

**I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K**  
**G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N**

Magnetische LAVAL-Düse

Werner Lünow

IPP/6/24

August 1964

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

# Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	1
Gasdynamische Behandlung der Düse	2
Wechselwirkung zwischen Plasmadruck und äußerem Magnetfeld	13
Elektrodynamische Behandlung der Düse	17
Zur Existenz der Lösung	26
Stabilitätsbetrachtungen	32
Zur numerischen Rechnung	37
Abbildungen	44
Literatur	48

## Einleitung

Ein aus einem Brenner austretender, zylindersymmetrischer, stationärer und in allen thermodynamischen Zustandsgrößen als homogen angenommener Plasmastrahl soll aus dem Unterschall- ins Überschallgebiet beschleunigt werden; und zwar mit Hilfe einer LAVAL-Düse, deren Wandung jedoch nicht wie üblich aus einem festen Material besteht, sondern die das Plasma durch ein von außen angelegtes Magnetfeld zu dem gewünschten Verhalten zwingt. Das im Folgenden erörterte Modell soll das Problem wenigstens der numerischen Behandlung zugänglich machen. Inwieweit es, durch prinzipielle physikalische und mathematische Schwierigkeiten eingeengt, die Realität beschreibt, muß letztlich das Experiment zeigen. Entsprechendes gilt für das Stabilitätsverhalten. Zwar läßt sich unter den gemachten Voraussetzungen ein Stabilitätskriterium angeben, doch sind allgemeine Aussagen über seine Erfüllbarkeit kaum möglich.

# Gasdynamische Behandlung der Düse

## Definitionen

### Stromlinien

Kurven in einer beliebigen räumlichen Strömung, die in jedem ihrer Punkte Strömungsrichtung besitzen.

### Stromröhren

Komplexe benachbarter Stromlinien.

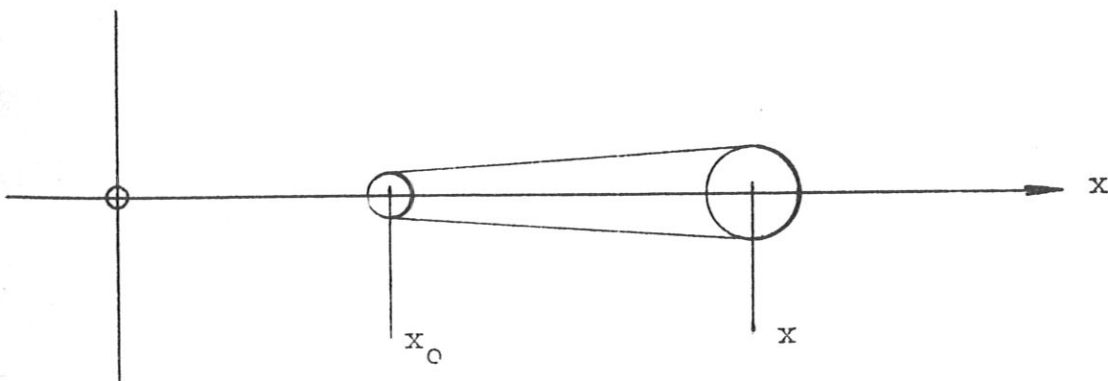
### Stromfäden

Stromröhren genügend kleinen Querschnitts, so daß die Annahme einheitlicher Zustände über den Querschnitt beliebig genau erfüllt werden kann.

### Stationäre Strömung

Alle Teilchen bleiben dauernd entweder innerhalb oder außerhalb eines bestimmten Stromfadens.

Die Düse wird nach der Theorie der stationären Fadenströmung behandelt. Deren Voraussetzungen sind angenähert erfüllt bei Strömungen in Kanälen langsam veränderlichen oder konstanten Querschnittes. Das Maß der Änderung wird gegeben durch das Verhältnis der Querschnittsänderung zum Gesamtquerschnitt.



### Kontinuitätsgleichung

$$f_0 \varrho_0 W_0 = f \varrho W \quad 1)$$

f - Querschnittsfläche

$\varrho$  - Dichte

W - Strömungsgeschwindigkeit

$\varrho W$  - Stromdichte

### Impulssatz

bei äußerer Kraftfreiheit gilt

$$(p f - p_0 f_0) + (\varrho W^2 f - \varrho_0 W_0^2 f_0) = 0$$

Druck                      Trägheit

$$(p_0 + \varrho_0 W_0^2) f_0 = (p + \varrho W^2) f \quad 2)$$

p - Druck

$(p + \varrho W^2)$  - Impulsstromdichte

(richtiger: Impulsstromsatz)

### Energiesatz

bei fehlenden äußeren Einflüssen gilt

$$(f p W - f_0 p_0 W_0) + (f \varrho W e - f_0 \varrho_0 W_0 e_0)$$

Arbeit an den              innere Energie  
Endflächen

$$+ (f \varrho W(W^2/2) - f_0 \varrho_0 W_0(W_0^2/2)) = 0$$

kinetische Energie

mit  $i = e + \frac{p}{\varrho}$

$i$  - Enthalpie pro Masseneinheit

$e$  - innere Energie pro Masseneinheit

und der Kontinuitätsgleichung ergibt sich

$$((W_0^2/2) + i_0) = ((W^2/2) + i) \quad 3)$$

(richtiger: Energiestromsatz)

### Differentialformen

#### Kontinuitätsgleichung

logarithmisch differenziert

$$\ln f + \ln \varrho + \ln W = \ln (f_0 \varrho_0 W_0)$$

$$\frac{1}{f} \frac{df}{dx} + \frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{dx} + \frac{1}{W} \frac{dW}{dx} = 0 \quad 4)$$

#### Impulssatz

$$(p + \varrho W W) f = C$$

mit der Kontinuitätsgleichung wird

$$W + \frac{p}{\rho W} = C'' \quad \text{also}$$

$$\frac{dW}{dx} + \frac{1}{\rho W} \frac{dp}{dx} + p \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\rho W} \right) = 0 \quad 5)$$

### Energiesatz

$$(W^2/2) + i = C \quad \text{also}$$

$$W \frac{dW}{dx} + \frac{di}{dx} = 0 \quad \text{mit}$$

$$\frac{di}{dx} = \left( \frac{\partial i}{\partial p} \right)_s \frac{dp}{dx} + \left( \frac{\partial i}{\partial s} \right)_p \frac{ds}{dx} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + T \frac{ds}{dx} \quad \text{wird}$$

$$\frac{dW}{dx} + \frac{1}{\rho W} \frac{dp}{dx} + \frac{T}{W} \frac{ds}{dx} = 0 \quad 6)$$

s - Entropie pro Masseneinheit

T - Temperatur

Da sowohl der Impuls- als auch der Energiesatz gelten muß, folgt bei konstanter Entropie eine gemeinsame Gleichung

$$\frac{dW}{dx} + \frac{1}{\rho W} \frac{dp}{dx} = 0 \quad 7)$$

Die Konstanz der Entropie wird bei den weiteren Betrachtungen vorausgesetzt. Damit gelten die isentropen thermodynamischen Beziehungen zwischen den Zustandsgrößen. Ein Volumenelement soll mit seiner Umgebung stets im Druckgleichgewicht, nicht aber im Wärmeaustausch stehen. Weiterhin wird die Konstanz

der spezifischen Wärmen angenommen, also

$$\kappa = c_p/c_v = \text{const.}$$

Bei konstanter Entropie ergibt sich die Schallgeschwindigkeit zu

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}}$$

Das zur Ermittlung aller gewünschten Größen verfügbare Differentialgleichungssystem lautet demnach

$$\frac{1}{f} \frac{df}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{1}{W} \frac{dW}{dx} = 0 \quad 8)$$

$$\frac{dW}{dx} + \frac{1}{\rho W} \frac{dp}{dx} = 0 \quad 9)$$

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dx} - \kappa \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = 0 \quad 10)$$

$$\frac{1}{\kappa-1} \frac{1}{T} \frac{dT}{dx} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = 0 \quad 11)$$

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} \quad 12)$$

Die Differentialgleichungen dieses Systems lassen sich einzeln analytisch integrieren. Für die numerische Rechnung



wie auch für gewisse prinzipielle Betrachtungen erweisen sich die Differentialformen zum Teil als günstiger.

Das integrierte Gleichungssystem lautet

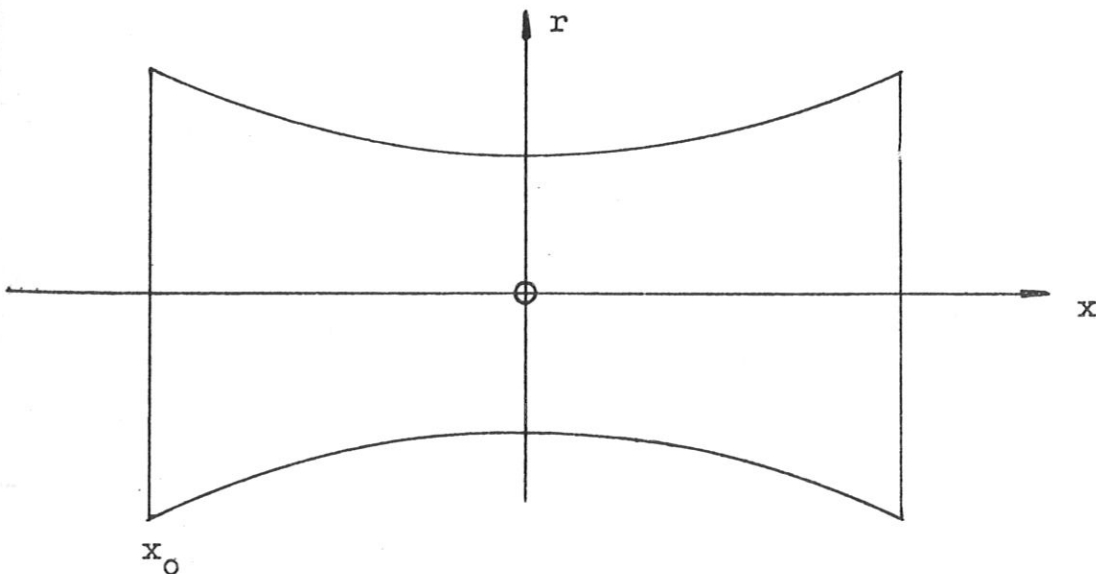
$$\varrho fW = \varrho_0 f_0 W_0 \quad 13)$$

$$W^2 = W_0^2 + \frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\varrho_0} (1 - (\varrho/\varrho_0)^{\kappa-1}) \quad 14)$$

$$p = p_0 (\varrho/\varrho_0)^\kappa \quad 15)$$

$$T = T_0 (\varrho/\varrho_0)^{\kappa-1} \quad 16)$$

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\varrho}} \quad 17)$$

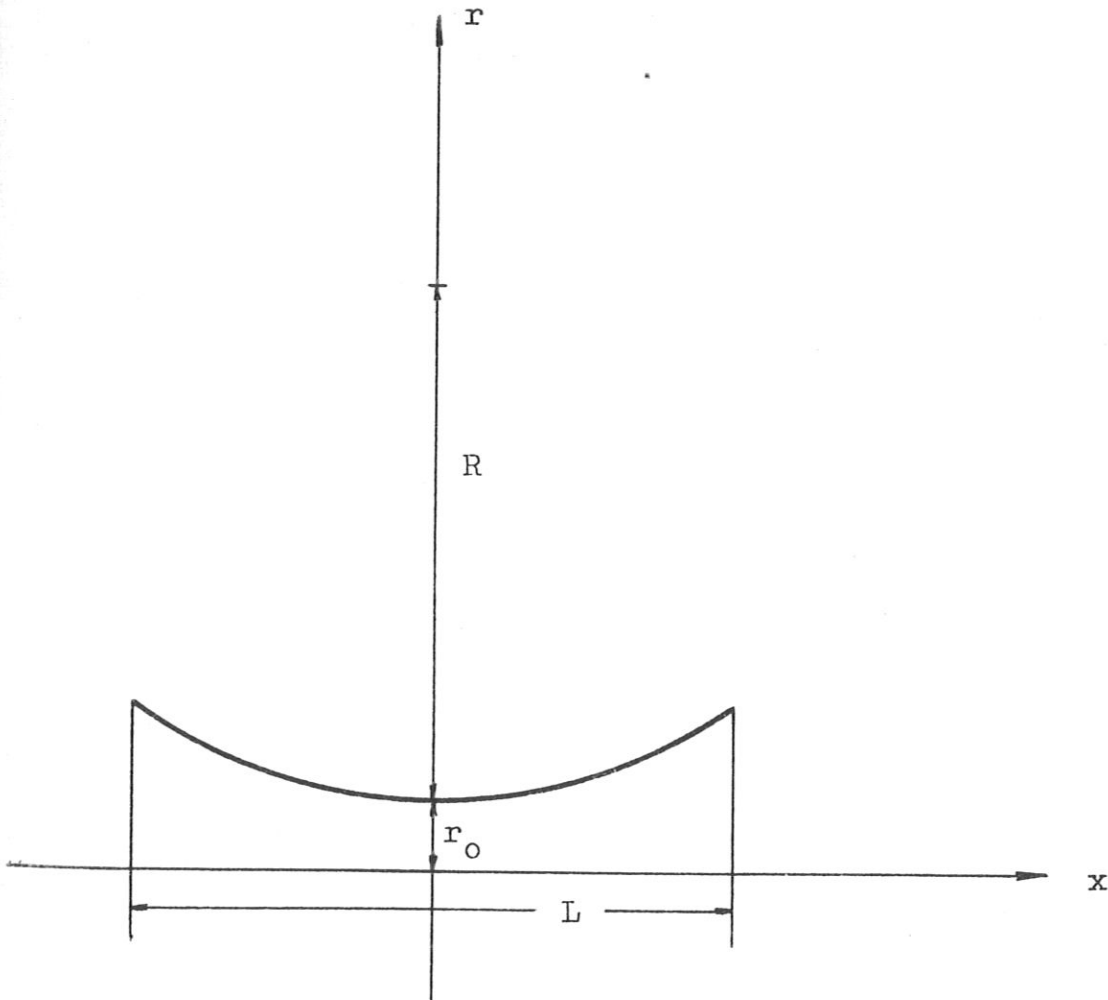


Das Plasma strömt in positiver x-Richtung.

Generell verengt sich eine LAVAL-Düse auf der Einströmseite bis sie ihren kleinsten Querschnitt erreicht hat und erweitert sich dann wieder auf der Ausströmseite. Also muß eine entsprechende Düsenrandkurve verwendet werden, die bei einer Drehung um die x-Achse den gesamten Düsenmantel erzeugt.

Durch den Düsenmantel wird dem Gas der Strömungskanal aufgezwungen. Damit enthält das Gleichungssystem so viele Gleichungen wie Unbekannte.

Der einfachen analytischen Darstellbarkeit wegen findet hier als Düsenrandkurve das Stück eines Kreisbogens Verwendung



L - Düsenlänge

Unter der Voraussetzung  $R > L/2$  gilt

$$f = \pi r^2 = \pi (r_0 + R - \sqrt{R^2 - x^2})^2 \quad 18)$$

$$\frac{df}{dx} = 2\pi r \frac{dr}{dx} = 2\pi x ((r_0 + R) / \sqrt{R^2 - x^2} - 1) \quad 19)$$

Voraussetzungsgemäß muß die örtliche relative Änderung von f klein sein. Diese Forderung ist sicher erfüllt, wenn die relative Änderung von f über die halbe Düsenlänge klein gemacht wird. Mit

$f''$  - kleinster Düsenquerschnitt

$f_E$  - Querschnitt am Düsenende

ist also

$$\frac{f_E - f''}{f''} \leq \varepsilon$$

Als Bedingung für R folgt

$$R \geq \frac{1}{2} (r_0 (\sqrt{1+\varepsilon} - 1) + \frac{(L/2)^2}{r_0 (\sqrt{1+\varepsilon} - 1)}) \quad 20)$$

Aus den Gleichungen 8), 9), 10) und 12) ergeben sich die Beziehungen

$$(M^2 - 1) \frac{1}{W} \frac{dW}{dx} = \frac{1}{f} \frac{df}{dx} \quad 21)$$

$$\left(\frac{1}{M^2} - 1\right) \frac{1}{\alpha p} \frac{dp}{dx} = \frac{1}{f} \frac{df}{dx} \quad (22)$$

mit

$$M = W/c \quad (\text{Machzahl})$$

Gleichung 22) dient späteren Stabilitätsbetrachtungen.

Gleichung 21) zeigt eine grundsätzliche Eigenschaft der LAVAL-Düse.  $f$  ist eine positive Größe. Nach Voraussetzung soll auch  $W$  stets positiv sein. Am Düsenanfang ist  $M < 1$ . Die Ableitung von  $f$  nach  $x$  bleibt auf der Einströmseite bis zur Düsenmitte negativ. In der Düsenmitte selbst verschwindet sie. Auf der Ausströmseite wird sie positiv. Die linke Seite der Gleichung 21) verschwindet also lediglich in der Düsenmitte. Wird  $M > 1$ , so kann der Übergang ( $M=1$ ) nur dort erfolgen. Dann ist die Machzahl auf der Einströmseite stets kleiner, auf der Ausströmseite stets größer als 1; d.h. die Ableitung von  $W$  nach  $x$  bleibt auf beiden Seiten positiv. Aus Stetigkeitsgründen wird sie in der Düsenmitte bestenfalls gleich 0.

Um die Beschleunigung des Plasmas ins Überschallgebiet überhaupt zu erreichen, müssen bestimmte Voraussetzungen erfüllt sein.

Aus den Beziehungen 13), 14), 15) und 17) folgt durch Vergleich von  $W$  und  $c$  in der Düsenmitte

$$f'' \stackrel{\approx}{=} f_0 M_0 \left( \frac{2\alpha + (\alpha^2 - \alpha) M_0^2}{\alpha^2 + \alpha} \right) - \frac{1}{2} \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \quad (23)$$

$$M_0 = \frac{Q}{f_0 \sqrt{\alpha p_0} \rho_0} = \sqrt{\frac{QW_0}{\alpha p_0 f_0}} \quad (24)$$

$$Q = \rho_0 f_0 W_0 \quad 25)$$

In der Gleichung 23) steht das Zeichen  $>$  für  $M < 1$ , das Zeichen  $=$  für  $M = 1$  und das Zeichen  $<$  für  $M > 1$ . Somit enthält sie die Aussagen -

Ist der kleinste Düsenquerschnitt  $f''$  größer als die rechte Seite, dann bleibt  $M < 1$ .

Ist der kleinste Düsenquerschnitt  $f''$  gleich der rechten Seite, dann erfolgt der Übergang ( $M=1$ ) wie gewünscht in der Düsenmitte.

Ist der kleinste Düsenquerschnitt  $f''$  kleiner als die rechte Seite, dann stellt sich die Machzahl  $M = 1$  theoretisch schon vor der Düsenmitte ein. Die Ableitung von  $f$  nach  $x$  ist aber noch nicht 0. Die Erfahrung zeigt, daß auch hier der Übergang ( $M=1$ ) tatsächlich erst in der Düsenmitte erfolgt. Offenbar wirkt die Düse bei "falschen" Anfangswerten auf diese zurück und verändert sie in geeigneter Weise. Für die Betriebsstabilität einer LAVAL-Düse ist also  $f''$  keine "echte" kritische Größe. Lassen sich beispielsweise im stationären Betrieb Durchflußmenge  $Q$  und Anfangsdruck  $p_0$  konstant halten, so würde demzufolge die Düse bei "falscher" Einstellung der Anfangsgeschwindigkeit  $W_0$  dieselbe automatisch geeignet ändern. Es muß nur gesichert sein, daß die mit der "falschen" Anfangsmachzahl  $M_0$  berechnete rechte Seite größer ist als der kleinste Düsenquerschnitt  $f''$ .

Gleichung 3) liefert schließlich eine Beziehung für die mit der Düse überhaupt erreichbare maximale Strömungsgeschwindigkeit. Mit

$$i = c_p T + \text{const.} \quad \text{folgt}$$

$$W = \sqrt{W_0^2 + 2c_p(T_0 - T)}$$

Sinkt die Gastemperatur auf den Wert 0, dann wird

$$W_{\max} = \sqrt{W_0^2 + 2c_p T_0} \quad 26)$$

Wechselwirkung zwischen Plasmadruck und äußerem  
Magnetfeld

Zur Realisierung der LAVAL-Düse ist es notwendig, daß der gasdynamische Plasmadruck durch einen entsprechenden äußeren Magnetfelddruck längs der Düsenrandkurve kompensiert wird. Hier werden unendlich große Leitfähigkeit des Plasmas und damit Oberflächenströme auf dem Plasma vorausgesetzt. Zwischen Plasma und Außengebiet existiert also eine scharfe Grenze. Weiterhin soll im betrachteten Gesamtgebiet die Permeabilität die des Vakuums sein. Es bietet sich die Beziehung

$$p + \frac{B^2}{2\mu_0} = \text{const.} \quad 27) \quad \text{an.}$$

Mit

$$\sigma = \infty$$

d.h. sämtliche Gasteilchen stehen mit dem Magnetfeld in Wechselwirkung.

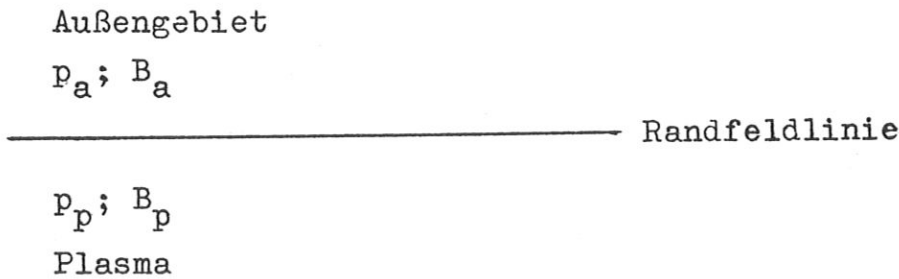
B - magnetische Feldstärke

$\sigma$  - Leitfähigkeit

$\mu_0$  - Permeabilität des Vakuums

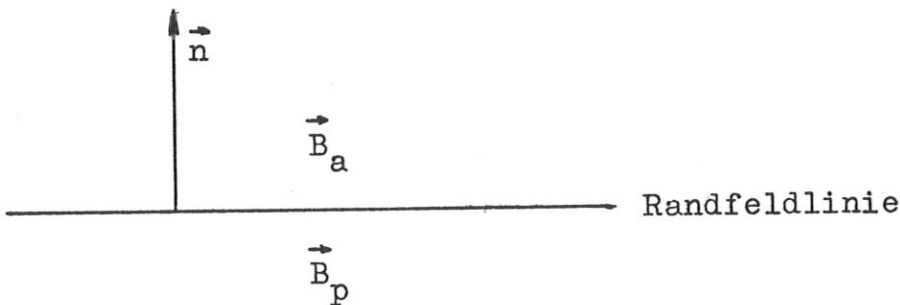
Gleichung 27) gilt streng für gerade und parallele Magnetfeldlinien. Damit wäre prinzipiell die Krümmung einer Magnetfeldlinie längs der Düsenrandkurve sowie eine Änderung der magnetischen Feldstärke und demzufolge auch eine Änderung des gasdynamischen Druckes auf einer solchen Düsenrandfeldlinie untersagt. Hier werden genügend kleine Krümmungen und genügend kleine Änderungen der magnetischen Feldstärke vorausgesetzt, so daß sich in brauchbarer Näherung die Gültigkeit der Beziehung 27) längs einer Düsenrandfeldlinie wenigstens stückweise annehmen läßt. Die generelle Schwierigkeit

ist kaum zu umgehen und wird im Grunde nur durch die Erwartung abgeschwächt, daß Gleichung 27) den physikalischen Sachverhalt trotz aller Einschränkungen noch einigermaßen beschreibt.



Beim Überschreiten der Randfeldlinie folgt dort aus der Beziehung 27)

$$p_a + \frac{B_a^2}{2\mu_0} = p_p + \frac{B_p^2}{2\mu_0} \quad 28)$$



Der Oberflächenstrom auf dem Plasma ergibt sich aus der Flächenrotation

$$\vec{j} = \text{Rot } \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \left[ \vec{n}(\vec{B}_a - \vec{B}_p) \right] = \left[ \vec{n}(\vec{H}_a - \vec{H}_p) \right] \quad 29)$$

$\vec{j}$  - Oberflächenstrom

$\vec{B}_a$  und  $\vec{B}_p$  besitzen hier keine Normalkomponenten.



$\vec{H}$  - magnetische Erregung

$\vec{n}$  - Einheitsvektor der Flächennormalen

Da  $\vec{n}$  senkrecht auf der Randfeldlinie steht, gilt als Betrag

$$j = H_a - H_p \quad 30)$$

Aus den vorgegebenen gasdynamischen Daten der Düse läßt sich ausgehend vom Anfangsdruck  $p_0$  zunächst die gesamte Druckverteilung über die Düsenrandkurve berechnen. Dieser Druckverteilung soll ein geeignetes äußeres Magnetfeld entgegenstehen. Hieraus folgt die Forderung, daß im Experiment der Anfangsdruck  $p_0$  als wesentlicher Parameter fest einstellbar sein muß, da sonst das gewünschte Gleichgewicht von vornherein nicht zu verwirklichen ist.

Für den Druck  $p_a$  im Außengebiet kann der Wert 0 angenommen werden. Zudem kommt der Plasmastrahl bereits vollionisiert aus dem Brenner, was wegen der abschirmenden Wirkung des sofort einsetzenden Oberflächenstromes einen Feldeinfang durch das Plasma ausschließen soll; d.h. das Magnetfeld  $B_p$  im Plasma hat den Wert 0. Somit vereinfacht sich Gleichung 28)

$$B_a = \sqrt{2/\mu_0 p_p} \quad 31)$$

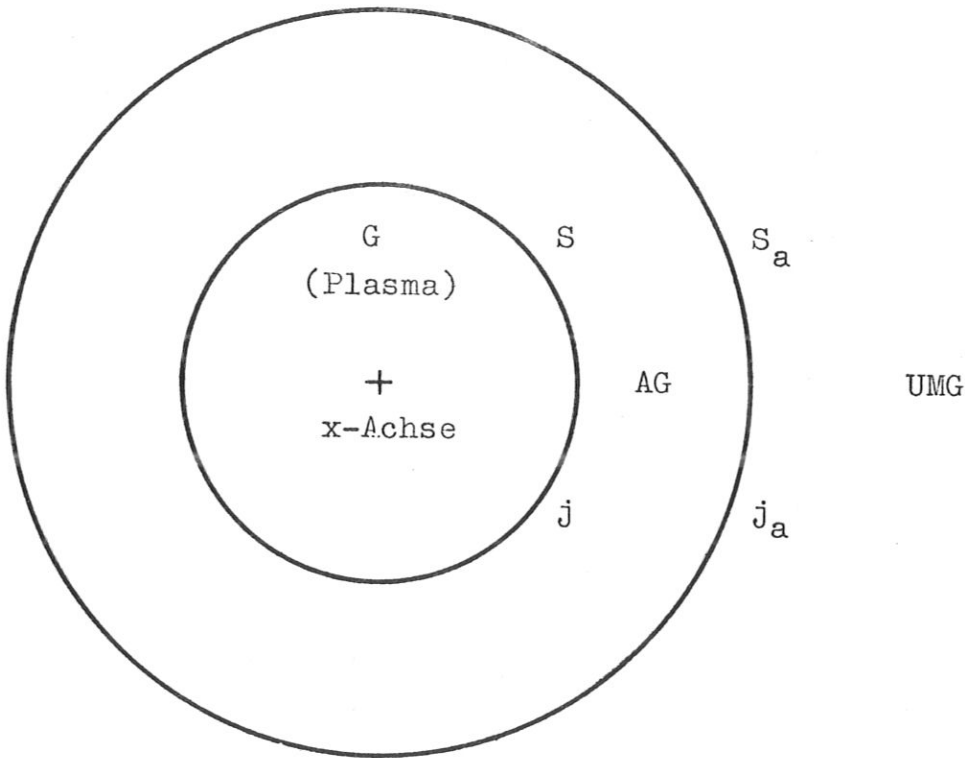
Aus den Beziehungen 30) und 31) folgt schließlich

$$j = \sqrt{2p_p/\mu_0} \quad 32)$$

Es ergibt sich das Problem, eine äußere Stromverteilung und ihre Lokalisierung im Raum zu finden, die mit der durch

Gleichung 32) gegebenen Oberflächenstromverteilung auf dem Düsenmantel im Gleichgewicht steht. Wenn das diese beiden Stromverteilungen verkoppelnde Magnetfeld im Plasma verschwindet, liefert es die verlangte magnetische Druckverteilung auf der Außenseite des Düsenmantels.

Elektrodynamische Behandlung der Düse



x-Achse senkrecht zur Papierebene

Eine den vorliegenden Verhältnissen angemessene aber noch idealisierende allgemeine Formulierung des elektrodynamischen Problems lautet -

S sei die bekannte Berandungsfläche eines längs der x-Achse von  $-\infty$  bis  $+\infty$  sich erstreckenden rotationssymmetrischen räumlichen Gebietes G (Plasma),  $S_a$  eine gesuchte die Fläche S umgebende rotationssymmetrische Fläche. S besitze unendlich große Leitfähigkeit. Eine gesuchte und mit äußeren Mitteln auf  $S_a$  erzwungene Flächenstromverteilung  $j_a$  senkrecht zur x-Richtung induziere ebenfalls senkrecht zur x-Richtung auf S die bekannte stetige und überall gleichorientierte Flächenstromverteilung j so, daß das magnetische Feld in G und UMG verschwindet.

Aus dieser Formulierung lassen sich einige Folgerungen ziehen -

- a) Ein Magnetfeld existiert überhaupt nur in AG.
- b) An den Flächen  $S$  und  $S_a$  hat das Magnetfeld keine Normalkomponenten.
- c) In AG ist

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (33),$$

also muß dort mit Rücksicht auf b) der aus den Flächenstromverteilungen  $j$  und  $j_a$  resultierende magnetische Fluß konstant bleiben.

- d) Wegen der Stetigkeit und Gleichorientierung von  $j$  auf  $S$  ist das durch  $j$  auf der Außenseite von  $S_a$  erzeugte Magnetfeld überall stetig und mindestens bezüglich der  $x$ -Komponente gleichorientiert. Das geforderte Verschwinden des Magnetfeldes auf der Außenseite von  $S_a$  kann nur dann eintreten, wenn auch  $j_a$  auf  $S_a$  stetig ist und eine  $j$  entgegengesetzte Orientierung besitzt.

Die hier gemachten Annahmen sind nicht zwangsläufig, erweisen sich jedoch für weitere allgemeine Betrachtungen als zweckmäßig. Vom Standpunkt der Physik aus würde es im Grunde genügen, das Verschwinden des Magnetfeldes nur in  $G$  zu fordern.

Tatsächlich hat die Düse eine begrenzte Länge. Die physikalischen Gegebenheiten im interessierenden und damit wesentlichen Düsenbereich sind relativ klar definiert. Die beiderseitigen Düsenendbereiche, in denen das Gas seine Leitfähigkeit verliert, liegen quasi als Randbedingungen außerhalb einer eindeutigen mathematischen Erfassbarkeit. Zur Vereinfachung der Rechnung werden deshalb die von den Düsenenden herrührenden vagen Einflüsse auf den wesentlichen Düsenbereich in eine andere Ebene verlagert. Und zwar sei aus dem Gebiet  $G$  lediglich der wesentliche Düsenbereich herausgegriffen; d.h. die Düsenenden werden abgeschnitten. Ein Eindringen des Mag-

netzfeldes aus dem Gebiet AG in die Gebiete G und UMG ist die Folge, kann jedoch unter später erörterten Voraussetzungen in Kauf genommen werden. Die Lösung des elektrodynamischen Problems ist so auf die Behandlung der Wechselwirkung zweier örtlich begrenzter Flächenstromverteilungen  $j$  und  $j_a$  auf  $S$  und  $S_a$  reduziert.

Es gilt allgemein

$$U = - \frac{d\phi}{dt} \quad 34)$$

Mit dem Integral über eine senkrecht zur x-Achse liegende ebene und kreisförmige Querschnittsfläche des Plasmas wird aus 34)

$$U = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \mu_0 \frac{d}{dt} \int_Q \vec{H}_S \cdot d\vec{q} = - \frac{d\phi}{dt} \quad 35)$$

Dabei soll sein

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + w \frac{\partial}{\partial x} \quad 36)$$

Q - Querschnittsfläche des Plasmas

$d\vec{q}$  - Flächenelement der Querschnittsfläche Q

L - Berandung der Querschnittsfläche Q

$d\vec{l}$  - Linienelement der Berandung L

t - Zeit

U - elektrische Umfangsspannung auf der Berandung L

$\vec{E}$  - elektrische Feldstärke

$\vec{H}_S$  - durch die Flächenstromverteilung  $j_a$  auf  $S_a$  erzeugte magnetische Erregung

$\emptyset$  - durch  $H_S$  erzeugter magnetischer Fluß in der Querschnittsfläche  $Q$

Das treibende Magnetfeld  $H_S$  der Spule induziert also eine elektrische Umfangsspannung  $U$  auf einer beliebig herausgegriffenen Berandung  $L$  des Plasmas.

Gleichzeitig besagt das Ohmsche Gesetz

$$U = \frac{d\emptyset_P}{dt} + J_P \Omega_P \quad 37)$$

$J_P$  - Strom auf der Berandung  $L$

$\Omega_P$  - Ohmscher Widerstand der Berandung  $L$

$\emptyset_P$  - durch den Strom  $J_P$  erzeugter magnetischer Fluß in der Querschnittsfläche  $Q$

Wegen der auch auf dem Düsenmantel vorausgesetzten unendlich großen Leitfähigkeit wird

$$\Omega_P = 0 \quad 38)$$

und damit

$$U = \frac{d\emptyset_P}{dt} \quad 39)$$

Aus den Gleichungen 36) und 39) ergibt sich demnach eine Gleichgewichtsbeziehung zwischen der Flächenstromverteilung  $j_a$  auf  $S_a$  und dem Strom  $J_P$  auf einer einzelnen Berandung  $L$  des Plasmas

$$\frac{d\emptyset_P}{dt} = - \frac{d\emptyset}{dt} \quad 40)$$

Für alle übrigen Berandungen L des Plasmas gilt sie gleichermaßen.

Gleichung 40) erlaubt eine wesentliche Folgerung -

Die Induktion kann sowohl durch zeitliche oder örtliche Änderung des treibenden Spulenmagnetfeldes  $H_S$ , durch zeitliche oder örtliche Änderung der Geometrie, wie auch durch alles zusammen hervorgerufen werden. Das aus der Integration von 40) resultierende direkte Gleichgewicht der magnetischen Flüsse ist von der Art der Induktion unabhängig

$$\phi_P = - \phi \quad 41)$$

Vom Einschaltvorgang abgesehen, bleibt das treibende Spulenmagnetfeld  $H_S$  zeitlich konstant und die Induktion wird nur durch das Strömen des Plasmas, also durch örtliche Änderung von  $H_S$  und der Geometrie, verursacht. Auf dem Weg durch die Düse ändert eine Berandung L des Plasmas ihren Radius und ihre Lage gegen die Flächenstromverteilungen  $j$  und  $j_a$  auf  $S$  und  $S_a$ .

Für die Wirkung einer Berandung L des Plasmas auf eine andere gilt analog zu Gleichung 41)

$$\bar{\phi}_P = - \phi_P \quad 42)$$

Hier ist die erzeugte Größe mit  $-$  gekennzeichnet.

Der durch eine Berandung L des Plasmas in einer nicht zu dieser Berandung gehörenden Querschnittsfläche  $Q$  entstehende magnetische Fluß  $\phi_P$  wird damit ebenfalls durch einen Induktionsfluß  $\bar{\phi}_P$  kompensiert. Das bedeutet allgemein -

Für den in jeder Querschnittsfläche  $Q$  des Plasmas im Gleichgewicht herrschenden magnetischen Gesamtfluß muß gelten

$$\varnothing_G = 0 \quad 43)$$

Da sich  $\varnothing_G$  aus dem durch die Flächenstromverteilung  $j_a$  auf  $S_a$  bewirkten magnetischen Fluß  $\varnothing$  und dem durch die Flächenstromverteilung  $j$  auf  $S$  bewirkten magnetischen Fluß  $\varnothing_F$  zusammensetzt, folgt

$$\varnothing_G = \varnothing + \varnothing_F = 0 \quad 44)$$

oder

$$\varnothing = - \varnothing_F \quad 45)$$

$\varnothing_G$  - magnetischer Gesamtfluß in einer Querschnittsfläche  $Q$

$\varnothing_F$  - durch die Flächenstromverteilung  $j$  auf  $S$  erzeugter magnetischer Fluß in einer Querschnittsfläche  $Q$

Gleichung 45) ist in allen Querschnittsflächen  $Q$  des Plasmas gleichzeitig zu erfüllen.

Es werden

$$\varnothing = \mu_0 \int_Q \vec{H}_S \cdot \vec{dq} \quad 46)$$

$$\varnothing_F = \mu_0 \int_Q \vec{H}_F \cdot \vec{dq} \quad 47)$$

$\vec{H}_F$  - durch die Flächenstromverteilung  $j$  auf  $S$  erzeugte magnetische Erregung

Mit den Vektorpotentialen ergeben sich



$$\vec{H}_S = \text{rot } \vec{V}_S \quad 48)$$

$$\vec{H}_F = \text{rot } \vec{V}_F \quad 49)$$

$$\int_Q \text{rot } \vec{V}_S \vec{dq} = - \int_Q \text{rot } \vec{V}_F \vec{dq} \quad 50)$$

oder nach Anwendung des Stokesschen Satzes

$$\oint_L \vec{V}_S \vec{dl} = - \oint_L \vec{V}_F \vec{dl} \quad 51)$$

$\vec{V}_S$  - durch die Flächenstromverteilung  $j_a$  auf  $S_a$   
erzeugtes Vektorpotential

$\vec{V}_F$  - durch die Flächenstromverteilung  $j$  auf  $S$   
erzeugtes Vektorpotential

Aus der vorausgesetzten Rotationssymmetrie der Anordnung folgt die Konstanz der Vektorpotentiale  $\vec{V}_S$  und  $\vec{V}_F$  auf einer Berandung  $L$  des Plasmas. Damit ändert sich Gleichung 51)

$$\vec{V}_S \oint_L \vec{dl} = - \vec{V}_F \oint_L \vec{dl} \quad 52)$$

Also ist schließlich

$$\vec{V}_S = - \vec{V}_F \quad 53)$$

d.h. die auf einer Berandung  $L$  des Plasmas durch die Flächenstromverteilungen  $j$  und  $j_a$  hervorgerufenen Vektorpotentiale

$\vec{V}_F$  und  $\vec{V}_S$  müssen sich dort im Gleichgewicht gerade aufheben. Für alle übrigen Berandungen L des Plasmas gilt dasselbe.

Jetzt erlauben die Vektorpotentiale eine Berechnung der benötigten Stromverteilungen. Aus den entsprechenden Potentialgleichungen ergibt sich

$$\vec{V}_S = \frac{1}{4\pi} \int_{S_a} \frac{\vec{j}_a}{R_a} ds_a \quad 54) \quad \text{und}$$

$$\vec{V}_F = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\vec{j}}{R_S} ds \quad 55)$$

$\vec{j}_a$  - Flächenstromverteilung auf  $S_a$

$R_a$  - Abstand Aufpunkt-Integrationspunkt bezogen auf die Flächenstromverteilung  $\vec{j}_a$

$S_a$  - Spulenfläche

$ds_a$  - Flächenelement von  $S_a$

$\vec{j}$  - Flächenstromverteilung auf S

$R_S$  - Abstand Aufpunkt-Integrationspunkt bezogen auf die Flächenstromverteilung  $\vec{j}$

S - Plasmaoberfläche

$ds$  - Flächenelement von S

$\Theta$  - Winkel der Drehung um die x-Achse

Auf Grund der Rotationssymmetrie haben die Vektorpotentiale  $\vec{V}_S$  und  $\vec{V}_F$  lediglich  $\Theta$ -Komponenten. Eine gleiche Orientierung ist hier den Größen  $\vec{j}_a$  und  $\vec{j}$  zugeschrieben. Alle übrigen in den Gleichungen 54) und 55) enthaltenen Größen sind ohne Orientierung.

Als auf sämtlichen in Betracht kommenden Berandungen L des Plasmas gültige Endformel folgt

$$\int_{S_a} \frac{\vec{j}_a}{R_a} ds_a = - \int_S \frac{\vec{j}}{R_S} ds \quad 56)$$

Zur Existenz der Lösung

Zunächst werde wieder auf die ursprünglich vorausgesetzten unendlich langen Flächen  $S$  und  $S_a$  zurückgegriffen.  $S$ ,  $R_S$  und  $j$  seien bekannte Funktionen. Es ergibt sich eine ein Oberflächenintegral erster Art enthaltende umgeformte Gleichung 56)

$$\int_0^{2\pi + \infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x; \xi; \theta) \vec{j}_a(\xi) d\xi d\theta = \vec{f}(x) \quad 57)$$

$K(x; \xi; \theta)$  - Kern  
 $\vec{f}(x)$  - rechte Seite von 56)

mit

$$K(x; \xi; \theta) = \frac{\varrho(\xi) \sqrt{1 + \varrho'^2(\xi)}}{R_a [x; r(x); \xi; \varrho(\xi); \theta]} \quad 58)$$

$r(x)$  - Erzeugungsfunktion von  $S$   
 $\varrho(\xi)$  - Erzeugungsfunktion von  $S_a$   
 $\varrho'(\xi)$  - Ableitung der Erzeugungsfunktion von  $S_a$

Zudem gilt überall an  $S$  und  $S_a$

$$\text{Normalkomponente } (\vec{H}_S + \vec{H}_F) = 0 \quad 59)$$

und schließlich in  $AG$  die Flußerhaltung

$$\mu_0 \int_{ZQ} (\vec{H}_S + \vec{H}_F) \vec{dq}_z = \varnothing_{ZQ} = \text{const.} \quad (60)$$

$ZQ$  - zwischen  $S$  und  $S_a$  liegende Querschnittsfläche der Anordnung

$\vec{dq}_z$  - Flächenelement von  $ZQ$

$\varnothing_{ZQ}$  - magnetischer Fluß in  $ZQ$

mit

$$\vec{H}_S = \vec{H}_S [\vec{j}_a; \xi; \varrho(\xi)] \quad (61)$$

Gesucht sind die Funktionen  $\vec{j}_a(\xi)$  und  $\varrho(\xi)$ .

Es erscheint von vornherein müßig, die analytische Lösung des Problems sowie den mathematisch-exakten Nachweis ihrer Existenz überhaupt zu versuchen.

$f(x)$  ist im allgemeinen nur numerisch gegeben. Weiterhin ist die praktische Erzeugung einer Flächenstromverteilung  $j_a$  ohnehin nicht möglich. Bestenfalls kann sie durch diskrete Stromschleifen oder eine dem entsprechende Spulenkonfiguration auf  $S_a$  angenähert werden.

Vom Standpunkt der Physik aus läßt sich das Folgende sagen - Würde es gelingen, auf einem  $S_a$  eine Flächenstromverteilung  $j_a$  mit äußeren Mitteln zu erzwingen, so wäre die durch Induktion auf  $S$  fließende Flächenstromverteilung  $j$  ohne Widerspruch zu analogen physikalischen Erfahrungen existent und eindeutig und stände mit  $j_a$  über die Beziehung 57) im Gleichgewicht. Es besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit, daß es unter allen möglichen Flächen  $S_a$  eine gibt, die sämtliche an die Anordnung gestellten Forderungen erfüllt.

Letztlich bleibt also nur die numerische Lösung der Gleichung

56), die den mathematisch-empirischen Nachweis ihrer Existenz nebenher von selbst erbringt.

Die Beziehung 56) ist quasi als Kombination zweier linearer Gleichungssysteme numerisch lösbar. Zu dem Zweck sind die Flächenstromverteilungen  $j$  und  $j_a$  auf  $S$  und  $S_a$  zu diskretisieren. Es ergibt sich eine auf allen in Betracht kommenden Berandungen  $L$  des Plasmas gültige Formel

$$\sum_n I_a^n \int_{L_a} \frac{1}{R_a} \vec{dl}_a = - \sum_m I_p^m \int_{L_p} \frac{1}{R_p} \vec{dl}_p \quad (62)$$

$n$  - Laufzahl der diskreten Stromschleifen auf  $S_a$

$I_a^n$  - Linienstrom auf der  $n$ -ten Schleife

$R_a$  - Abstand Aufpunkt-Integrationspunkt bezogen auf die Ströme  $I_a^n$

$L_a$  - ringförmige Stromschleife auf  $S_a$

$\vec{dl}_a$  - Linienelement von  $L_a$

$m$  - Laufzahl der diskreten Stromschleifen auf  $S$

$I_p^m$  - Linienstrom auf der  $m$ -ten Schleife

$R_p$  - Abstand Aufpunkt-Integrationspunkt bezogen auf die Ströme  $I_p^m$

$L_p$  - ringförmige Stromschleife auf  $S$

$\vec{dl}_p$  - Linienelement von  $L_p$

Haben die Linienströme  $I_p^m$  auf die  $x$ -Koordinate bezogen gleiche genügend kleine Abstände voneinander, dann kann angenommen werden, daß sich der Wert des Flächenstromes  $j$  auf  $S$  am Ort einer Stromschleife konstant über die jeweils links und rechts von diesem Ort liegenden halben Abstandsintervalle zwischen den benachbarten Schleifen fortsetzt. Die jeweiligen Werte von  $I_p^m$  werden somit als Produkt aus Länge des Abstandsinter-

valles und Flächenstrom am Ort der betrachteten Stromschleife eingeführt

$$I_p^m = \Delta x \cdot j_m \quad (63)$$

$\Delta x$  - Länge des Abstandsintervalles zwischen zwei benachbarten Stromschleifen auf S

$j_m$  - Flächenstrom am Ort der m-ten Schleife

Die Kombination der beiden linearen Gleichungssysteme lautet

$$\begin{aligned} a_{11} I_a^1 + \dots + a_{1n} I_a^n &= - (b_{11} I_p^1 + \dots + b_{1m} I_p^m) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ a_{n1} I_a^1 + \dots + a_{nn} I_a^n &= - (b_{n1} I_p^1 + \dots + b_{nm} I_p^m) \end{aligned} \quad (64)$$

Die a- und b-Werte entsprechen den Integralen auf den linken und rechten Seiten der Gleichung 62).

Aus Gründen der Eindeutigkeit muß gelten

$$m = n \quad (65)$$

und damit

$$\begin{aligned} a_{11} I_a^1 + \dots + a_{1n} I_a^n &= - (b_{11} I_p^1 + \dots + b_{1n} I_p^n) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ a_{n1} I_a^1 + \dots + a_{nn} I_a^n &= - (b_{n1} I_p^1 + \dots + b_{nn} I_p^n) \end{aligned} \quad (66)$$

Nur dann repräsentieren die in 64) bzw. 66) rechtsstehenden bekannten Summen tatsächlich die gewünschte Flächenstromverteilung  $j$  auf  $S$ ; d.h. die Ströme  $I_p^{in}$  stimmen im Sinne von 63) wenigstens an den Orten der Stromschleifen auf  $S$  mit den dort vorausgesetzten Flächenströmen  $j_m$  überein.

Generell ist vorerst zu bemerken, daß eine eindeutige numerische Lösung des linearen Gleichungssystems 66) dann existiert, wenn die Determinante der Matrixelemente  $a_{ik}$  nicht zu klein wird. Weitere Folgerungen werden später gezogen.

Im Gebiet  $G$  ist nicht die Forderung nach Feldfreiheit, sondern die schwächere Forderung nach Flußfreiheit gestellt. Somit kann dort ein Magnetfeld vorhanden sein. Am Düsenmantel gilt eine aus Gleichung 28) gefolgerte Beziehung

$$\bar{B}_a^2 = (B_a + \Delta B_a)^2 = 2/\mu_0 p_p + B_p^2 \quad 67)$$

und mit Gleichung 31)

$$\bar{B}_a^2 = B_a^2 + B_p^2 \quad 68)$$

oder

$$\bar{B}_a^2 - B_p^2 = B_a^2 \quad 69)$$

d.h. das hier wirklich benötigte äußere Magnetfeld  $\bar{B}_a$  hat jetzt zusätzlich zum gasdynamischen Druck  $p_p$  des Plasmas noch einen aus  $B_p$  resultierenden magnetischen Druck aufzufangen. Dadurch wird das gewünschte Druckgleichgewicht verfälscht. Eine derartige Verfälschung tritt nur unwesentlich ein, wenn das tatsächliche äußere Magnetfeld  $\bar{B}_a$  dem geforderten äußeren Magnetfeld  $B_a$  beliebig nahe kommt



$$\bar{B}_a \approx B_a \quad 70)$$

also

$$p_p \geq \frac{B_p^2}{2 \rho_0} \quad 71)$$

oder

$$\bar{B}_a \geq B_p \quad 72) \quad \text{ist.}$$

Wegen der starken Wechselwirkung zwischen Plasma und Magnetfeld  $B_p$  ( $\sigma = \infty$ ) würde sich ein aus  $B_p$  im Inneren von G ergebender Magnetfelddruck über das Plasma im wesentlichen radial zum Düsenmantel hin gasdynamisch fortpflanzen. Deshalb muß  $B_p$  der Bedingung 71) oder 72) nicht nur an der Berandung L einer Querschnittsfläche Q des Plasmas entsprechen, sondern in allen Flächenelementen  $dq$  von Q.

Das Eindringen des Magnetfeldes aus dem Gebiet AG in die Gebiete G und UMG auf Grund der abgeschnittenen Düsenenden kann unter Umständen durch geeignete fiktive Fortsetzungen der Düse über den wesentlichen Düsenbereich hinaus abgemildert werden. Dies erscheint jedoch nicht sonderlich zweckmäßig, da vage Annahmen über die Düsenendbereiche durch ebenso vage ersetzt sind und zudem bei der numerischen Behandlung eventuell Rechenpunkte des wesentlichen Düsenbereichs für die jetzt vorhandene Fortsetzung der Düse geopfert werden müssen.

### Stabilitätsbetrachtungen

Die positive Beantwortung zweier Fragen ist für die Realisierbarkeit der magnetischen LAVAL-Düse von entscheidender Bedeutung -

- a) Ist zu erwarten, daß das gewünschte Gleichgewicht zwischen Plasmadruck und äußerem Magnetfeld nach dem Einschalten der LAVAL-Düse tatsächlich erreicht wird?
- b) Bleibt das gewünschte Gleichgewicht zwischen Plasmadruck und äußerem Magnetfeld, falls es sich überhaupt einstellt, stabil oder nicht?

Beides liegt im Prinzip auf der gleichen Ebene, muß jedoch gesondert betrachtet werden, da die positive Antwort auf eine der Fragen die positive Beantwortung der anderen Frage von vornherein nicht einschließt.

Hier wird lediglich der Einfluß des Wechselspieles von Plasmadruck und äußerem Magnetfeld auf die Einstellung und Stabilität des gewünschten Gleichgewichtes behandelt. Andere mögliche Einflüsse sind nicht berücksichtigt.

Außengebiet

$P_a$

————— Randfeldlinie

$P_p$

Plasma

Bei allen Deformationen der Plasmaoberfläche bzw. Randfeldlinie deformiert sich die stromführende Grenzschicht  $j$  auf  $S$  gleichermaßen mit. Dadurch wird auch das von  $j$  erzeugte Magnetfeld jeweils in eine neue Lage verschoben.

Sämtliche Deformationen der Plasmaoberfläche werden als rotationssymmetrisch vorausgesetzt.

Auf einer Berandung L des Plasmas vom Radius  $r$  gilt im Gleichgewicht -

$$\text{wenn } r = r_g \text{ dann } p_a = p_p \quad (73)$$

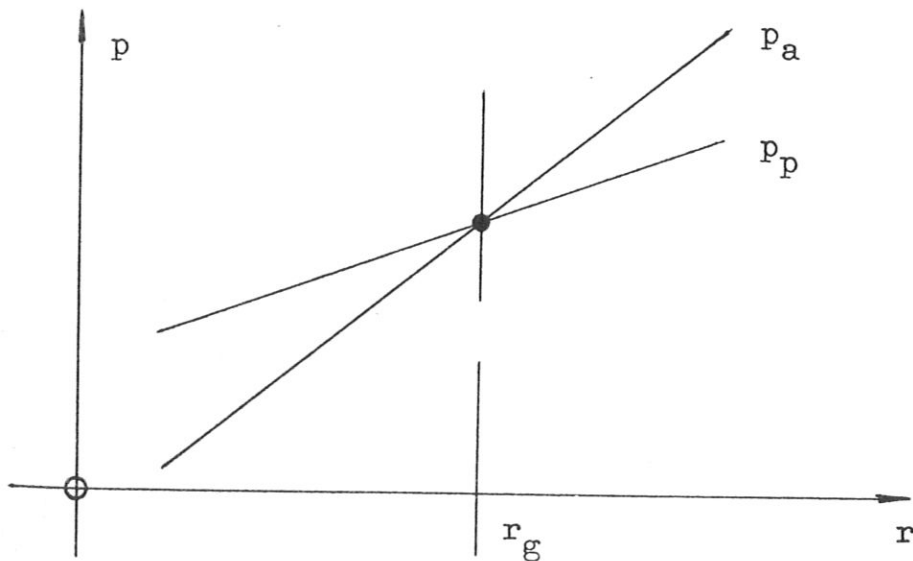
$r$  - Radius einer Berandung L des Plasmas

$r_g$  - Radius  $r$  im Gleichgewicht

Bei einer Deformation der Plasmaoberfläche ändert sich der Radius  $r$  einer aus dem deformierten Bereich herausgegriffenen Berandung L. Die Plasmaoberfläche wird in den ursprünglichen Gleichgewichtszustand zurückgedrängt, wenn

$$p_a > p_p \quad \text{für} \quad r > r_g \quad (74) \quad \text{und}$$

$$p_a < p_p \quad \text{für} \quad r < r_g \quad (75)$$



Die Beziehungen 74) und 75) lassen sich speziell zur Untersuchung der Frage b) in einer einzigen zusammenfassen

$$\left( \frac{dp_a}{dr} \right)_{r_g} > \left( \frac{dp_p}{dr} \right)_{r_g} \quad (76)$$

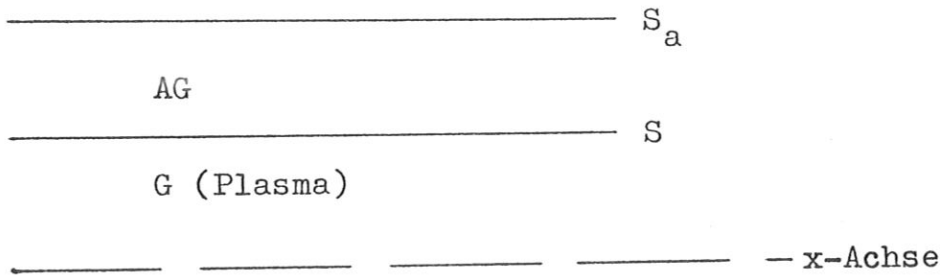
Ungleichung 76) ist ein notwendiges Stabilitätskriterium. Das gewünschte Gleichgewicht zwischen Plasmadruck und äußerem Magnetfeld ist stabil, sobald der radiale Anstieg des äußeren Magnetfelddruckes  $p_a$  an sämtlichen Berandungen  $L$  des vorausgesetzten Düsenmantels größer ist als der radiale Anstieg des Plasmadruckes  $p_p$ . Dabei ist der Begriff "radialer Anstieg" in einem dem bisher Gesagten entsprechenden Sinn zu interpretieren.

Zu Frage a) läßt sich das Folgende bemerken -

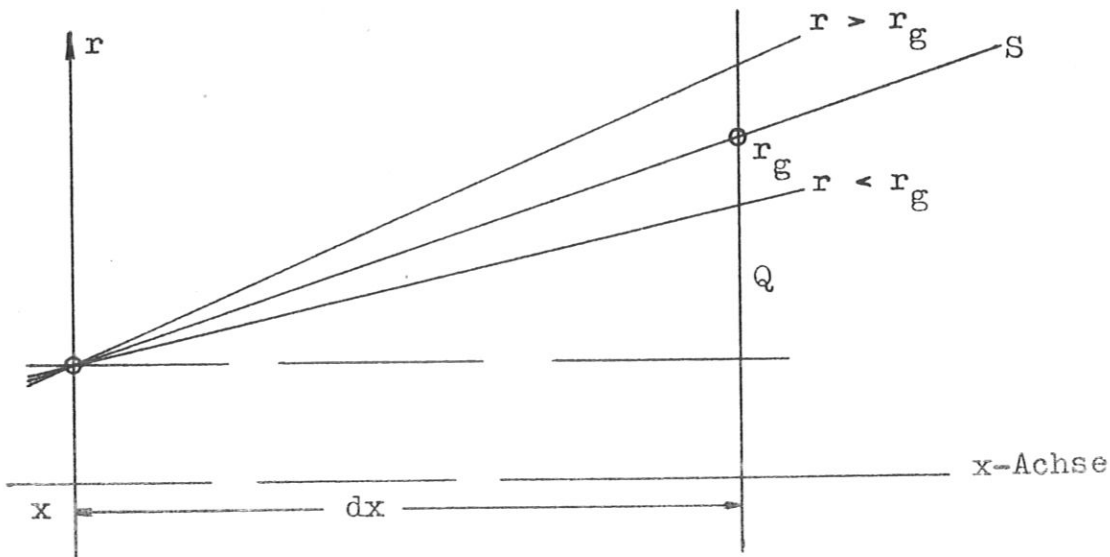
Wird das äußere Magnetfeld auf den bereits laufenden Plasmastrahl geschaltet, dann sind die Umstände im Augenblick des Einschaltens einer großen Abweichung des tatsächlichen Düsenmantels vom Sollzustand analog, und das erwartete Gleichgewicht zwischen Plasmadruck und äußerem Magnetfeld stellt sich nur ein, wenn die Ungleichungen 74) und 75) auch über große Deformationen des gewünschten Düsenmantels hinweg gültig bleiben.

Wird jedoch der Plasmastrahl beim Einschalten der Düse in das bereits laufende äußere Magnetfeld geschossen, besteht bei Stabilität und einem kleinen Wert des Verhältnisses der Einstellzeit des Gleichgewichtes in einer Querschnittsfläche  $Q$  zur Durchlaufzeit des Plasmas durch dieselbe Querschnittsfläche (eigentlich Querschnittsscheibe endlicher Dicke) die Möglichkeit, daß sich der gewünschte Düsenmantel vom im Experiment eindeutig festgelegten Anfangsquerschnitt der Düse ausgehend Schritt für Schritt längs der  $x$ -Achse aufbaut; d.h. das Plasma würde während der Einstellzeit der Düse kontinuierlich in die richtige Bahn gedrängt, da seine Front beim Fortschreiten zwangsläufig immer in unmittelbarer Nähe des Gleichgewichtszustandes bleibt.

Bei aller Schlichtheit des Kriteriums 76) ist es aber ein hoffnungsloses Unterfangen, seine Erfüllung oder Nichterfüllung für das gesamte betrachtete Düsenmodell theoretisch zeigen zu wollen, besonders im Hinblick auf den praktischen Fall der diskreten Stromschleifen auf  $S_a$ . Wird hingegen die Gültigkeit aller im Abschnitt "Elektrodynamische Behandlung der Düse" gemachten idealisierenden Voraussetzungen angenommen, ist eine "bedingte" Stabilität im Überschallbereich der Düse ( $M > 1$ ) nachweisbar.



Aus einem Deformationsbereich der Plasmaoberfläche  $S$  sei eine Querschnittsfläche  $Q$  herausgegriffen. Wegen der Konstanz des magnetischen Flusses in  $AG$  ergibt sich in der  $Q$  entsprechenden Querschnittsfläche von  $AG$  eine allgemeine Erhöhung oder Erniedrigung der ursprünglichen magnetischen Feldstärke, je nachdem, ob  $r$  größer oder kleiner wird als  $r_g$ . Damit ist im Gleichgewicht der radiale Anstieg von  $p_a$  an der Berandung  $L$  von  $Q$  positiv. Dies gilt zumindest, solange am betrachteten  $L$  durch die Deformation keine wesentliche Änderung der Gleichgewichtsflächenstromverteilung  $j$  eintritt.



Gleichung 22) kann mit 18) formal umgeschrieben werden

$$\left(\frac{1}{M^2} - 1\right) \frac{1}{\alpha p} \frac{dp}{dr} \frac{dr}{dx} = \frac{2}{r} \frac{dr}{dx} \quad 77)$$

Für  $M > 1$  bleibt die Ableitung von  $r$  nach  $x$  bei einsetzender Deformation zunächst sicher positiv.  $\alpha$ ,  $p$  und  $r$  sind generell positive Größen. Also muß die Ableitung von  $p$  nach  $r$  negativ werden, was einem negativen radialen Anstieg des Plasmadruckes  $p_p$  im Gleichgewicht analog ist.

Von der letzten Abbildung ausgehend sei angenommen, daß die Deformation an der Stelle  $x$  gerade beginnt. Durch die Deformation erreicht das Plasma an der Stelle  $x + dx$  einen falschen Radius  $r$ , der entweder größer oder kleiner als  $r_g$  ist. Damit wird dort der tatsächliche Plasmadruck kleiner oder größer als der  $r_g$  entsprechende Gleichgewichtsdruck.

Im Überschallbereich der Düse gilt die Ungleichung 76) bei Deformationen der Plasmaoberfläche von der  $x$ -Achse weg "theoretisch" immer, solange  $r' < \infty$ , da stets  $r > r_g$  und somit auch die Ableitung von  $r$  nach  $x$  positiv ist.

Im Falle  $r < r_g$  hingegen sollte die Ableitung von  $r$  nach  $x$  nicht 0 (oder negativ) werden, weil dann die Gleichung 77) eine Singularität durchläuft und die weitere Gültigkeit der Voraussetzung  $M > 1$  zum wenigsten fragwürdig ist. Das setzt genügend kleine Deformationen zur  $x$ -Achse hin voraus. Gelingt es dem Plasma, den Bereich genügend kleiner Deformationen zur  $x$ -Achse hin zu überschreiten, bleibt die Beziehung 76) die Antwort auf die Frage nach Stabilität auch für  $M > 1$  schuldig.

Hier sei noch bemerkt, daß die praktisch erreichbare Leitfähigkeit des Plasmas ( $\sigma < \infty$ ) hinsichtlich der Einstellung und Stabilität des Gleichgewichtes der Düse eine nicht unwesentliche Rolle spielen wird. Bei  $\sigma < \infty$  dringt das Magnetfeld im Laufe der Zeit aus AG in G ein.

### Zur numerischen Rechnung

Durch numerische Integration der Differentialgleichung 21) und Verwendung der Beziehungen 13), 15), 16) und 17) ergeben sich die Verteilungsfunktionen der gasdynamischen Zustandsgrößen über den Düsenmantel. 21) besitzt in der Düsenmitte eine Singularität. Die daraus entstehende Schwierigkeit läßt sich relativ leicht beheben. 21) wird bis kurz vor die Düsenmitte integriert. Dann kann die Singularität mit dem letzten Wert der Ableitung von  $W$  nach  $x$  übersprungen und schließlich 21) weiterintegriert werden.

Die numerische Berechnung der elliptischen  $a$ - und  $b$ -Integrale des Gleichungssystems 66) bereitet keine prinzipiellen Schwierigkeiten, solange sämtliche vorkommenden Abstände Aufpunkt-Integrationspunkt genügend groß sind. Dies kann wegen der zwangsläufig begrenzten Anzahl von Stromschleifen als gegeben angesehen werden. Lediglich die  $b$ -Integrale, welche das von einer Stromschleife auf ihr selbst erzeugte Vektorpotential verkörpern, erreichen den Wert Unendlich. Sie werden durch Näherungslösungen ersetzt.

Für das Vektorpotential einer einzelnen Stromschleife gilt in Zylinderkoordinaten

$$\vec{V}_\Theta = 2iI \int_0^\infty e^{-k|x-\xi|} J_1(kr) J_1(k\varrho) dk \vec{e}_\Theta \quad 78)$$

$\vec{V}_\Theta$  - Vektorpotential in  $\Theta$ -Richtung am Aufpunkt  
(hier existiert überhaupt nur die  $\Theta$ -Komponente)

$I$  - Schleifenstrom

$x$  - Achsenkoordinate des Aufpunktes

$r$  - Radialkoordinate des Aufpunktes

$\xi$  - Achsenkoordinate des Integrationspunktes

$\varrho$  - Radialkoordinate des Integrationspunktes

$\vec{e}_\theta$  - Einheitsvektor in  $\theta$ -Richtung

Aus der Laplace-Transformation folgt

$$\int_0^\infty e^{-k|x-\xi|} J_1(kr) J_1(k\varrho) dk = \frac{1}{\pi\sqrt{r\varrho}} Q_{1/2}(\eta) \quad 79)$$

mit

$$\eta = 1 + \frac{(r-\varrho)^2 + (x-\xi)^2}{2r\varrho} \quad 80)$$

$Q_{1/2}$  - Legendre-Funktion

Damit lautet das Vektorpotential

$$V_\theta = 2I \frac{\varrho}{\sqrt{r\varrho}} Q_{1/2}(\eta) \quad 81)$$

Gleichung 81) wird zur Bestimmung aller  $a_{ik}$  verwendet, ebenso zur Bestimmung aller  $b_{ik}$ , sofern bei letzteren  $i \neq k$  ist.

Zur Berechnung der  $b_{ii}$ -Werte wird die folgende Näherung benutzt

$$b_{ii} = \left| \int_{\theta + \Delta\theta}^{2\pi - \Delta\theta} \frac{1}{R_p} \overrightarrow{[r d\theta]} \right| \quad 82)$$

mit

$$\Delta\theta \ll 2\pi \quad x = \xi \quad r = \varrho$$

Der Aufpunkt liegt an der Stelle  $\theta = 0$  bzw.  $2\pi$ .



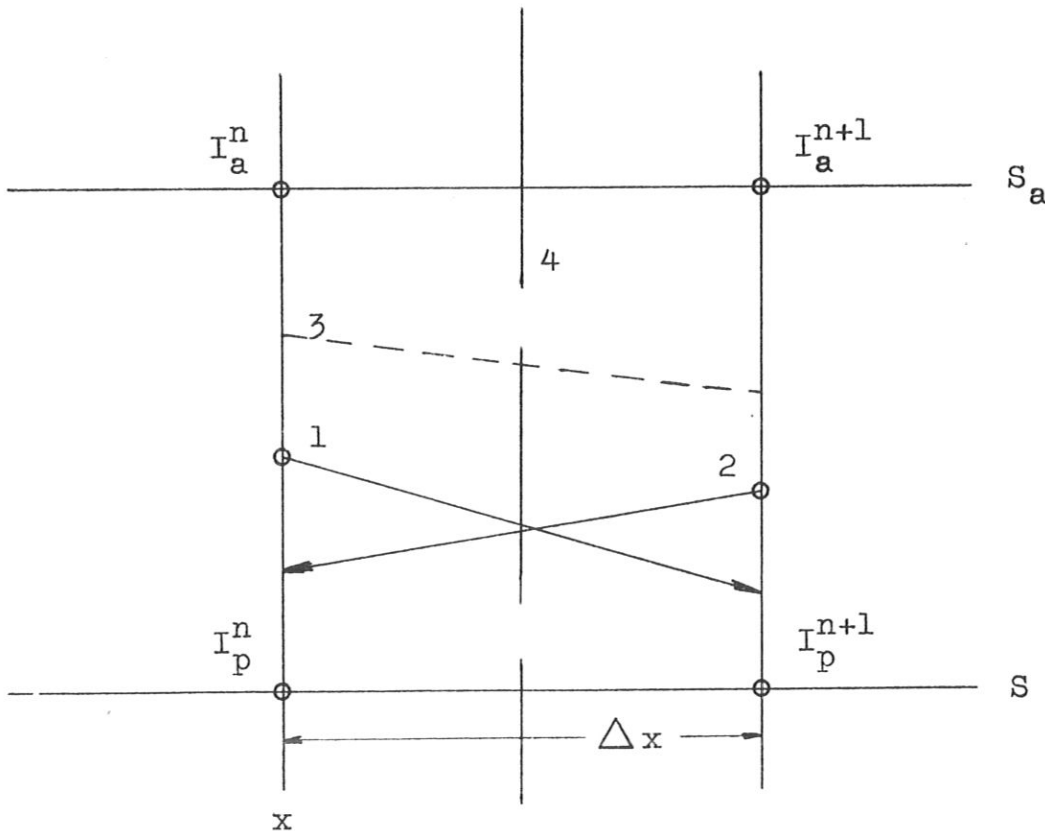
Hierbei erscheint die Annahme, daß

$$r \cdot \Delta\theta = \Delta x \quad 83)$$

einigermaßen sinnvoll, solange  $\Delta x$  genügend klein bleibt.

Es ist eine Lösung anzustreben, bei der sämtliche Ströme  $I_a^n$  gleichgerichtet sind. Nur dann ist eine Singularitätenfreiheit und damit die gewünschte Zügigkeit des Magnetfeldes am Düsenmantel überhaupt zu erwarten.

Zwar wird aus numerischen Gründen vorausgesetzt, daß auf dem Düsenmantel diskrete Linienströme  $I_p^n$  fließen, aber in Wirklichkeit bildet sich dort zwangsläufig eine Oberflächenstromverteilung  $j$  aus. Das wirft die Frage nach dem Verhalten von  $j$  zwischen jeweils zwei benachbarten Rechenpunkten auf.



Die zwischen zwei benachbarten Rechenpunkten auf S fließenden Oberflächenströme werden einmal durch die Spulenströme  $I_a^n$ , zum anderen durch die gesamte Oberflächenstromverteilung  $j$  auf S beeinflusst. Numerisch sind nur die diskreten Ströme  $I_p^n$  erfaßbar. Bei einer genügend großen Entfernung des Plasmas von den gleichgerichteten Spulenströmen  $I_a^n$  verläuft deren Einfluß auf  $j$  am Düsenmantel sicher stetig. Mit einiger Wahrscheinlichkeit wird auf Grund des primären stetigen Einflusses der  $I_a^n$  auf  $j$  auch  $j$  selbst längs S stetig verlaufen.

Es sei die Stelle  $x + \Delta x/2$  (Linie 4) zwischen  $x$  und  $x + \Delta x$  herausgegriffen. Die  $I_a^n$  und  $j$  sind fixiert. Ihr Einfluß auf  $x + \Delta x/2$  läßt sich in einen links- und einen rechtsseitigen Einfluß unterteilen. Er ist bei fixierten Strömen nur noch durch die geometrische Struktur der Anordnung bestimmt. Dasselbe gilt für alle anderen Stellen in  $\Delta x$ . Einen idealisierten Verlauf des linksseitigen Einflusses in  $\Delta x$  zeigt Kurve 1, einen idealisierten Verlauf des rechtsseitigen Einflusses in  $\Delta x$  zeigt Kurve 2. Der daraus entstehende idealisierte Gesamteinfluß in  $\Delta x$  ist durch die Kurve 3 gegeben.

Im allgemeinen wird die Kurve 3 ein Extremum aufweisen. Ist das Extremum schwach, verläuft sie fast monoton von  $x$  nach  $x + \Delta x$  und ergibt zwischen zwei Rechenpunkten keine wesentlichen Störungen am Düsenmantel. Bei stärkeren Extrema wird der gesamte Düsenmantel wegen des Plasmadruck-Magnetfeld-Gleichgewichtes eine leicht gewellte Form längs der  $x$ -Achse erhalten.

Für die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems 66) ist die Größe des Verhältnisses

$$VH = \frac{\Delta x}{R_a} \quad 84)$$

von Bedeutung.

Wird  $VH$  genügend klein, dann nehmen mindestens die  $a_{ik}$  be-

nachbarter Rechenpunkte praktisch den gleichen Wert an. Dies kann so weit gehen, daß bei einem genügend kleinen Verhältnis von Düsenlänge zu einem gemittelten Abstand Plasma-Spule praktisch sämtliche  $a_{ik}$  den gleichen Wert besitzen; d.h. 66) ist nicht mehr lösbar. Physikalisch bedeutet das die Unfähigkeit des Plasmas, zwischen den einzelnen Strömen  $I_a^n$  noch zu unterscheiden. Das Plasma sieht die Gesamtheit der Ströme quasi als einen einzigen Strom an.

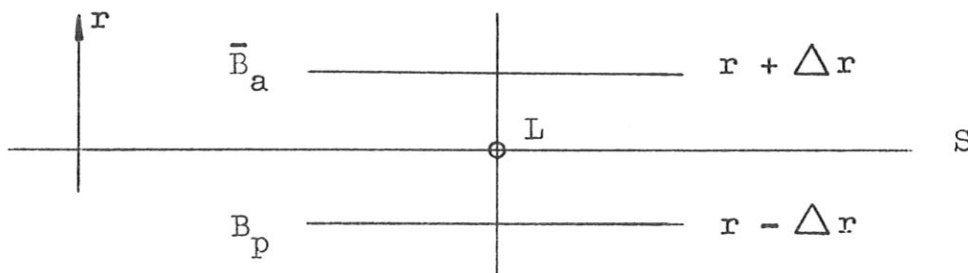
Es ist also ein Optimum von VH anzustreben. Vonvornherein erscheint es am günstigsten, als Fläche  $S_a$  eine parallel zu S verlaufende Fläche zu wählen, weil auf diese Weise für alle Rechenpunkte ähnliche geometrische Bedingungen vorliegen. Die Zahl der möglichen Rechenpunkte hängt schließlich vom senkrechten Abstand ( $S;S_a$ ) ab. Je geringer dieser Abstand ist, desto mehr Rechenpunkte können verwendet werden, ohne daß wesentliche "Instabilitäten" an den Strömen  $I_a^n$  auftreten.

Unter "Instabilität" ist hier zu verstehen -

- a) Die Ströme  $I_a^n$  sind nicht gleichgerichtet.
- b) Die Ströme  $I_a^n$  sind zwar gleichgerichtet, benachbarte  $I_a^n$  weisen aber beträchtliche Schwankungen in ihren Beträgen auf.

Die numerische Rechnung bestätigt diesen Sachverhalt. Er ist aus den angefügten Abbildungen ersichtlich.

Die numerische Kontrolle der Ungleichung 72) an den Rechenpunkten zeigt, daß  $B_p$  nicht wesentlich kleiner als  $\bar{B}_a$  ist. Das Ergebnis ist jedoch unter Vorbehalt zu betrachten und in erster Linie wohl auf das Singulärwerden der zur Magnetfeldberechnung verfügbaren Gleichungen in den Plasmastromschleifen zurückzuführen.



Ist  $r$  der Radius einer Berandung  $L$  des Plasmas, so wurde  $B_p$  an der Stelle  $r - \Delta r$  und  $\bar{B}_a$  an der Stelle  $r + \Delta r$  mit  $\Delta r \ll r$  berechnet. Es gilt

$$B_p = B_D^- + B_S^- \quad (85)$$

$$\bar{B}_a = B_D^+ + B_S^+ \quad (86)$$

$B_D^-$  - x-Komponente des durch die  $I_p^n$  (Düse) erzeugten Magnetfeldes bei  $r - \Delta r$

$B_S^-$  - x-Komponente des durch die  $I_a^n$  (Spule) erzeugten Magnetfeldes bei  $r - \Delta r$

$B_D^+$  - x-Komponente des durch die  $I_p^n$  (Düse) erzeugten Magnetfeldes bei  $r + \Delta r$

$B_S^+$  - x-Komponente des durch die  $I_a^n$  (Spule) erzeugten Magnetfeldes bei  $r + \Delta r$

Aus der geometrischen Struktur der Anordnung folgt, daß alle in 85) und 86) enthaltenen Größen im wesentlichen nur x-Komponenten haben, was die numerische Rechnung ebenfalls bestätigt.

$B_D^+$ ,  $B_S^+$  und  $B_S^-$  besitzen die gleiche Richtung.  $B_D^-$  ist den drei letztgenannten Größen entgegengerichtet. Die Beträge von  $B_S^+$  und  $B_S^-$  und die Beträge von  $B_D^+$  und  $B_D^-$  sind wegen der Kleinheit von  $\Delta r$  praktisch gleich.

$$B_S = B_S^+ = B_S^- \quad (87)$$

$$B_D = B_D^+ = B_D^- \quad (88)$$

Im Strom  $I_p^n$  der Berandung  $L$  wird  $B_D$  unendlich groß, hat also

an den Stellen  $r - \Delta r$  und  $r + \Delta r$  noch relativ hohe Werte. Wegen des bezüglich  $\Delta r$  großen senkrechten Abstandes ( $S;S_a$ ) ist  $B_S$  klein gegen  $B_D$ . Für das Verhältnis

$$\left| \frac{B_p}{B_a} \right| = \left| - \frac{B_D - B_S}{B_D + B_S} \right| = \frac{1 - (B_S/B_D)}{1 + (B_S/B_D)} \quad 89)$$

folgt demnach ein ungünstiger Wert.

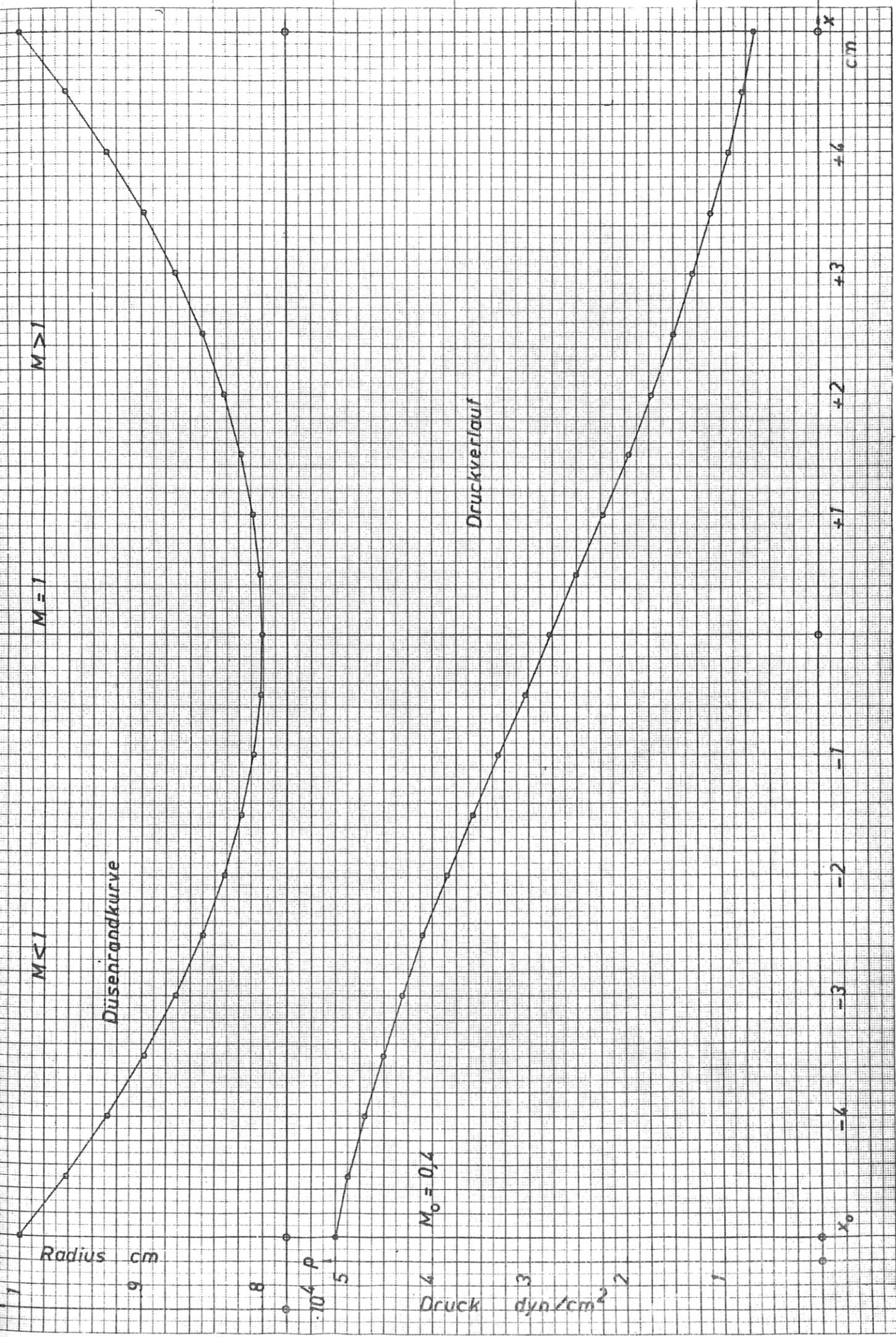
In Wirklichkeit bleibt  $B_D$  endlich in  $L$ . Damit dürfte bei  $r - \Delta r$  und  $r + \Delta r$  tatsächlich ein kleinerer Wert von  $B_D$  gültig sein, als der sich aus der Rechnung ergebende. Dann verschiebt sich auch das Verhältnis 89) in günstigere Bereiche.

Auf Grund ähnlicher Erwägungen dürfte schließlich  $B_p$  zur  $x$ -Achse hin generell kleiner werden als das entsprechende  $B_p$  bei  $r - \Delta r$ , d.h. 71) oder 72) ist im Inneren des Plasmas mindestens genausogut erfüllt wie am Düsenmantel.

Zu den Abbildungen -

$\Delta R$  - senkrechter Abstand ( $S;S_a$ ) in cm

Düsenlänge - 10 cm



11 Rechenpunkte

$\Delta x = 1 \text{ cm}$

Ampère  
 $\cdot 10^3$

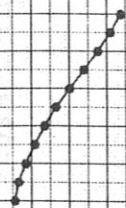
+3

+2

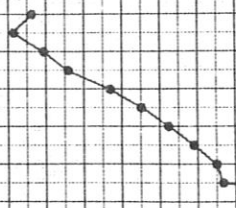
+1

Düse

Plasmaströme  $I_p^n$



Spulenströme  $I_a^n$



$\Delta R = 5$

Düse

$\Delta R = 7$

Düse

$\Delta R = 8.5$

Düse

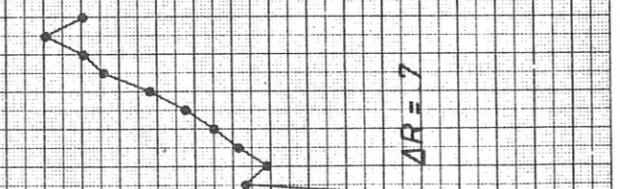
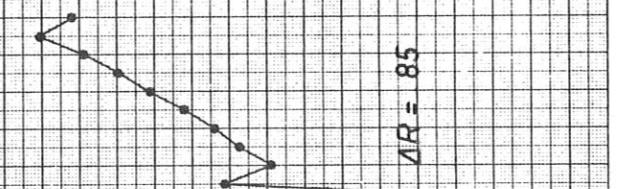
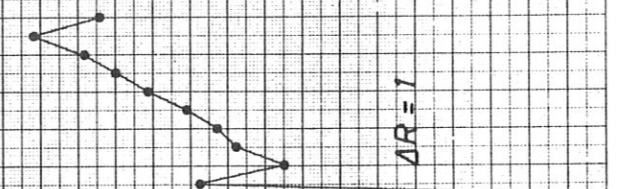
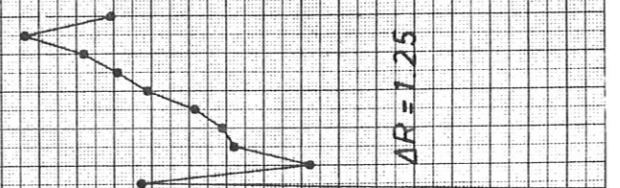
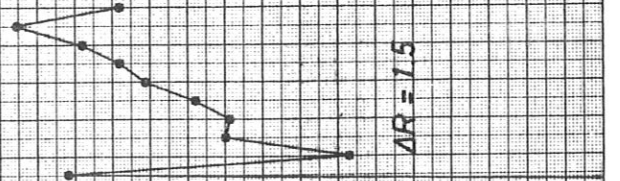
$\Delta R = 1$

Düse

$\Delta R = 1.25$

Düse

$\Delta R = 1.5$



-1

-2

-3

Ampere  
· 10<sup>3</sup>

+3

+2

+1

0

-1

-2

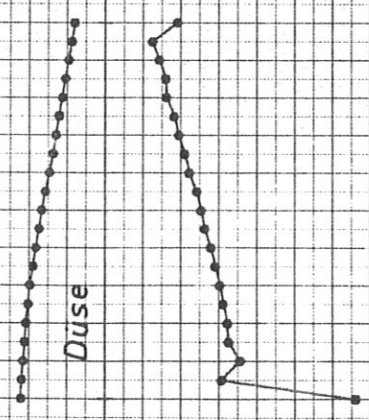
-3

21 Rechenpunkte

$\Delta x = 5 \text{ cm}$

Plasmaströme  $I_p^D$

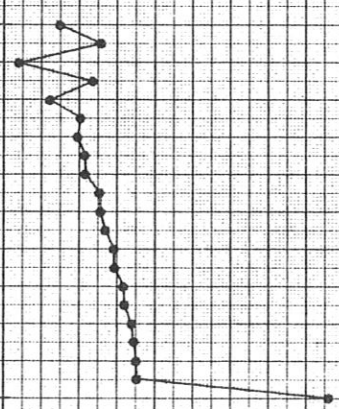
Düse



Spulenströme  $I_a^D$

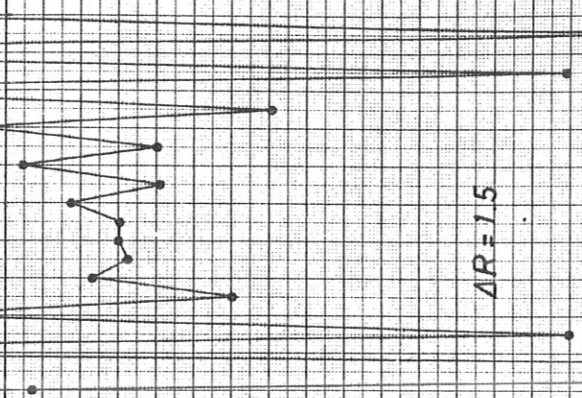
$\Delta R = 5$

Düse



$\Delta R = 1$

Düse



$\Delta R = 1.5$



Ampere

+750

+500

+250

0

-250

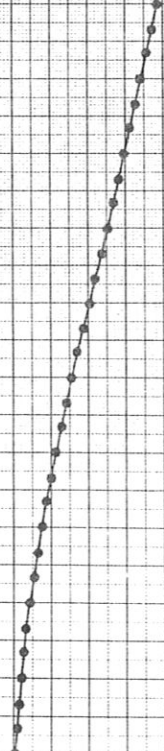
-500

-750

31 Rechenpunkte

$\Delta x = 3 \text{ cm}$

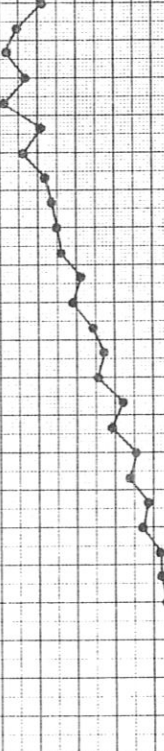
Plasmaströme  $I_p^0$



Düse

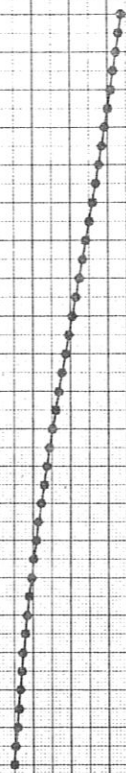
$\Delta R = 1.5$

Spulenströme  $I_a^R$



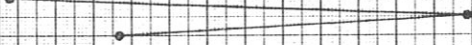
41 Rechenpunkte

$\Delta x = 25 \text{ cm}$



Düse

$\Delta R = 1.5$



Literatur

- 1) Oswatitsch, GASDYNAMIK, Springer, 1952
- 2) Rose and Clark, PLASMAS AND CONTROLLED FUSION,  
John Wiley & Sons, 1961
- 3) Spitzer, PHYSICS OF FULLY IONIZED GASES,  
Interscience Publishers Ltd., 1956
- 4) Joos, LEHRBUCH DER THEORETISCHEN PHYSIK,  
Akademischen Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG,  
1950
- 5) Sommerfeld, VORLESUNGEN ÜBER THEORETISCHE PHYSIK,  
Band III, ELEKTRODYNAMIK, Akademische Verlagsgesell-  
schaft Geest & Portig KG, 1961
- 6) Frank und v. Mises, DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DER  
PHYSIK, Band II, Dover Publications und Friedr.  
Vieweg & Sohn, 1961
- 7) Morse and Feshbach, METHODS OF THEORETICAL PHYSICS,  
Part I and II, Mc Graw-Hill, 1953
- 8) Erdélyi, Magnus, Oberhettinger, Tricomi, TABLES  
OF INTEGRAL TRANSFORMS, Volume I, Mc Graw-Hill,  
1954