielt. Siehe Bild 8, Kurven zu  $M = 0.7, 0.8$ .

Der Bereich  $1 > M > \max \{ M_g \}$  wird wieder durch das Verhalten bei  $\lambda = 0$  gekennzeichnet.

d)  $\lambda = 0$ . Nach Abspalten von 2 Lösungen  $x = 0$  (Ionen-Gyrofrequenz!) verbleibt eine Gleichung 3. Grades:

$$\begin{vmatrix} 1-x & +L & -x & 0 & 0 \\ 1 & 1-M & -2 & -\frac{M}{2} & -\frac{M}{2} \\ \frac{M}{6} & \frac{ML}{2} & -\frac{7}{30}Mx + 4L & 0 & \frac{ML}{2} \\ 0 & -\frac{M}{5} & 0 & 1 - \frac{11}{30}M & 0 \\ 0 & -\frac{M}{5}x & -\frac{6}{5}x & 0 & -\frac{11}{30}Mx + L \end{vmatrix} = 0.$$

Die numerische Auswertung der Diskriminante dieser Gleichung ergibt, daß in allen interessierenden Bereichen der Parameter neben einer reellen Lösung  $x$  stets 2 nichtreelle konjugiert komplexe Lösungen  $x$  existieren, s. Bild 10. Es gibt also stets ein nichtreelles  $\Omega$  mit positivem Realteil, was einer Schwingung mit anwachsender Amplitude entsprechen würde ("Überstabilität"). Bei einem solchen Verhalten in der Nähe des Gleichgewichts vor der Front ist keine Stoßwellenstruktur zu erwarten, nach allem, was man über das Aussehen der Lösungen bei einfacheren Modellen, z.B. [3], weiß. Bei der 10-Momenten-Näherung hatten sich im entsprechenden Fall (S. 21) zwei positive Frequenzen  $\Omega$  ergeben. Die auf Seite 29 ausgesprochene Vermutung, daß hierzu keine stoßwellenartige Lösung gehören könne, wird also durch das Ergebnis der 13-Momenten-Näherung noch bekräftigt.

Die Auflösungsformeln für die linearisierten 13-Momenten-Gleichungen sind in A.1 mitgeteilt.

### 3.3 Numerische Ergebnisse über die stoßfreien Gleichungen

Wollte man vorab über die Gültigkeit der 13-Momenten-Näherung wenigstens eine analoge Aussage gewinnen dazu, wie es auf Seite 32 für die 10-Momenten-Näherung versucht wurde, so müßte man die Entwicklungskoeffizienten 4. Ordnung nach der nächsthöheren Momentenmethode berechnen. Will man diese ungeheure Komplikation vermeiden, so kann man als einen gewissen Ersatz dafür jedenfalls wieder die Kleinheit der  $a_1$  fordern. (Dies

ist z.B. bei der Ableitung der Stoßformeln durch Hertweck [5] durchwegs angenommen worden). Ist aber  $|a_1| \ll 1$  erfüllt, so ist zu erwarten, daß die Lösungen der 13-Momenten-Gleichungen sich in den niedrigsten 10 Momenten nicht wesentlich von denen der 10-Momenten-Gleichungen unterscheiden. Der Verlauf der Wärmeströme bzw. der  $a_1$  wird im übrigen einen Anhaltspunkt geben dafür, wie weit die 13-Momenten-Methode überhaupt als eine Verbesserung der 10-Momenten-Näherung angesehen werden kann.

Zur numerischen Behandlung des komplizierten Differentialgleichungssystems (19) bzw. (27 bis 31) sei bemerkt, daß es sich nicht empfiehlt, es explizit nach den Ableitungen aufzulösen. Die entstehenden Formeln würden praktisch ebensoviele Rechenoperationen erfordern wie die allgemeine Auflösung eines linearen Gleichungssystems mit der Cramerschen Regel. Stattdessen wurde in den numerischen Rechnungen das System bei jedem Integrationsschritt nach einem Eliminationsverfahren gelöst, das noch die jeweiligen Zahlenwerte in der Gleichungsmatrix in numerisch günstiger Weise berücksichtigt.

Zur Illustration der Rechenergebnisse nach der 13-Momenten-Methode (stoßfreie Gleichungen) mögen die Bilder 11 und 12 dienen. Die zugehörigen Lösungen der 10-Momenten-Näherung (mit denselben Parameterwerten  $\lambda$ ,  $L$  und  $M$ ) sind in [4, S. 96c] bzw. in Bild 6 dargestellt. Die Übereinstimmung entsprechender Lösungen ist im allgemeinen gut, besonders natürlich in den niedrigen Momenten. Vor allem zeigen auch die 13-Momenten-Lösungen das charakteristische "Ausbrechen" der Entwicklungskoeffizienten  $a_1^s$  an den Stellen starker Abweichung vom Ausgangsgleichgewicht. Die Amplituden der Wellenzüge sind gegenüber den 10-Momenten-Lösungen gewöhnlich etwas überhöht. Insbesondere aber treten bei der Integration des 13-Momenten-Systems häufig neue Singularitäten höchst unübersichtlicher Art auf, durch welche die Rechnung abgebrochen wird; so in Bild 11 bei  $x = 5.31$ . In Bild 12 endete die Rechnung infolge



eines negativen Eigenwerts des Drucktensors. Der Koeffizient  $a_2^i$  war an dieser Stelle auf über 1000% angestiegen, die Wärmetransport-Geschwindigkeiten  $q_{1,2}^i$  für die Ionen hatten dieselbe Größenordnung wie die Massengeschwindigkeit  $v$ . - Allgemein hat es den Anschein, als brächte die Mitnahme der Wärmeströme  $q_i$  keine Verbesserung der Beschreibung eines Plasmas gegenüber der 10-Momenten-Näherung, jedenfalls nicht für den von uns untersuchten eindimensionalen stationären Fall.

Die numerischen Rechnungen zu dieser Arbeit wurden auf den Digitalrechenanlagen

G 3 des Max-Planck-Instituts für Physik & Astrophysik in München und

IBM 7090 des Instituts für Plasmaphysik in Garching bei München durchgeführt.

Zur Integration der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen wurde teils das Runge-Kutta-Verfahren, teils das Differenzenverfahren von Adams-Störmer (mit kombinierter Extrapolation-Interpolation bei jedem Schritt) benutzt. Dabei war bei jedem der Verfahren für automatische Schritthalbierung bzw. -verdopplung, je nach dem Wert einer gewissen Kontrollgröße, gesorgt. Als Integrationskontrolle diente stets der Energiesatz und (wo möglich) die beiden "Zustandsgleichungen" (37). Die relativen Abweichungen dieser Kontrollgrößen waren (bei den stoßfreien Gleichungen) nie größer als  $\approx 10^{-5}$ .

### Zusammenfassung

Für die eindimensionalen stationären Momentengleichungen zur Boltzmann-Gleichung mit und ohne Stoßterm für ein Plasma im Magnetfeld lassen sich bei genügend kleinem Gleichgewichtsdruck stoßwellenartige Lösungen auf numerischem Wege finden. Die Anisotropie des Drucktensors ist auch bei Hinzunahme der Dissipation noch beträchtlich. Die Lösungen der 10-Momenten-Näherung ohne Stöße sind zwar für einzelne Werte der Gleichgewichts-Parameter solitäre Wellen von sehr einfacher Struktur, bilden jedoch offenbar im allgemeinen lange komplizierte Wellenzüge. Für größere Gleichgewichtsdrucke bzw. kleinere Werte des Massenverhältnisses  $m^e/m^i$  werden die Lösungen singular. Für die linearisierten 10- und 13-Momenten-Gleichungen kann man - im Zusammenhang mit diesen Singularitäten - für niedrige und hohe Drucke charakteristische Unterschiede im Verhalten der Lösungen nachweisen. Die 13-Momenten-Gleichungen liefern keine Verbesserung gegenüber der niedrigeren Näherung. Die Wärmeströme werden im Laufe der Integration bald unzulässig groß; außerdem treten neue Singularitäten auf.

A n h a n g

A.1 13 Momente, lineare Näherung

Es gelten die Bezeichnungen von Seite 22, außerdem die Abkürzungen:

$$m^4 = \frac{\lambda^4}{\sigma} \frac{M}{30}; \quad \left( \frac{\Omega}{\omega_0^4} \right)^2 = \frac{x}{(\lambda^4)^2 L} = W_3^2$$

Es wird berechnet:

$$D^4 = W_3^4 (1 - 7m^4)(1 - 11m^4) + W_3^2 (5 - 33m^4) + 4$$

$$S^4 = W_3^4 (1 - 7m^4)(1 - 5m^4) + W_3^2 (3 - 17m^4) + 2$$

$$K^4 = W_3^2 (1 - 2m^4) + 1$$

Daraus sukzessive:

$$\frac{dv}{v_0} = - \left( 1 - \frac{M}{2} \sum \frac{S^4}{D^4} \right)^{-1} \left( L + \frac{M}{3} \sum \frac{K^4}{D^4} \right) \frac{dB}{B_0}$$

$$\frac{d\dot{v}}{v_0} = \frac{B_0}{\sigma \Omega} \left( \frac{dB}{B_0} + \frac{dv}{v_0} \right)$$

$$\frac{dp_{12}^4}{p_0} = \frac{\Omega}{\omega_0^4} \cdot \frac{1}{D^4} \left[ (W_3^2(1-11m^4) + 1) \frac{dB}{B_0} + 3(W_3^2(1-5m^4) + 1) \frac{dv}{v_0} \right]$$

$$\frac{dp_{11}^4}{p_0} = \frac{1}{D^4} \left( -3S^4 \frac{dv}{v_0} + 2K^4 \frac{dB}{B_0} \right)$$

$$\frac{dq_1^4}{v_0} = - \frac{1}{D^4} \cdot 6m^4 W_3^2 \left[ \frac{dB}{B_0} - ((1-7m^4)W_3^2 + 1) \frac{dv}{v_0} \right]$$

$$\frac{dp_{22}^4}{p_0} = - \frac{dv}{v_0} - \frac{dq_1^4}{v_0} - 2 \frac{dp_{12}^4}{p_0 \Omega / \omega_0^4}$$

$$\frac{dp_{33}^4}{p_0} = - \frac{dv}{v_0} - \frac{dq_1^4}{v_0}$$

$$\frac{dq_2^4}{v_0} = - \frac{\omega_0^4}{\Omega} \frac{dq_1^4}{v_0} - 2m^4 \frac{dp_{12}^4}{p_0}$$

## A.2 Stoßformeln

Bemerkung zur numerischen Auswertung der Formeln von Hertweck. In den Formeln tritt die orthogonale Matrix  $O_{\alpha\beta}$  für die Hauptachsentransformation des Elektronen-Drucktensors  $p_{\alpha\beta}^e$  ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ) auf. Die Formeln sind so gebaut, daß alle vorkommenden Größen ( $q_{\alpha}, d_{\alpha} = w_{\alpha}^i - w_{\alpha}^e$ ) zunächst in das Druck-Hauptachsensystem transformiert werden müssen. Dann werden verschiedene Integrale aus ihnen berechnet, und anschließend wird wieder ins ursprüngliche Koordinatensystem zurücktransformiert. Ist nun der Druck nahezu isotrop, so ist  $O_{\alpha\beta}$  numerisch sehr ungenau bestimmt, und die zweimalige Transformation kann unliebsame Schwankungen der Ergebnisse liefern. Es ist daher ratsam, in diesem Fall die Formeln nach der Anisotropie des Drucktensors zu linearisieren. Das geschieht folgendermaßen: Die "kritischen" Terme in den Formeln lauten ( $s$  ist eine Integrationsvariable,  $0 \leq s \leq 1$ )

(A1)  $O_{\alpha\mu} O_{\beta\mu} \frac{1}{1 + s^2 \tau_{\mu}}$ . Es ist  $\tau_{\mu} = \frac{\bar{p}_{\mu}^e}{p^e} - 1$ , wobei  $\bar{p}_{\mu}^e$  der Eigenwert Nr.  $\mu$  des Tensors und  $p^e = \frac{1}{3}(\bar{p}_1^e + \bar{p}_2^e + \bar{p}_3^e)$  der mittlere Druck ist. Für nahezu isotropen Druck lassen sich nun die Eigenwerte  $\bar{p}_{\mu}^e$  nicht in eine Potenzreihe der Größen  $(p_{\alpha\beta}^e - \delta_{\alpha\beta} p^e)$  entwickeln, ebensowenig die  $\tau_{\mu}$ . Aber es gilt natürlich für  $p_{\alpha\beta}^e \rightarrow \delta_{\alpha\beta} p^e$ :  $\bar{p}_{\alpha}^e \rightarrow p^e$  und  $\tau_{\alpha} \rightarrow 0$ . Das genügt, um den Ausdruck  $\frac{1}{1 + s^2 \tau_{\mu}}$  durch  $1 - s^2 \tau_{\mu}$  anzunähern. Wegen  $p_{\alpha\beta}^e \cdot O_{\beta k} = \bar{p}_{\alpha}^e O_{\alpha k}$  (über  $k$  nicht summiert) ergibt sich dann als lineare Näherung für (A1):

$$\delta_{\alpha\beta} - s^2 \left( \frac{1}{p^e} O_{\alpha\mu} p_{\beta\nu}^e O_{\nu\mu} - \delta_{\alpha\beta} \right) = \delta_{\alpha\beta} - s^2 \left( \frac{p_{\alpha\beta}^e}{p^e} - \delta_{\alpha\beta} \right),$$

also der Anfang der Potenzreihenentwicklung nach der Anisotropie, in dem die Transformationsmatrix nicht mehr vorkommt.

- Das allgemeine Entwicklungsglied der Ordnung  $k$  wäre übrigens

$(-s^2)^k \Delta^k$  mit der "Anisotropie-Matrix"  $\Delta = (\Delta_{\alpha\beta}) = \left( \frac{p_{\alpha\beta}^e}{p^e} - \delta_{\alpha\beta} \right)$ ,

was aus der Identität  $(\Delta^k)_{\alpha\beta} = \sum_{\nu=0}^k \binom{k}{\nu} \ddot{p}_{\alpha\beta} (-1)^{k-\nu}$   
mit den Matrices  $(\ddot{p}_{\alpha\beta}) = (p_{\mu\nu}^e/p^e)^*$  und  $(\dot{p}_{\alpha\beta}) = (d_{\alpha\beta})$  folgt.

### A.3 Leitfähigkeit und freie Weglänge

Die Stoßglieder in dimensionsloser Form ( $\hat{\Sigma}, \hat{\Sigma}_{\alpha\beta}$  usw.) sind sämtlich proportional zu einem dimensionslosen Parameter Z, der so wie die Parameter  $\lambda$ , M und L ein Potenzprodukt aus Naturkonstanten und aus den Integrationskonstanten F (Massenfluß) und  $\Gamma$  (Impulsfluß) unseres Problems ist. Z beschreibt die "Stärke der Dämpfung", hängt also mit Leitfähigkeit und freier Weglänge zusammen. Die zugehörigen Formeln sind:

$$(A2) \quad Z = \frac{1}{2\pi^{3/2}} \frac{e^3}{m^2 \epsilon_0^2 \mu_0^{1/2}} \frac{F^5}{\Gamma^{9/2}} \ln \Lambda \quad (m = m^i + m^e)$$

( $\ln \Lambda = \ln \frac{12\pi(\epsilon_0 kT)^{3/2}}{e^3 n^{1/2}}$  wurde in den Rechnungen als konstant angenommen). Für die Leitfähigkeit  $\sigma_H$  ergibt sich aus den linearisierten 13-Momenten-Gleichungen [5 S. 44]

$$(A3) \quad \sigma_H = 0.569 \cdot \frac{8\epsilon_0(2kT_e)^{3/2}}{m_e^{3/2} e^2 \ln \Lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}};$$

Wir wollen mit diesem  $\sigma_H$  die Stoßfrequenz  $\nu$  für Teilchen verschiedener Sorte durch  $\sigma_H = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{n}{m_e \nu}$  und damit die freie Weglänge  $l$  durch

$$l\nu = v_{th}^e = \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}}$$

erklären. Als dimensionslosen, für unser Problem typischen Parameter berechnen wir  $l/r$  mit  $r = (r^i r^e)^{1/2}$ , dem geometrischen Mittel der Gyrationradien.

$$(A4) \quad \frac{l}{r} = \frac{1}{Z} \cdot 13.1 \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \hat{\nu}^2 \hat{B} \hat{\rho}^2$$

(Bezeichnungen der Tabelle S. 13). Führen wir noch L und M ein und schreiben  $l = \hat{l} x_0$ , wobei  $x_0$  die Längeneinheit unseres dimensionslosen Größensystems ist, so wird  $\hat{r} = \hat{\nu} \hat{B}$  und

$$(A5) \quad \hat{l} = \frac{13.1}{Z} \left(\frac{\hat{\nu}}{\sigma}\right)^3 \cdot \left(\frac{\hat{\nu}}{\sigma}\right)^2 \cdot \left(\frac{M}{b}\right)^2 = \frac{0.364}{Z} \left(1 + \frac{M}{3} + \frac{L}{2}\right)^{-5} M^2.$$

$\hat{l}$  ist für die Gleichgewichtszustände ebenfalls in Bild 7 eingezeichnet.

#### A.4 10 Momente, Eigenwertgleichung

Zu (39) Diese quadratische Gleichung für  $x$  lautet entwickelt

$$x^2(1 - \frac{M}{3})(1 - M) - x(1 - M - L(5 - \frac{4}{3}M)) - 4L(1 - \frac{2}{3}M - L) = 0$$

Voraussetzung:  $0 < M < 1$ ,  $0 < L$ .

Für  $L < 1 - 2M/3$  gibt es ersichtlich stets 2 reelle Lösungen verschiedenen Vorzeichens. Für  $L > 1 - 2M/3$  werde die Diskriminante betrachtet:

$$\text{Diskriminante} = L^2 a + 2L(1 - M)b + (1 - M)^2$$

$$\text{mit } a = -\frac{32}{9}M^2 + 8M + 9 \quad b = \frac{16}{9}M^2 - \frac{20}{3}M + 3$$

Dieser quadratische Ausdruck in  $L$  ist genau dann positiv definit, wenn  $a > b^2$ . Für  $0 < M < 1$  liegt aber  $a$  zwischen 9 und  $13\frac{4}{9}$ ,

sowie  $b$  zwischen 3 und  $-1\frac{8}{9}$ . Die Diskriminante ist also positiv definit. Es gibt nur reelle Lösungen der Gleichung (39).

Wegen  $1 - M - L(5 - \frac{4}{3}M) < 1 - M - (1 - \frac{2}{3}M)(5 - \frac{4}{3}M) < 0$  sind diese Lösungen beide negativ, w.z.b.w.

Zu (41) Die Gleichung lautet entwickelt

$$x^2 \cdot \frac{M}{6}(1 - M) - x \cdot 4L(1 - \frac{2}{3}M) + 4L(1 - \frac{5}{6}M - L).$$

$$\text{Diskriminante} = 16L(1 - \frac{5}{6}M)(L(1 - \frac{M}{3}) - \frac{M}{6}(1 - M)).$$

Es ergibt sich sofort  $L_g = \frac{M}{6} \cdot \frac{1 - M}{1 - \frac{M}{3}}$ ; für  $L > L_g$  existieren

2 verschiedene reelle Lösungen  $x$ , die für  $L \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 1 - 5M/6$  beide positiv (von verschiedenem Vorzeichen) sind.

#### A.5 13 Momente, Eigenwertgleichung

Zu 3.2b) Eine Umformung der Determinante (48) führt

mit den Abkürzungen  $u^\pm = \frac{1}{4}(u^e \pm u^i)$ ,  $v^\pm = \frac{1}{4}(v^e \pm v^i)$  zu

$$\begin{vmatrix} 1-x & L & x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-M & 2 & -\frac{M}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{M}{6} & -\frac{ML}{2} & u^+ & -\frac{ML}{4} & u^- & 0 \\ 0 & -\frac{M}{5}x & \frac{3}{5}x & v^+ & 0 & v^- \\ 0 & 0 & u^- & 0 & u^+ & -\frac{ML}{4} \\ 0 & 0 & 0 & v^- & \frac{3}{5}x & v^+ \end{vmatrix}$$

Für  $\lambda = 1$  ist nun  $u^- = v^- = 0$  und  $u^+ = u^1/2$ ,  $v^+ = v^1/2$ . Die Abspaltung des quadratischen Faktors

$$(A6) \quad \begin{vmatrix} u^+ & -ML/4 \\ 3x/5 & v^+ \end{vmatrix}$$

ist dann unmittelbar zu sehen. Die quadratische Gleichung (A6) = 0 lautet ausgeschrieben:

$$\left(1 - \frac{7}{15}M\right)\left(1 - \frac{11}{15}M\right)\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(5 - \frac{11}{5}M\right)\frac{x}{L} + 4 = 0.$$

Sie hat ersichtlich keine positiven Lösungen für  $0 < M < 1$ . Die Diskriminante ist proportional zu

$$\left(5 - \frac{11}{5}M\right)^2 - 16\left(1 - \frac{7}{15}M\right)\left(1 - \frac{11}{15}M\right) = 9 - \frac{14}{5}M - \frac{143}{225}M^2$$

man überzeugt sich leicht davon, daß dieser Ausdruck für  $0 < M < 1$  positiv ist. Es gibt also auch keine nichtreellen Lösungen, wie auf S. 35 behauptet.

Wir wollen nun eine Lösung der Gleichung (A6) = 0 versuchsweise in die linke Seite der verbleibenden Gleichung 3. Grades einsetzen und den entstehenden Ausdruck nach Potenzen von  $M$  entwickeln. Es ergibt sich zunächst

$$-\frac{M}{6L}v^+ \cdot \begin{vmatrix} 1-x & L & x \\ -L-\frac{M}{3} & -L & 2u^+-2L \\ 1 & 3L-2u^+ & 0 \end{vmatrix}.$$

Setzt man für  $x$  die Potenzreihenentwicklung  $x/L = a + M(\dots)$  an ( $a = -1$  bzw.  $-4$  für die beiden Lösungen von (A6)=0), so wird die 3-reihige Determinante

$$L^2 \left[ (a+1)(La + L+1) + M(\dots) \right], \text{ während } v^+ = L/4 \cdot (a+1+M(\dots))$$

ist. Die linke Seite der Gleichung 3. Grades ist also für  $a = -1$  mindestens von der Ordnung  $M^3$ , für  $a = -4$  i.allg. nur von der Ordnung  $M$ , nur bei  $L = 1/3$  von der Ordnung  $M^2$ .

### Erläuterung der Abbildungen

Bild 1 bis 3: Eigenfrequenzen  $\Omega$  der linearisierten 10-Momenten-Gleichungen, ausgedrückt durch  $x = \Omega^2 / (v_g/\sigma)$ . Parameter der Kurvenscharen ist jeweils  $M$ .

Bild 1: Links der L-Achse geänderter Maßstab für  $x$ .

Bild 2: Das Lösungsbild "schlägt um" bei  $M = M_g = 0.496$ .

Bild 3: Die beiden Lösungen  $\neq 0$  für  $\lambda = 0$  werden unterhalb  $L_g$  (bezeichnete Punkte) nichtreell.

Bild 4: 10 Momente, Nullstellen der Funktion  $J$  bzw. Maxima (dick) und Minima (dünn) von  $B$ . Abszisse: Ortskoordinate.  $L$  und  $M$  fest.

Bild 5 und 6: 10 Momente, Lösungen über der Ortskoordinate aufgetragen,  $L$  und  $M$  wie in Bild 4. Oberstes System: Entwicklungskoeffizienten  $a_i^S$ ; mittleres System: Verhältnis der Eigenwerte des Drucktensors als Maß für seine Anisotropie; unterstes System: Magnetfeld  $B$  mit der unabhängigen Variablen  $t$  als Kurvenparameter, Gleichgewichtswert von  $B$  gestrichelt.

Bild 5 Beispiel für eine extrem einfache, Bild 6 für eine sehr komplizierte Welle (vgl. Bild 4).

Bild 7: 10 Momente, Stoßwelle. Von oben nach unten: Druck-Anisotropie, Diffusionsgeschwindigkeit, Magnetfeld über der Ortskoordinate; Gleichgewichtswerte für  $B$  gestrichelt.  $l$  freie Weglänge,  $r$  mittlerer Gyrationradius.

Bild 8 und 10: Wie Bild 1 bis 3, für die 13-Momenten-Gleichungen. Ein "Umschlag" tritt bereits für  $\lambda = 1$  auf bei  $M = M_g = 0.66$ .

Bild 9: Die 3 relevanten Nullstellen  $M_g(\lambda)$  von (50). Kurve (\*) ist analog zum  $M_g$  der 10-Momenten-Gleichungen.

Bild 11 und 12: 13 Momente, Anordnung wie Bild 5 und 6,  $L$  und  $M$  wie dort. Die Kurven sind bis zum Abbrechen der Rechnung gezeichnet.



L i t e r a t u r

- 1 DAVIS, L., R. LÜST, A. SCHLÜTER, Z.f.Naturf. 13a (1958)
- 2 GEIGER, W., H.J. KAEPPELER, B. MAYSER, Proc.Conf.  
Plasma Phys. Salzburg (1961)
- 3 GOLDEN, K.L., H.K. SEN, Y.M. TREVE, Proc.5.Conf.Ion.  
Phen. München (1961)
- 4 HAIN, K., R. LÜST, A. SCHLÜTER, Rev.Mod.Phys. 32 (1960)
- 5 HERTWECK, F., Diss. Göttingen (1960)
- 6 MORAWETZ, C.S., Report NYO-2885, New York Univ. (1960)
- 7 LÜST, R., Fortschr.d.Phys. 7 (1959) p.537

Herrn Professor Dr. A. Schlüter danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit; ihm und Herrn Dr. K. Hain danke ich ferner für viele fördernde Diskussionen.

Bild 1

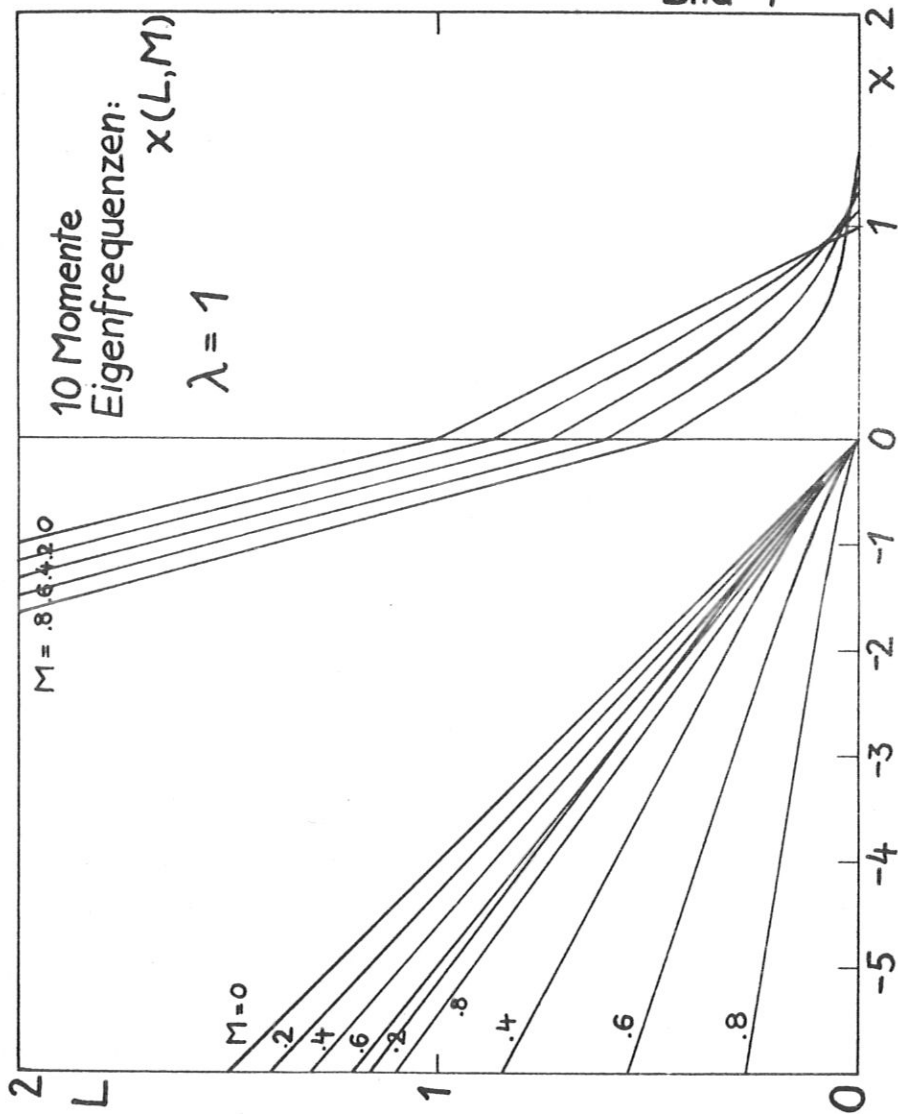


Bild 2a

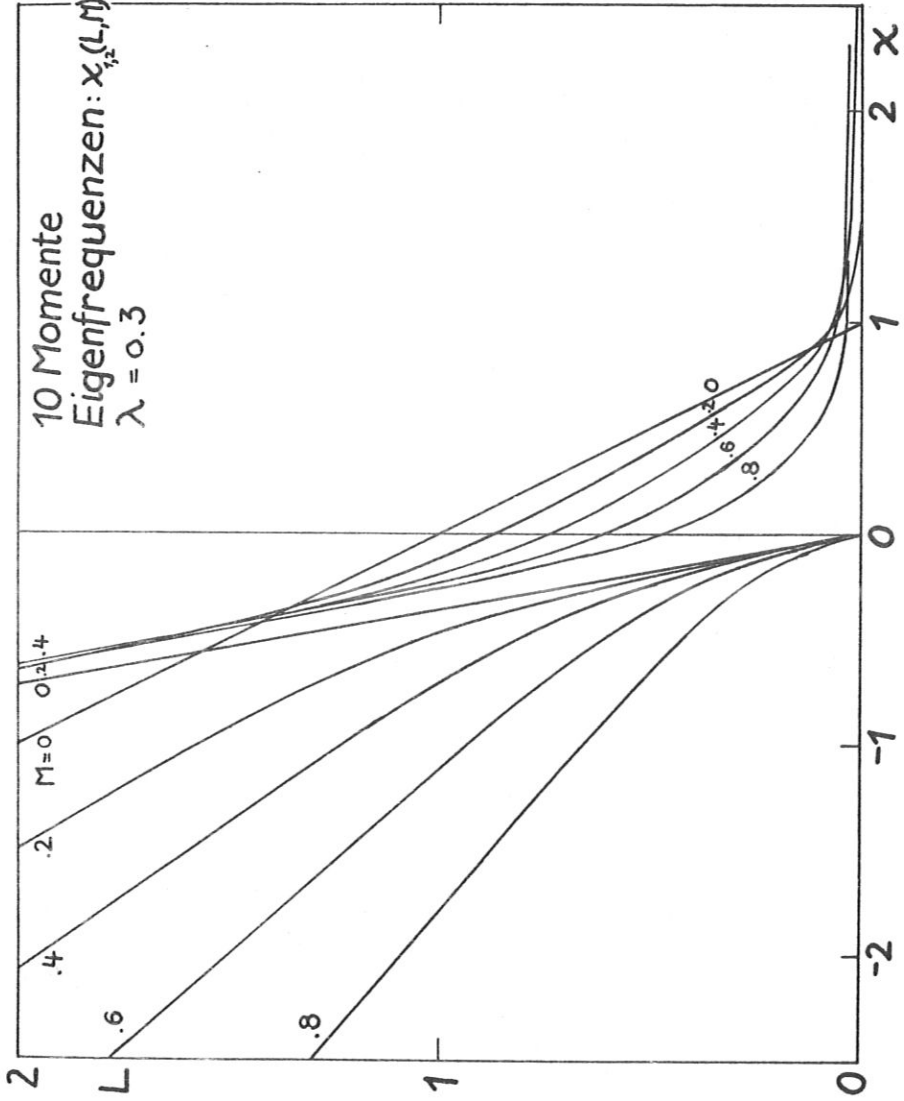


Bild 2b

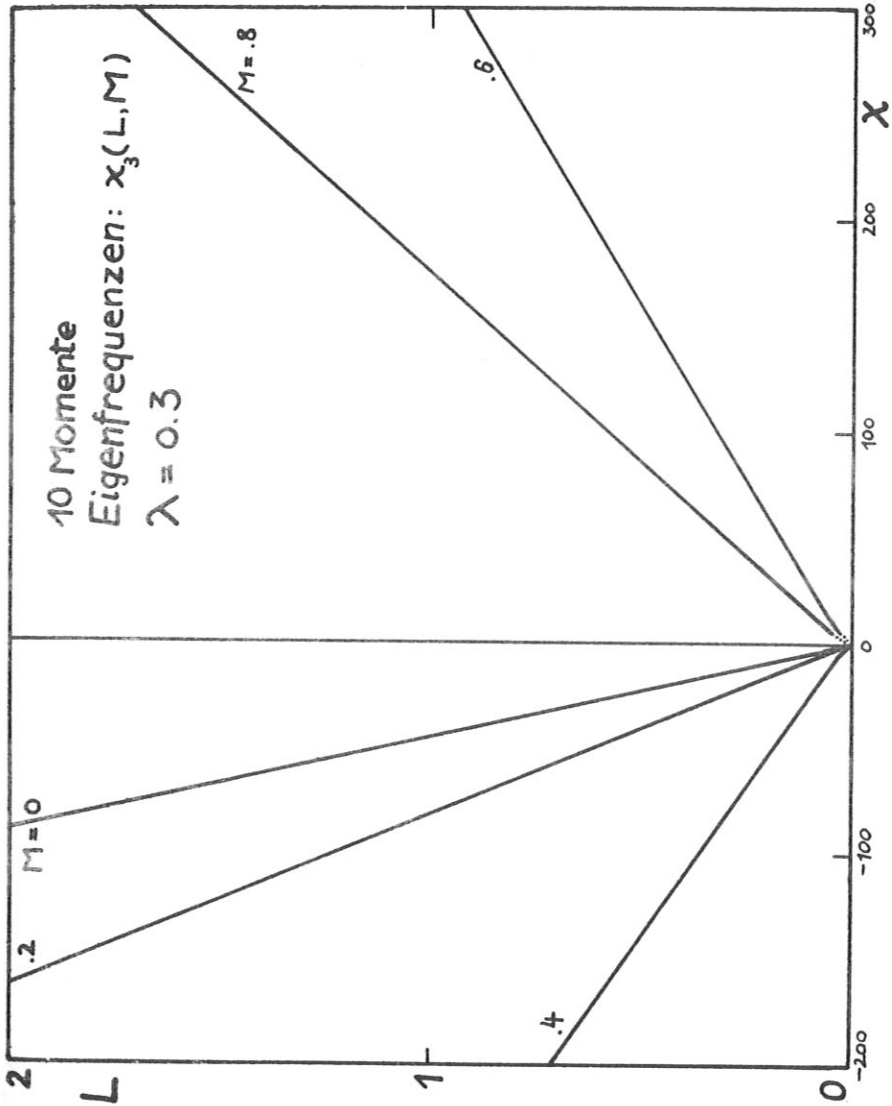


Bild 3

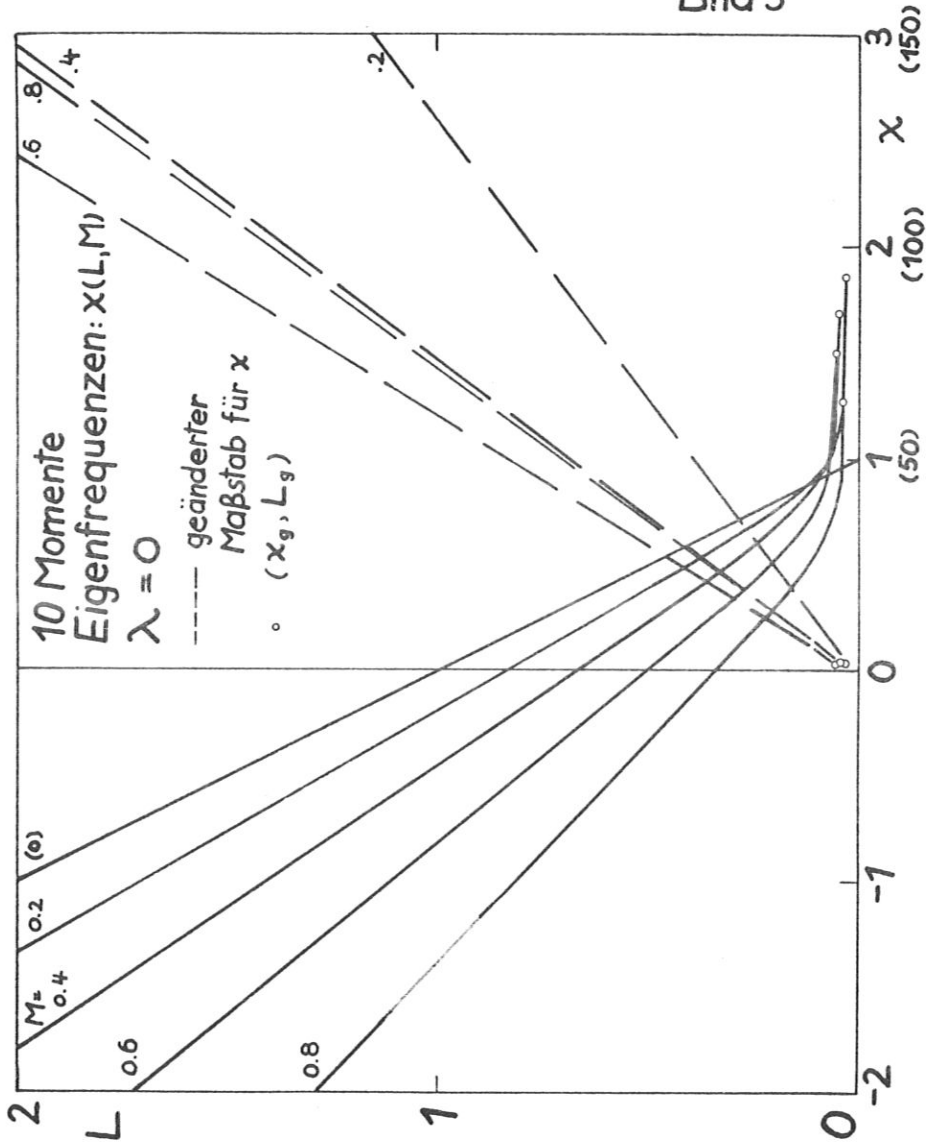
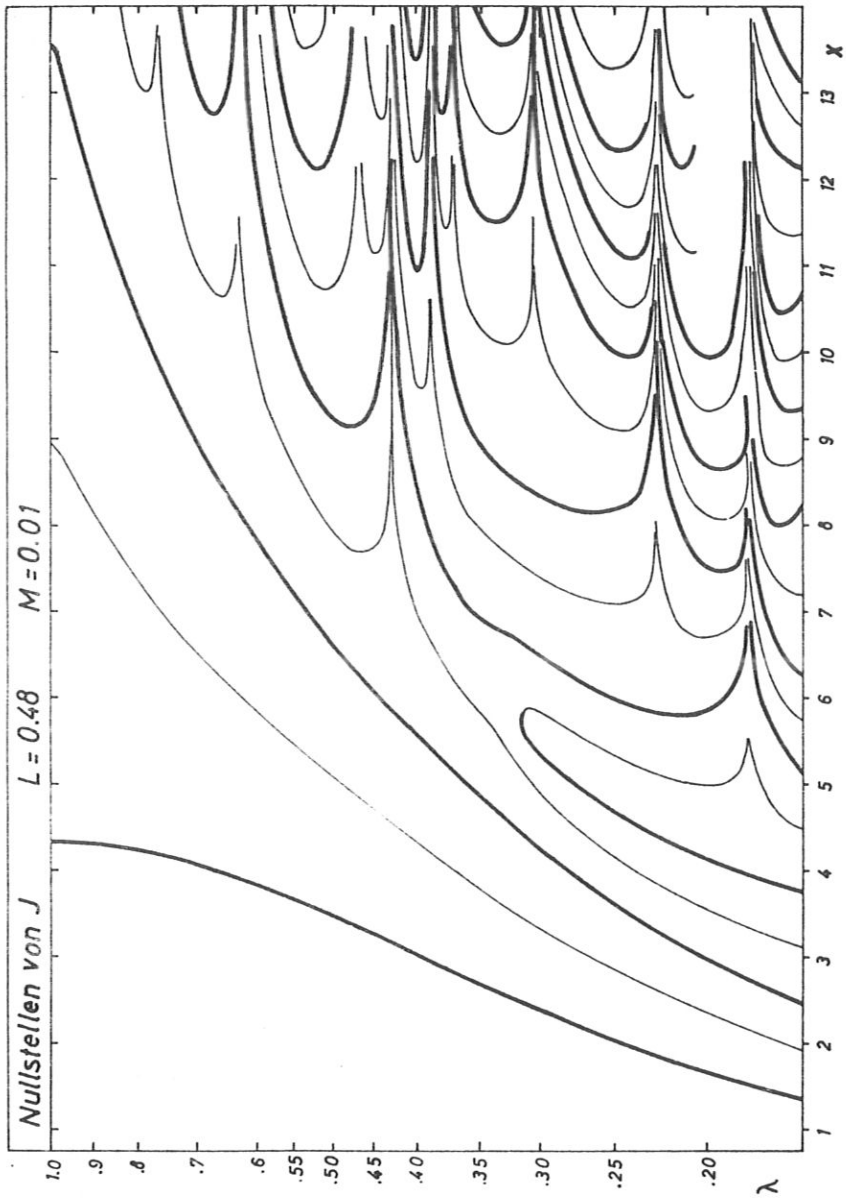


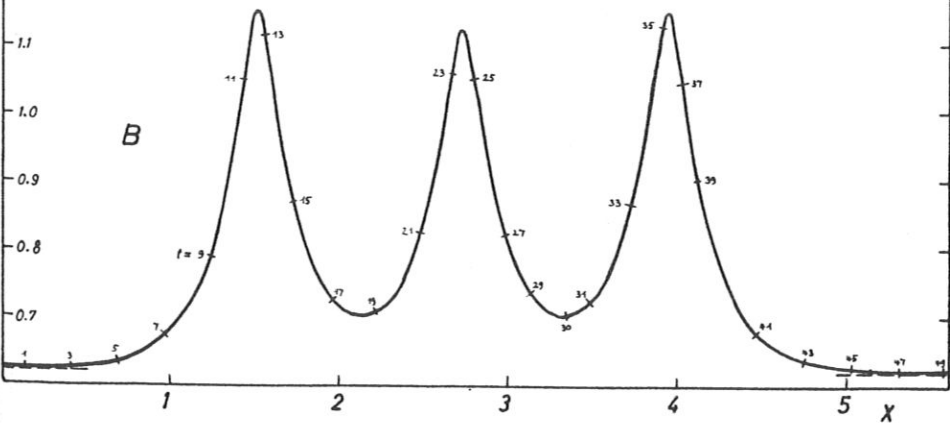
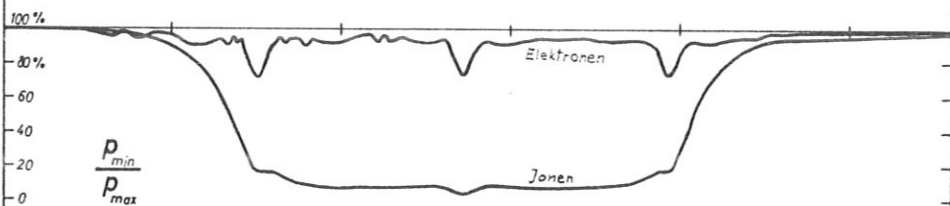
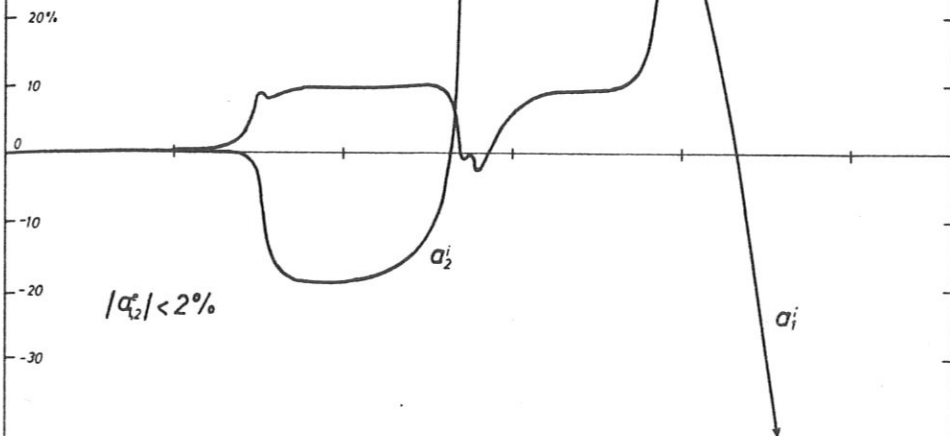
Bild 4



10 Momente

$\lambda = 0.18$   $L = 0.48$   $M = 0.01$

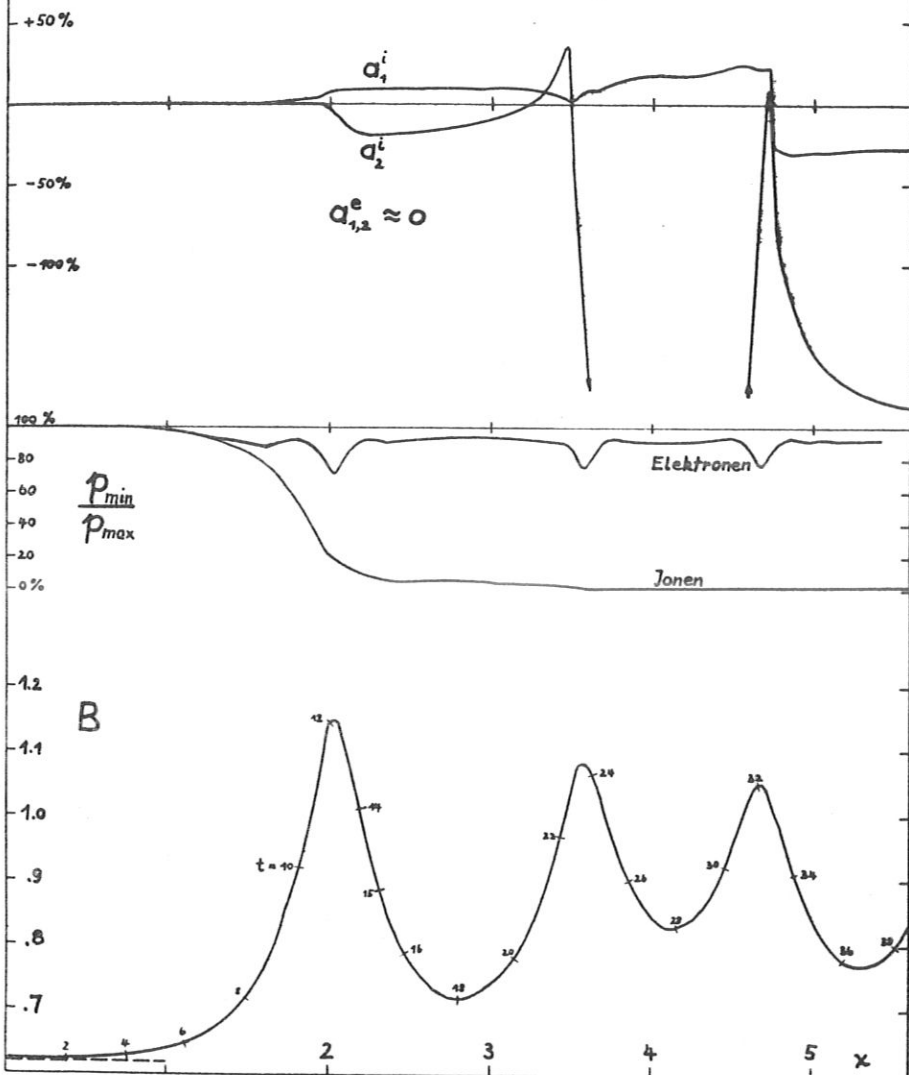
Bild 5



10 Momente

$\lambda = 0.25$   $L = 0.48$   
 $M = 0.01$

Bild 6





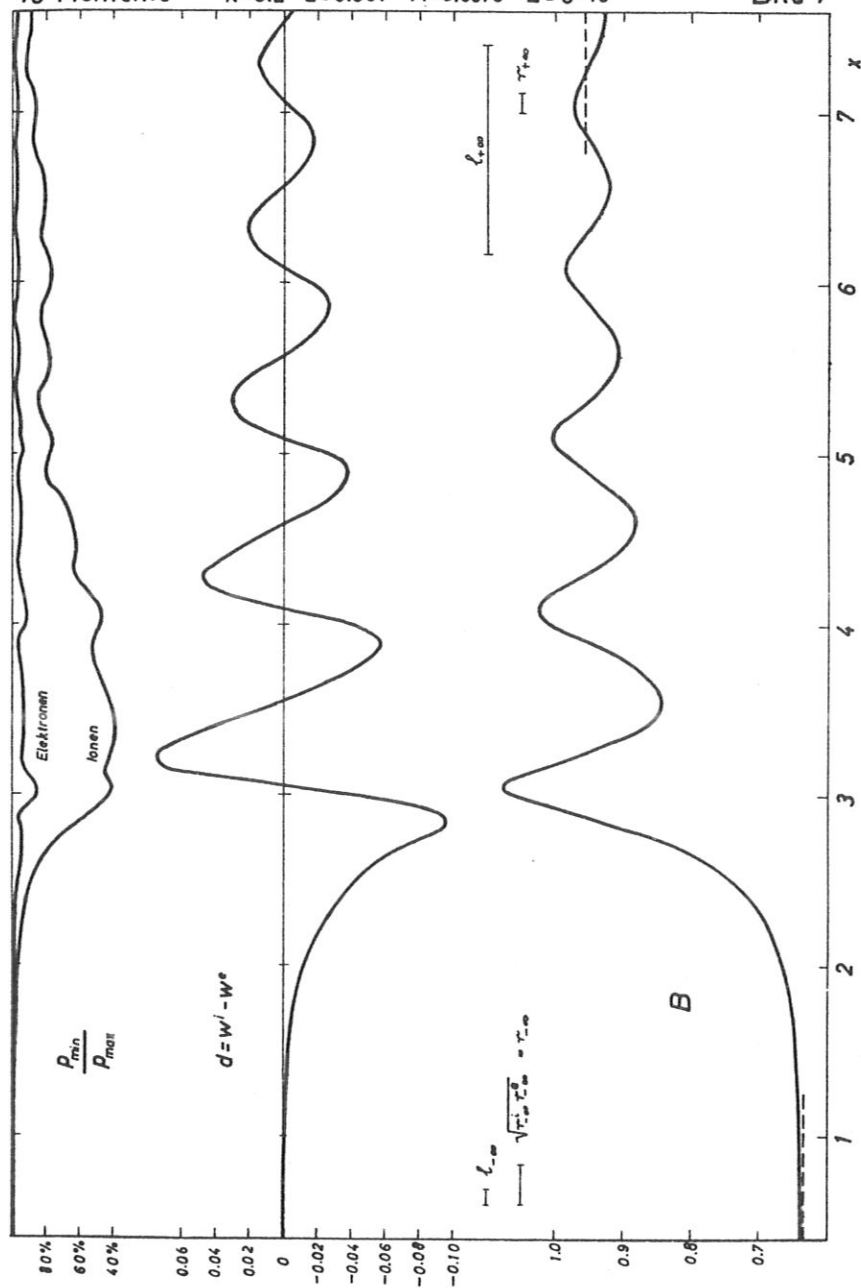


Bild 8

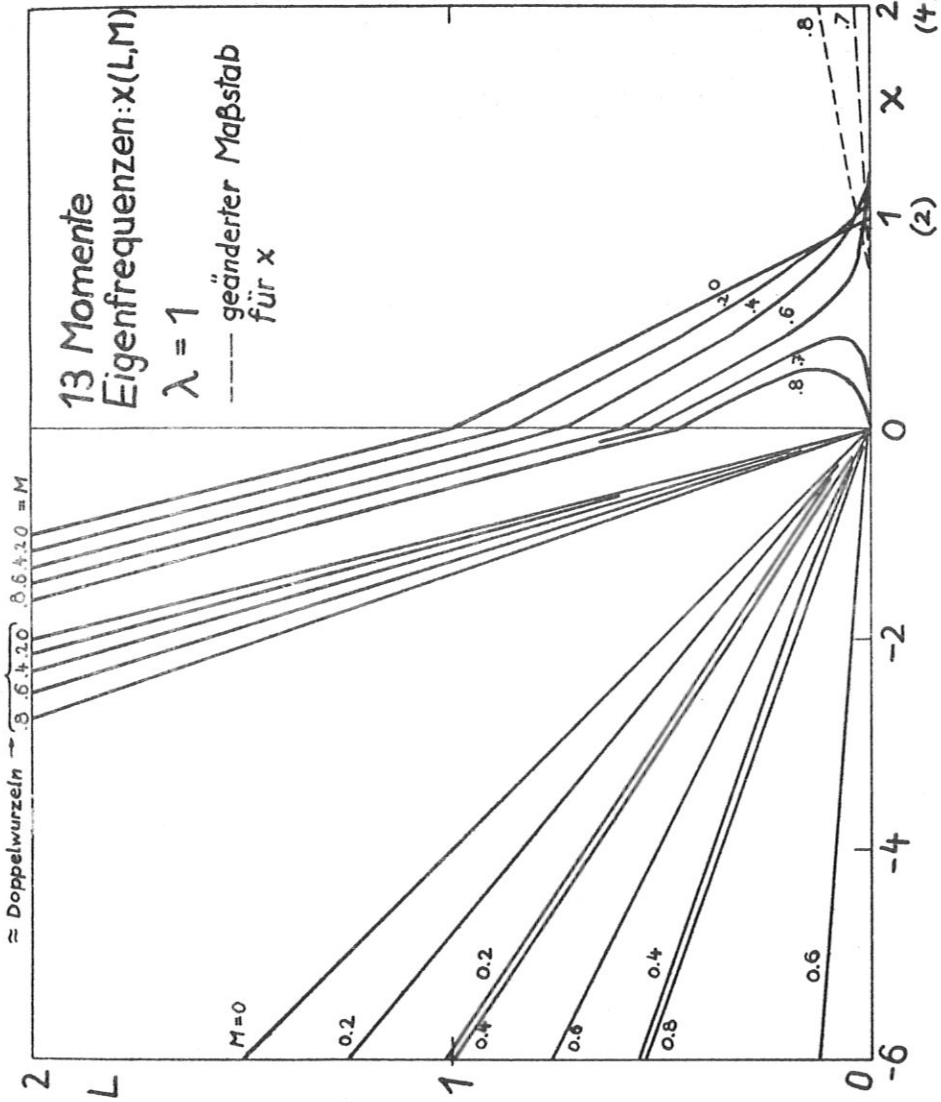


Bild 9

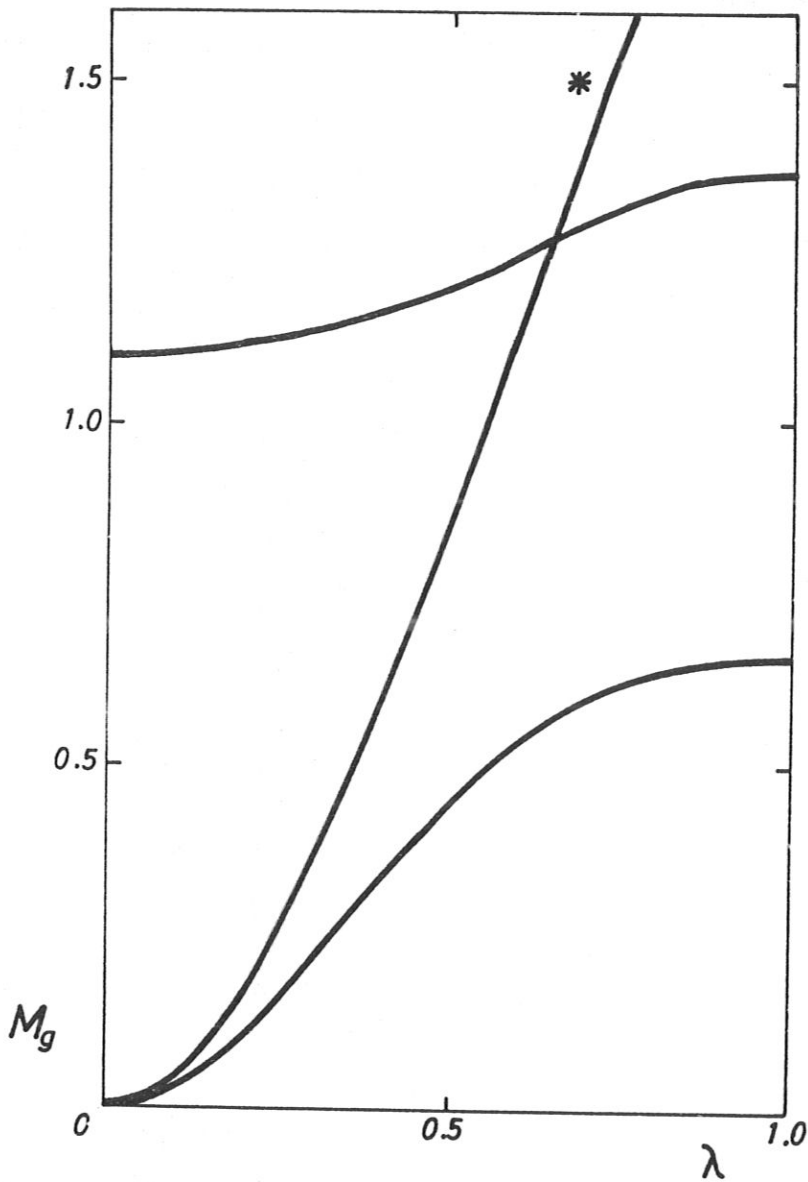
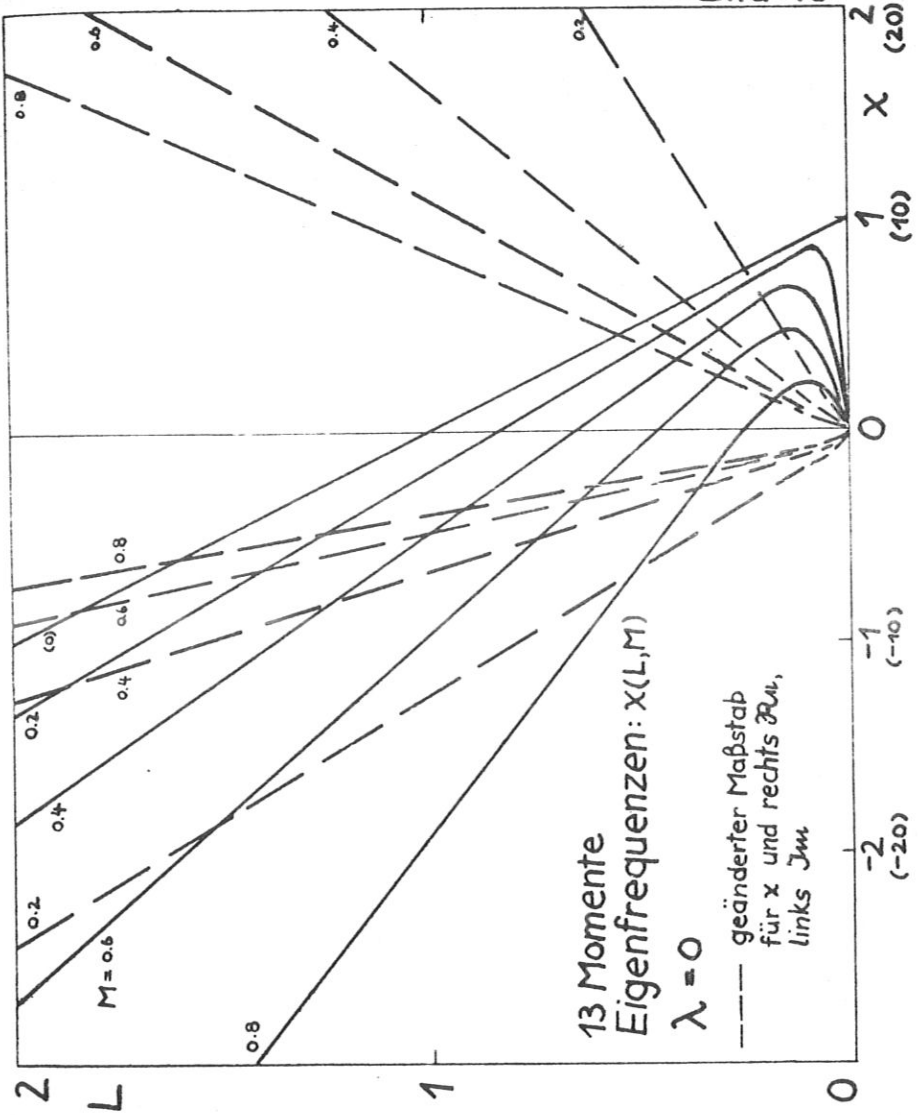


Bild 10



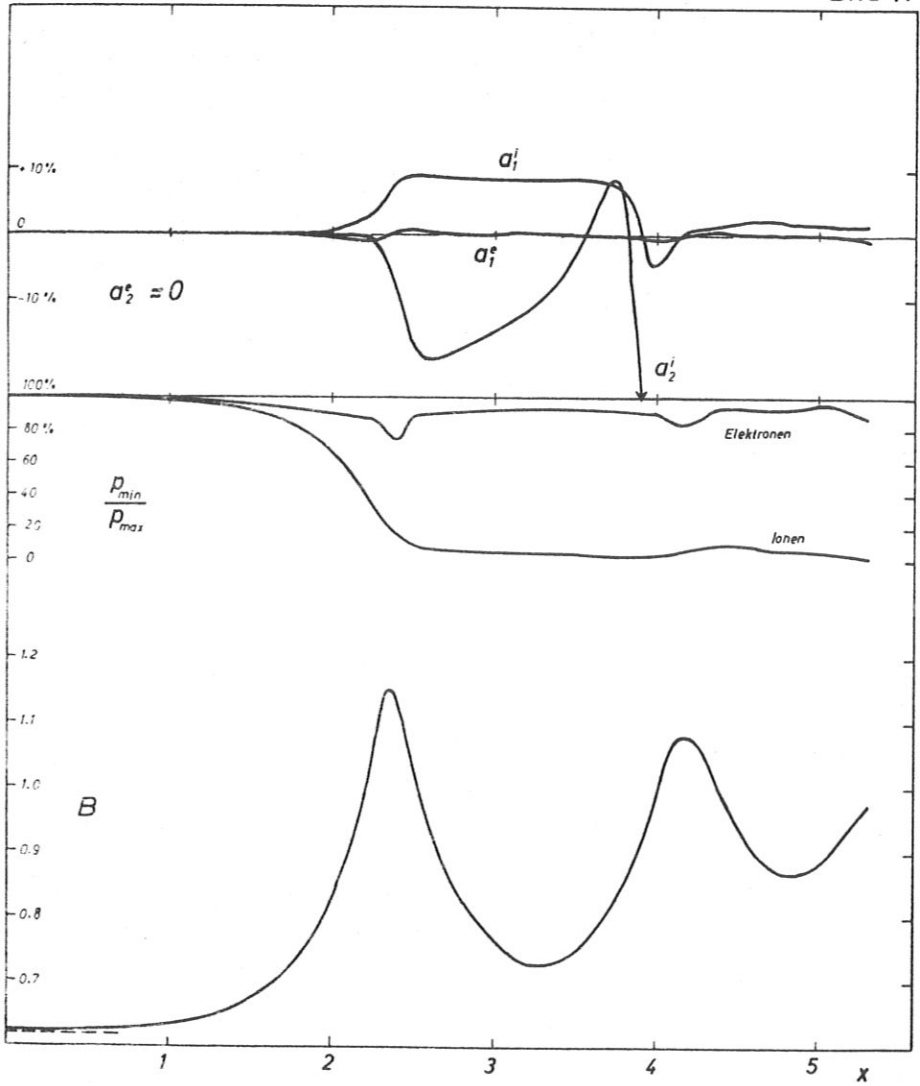
13 Momente

$\lambda = 0.3$

$L = 0.48$

$M = 0.01$

Bild 11



13 Momente

$\lambda=0.25$   $L=0.48$   $M=0.01$

Bild 12

