INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Numerische Methoden zur Lösung einer ABELschen Integralgleichung

Rudolf Gorenflo

IPP/6/19 Mai 1964

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

Inhaltsverzeichnis

Summary

By side-on observation of a light source with rotational symmetry and radius R one obtains an intensity $J(x)$ which is coupled with the radial intensity $i(r)$ by the well known integral equation

$$J(x) = 2 \int_{r=|x|}^{R} \frac{i(r)\; r\, dr}{\sqrt{r^2 - x^2}} .$$

Some methods of computing $i(r)$ are presented. The influence of errors in the measured function $J(x)$ on the values of $i(r)$ is investigated.

1. Die ABELsche Integraltransformation und ihre Umkehrung. Transformation auf die in der Spektroskopie auftretende Integralgleichung.

Die ABELsche Integralgleichung [1)]

(1) $$G(t) = \int_{s=0}^{t} (t-s)^{-1/2} g(s)\, ds, \quad 0 \leq s \leq 1, \; 0 \leq t \leq 1, \; G(0)=0,$$

kann mittels der Operatorenrechnung bequem nach $g(s)$ aufgelöst werden. Mit dem Integrationsoperator I und dem zu I inversen Differentiationsoperator D ist

$$I g = \int_0^t g(s)\, ds, \qquad I^{\beta} g = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{s=0}^{t} (t-s)^{\beta-1} g(s)\, ds, \; \beta > 0,$$

$$D I g = I D g = g, \qquad D g = dg(t)/dt,$$

und (1) geht über in

$$G = \Gamma(1/2)\, I^{1/2} g .$$

Es ist also, wenn man $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ beachtet,

$$\sqrt{\pi}\, g = I^{-1/2} G = D^{1/2} G,$$

und wegen

$$I^{-1/2} = I^{1/2} D = D I^{1/2}$$

kann man die Lösung $g(s)$ in zweierlei Gestalt anschreiben:

(2) $$g(s) = \frac{1}{\pi} \int_{t=0}^{s} (s-t)^{-1/2} G'(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{d}{ds} \int_{t=0}^{s} (s-t)^{-1/2} G(t)\, dt.$$

---

1) Man vgl. [3], S. 53 und 151/152, [7], S. 290-294, und [11], S. 213.

Die Substitution

$$(3)\qquad r^2 = 1-s, \quad x^2 = 1-t, \quad F(x) = G(t), \quad f(r) = 2\,g(s)$$

führt (1) über in die Integralgleichung

$$(4)\qquad F(x) = \int\limits_{r=x}^{1} \frac{f(r)\, r\, dr}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le x \le 1, \quad F(1) = 0,$$

welcher durch die Substitution

$$(5)\qquad \xi = R\,x, \quad \varrho = R\,r, \quad F(x) = J(\xi), \quad f(r) = 2\,R\,i(\varrho)$$

die Integralgleichung

$$(6)\qquad J(\xi) = 2 \int\limits_{\varrho=\xi}^{R} \frac{i(\varrho)\,\varrho\, d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - \xi^2}}, \quad 0 \le \varrho \le R, \quad 0 \le \xi \le R, \quad J(R) = 0,$$

entspricht.

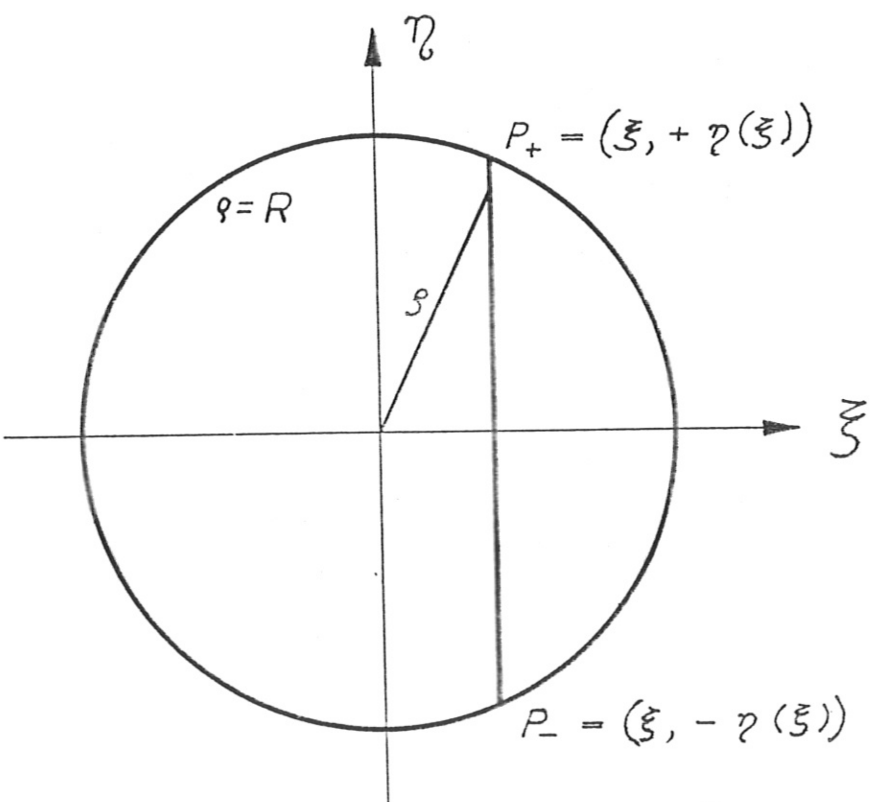


Abb. 1. Die Integralbeziehung $J(\xi) = \int\limits_{P_-}^{P_+} i(\varrho)\, d\varrho\,.$

Wenn $i(\varrho)$ eine im Kreis $\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 \leq R^2$ gegebene radialsymmetrische Intensität ist, von der

$$J(\xi) = \int_{\eta=-\eta(\xi)}^{+\eta(\xi)} i(\varrho)\, d\eta$$

durch side-on-Betrachtung gemessen werden kann, so folgt wegen

$$\eta = \pm\sqrt{\varrho^2 - \xi^2}, \quad \eta(\xi) = \sqrt{R^2 - \xi^2}$$

die Integralgleichung (6). Man vgl. Abb. 1. Aus Symmetriegründen braucht man negative Werte ξ nicht zu betrachten.

Wegen der einfachen Transformation (5) genügt es, numerische Lösungsmethoden für (4) zu suchen. Aus (2) folgt mit der Transformation (3) explizit in zweierlei Gestalt

$$(7) \qquad f(r) = -\frac{2}{\pi} \int_{x=r}^{1} \frac{F'(x)\, dx}{\sqrt{x^2 - r^2}}$$

$$= -\frac{2}{\pi r} \frac{d}{dr} \int_{x=r}^{1} \frac{F(x)\, x\, dx}{\sqrt{x^2 - r^2}} .$$

<u>Anmerkung:</u> G, F, J waren bisher stillschweigend als stetig differenzierbar vorausgesetzt. Die Formeln (2) und (7) gelten aber auch noch dann, wenn diese Funktionen nur stückweise stetig sind; man muß dazu $G'(t)\,dt$ durch $dG(t)$ und $F'(x)\,dx$ durch $dF(x)$ ersetzen. Hat $F(x)$ bei $x = a$ eine Sprungstelle, so geht $|f(r)| \to \infty$ bei $r \to a$. Man erkennt dies sofort aus

$$(7') \qquad f(r) = -\frac{2}{\pi} \int_{x=r}^{1} \frac{dF(x)}{\sqrt{x^2 - r^2}} .$$

In diesem Integral muß auch der eventuell bei $x = 1$ vorhandene Sprung $F(1) - F(1-0) = -F(1-0)$ berücksichtigt werden. Man rechnet leicht nach, daß sowohl (7') als auch die zweite Form von (7) die Funktion

$$F(x) = \begin{cases} 1/2\,, & 0 \leq x < 1/2 \\ 1\,, & 1/2 \leq x < 1 \\ 0\,, & x = 1 \end{cases}$$

auf

$$f(r) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1/2)^2 - r^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} \right), & 0 \leq r < 1/2 \\ \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}}\,, & 1/2 < r < 1 \end{cases}$$

transformiert.

2. Drei diskrete numerische Lösungsmethoden.

Im folgenden sei N eine nicht zu kleine natürliche Zahl, etwa $N \geq 20$, ferner sei $r_j = x_j = jh = j/N$ mit $h = 1/N$, $j = 0, 1, 2, \dots, N$.

Von den vielen möglichen diskreten Methoden sollen drei dargestellt werden.[2)]

Methode A:

Wir nehmen an, daß die Meßwerte $F_n = F(x_{n-1})$ gegeben sind, und suchen näherungsweise die Werte $f_n = f\left(r_{n-1} + \frac{h}{2}\right)$ zu bestimmen, $n = 1, 2, \dots, N$.

Aus

$$F_n = \int_{x_{n-1}}^{1} \frac{f(r)\, r\, dr}{\sqrt{r^2 - x_{n-1}^2}} \approx \sum_{i=1}^{N} f_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{r\, dr}{\sqrt{r^2 - x_{n-1}^2}}$$

folgt

$$(8) \qquad F_n \approx \sum_{i=n}^{N} \alpha(n,i)\, f_i\,, \qquad n = 1, 2, \dots, N.$$

Hierin ist

$$(9) \qquad A(n,i) = N\,\alpha(n,i) = N \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{r\, dr}{\sqrt{r^2 - x_{n-1}^2}} = \sqrt{i^2-(n-1)^2} - \sqrt{(i-1)^2-(n-1)^2}\,, \quad i \geq n.$$

Das Gleichungssystem (8) läßt sich rekursiv auflösen.
Wegen $A(n,n) = \sqrt{2n-1}$ ist

$$(10) \qquad f_n \approx \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \left(N F_n - \sum_{i=n+1}^{N} A(n,i)\, f_i \right), \quad n = N, N-1, \dots, 1.$$

Speziell ist $\quad f_N = N F_N / \sqrt{2N-1}$.

---

2) Weitere Methoden und Literaturangaben über solche findet man in [2], [6], [8]. In [6] werden mehrere Methoden miteinander verglichen.

Für beliebiges r kann man aus den Werten f_n den Wert $f(r)$ etwa durch lineare Interpolation näherungsweise ermitteln. In $0 \leq r < h/2$ ist quadratische Extrapolation mit der Forderung $f'(0) = 0$ zu empfehlen (daß $f(r)$ bei $r = 0$ sich stationär verhält, ist wohl eine naturgemäße Annahme). Speziell ist dann $f(0) \approx \frac{1}{8}(9f_1 - f_2)$. Es liegt nahe, $f(1) = 0$ zu setzen.

Die Methode läßt sich anschaulich deuten. Ist $f(r) \equiv f_i$ im Kreisring $\mathcal{R}_i = \{r_{i-1} \leq r < r_i\}$, so ist

$F_n = \sum_{i=n}^{N} \alpha(n,i) f_i$, und nach PYTHAGORAS ist

$\alpha(n,i) = \left(\sqrt{i^2 - (n-1)^2} - \sqrt{(i-1)^2 - (n-1)^2}\right) h$. Bei festem n und wachsendem $i \to \infty$ fällt $A(n,i)$ monoton gegen 1. Speziell ist $A(1,i) = 1$ für alle $i \geq 1$.

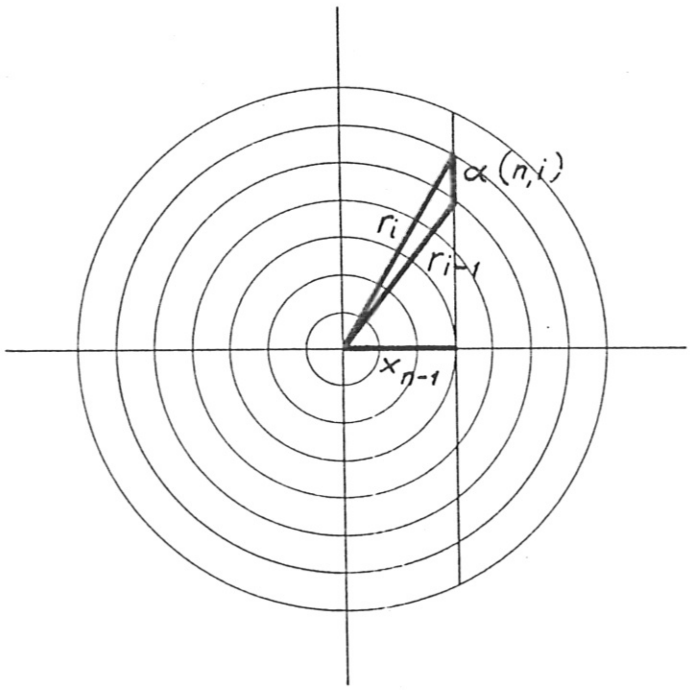


Abb. 2. Veranschaulichung von $\alpha(n,i)$ für n=4, i=6.

Die Methode entspricht ungefähr der Wirkungsweise des von G. BOLDT beschriebenen Analogiegeräts. [3)]
Eine Verfeinerung des Verfahrens besteht darin, in $r_{j-1} \leq r < r_j$ die Funktion $f(r)$ nicht als konstant, sondern etwa als quadratisches Polynom anzusetzen.
Es ist aber fraglich, ob dies im Hinblick auf die in den Meßwerten steckenden Ungenauigkeiten gerechtfertigt ist, da ja auch der Rechenaufwand erheblich größer ist.

Methode B:

$F_n = F(x_{n-1})$ seien die Meßwerte, gesucht seien die Werte $f_n = f(r_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots, N$. Aus der ersten Form der Lösung (7) folgt

$$f_n = -\frac{2}{\pi} \sum_{i=n}^{N} \int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{F'(x)\,dx}{\sqrt{x^2 - r_{n-1}^2}}$$

$$\approx -\frac{2}{\pi} \sum_{i=n}^{N} F'\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) \int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - r_{n-1}^2}},$$

also

(11) $$f_n \approx -\frac{2N}{\pi} \sum_{i=n}^{N} \mu(n,i)\left(F_{i+1} - F_i\right), \quad n = 2, 3, \ldots, N.$$

Hierin ist

(12) $$\mu(n,i) = \int_{r_{i-1}}^{r_i} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - r_{n-1}^2}} = \ln \frac{i + \sqrt{i^2 - (n-1)^2}}{i-1 + \sqrt{(i-1)^2 - (n-1)^2}}.$$

Die Größe f_1 kann wegen $\mu(1,1) = \infty$ aus (11) nicht ermittelt werden. Es ist zweckmäßig, nachträglich mittels

---

3) Man vgl. [4]. Den geringen Unterschied beider Verfahren erkennt man am einfachsten durch Vergleich von Abb. 2 dieses Berichts mit Fig. 2 des Berichts [4].

stationär-quadratischer $(f'(0) = 0)$ Extrapolation

(11') $$f(0) = f_1 \approx \frac{1}{3}(4 f_2 - f_3)$$

zu berechnen. $f(r)$, r beliebig, kann dann durch Interpolation näherungsweise bestimmt werden.

Methode C:

Auch aus der zweiten Form der Lösung (7) kann man eine numerische Lösungsmethode gewinnen. Mit

(13) $$S(r) = 2 \left\{ \int_0^1 F(x)\, dx - \int_{x=r}^{1} \frac{F(x)\, x\, dx}{\sqrt{x^2 - r^2}} \right\}$$

ist

(14) $$f(r) = \frac{1}{\pi r} S'(r).$$

Die Größe $S(r)$ wurde eingeführt, da sie eine einfache physikalische Bedeutung hat. Es ist $S(0) = 0$ und mit der Substitution (5) folgt aus (14)

(15) $$\int_0^a i(\varrho)\, 2\pi \varrho\, d\varrho = R \int_0^{a/R} S'(r)\, dr = R\, S(a/R),$$

im Kreis $0 \leq \varrho < a$ liegt also die Summen-Intensität $R\, S(a/R)$. Diese Methode liefert also nicht nur $f(r)$, sondern auch die Summen-Intensität $S(r)$.

Auf einen weiteren Vorteil hat W.L. BARR in [1] hingewiesen. Im Sinne der Operatorenrechnung entsteht ja $f(r)$ aus $F(x)$ durch eine halbe Differentiation. Es ist also zu erwarten, daß Ungenauigkeiten der Meßwerte $F(x)$ die berechnete Funktion $f(r)$ stark aufrauhen. Man kann dies verhindern, indem man F vor Durchführung einer numerischen Lösungsmethode glättet. Dies hat aber den Nachteil, daß man der Funktion F vor allem in Intervallen starker Krümmung Gewalt antut und zu stark abflacht, ein Fehler, der auch $f(r)$ erheblich verändert. Bei der nun darzustellenden Lösungsmethode ist es zweckmäßig, mit ungeglättetem F die Funktion $S(r)$ auszurechnen, da eine halbe Integration ohnehin glättend wirkt. Vor Durchführung der Differentiation kann man $S(r)$ glätten. Da für $S(r)$ ein glatterer Verlauf als für $F(x)$ zu erwarten ist, tut man mit der Glättung der Funktion auch nicht soviel Gewalt an.

Wir nehmen die Größen
$F_j = F(x_{j-1} + \frac{h}{2})$ als Meßwerte an und suchen die Werte $S_j = S(r_{j-1})$ und $f_j = f(r_{j-1} + \frac{h}{2})$ approximativ zu bestimmen.

Mit

$$T = \frac{1}{N} \sum_{\lambda=1}^{N} F_\lambda, \qquad U_{N+1} = 0,$$

$$U_j = \frac{1}{N} \sum_{\lambda=j}^{N} A(j,\lambda) F_\lambda, \qquad A(j,\lambda) \text{ wie in (9)},$$

$$\text{für } j = 1, 2, \dots, N,$$

ist

$$S_n \approx 2\,(T - U_n), \qquad n = 1, 2, \dots, N+1, \tag{16}$$

speziell also $S_{N+1} = S(1) \approx 2T, \quad S_1 = S(0) = 0.$

Ferner gilt

$$f_n \approx \frac{2N^2}{\pi} \, \frac{U_n - U_{n+1}}{n - \frac{1}{2}}, \qquad n = 1, 2, \dots, N. \tag{17}$$

Es ist nämlich $T \approx \int_0^1 F(x)\,dx$ und

$$U_j = \sum_{\lambda=j}^{N} F_\lambda \int_{r_{\lambda-1}}^{r_\lambda} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - r_{j-1}^2}} \approx \int_{r_{j-1}}^{1} \frac{F(x)\,x\,dx}{\sqrt{x^2 - r_{j-1}^2}},$$

mittels (13) folgt also (16). Weiter ist wegen (14) und (16)

$$f_n \approx \frac{1}{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)h}\,\frac{S_{n+1}-S_n}{h} \approx \frac{2N^2}{\pi}\,\frac{U_n - U_{n+1}}{n-\frac{1}{2}},$$ es

gilt also (17).

Für beliebige r kann man, wie unter Methode A angedeutet, $f(r)$ durch Inter- oder Extrapolation approximativ bestimmen. Für die Berechnung von $S(r)$ genügt Interpolation, da auch $S(0)$ und $S(1)$ durch (16) gegeben sind.

3. Lösung durch Entwicklung nach ultrasphärischen Polynomen.

Methode D:

Die Funktion $f(r)$ hat nur für $r \geq 0$ einen physikalischen Sinn; da aber die Annahme $f'(+0) = 0$ plausibel ist, und da eine in $0 \leq r^2 \leq 1$ stetige Funktion nach WEIERSTRASS beliebig gut durch Polynome in r^2 approximiert werden kann, liegt es nahe, wie in [6] den formalen Ansatz

(18) $$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^{2n}$$

zu machen. Geht man mit diesem in (4) ein, so folgt

(19) $$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n W_n(x)$$ mit

(19') $$W_n(x) = \int_{r=x}^{1} \frac{r^{2n+1}\, dr}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Es ist

(20) $$W_n(x) = \sqrt{1-x^2}\; V_n(x), \quad V_n(x) = \sum_{p=0}^{n} b(p,n)\, x^{2p},$$

(20') $$b(p,n) = \sum_{j=n-p}^{n} \frac{(-1)^{j+p-n}}{2j+1} \binom{n}{j} \binom{j}{n-p}, \quad n \geq 0,\ 0 \leq p \leq n.$$

Dies folgt mit der Substitution $r^2 - x^2 = t^2$ und Anwendung des binomischen Satzes:

(21) $$W_n(x) = \int_{t=0}^{\sqrt{1-x^2}} (t^2 + x^2)^n\, dt = \sqrt{1-x^2} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2j+1} \binom{n}{j} x^{2(n-j)} (1-x^2)^j,$$

$$V_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{\lambda=0}^{j} \frac{(-1)^{\lambda}}{2j+1} \binom{n}{j} \binom{j}{\lambda}\, x^{2(n+\lambda-j)}.$$

Umordnung dieser dreieckigen Summe nach Potenzen von x^2 gibt

$$b(p,n)=\sum_{\left\{\begin{array}{l} j,\ n+\lambda-j=p \\ 0\leq j\leq n \\ 0\leq \lambda\leq j \end{array}\right\}} \frac{(-1)^{\lambda}}{2j+1}\binom{n}{j}\binom{j}{\lambda},$$

nach einfacher Umformung also (20').

Einige Eigenschaften der Funktionen $W_n(x)$ seien angeführt:

Aus der Definition (19') folgt sofort, daß

$$0<W_{n+1}(x)<W_n(x) \qquad \text{für} \quad 0\leq x<1,$$

die W_n bilden also kein Orthogonalsystem.
Aus (21) folgt

$$W_n(0)=1/(2n+1), \qquad W_n(1)=0,$$

$$W_n(x)\sim\sqrt{1-x^2} \quad \text{bei} \quad x\to 1-0, \quad \text{also}$$

(22) $$\sum_{p=0}^{n} b(p,n) = V_n(1) = 1.$$

Wegen $W_n'(x)=\sqrt{1-x^2}\,V_n'(x)-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}V_n(x)$ ist

$$W_n'(x)\sim\big(2b(1,n)-b(0,n)\big)x=\frac{x}{2n-1} \quad \text{für} \quad x\to 0.$$

Der Koeffizient der höchsten auftretenden Potenz x^{2n} ist von Null verschieden, die $W_n(x)$ sind also linear unabhängig. Es ist nämlich

$$b(n,n)=\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{2j+1}\binom{n}{j}=\int_0^1(1-x^2)^n\,dx>0.$$

Speziell ist

$$V_0(x)\equiv 1, \quad V_1(x)=\frac{1}{3}(1+2x^2), \quad V_2(x)=\frac{1}{15}(3+4x^2+8x^4).$$

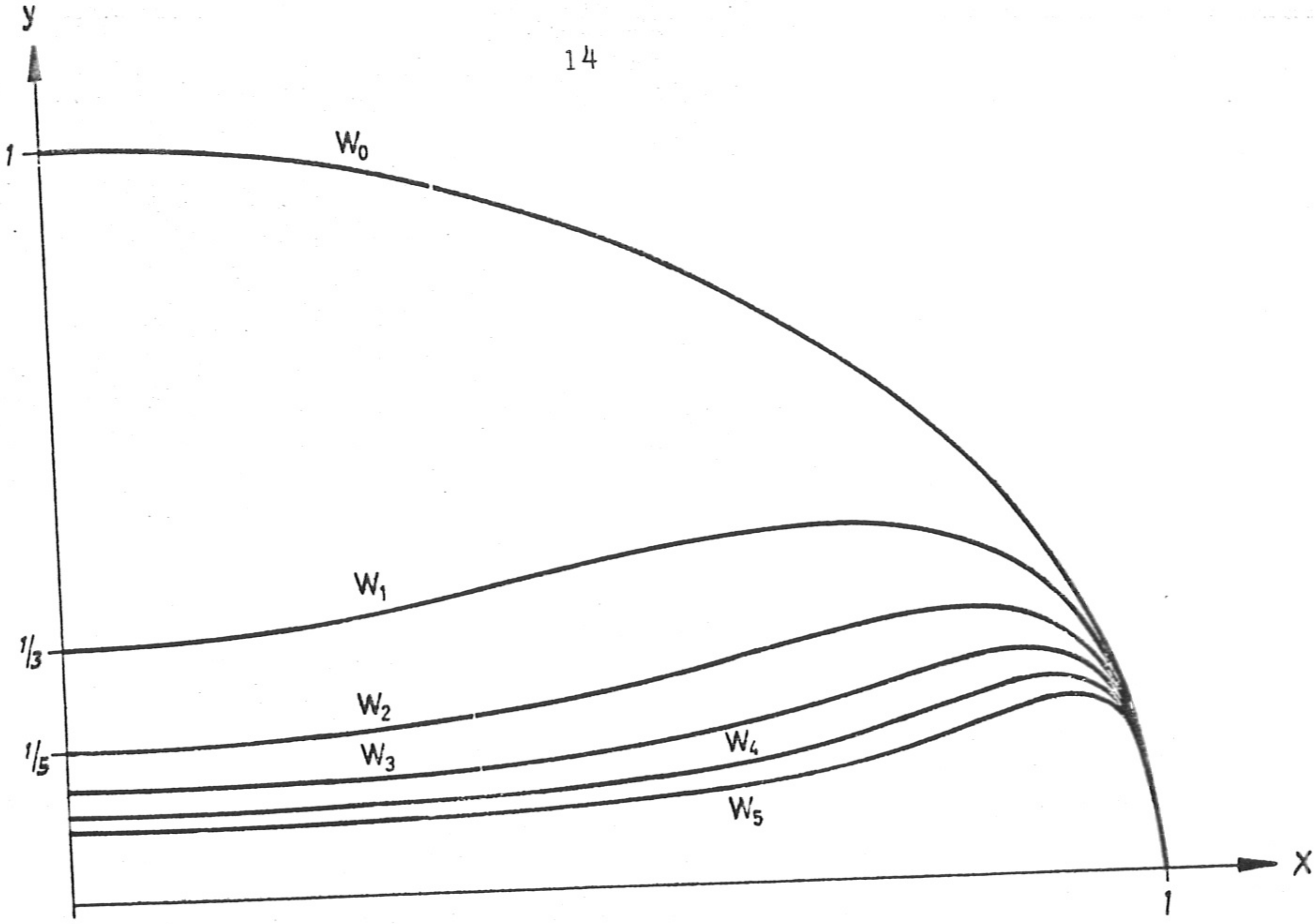


Abb. 3. Die Funktionen $y = W_n(x)$.

Wenn es gelingt, aus (19) die c_n zu ermitteln, so ist durch (18) die Lösung der Integralgleichung (4) gegeben.

Da alle $W_n(x)$ positiv sind, ja sogar sich in ihrer Gestalt nur unwesentlich voneinander unterscheiden (Abb. 3), ist zu erwarten, daß ihre GRAMsche Determinante (in der $(W_i, W_k) = \int_0^1 W_i(x)\, W_k(x)\, dx$ ist)

$$D_n = \begin{vmatrix} (W_0, W_0) & \dots & (W_0, W_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (W_n, W_0) & \dots & (W_n, W_n) \end{vmatrix}$$

mit wachsendem n sehr schnell gegen Null strebt. Numerische Rechnungen bestätigen diese Erwartung.

Dies bedeutet, daß die $W_n(x)$ für numerische Approximation

(23) $$F(x) \approx \sum_{n=0}^{k} c_n W_n(x)$$

gemäß

$$\int_0^1 \left(F(x) - \sum_{n=0}^{k} c_n W_n(x) \right)^2 dx = \text{minimum}$$

(Methode der kleinsten Quadrate) ungeeignet sind. Es empfiehlt sich, ein geeignetes Orthogonalsystem $\{W^*\}$ statt des Systems $\{W\}$ zu verwenden.

Ein solches bietet sich an in einem Spezialfall der GEGENBAUERschen oder ultrasphärischen Polynome [4].

(24) $$U_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \beta(p,n)\, x^{2p} \qquad \text{mit}$$

(24') $$\beta(p,n) = 4^p \binom{-3/2}{n+p} \binom{n+p}{n-p}$$

$$= (-1/2)^{n-p} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2(n+p)+1)}{(2p)!\,(n-p)!}, \quad 0 \leq p \leq n,\ n \geq 0.$$

Es gilt [4]

(24") $$U_n(1) = \sum_{p=0}^{n} \beta(p,n) = (n+1)(2n+1).$$

Mit

(25) $$W_n^*(x) = \sqrt{1-x^2} \cdot U_n(x)$$

---

4) Man vgl. [12], Kap. IV und V (Seite 160 ff, speziell Seite 177 ff). Die dortigen $C_{2n}^{3/2}$ sind unsere U_n.

gelten die Orthogonalitätsrelationen [4)]

(26) $$\int_0^1 W_m^*(x)\, W_n^*(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \dfrac{(2n+1)(2n+2)}{4n+3} & \text{für } m = n. \end{cases}$$

Die $W_n^*(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, bilden für die in $-1 \leq x \leq 1$ quadratisch integrierbaren geraden Funktionen $F(x)$ ein vollständiges Orthogonalsystem. Setzt man

(27) $$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* \, W_n^*(x),$$

so ist

(28) $$c_n^* = \frac{4n+3}{(2n+1)(2n+2)} \int_0^1 F(x)\, W_n^*(x)\, dx.$$

Da sowohl $U_n(x)$ als auch $V_n(x)$ ein Polynom vom Grade n in x^2 ist, entsteht das System $\{W^*\}$ aus dem System $\{W\}$ durch lineare Transformation mittels einer unendlichen Dreiecksmatrix:

(29) $$W_n^* = \sum_{p=0}^{n} \gamma(p,n)\, W_p,$$

(29') $$U_n = \sum_{p=0}^{n} \gamma(p,n)\, V_p.$$

Hieraus und aus (24) und (20) folgt

$$\sum_{p=0}^{n} \beta(p,n)\, x^{2p} = \sum_{\lambda=0}^{n} \left\{ \gamma(\lambda,n) \sum_{p=0}^{\lambda} b(p,\lambda)\, x^{2p} \right\}$$

$$= \sum_{p=0}^{n} \left\{ \sum_{\lambda=p}^{n} b(p,\lambda)\, \gamma(\lambda,n) \right\} x^{2p},$$

also

$$\sum_{\lambda=p}^{n} b(p,\lambda)\,\gamma(\lambda,n) = \beta(p,n), \quad 0 \leq p \leq n, \quad n \geq 0. \tag{30}$$

Die b und die β sind bekannt. Aus den unendlich vielen dreieckigen linearen Gleichungssystemen können also rekursiv alle $\gamma(\lambda,n)$, $0 \leq \lambda \leq n$, $n \geq 0$, berechnet werden. Zur Illustration seien die ersten 3 Systeme angeschrieben:

$n=0$: $\quad b(0,0)\,\gamma(0,0) = \beta(0,0)$

$n=1$:

$$\begin{aligned} b(0,0)\,\gamma(0,1) + b(0,1)\,\gamma(1,1) &= \beta(0,1) \\ b(1,1)\,\gamma(1,1) &= \beta(1,1) \end{aligned}$$

$n=2$:

$$\begin{aligned} b(0,0)\,\gamma(0,2) + b(0,1)\,\gamma(1,2) + b(0,2)\,\gamma(2,2) &= \beta(0,2) \\ b(1,1)\,\gamma(1,2) + b(1,2)\,\gamma(2,2) &= \beta(1,2) \\ b(2,2)\,\gamma(2,2) &= \beta(2,2). \end{aligned}$$

Die Lösung gewinnt man mit folgender Prozedur:

Es ist $\gamma(0,0) = 1$.

Für $n \geq 1$ ist

$$\gamma(n,n) = \beta(n,n)/b(n,n),$$

für $1 \leq j \leq n$ ist

$$\gamma(n-j,n) = \left\{\beta(n-j,n) - \sum_{\lambda=n-j+1}^{n} b(n-j,\lambda)\,\gamma(\lambda,n)\right\} \Big/ b(n-j,n-j).$$

Aus (19), (27) und (29) folgt

$$\sum_{p=0}^{\infty} c_p W_p = F = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* W_n^* = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* \left\{ \sum_{p=0}^{n} \gamma(p,n) W_p \right\}$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=p}^{\infty} \gamma(p,n) c_n^* \right\} W_p ,$$

also

(31) $$c_p = \sum_{n=p}^{\infty} \gamma(p,n)\, c_n^* .$$

Mit

(32) $$P_n^*(r) = \sum_{p=0}^{n} \gamma(p,n)\, r^{2p}$$

gilt auch

(33) $$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* \, P_n^*(r) .$$

Mit (18) und (31) ist nämlich

$$\sum_{p=0}^{\infty} c_p r^{2p} = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{n=p}^{\infty} \gamma(p,n) c_n^* \right) r^{2p}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* \left(\sum_{p=0}^{n} \gamma(p,n) r^{2p} \right)$$

Wegen (22), (24") und (29') ist

$$(n+1)(2n+1) = U_n(1) = \sum_{p=0}^{n} \gamma(p,n) V_p(1) = \sum_{p=0}^{n} \gamma(p,n),$$

also

(34) $$\sum_{p=0}^{n} \gamma(p,n) = (n+1)(2n+1) .$$

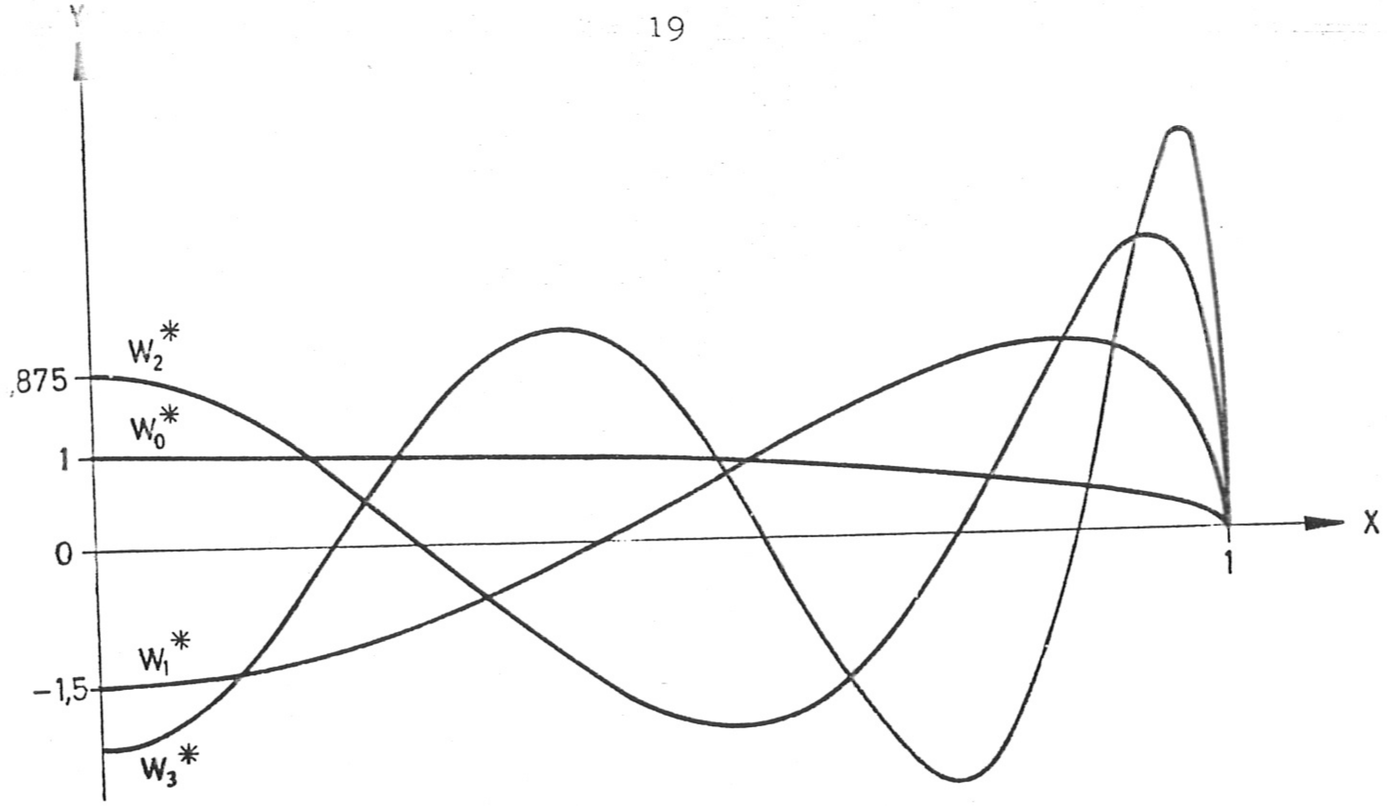


Abb. 4. Die Funktionen $y = W_n^*(x)$.

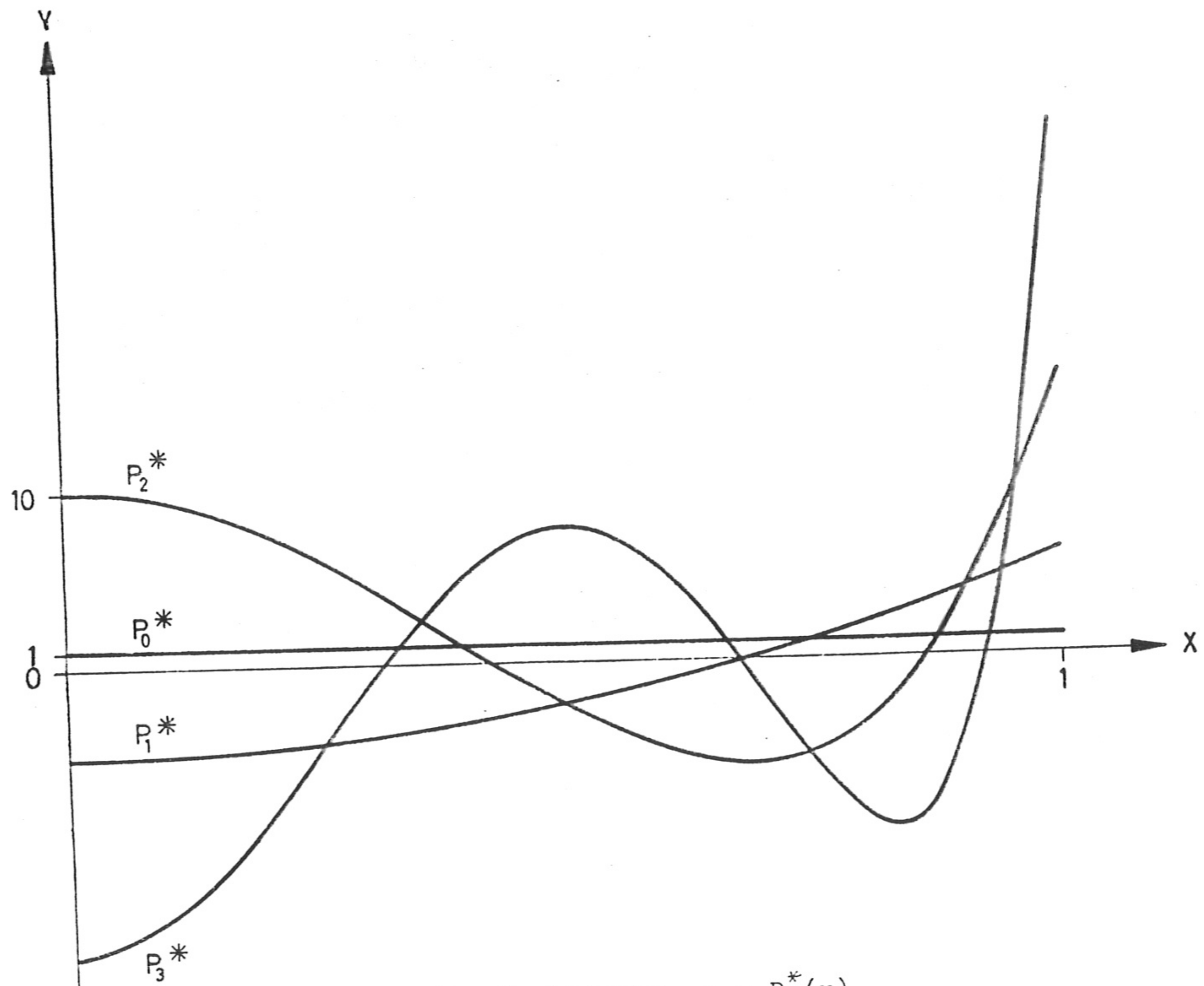


Abb. 5. Die Funktionen $y = P_n^*(r)$.

Die Funktionen W_n^* und P_n^* sind in Abb. 4 und 5 skizziert. $W_n^*(x)$ hat in $0 < x < 1$ genau n einfache Nullstellen, die Nullstellen von W_n^* trennen die von W_{n+1}^*. Mit wachsendem n werden die Oszillationen in der Nähe von $x = 1$ immer wilder.
Die Koeffizienten

$$b(p, n), \quad \beta(p, n), \quad \gamma(p, n), \quad 0 \leq n \leq 10,$$

sind in Tabelle 1 angegeben. Man beachte das starke Schwanken der Koeffizienten $\beta(p, n)$ und $\gamma(p, n)$ bei wachsendem n.

Aus den durchgeführten formalen Rechnungen gewinnt man auf folgende Weise ein numerisches Verfahren:

Man hat die $N+1$ Meßwerte $F(x_n)$ mit $x_n = n/N$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$, dabei sei N eine gerade Zahl. Dann wähle man eine natürliche Zahl k, die in einer sinnvollen Größenrelation sowohl zu N als auch zur Ungenauigkeit der Meßwerte liegt (bei einem Meßfehler von ungefähr 1% bis 5% des maximalen F-Wertes etwa $N \geq 20$, $5 \leq k \leq 10$). Wenn N sehr groß ist, sollte k klein gegen N sein. Man berechne für $0 \leq n \leq k$, $0 \leq p \leq n$, die Koeffizienten $b(p, n)$, $\beta(p, n)$ und aus diesen die $\gamma(p, n)$. Formel (28) liefert die c_n^*, die Integrale berechne man mit der SIMPSON-Regel, $0 \leq n \leq k$.

$$F_k(x) = \sum_{n=0}^{k} c_n^* W_n^*(x)$$

ist im Sinne der kleinsten Quadrate die bestmögliche Approximation von $F(x)$ durch eine Linearkombination der $W_0^*, W_1^*, \ldots, W_k^*$. Falls k nicht übermäßig groß ist, werden hochfrequente Schwankungen (hervorgerufen durch Meßungenauigkeiten) nicht berücksichtigt, $F(x)$ wird also geglättet.

Setzt man anstelle von (31)

(35) $$c_p(k) = \sum_{n=p}^{k} \gamma(p,n)\, c_n^*\,, \qquad 0 \le p \le k,$$

so ist

(36) $$f(r) \approx \sum_{n=0}^{k} c_p(k)\, r^{2p} \,.$$

Genauso gut kann man

(37) $$f(r) \approx \sum_{n=0}^{k} c_n^*\, P_n^*(r)$$

setzen; dabei ist es zweckmäßig, für einen Satz äquidistanter Werte $r = n/N$ die Werte $P_n^*(r)$ vorab gemäß (32) zu berechnen und zu speichern, falls man für mehrere Funktionen $F(x)$ die Integralgleichung lösen will.

Da die Koeffizienten $\beta(p,n)$ und $\gamma(p,n)$ schon für $k = 10$ über mehrere Zehnerpotenzen variieren (Tabelle 1), ist es erforderlich, bei Verwendung der IBM 7090 mit doppelter Genauigkeit zu rechnen.

4. Versuch einer statistischen Theorie der Empfindlichkeit der Lösung gegen Meß- und Rundungsfehler.

Es soll untersucht werden, wie sich Ungenauigkeiten der gemessenen Funktion $F(x)$ auf die zu berechnende Funktion $f(\tau)$ auswirken. Da $F(x) \equiv 0$ und $f(\tau) \equiv 0$ einander entsprechen, und da die Integraltransformationen (4) und (7) linear sind, genügt es zu untersuchen, in was für eine Funktion $f(\tau)$ eine zufällige Funktion $F(x)$ transformiert wird. Die zufällige Funktion $F(x)$ hat statistische Eigenschaften, die die Ungenauigkeit der Meßvorrichtung widerspiegeln.

Bei der Anwendung der numerischen Verfahren geht man von einem "Vektor" $\{F_n\}$ von Meßwerten aus und transformiert diesen in einen "Vektor" $\{f_n\}$. Auch die in den numerischen Verfahren durchgeführten Transformationen sind linear, sie sind Approximationen an die Transformation (7).

Wir gehen von folgender Modellvorstellung aus:

Der Fehler in den F_n setzt sich aus zwei Komponenten zusammen. Die erste Komponente besteht aus den diskreten Werten ε_n der ziemlich glatten Funktion $\varepsilon(x)$, die den Meßfehler des stetig arbeitenden Meßgeräts darstellt. Zwischen den Werten ε_n bestehen also starke Korrelationen. Die zweite Komponente η_n faßt Ablese- und Rundungsfehler (es werden ja nur endlich viele Dezimalen verwendet, ungefähr 3 signifikante Dezimalen bei Ablesung mit dem Auge oder auch etwa 9 signifikante Dualstellen bei automatischer Digitalisierung) zusammen. Wir nehmen an, daß die η_n unabhängig voneinander sind.

Da die glatte Störung $\varepsilon(x)$ ziemlich harmlos ist (ein systematischer Fehler in $F(x)$ bewirkt [5] einen systematischen

---

5) Beispielsweise entsprechen einander $F(x) = \varepsilon\sqrt{1-x^2}$ und $f(\tau) \equiv \varepsilon$ sowie $F(x) \equiv \varepsilon$ und $f(\tau) = \varepsilon/\sqrt{1-\tau^2}$.

Fehler in $f(r)$), befassen wir uns im folgenden mit der Störung $\{\eta_n\}$ und ignorieren die Komponente $\varepsilon(x)$.

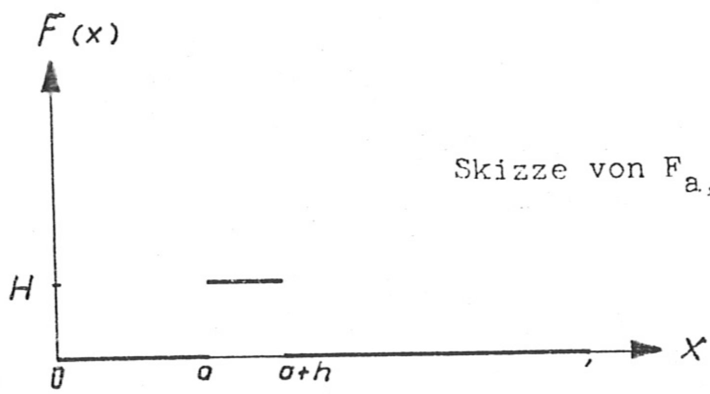
Man kann vermuten, daß die aufrauhende Wirkung der numerischen Methoden A, B, C von gleicher Größenordnung ist wie die aufrauhende Wirkung der Transformation (7'), wenn man diese auf eine Treppenfunktion

$$\text{(38)} \qquad \begin{cases} F(x) = H_j & \text{in} \quad x_{j-1} \le x < x_j, \quad j = 1, 2, \ldots, N \\ F(1) = 0 \end{cases}$$

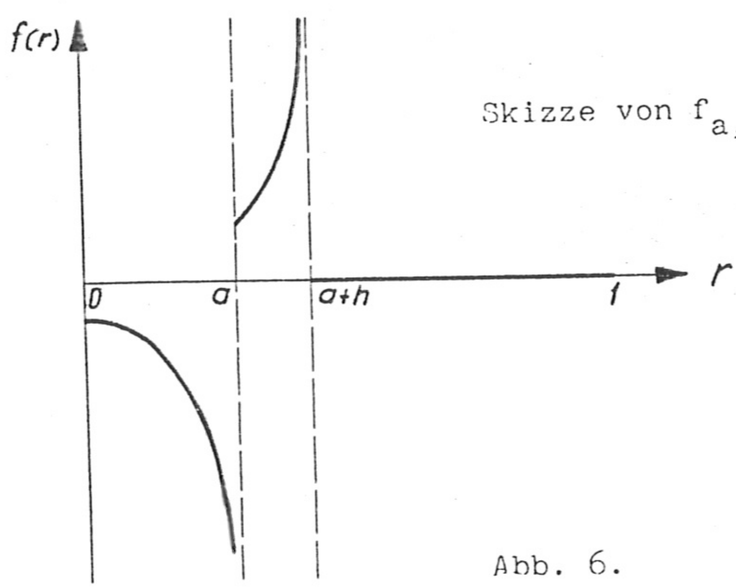
anwendet. Dabei ist wie bisher $x_j = j/N$. Die H_j seien unkorrelierte Zufallsgrößen, deren Erwartungen und Streuungen durch

$$\text{(38')} \qquad E(H_j) = 0, \qquad \sigma(H_j) = S_j,$$

gegeben seien.



Skizze von $F_{a,a+h}(x)$.



Skizze von $f_{a,a+h}(r)$.

Abb. 6.

Die Funktion (38) ist eine Überlagerung von Funktionen der Gestalt

$$(39) \qquad F_{a,\,a+h}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < a \\ H, & a \leq x < a+h \\ 0 & a+h \leq x \leq 1, \end{cases}$$

die wegen (7') zu

$$(39') \qquad \frac{\pi}{2} f_{a,\,a+h}(r) = \begin{cases} H\left(\dfrac{1}{\sqrt{(a+h)^2 - r^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}}\right), & 0 \leq r < a \\[2ex] \dfrac{H}{\sqrt{(a+h)^2 - r^2}}, & a < r < a+h \\[2ex] 0, & a+h < r \leq 1 \end{cases}$$

gehört. Dabei ist $0 \leq a < a+h \leq 1$ vorausgesetzt. Speziell ist

$$(39'') \qquad f_{a,\,a+h}(0) = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{H\,h}{a(a+h)} \, .$$

Man vergleiche Abbildung 6. Setzt man in (39") $a = jh = j/N$ ein, so hat man

$$(39''') \qquad f_{jh,\,(j+1)h}(0) = -\frac{2H}{\pi} \cdot \frac{N}{j(j+1)} \, .$$

Fehler von Meßwerten, die weit vom Punkt $x = 0$ entfernt liegen, wirken sich also nur noch schwach auf $f(0)$ aus; der Einfluß nimmt ungefähr quadratisch mit der Entfernung vom Nullpunkt ab.

Für $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ erhält man als zu (38) gehörende Lösung

$$(40) \qquad f(kh + 0) = \frac{2}{\pi} N \left\{ \frac{H_{k+1}}{\sqrt{(k+1)^2 - k^2}} + \sum_{j=k+2}^{N} H_j \, T_{k,j} \right\}$$

mit

$$(40') \qquad T_{k,j} = \frac{1}{\sqrt{j^2 - k^2}} - \frac{1}{\sqrt{(j-1)^2 - k^2}} \,,$$

also für Erwartung und Streuung [6])

$$(41) \qquad E\Big(f(kh+0)\Big) = 0 \,, \qquad \sigma\Big(f(kh+0)\Big) = \frac{2N}{\pi}\left\{\frac{S_{k+1}^2}{2k+1} + \sum_{j=k+2}^{N} S_j^2 T_{k,j}^2\right\}^{1/2} .$$

Falls alle $S_j = S$ sind, so ist

$$(42) \qquad \sigma\Big(f(kh+0)\Big) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2k+1} + \sum_{j=k+2}^{N} T_{k,j}^2\right)^{1/2} N S.$$

Da man in der Praxis oft sich weniger für die Nähe des Randes $r = 1$, sondern sich mehr für die Umgebung von $r = 0$ interessiert, soll der Fall $k = 0$ genauer betrachtet werden.

Aus (39''') oder auch aus (40) folgt

$$(43) \qquad f(0) = \frac{2}{\pi} N \left(H_1 - \sum_{j=2}^{N} \frac{H_j}{(j-1)\, j}\right),$$

also

$$(44) \qquad E\Big(f(0)\Big) = 0 \,, \qquad \sigma\Big(f(0)\Big) = \frac{2}{\pi} N \left(S_1^2 + \sum_{j=2}^{N} \frac{S_j^2}{(j-1)^2\, j^2}\right)^{1/2},$$

falls alle $S_j = S$ sind, also speziell

$$(45) \qquad \sigma\Big(f(0)\Big) = C_{N,0}\, N S \,, \qquad \frac{\pi}{2} C_{N,0} = \left(1 + \sum_{j=2}^{N} \frac{1}{(j-1)^2 j^2}\right)^{1/2} .$$

---

6) nach bekannten Sätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Man vgl. z.B. [9], Kapitel 5 (Seite 146 ff).

Um $C_{N,0}$ numerisch zu berechnen, beachten wir, daß

$$\left(\frac{\pi}{2} C_{N,0}\right)^2 = 1 + s_N \quad \text{mit} \quad s_N = \sum_{j=2}^{N} b_j \quad \text{ist,}$$

und daß

$$b_j = \frac{1}{(j-1)^2\, j^2} = \frac{1}{(j-1)^2} + \frac{1}{j^2} + 2\left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j-1}\right).$$

Es folgt

$$s_N = 2\sum_{\lambda=1}^{N} \frac{1}{\lambda^2} - 1 - \frac{1}{N^2} + 2\left(\frac{1}{N} - 1\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{3} - 3 + \frac{2}{N} - \frac{1}{N^2} - 2\sum_{\lambda=N+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2},$$

da bekanntlich $\sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^{-2} = \pi^2/6$ ist.

Wegen

$$\frac{1}{N+1} = \int_{N+1}^{\infty} x^{-2}\,dx < \sum_{\lambda=N+1}^{\infty} \lambda^{-2} < \int_{N}^{\infty} x^{-2}\,dx = \frac{1}{N}$$

und $-\frac{1}{N^2} + \frac{2}{N(N+1)} < N^{-2}$ gilt schließlich

$$\frac{\pi^2}{3} - 3 - \frac{1}{N^2} < s_N < \frac{\pi^2}{3} - 3 + \frac{1}{N^2},$$

also

(45') $$C_{N,0} \approx C = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\pi^2}{3} - 2} \approx 0{,}72,$$

allgemein also

(45") $\sigma(f(0)) \approx 0{,}72 \cdot N\, S,$ falls alle $S_j = S$ sind.

Allgemein gilt also bei $S_j = S$

$$\sigma(f(kh+0)) = C_{N,k} \cdot N S \approx C_k \cdot N S,$$

wobei $C_{N,k}$ nur schwach von N abhängt, falls $k << N$.

Vermutlich nimmt

$$C_k = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2k+1} + \sum_{j=k+2}^{\infty} T_{k,j}^{\,2}\right)^{1/2}$$

monoton ab bei wachsendem k.

Bemerkenswert ist, daß die Streuung der Werte $f(\tau)$ proportional der Anzahl N der Stützstellen ist. Daraus folgt, daß man im Falle großer Meßfehler die Anzahl der in der Rechnung zu verwendenden Meßwerte F_n nicht zu groß wählen darf, wenn man nicht vor Durchführung der diskreten Transformation oder durch die Art ihrer Durchführung eine Glättung vornimmt. Man vergleiche hierzu die bei den Methoden C und D angestellten Überlegungen. Bei Anwendung der Methode D braucht man beim Ansatz

$$F(x) \approx \sum_{n=0}^{k} c_n^* \, W_n^*(x) = F_k(x)$$

nicht so große Bedenken wegen der Ungenauigkeiten der F_n zu haben, falls $k \ll N$ ist. Dann kann nämlich $F_k(x)$ den Zitterbewegungen der F_n gar nicht folgen, und die in diesem Paragraphen gewonnene statistische Theorie ist deshalb unrealistisch, weil $F(x)$ durch den Ansatz stark geglättet wird. Numerische Monte-Carlo-Experimente bestätigten für die Methoden A und B die größenordnungsmäßige Richtigkeit der Gleichung (45). Man vergleiche hierzu den nächsten Paragraphen über numerische Erfahrungen.

5. Numerische Erfahrungen.

Um die Genauigkeit der verschiedenen Methoden testen zu können, wurde eine Tabelle von 10 Musterpaaren $\{F(x),\ f(r)\}$ aufgestellt, die sich durch explizite Formeln angeben lassen. 7) Diese Tabelle befindet sich auf Seite 29, jedes Paar ist numeriert. Elementare Rechnungen mit (4) oder (7) bestätigen die Richtigkeit dieser Transformationen; für das Paar 8 rechne man etwa nach (4): man nehme $f(r) = H$ in $a < r < b,\ 0 < a < b < 1,$ $f(r) = 0$ sonst. Man findet

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \geq b \\ H\sqrt{b^2 - x^2}, & a \leq x \leq b \\ H\left(\sqrt{b^2 - x^2} - \sqrt{a^2 - x^2}\right), & 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

Wegen $\sqrt{b^2 - x^2} - \sqrt{a^2 - x^2} = (b-a)(b+a)/\left(\sqrt{b^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - x^2}\right)$

liefert der Grenzübergang $b \to a + 0,\ H \to \infty,$ wobei $H \cdot (b - a) \equiv 1,$ daß

$$F(x) \to F^*(x) = \left\{ \begin{matrix} 0, & x > a \\ a/\sqrt{a^2 - x^2}, & 0 \leq x < a \end{matrix} \right\}$$ strebt.

---

7) Einige dieser Paare findet man auch in [5], Seite 203.

Nr.	$F(x)$	$f(r)$
1	$\sqrt{1-x^2}$	1
2	$\pi/2$ für $\lvert x\rvert<1$, $F(1)=0$	$(1-r^2)^{-1/2}$
3	$\frac{\pi}{4}(1-x^2)$	$\sqrt{1-r^2}$
4	$\frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2}$	$1-r^2$
5	$\frac{3\pi}{16}(1-x^2)^2$	$(1-r^2)^{3/2}$
6	$\sqrt{1-x^2}\,(-3{,}875 + 41{,}25\cdot x^2 - 39{,}375\cdot x^4)$	$-19{,}578125 + 91{,}40625\cdot r^2 - 73{,}828125\cdot r^4$
7	$\sqrt{0{,}25-x^2}$ für $\lvert x\rvert\le 1/2$ 0 für $\lvert x\rvert>1/2$	1 für $r<1/2$ 0 für $r>1/2$
8	$\frac{0{,}5}{\sqrt{0{,}25-x^2}}$ für $\lvert x\rvert<1/2$ 0 für $\lvert x\rvert>1/2$	$\delta(r-\frac{1}{2}) = \begin{cases} 0, & r\neq 1/2 \\ \infty, & r=1/2 \end{cases}$ mit $\int_0^1 \delta(r-\frac{1}{2})\,dr = 1$
9	$\frac{2}{3}\sqrt{1-x^2} + 2x^2 \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{8}{3}x^2\sqrt{1-x^2}$ (es ist $F(0)=2/3$, $F(1)=0$)	$4r(1-r)$
10	$\frac{8}{15}(1-x^2)^{3/2}(1+4x^2)$	$4r^2(1-r^2)$

Tabelle von 10 Funktionspaaren

Die Tabelle illustriert übrigens, daß F aus f durch eine halbe Integration hervorgeht: Aus

$$f(r) \sim (1-r)^{\alpha} \qquad \text{bei} \quad r \to 1-0$$

folgt

$$F(x) \sim c_{\alpha}\,(1-x)^{\alpha+\frac{1}{2}} \qquad \text{bei} \quad x \to 1-0$$

mit einer passenden Konstanten c_{α}.

Es wurden IBM-7090-FORTRAN-Programme für die Verfahren A, B, D hergestellt, für A und B mit einfacher, für D mit doppelter Genauigkeit. Tabelle 2 zeigt die Resultate der durchgeführten Beispielrechnungen mit $N=24$ für die 10 Funktionen. Für Methode D wurde dabei $k=4$ genommen. Auch mit größeren Werten von N und k wurden Testrechnungen durchgeführt.

Methode A erwies sich als die beste Methode, liefert allerdings bei Nr. 8 (δ-Funktion) kein befriedigendes Resultat. Methode D liefert bei den Funktionen 2, 7, 8 unbrauchbare Resultate; dies ist wegen der vorhandenen Unstetigkeiten nicht verwunderlich, da Methode D wegen des endlichen Wertes von k nur glatte Funktionen $f(r)$ liefern kann. B ist nicht ganz so gut wie A. Wie Tabelle 2 zeigt, sind A und B auch noch anwendbar im Falle einfacher Typen von Unstetigkeiten.
Bemerkenswert ist aber, daß Methode D mit mäßigem k auch dann manchmal gute Resultate liefert, wenn $F(x)$ sicher nicht in eine endliche Reihe nach den Funktionen $W_n^*(x)$ entwickelbar ist (Funktionen Nr. 3 und 5).

Im praktischen Routinebetrieb $(20 \leq N \leq 30)$ erwies sich ebenfalls Methode A als die geeignetste. Methode B hat einen stärker aufrauhenden Effekt (wegen der numerischen Differentiation), während Methode D mit $4 \leq k \leq 10$ zwar glattere Kurven $f(r)$ liefert (k darf natürlich nicht zu groß sein!) als A, aber für Funktionen $F(x)$, die bei

$x = 0$ ein relatives Minimum haben, oft Funktionen liefert, die streckenweise negativ sind (dies ist physikalisch sinnlos). Diese auftretende Negativität lag nicht an der Meßungenauigkeit, denn A lieferte für die gleichen Funktionen $F(x)$ Funktionen $f(r)$, die nirgends negativ waren. Erhöhung von k auf Werte > 10 ist bei so kleinen Werten N nicht sinnvoll. Da W_k^* mit wachsendem k immer stärker oszilliert, werden die numerischen Integrationen zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten immer ungenauer.

Es wurde deshalb beschlossen, Methode A zu verwenden. Da die Funktionen $f(r)$ aber einen manchmal noch sichtbar rauhen Verlauf haben, ist man noch nicht ganz zufrieden. Versuchsweise Glättungen der Werte F_n durch gleitende Mittelbildungen

$$F_i^* = \sum_{\lambda=-\mu}^{+\mu} p_\lambda F_{i+\lambda} , \qquad \sum_{\lambda=-\mu}^{+\mu} p_\lambda = 1 ,$$

erwiesen sich als nicht befriedigend, da sie $F(x)$ zu sehr abflachen und dadurch auch $f(r)$ zu stark verändern. Es ist geplant, Methode C noch zu programmieren. Die zu erwartenden Vorteile sind auf Seite 9f besprochen.

Mit dem Blick auf geplante automatische Digitalisierung gemessener Kurven wurden umfangreiche Testrechnungen durchgeführt mit $N = 312$, wobei $k = 10$ für Methode D genommen wurde. Da Methoden A und B von außen nach innen rechnen, ist die größte Ungenauigkeit in der Umgebung von $r = 0$ zu erwarten. Als Maß für die Ungenauigkeit diene die Größe

$$d(r) = f_{genau}(r) - f_{errechnet}(r) .$$

In Tabelle 3 ist $d(0)$ für die 10 Testfunktionen tabelliert.

Um den Einfluß der Ablese- und Rundungsfehler auf die zu berechnende Funktion $f(r)$ zu untersuchen, wurde die in 4. dargestellte heuristische Theorie entwickelt. Dann wurden die programmierten Methoden A, B, D auf die zufälligen "Vektoren" $\{F_n\}$ angewandt, die dadurch entstehen, daß man für jedes n den Wert F_n mittels eines Pseudo-Zufalls-Generators "würfelt". Die F_n sind normalverteilt mit dem Mittelwert 0 und der Varianz $\sigma^2 = 1$, die Komponenten des Vektors $\{F_n\}$ sind unabhängig voneinander. Tabelle 4 zeigt das Resultat der Rechnungen für $N = 24$, wobei $k = 4$ für Methode D genommen wurde.

Nach (44) ist $E(f(0)) \approx 0$, nach (45") ist $\sigma(f(0)) \approx 0{,}72 \cdot 24 \cdot 1 \approx 17{,}3$. Dem entsprechen in der Größenordnung die Resultate (in Tabelle 4) der Methoden A und B; wie zu erwarten ist, liefert die Methode D natürlich einen doch recht glatten Verlauf der Funktion $f(r)$, die Werte $f(0)$ liegen wesentlich näher bei 0 als bei den Methoden A und B.

Die Rechenzeiten lagen pro Kurve stets weit unterhalb einer Minute.

Methode D hat, wie vorhin erwähnt, den Nachteil, daß $f(r)$ streckenweise negativ werden kann, andererseits den großen Vorteil, glättend zu wirken. Es ist geplant, den Nachteil in folgender Weise zu vermeiden: Man suche einen Vektor $c = (c_0, c_1, \ldots, c_k)$ derart, daß

$$D(c) = \sum_{j=0}^{N} \left(F_j - \sum_{n=0}^{k} c_n W_n^*(x_j) \right)^2$$

minimal wird unter der Nebenbedingung

$$f_j = \sum_{n=0}^{k} c_n P_n^*(r_j) \geq 0.$$

Dies ist ein Quadratic-Programming-Problem, das mit in [10] dargestellten Methoden behandelt werden kann.

Für zahlreiche nützliche Diskussionen danke ich den Herren Prof. A. Schlüter, Dr. K. Hain, C. Mahn und Dr. H. Ringler. Frau U. Berkl danke ich für Durchführung der umfangreichen Rechnungen auf der Garchinger IBM 7090 und Aufstellung der zugehörigen Programme.

6. Literaturverzeichnis.

[1] W.L. BARR, Method for Computing the Radial Distribution of Emitters in a Cylindrical Source. Journal of the Optical Society of America 52 (1962), Seite 885-888.

[2] L. BECKER und H.W. DRAWIN, Un calculateur analogique simple pour résoudre l'équation intégrale d'Abel. Report EUR-CEA-FC-246, Fontenay-aux-Roses (France), Fevrier 1964.

[3] L. BERG, Einführung in die Operatorenrechnung, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1962.

[4] G. BOLDT, Ein Gerät zur Lösung der Abelschen Integralgleichung. Interner Bericht, Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, 1.11.1961.

[5] R.N. BRACEWELL, Strip Integration in Radio Astronomy. Australian J. Phys. 9 (1956), Seite 198-217.

[6] M. CAPET, Localisation de l'émission d'une source cylindrique par observation latérale. Report EUR-CEA-FC-231, Fontenay aux Roses (France), Septembre 1963.

[7] G. DOETSCH, Einführung in Theorie und Anwendungen der Laplace-Transformation. Birkhäuser-Verlag Basel und Stuttgart 1958.

[8] H.W. DRAWIN, L'effet de "raie oblique" dans une décharge gazeuse axiale en présence de champs magnétiques axiaux. Report EUR-CEA-FC-195, Fontenay-aux-Roses (France), Janvier 1963.

[9] B.W. GNEDENKO, Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Übersetzung aus dem Russischen), Akademie-Verlag Berlin 1957.

[10] H.P. KÜNZI und W. KRELLE, Nichtlineare Programmierung. Springer-Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg 1962.

[11] W. SCHMEIDLER, Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.G. Leipzig 1950.

[12] F.G. TRICOMI, Vorlesungen über Orthogonalreihen. Springer-Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg 1955.

Tabelle 1

Die zu Methode D gehörenden Größen
$b(p,n)$, $\beta(p,n)$, $\gamma(p,n)$.
Man vgl. Seite 12-21.
Hier und in den folgenden Tabellen steht E für "mal 10 hoch".

TABELLE DER B(P,N), BETA(P,N), GAMMA(P,N)

P	N	B(P,N)	BETA(P,N)	GAMMA(P,N)
0	0	1.000000E 00	1.000000E 00	1.000000E 00
0	1	3.333333E-01	-1.500000E 00	-5.250000E 00
1	1	6.666667E-01	7.500000E 00	1.125000E 01
0	2	2.000000E-01	1.875000E 00	1.007812E 01
1	2	2.666667E-01	-2.625000E 01	-6.890625E 01
2	2	5.333333E-01	3.937500E 01	7.362812E 01
0	3	1.428571E-01	-2.187500E 00	-1.637891E 01
1	3	1.714286E-01	5.906250E 01	2.158242E 02
2	3	2.285714E-01	-2.165625E 02	-5.820117E 02
3	3	4.571429E-01	1.876875E 02	4.105664E 02
0	4	1.111111E-01	2.460937E 00	2.321685E 01
1	4	1.269841E-01	-1.082812E 02	-5.064807E 02
2	4	1.523810E-01	7.038281E 02	2.439047E 03
3	4	2.031746E-01	-1.407656E 03	-4.014020E 03
4	4	4.063492E-01	8.546484E 02	2.103236E 03
0	5	9.090909E-02	-2.707031E 00	-3.109707E 01
1	5	1.010101E-01	1.759570E 02	1.001050E 03
2	5	1.154401E-01	-1.759570E 03	-7.448912E 03
3	5	1.385282E-01	5.982539E 03	2.093110E 04
4	5	1.847042E-01	-8.119160E 03	-2.464292E 04
5	5	3.694084E-01	3.788941E 03	1.025678E 04
0	6	7.692308E-02	2.932617E 00	3.946236E 01
1	6	8.391609E-02	-2.639355E 02	-1.768095E 03
2	6	9.324008E-02	3.739087E 03	1.867841E 04
3	6	1.065601E-01	-1.894471E 04	-7.840535E 04
4	6	1.278722E-01	4.262559E 04	1.534367E 05
5	6	1.704961E-01	-4.357283E 04	-1.402926E 05
6	6	3.409924E-01	1.650486E 04	4.840243E 04

0	7	6.666667E-02	-3.142090E 00	-4.866810E 01
1	7	7.179487E-02	3.739087E 02	2.881062E 03
2	7	7.832171E-02	-7.104265E 03	-4.088049E 04
3	7	8.702401E-02	4.972986E 04	2.374309E 05
4	7	9.945617E-02	-1.633981E 05	-6.795857E 05
5	7	1.193473E-01	2.723302E 05	1.014763E 06
6	7	1.591297E-01	-2.228156E 05	-7.575512E 05
7	7	3.182595E-01	7.100716E 04	2.231109E 05
0	8	5.882353E-02	3.338470E 00	5.832972E 01
1	8	6.274510E-02	-5.074475E 02	-4.420326E 03
2	8	6.757163E-02	1.243246E 04	8.094979E 04
3	8	7.371463E-02	-1.143787E 05	-6.185148E 05
4	8	8.190473E-02	5.106191E 05	2.407783E 06
5	8	9.360609E-02	-1.225486E 06	-5.182699E 06
6	8	1.123267E-01	1.615413E 06	6.240272E 06
7	8	1.497692E-01	-1.100611E 06	-3.933724E 06
8	8	2.995384E-01	3.026680E 05	1.010448E 06
0	9	5.263158E-02	-3.523941E 00	-6.878178E 01
1	9	5.572755E-02	6.660248E 02	6.471340E 03
2	9	5.944273E-02	-2.042476E 04	-1.484224E 05
3	9	6.401518E-02	2.382889E 05	1.439051E 06
4	9	6.983516E-02	-1.378671E 06	-7.265214E 06
5	9	7.759336E-02	4.442386E 06	2.101076E 07
6	9	8.868023E-02	-8.346300E 06	-3.608380E 07
7	9	1.064143E-01	9.080041E 06	3.634856E 07
8	9	1.418868E-01	-5.296691E 06	-1.982097E 07
9	9	2.837732E-01	1.280899E 06	4.513813E 06
0	10	4.761905E-02	3.700138E 00	8.000735E 01
1	10	5.012531E-02	-8.510317E 02	-9.129446E 03
2	10	5.307385E-02	3.191369E 04	2.560255E 05
3	10	5.661216E-02	-4.595571E 05	-3.065078E 06
4	10	6.096667E-02	3.331789E 06	1.939990E 07
5	10	6.651032E-02	-1.377140E 07	-7.200395E 07
6	10	7.389700E-02	3.442849E 07	1.646325E 08
7	10	8.445919E-02	-5.296691E 07	-2.346479E 08
8	10	1.013456E-01	4.899439E 07	2.030106E 08
9	10	1.351307E-01	-2.497753E 07	-9.751622E 07
10	10	2.702601E-01	5.389888E 06	1.994334E 07

FUNKTION 1

Tabelle 2 Die 10 Musterpaare von Seite 29, Resultate der Methoden A, B, D.

24*R	FGROSS	FKLEIN	FKLEIN A	FKLEIN B	FKLEIN D
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0101	0.9942
1	0.9991	1.0000	1.0000	1.0094	0.9945
2	0.9965	1.0000	1.0000	1.0072	0.9952
3	0.9922	1.0000	1.0000	1.0063	0.9962
4	0.9860	1.0000	1.0000	1.0057	0.9975
5	0.9781	1.0000	1.0000	1.0055	0.9989
6	0.9682	1.0000	1.0000	1.0053	1.0003
7	0.9565	1.0000	1.0000	1.0052	1.0015
8	0.9428	1.0000	1.0000	1.0052	1.0023
9	0.9270	1.0000	1.0000	1.0053	1.0027
10	0.9091	1.0000	1.0000	1.0055	1.0026
11	0.8888	1.0000	1.0000	1.0057	1.0020
12	0.8660	1.0000	1.0000	1.0060	1.0010
13	0.8406	1.0000	1.0000	1.0064	0.9998
14	0.8122	1.0000	1.0000	1.0070	0.9985
15	0.7806	1.0000	1.0000	1.0077	0.9975
16	0.7454	1.0000	1.0000	1.0087	0.9971
17	0.7059	1.0000	1.0000	1.0102	0.9975
18	0.6614	1.0000	1.0000	1.0122	0.9988
19	0.6110	1.0000	1.0000	1.0155	1.0008
20	0.5528	1.0000	1.0000	1.0209	1.0032
21	0.4341	1.0000	1.0000	1.0316	1.0049
22	0.3997	1.0000	1.0000	1.0594	1.0042
23	0.2857	1.0000	1.0000	1.2824	0.9983
24	0.	1.0000	0.	0.	0.9833

FUNKTION 2

24*R	FGROSS	FKLEIN	FKLEIN A	FKLEIN B	FKLEIN D
0	1.5708	1.0000	1.0229	1.0214	1.1273
1	1.5708	1.0009	1.0229	1.0224	1.1220
2	1.5708	1.0035	1.0264	1.0252	1.1070
3	1.5708	1.0079	1.0309	1.0299	1.0848
4	1.5708	1.0142	1.0374	1.0366	1.0591
5	1.5708	1.0224	1.0461	1.0454	1.0346
6	1.5708	1.0328	1.0571	1.0565	1.0163
7	1.5708	1.0455	1.0706	1.0700	1.0090
8	1.5708	1.0607	1.0869	1.0864	1.0161
9	1.5708	1.0787	1.1062	1.1058	1.0397
10	1.5708	1.1000	1.1292	1.1288	1.0795
11	1.5708	1.1251	1.1563	1.1560	1.1329
12	1.5708	1.1547	1.1884	1.1882	1.1948
13	1.5708	1.1896	1.2265	1.2264	1.2586
14	1.5708	1.2312	1.2721	1.2721	1.3167
15	1.5708	1.2810	1.3272	1.3274	1.3631
16	1.5708	1.3416	1.3949	1.3953	1.3960
17	1.5708	1.4167	1.4797	1.4804	1.4217
18	1.5708	1.5119	1.5890	1.5904	1.4602
19	1.5708	1.6368	1.7356	1.7384	1.5516
20	1.5708	1.8091	1.9441	1.9504	1.7651
21	1.5708	2.0656	2.2690	2.2875	2.2094
22	1.5708	2.5022	2.8632	2.9485	3.0453
23	1.5708	3.5008	4.3776	7.0518	4.5009
24	0.	-0.	0.	0.	6.8899

FUNKTION 3

24*R	FGROSS	FKLEIN	FKLEIN A	FKLEIN B	FKLEIN D
0	0.7854	1.0000	0.9963	1.0131	0.9972
1	0.7840	0.9991	0.9963	1.0111	0.9965
2	0.7799	0.9965	0.9931	1.0050	0.9943
3	0.7731	0.9922	0.9890	0.9991	0.9905
4	0.7636	0.9860	0.9830	0.9920	0.9851
5	0.7513	0.9781	0.9751	0.9834	0.9779
6	0.7363	0.9682	0.9654	0.9731	0.9687
7	0.7186	0.9565	0.9538	0.9610	0.9575
8	0.6981	0.9428	0.9402	0.9470	0.9440
9	0.6750	0.9270	0.9245	0.9309	0.9281
10	0.6490	0.9091	0.9066	0.9128	0.9097
11	0.6204	0.8888	0.8864	0.8923	0.8889
12	0.5890	0.8660	0.8637	0.8694	0.8655
13	0.5550	0.8406	0.8383	0.8438	0.8394
14	0.5181	0.8122	0.8100	0.8153	0.8108
15	0.4786	0.7806	0.7784	0.7836	0.7793
16	0.4363	0.7454	0.7432	0.7482	0.7446
17	0.3913	0.7059	0.7038	0.7086	0.7061
18	0.3436	0.6614	0.6594	0.6641	0.6628
19	0.2932	0.6110	0.6090	0.6135	0.6129
20	0.2430	0.5528	0.5510	0.5552	0.5538
21	0.1841	0.4841	0.4826	0.4865	0.4819
22	0.1254	0.3997	0.3989	0.4019	0.3920
23	0.0641	0.2857	0.2884	0.2877	0.2771
24	0.	0.	0.	0.	0.1276

FUNKTION 4

24*R	FGROSS	FKLEIN	FKLEIN A	FKLEIN B	FKLEIN D
0	0.6667	1.0000	0.9944	1.0163	1.0008
1	0.6649	0.9983	0.9944	1.0131	0.9991
2	0.6597	0.9931	0.9880	1.0033	0.9938
3	0.6511	0.9844	0.9798	0.9925	0.9849
4	0.6391	0.9722	0.9680	0.9791	0.9726
5	0.6237	0.9566	0.9527	0.9625	0.9567
6	0.6052	0.9375	0.9339	0.9426	0.9374
7	0.5834	0.9149	0.9117	0.9194	0.9147
8	0.5587	0.8889	0.8859	0.8928	0.8885
9	0.5311	0.8594	0.8567	0.8626	0.8590
10	0.5008	0.8264	0.8241	0.8293	0.8260
11	0.4680	0.7899	0.7880	0.7924	0.7897
12	0.4330	0.7500	0.7484	0.7520	0.7499
13	0.3960	0.7066	0.7053	0.7081	0.7067
14	0.3572	0.6597	0.6589	0.6607	0.6600
15	0.3171	0.6094	0.6039	0.6099	0.6098
16	0.2761	0.5556	0.5556	0.5555	0.5560
17	0.2345	0.4983	0.4988	0.4976	0.4986
18	0.1929	0.4375	0.4387	0.4362	0.4376
19	0.1520	0.3733	0.3752	0.3711	0.3730
20	0.1126	0.3056	0.3084	0.3024	0.3049
21	0.0756	0.2344	0.2385	0.2299	0.2335
22	0.0426	0.1597	0.1658	0.1532	0.1590
23	0.0155	0.0816	0.0916	0.0698	0.0821
24	-0.	0.	0.	0.	0.0033

FUNKTION 5

24*R	FGROSS	FKLEIN	FKLEIN A	FKLEIN B	FKLEIN D
0	0.5890	1.0000	0.9928	1.0190	1.0008
1	0.5870	0.9974	0.9926	1.0146	0.9981
2	0.5809	0.9896	0.9833	1.0014	0.9902
3	0.5718	0.9767	0.9711	0.9858	0.9771
4	0.5568	0.9586	0.9537	0.9661	0.9589
5	0.5390	0.9356	0.9312	0.9419	0.9357
6	0.5177	0.9077	0.9039	0.9129	0.9076
7	0.4931	0.8751	0.8719	0.8795	0.8749
8	0.4654	0.8381	0.8354	0.8415	0.8377
9	0.4350	0.7967	0.7945	0.7994	0.7963
10	0.4023	0.7512	0.7497	0.7532	0.7510
11	0.3676	0.7021	0.7011	0.7034	0.7019
12	0.3313	0.6495	0.6492	0.6501	0.6496
13	0.2941	0.5940	0.5942	0.5939	0.5942
14	0.2564	0.5358	0.5367	0.5351	0.5362
15	0.2137	0.4757	0.4772	0.4743	0.4760
16	0.1818	0.4141	0.4163	0.4121	0.4144
17	0.1462	0.3517	0.3546	0.3491	0.3518
18	0.1127	0.2894	0.2930	0.2861	0.2892
19	0.0821	0.2280	0.2323	0.2241	0.2277
20	0.0550	0.1689	0.1740	0.1644	0.1685
21	0.0324	0.1135	0.1193	0.1084	0.1134
22	0.0150	0.0638	0.0705	0.0583	0.0643
23	0.0039	0.0233	0.0308	0.0176	0.0241
24	-0.	0.	0.	0.	-0.0041

FUNKTION 6

24*R	FGROSS	FKLEIN	FKLEIN A	FKLEIN B	FKLEIN D
0	-3.8750	-19.5781	-19.2589	-20.2503	-19.5187
1	-3.8002	-19.4197	-19.2587	-20.0228	-19.3627
2	-3.5780	-18.9469	-18.6870	-19.3424	-18.8973
3	-3.2147	-18.1679	-17.9551	-18.4536	-18.1296
4	-2.7210	-17.0960	-16.9275	-17.3056	-17.0717
5	-2.1114	-15.7499	-15.6249	-15.8974	-15.7407
6	-1.4046	-14.1536	-14.0719	-14.2468	-14.1589
7	-0.6225	-12.3365	-12.2980	-12.3804	-12.3540
8	0.2095	-10.3333	-10.3378	-10.3316	-10.3591
9	1.0634	-8.1841	-8.2310	-8.1400	-8.2131
10	1.9087	-5.9342	-6.0227	-5.8510	-5.9611
11	2.7132	-3.6344	-3.7628	-3.5155	-3.6539
12	3.4438	-1.3408	-1.5070	-1.1903	-1.3487
13	4.0670	0.8852	0.6842	1.0625	0.8909
14	4.5513	2.9769	2.7450	3.1753	2.9957
15	4.8634	4.8622	4.6045	5.0747	4.8903
16	4.9794	6.4635	6.1869	6.6815	6.4942
17	4.8772	7.6983	7.4113	7.9107	7.7220
18	4.5438	8.4782	8.1924	8.6709	8.4849
19	3.9782	8.7099	8.4409	8.8636	8.6911
20	3.1962	8.2946	8.0646	8.3810	8.2483
21	2.2396	7.1281	6.9716	7.1003	7.0652
22	1.1930	5.1009	5.0799	4.8571	5.0537
23	0.2279	2.0983	2.3615	1.0230	2.1327
24	-0.	-2.0000	0.	0.	-1.7695

24*R	FGROSS	FKLEIN	FKLEIN A	FKLEIN B	FKLEIN D
0	0.5000	1.0000	1.0000	1.0216	1.0382
1	0.4983	1.0000	1.0000	1.0203	1.0413
2	0.4930	1.0000	1.0000	1.0163	1.0499
3	0.4841	1.0000	1.0000	1.0151	1.0612
4	0.4714	1.0000	1.0000	1.0149	1.0709
5	0.4543	1.0000	1.0000	1.0156	1.0738
6	0.4330	1.0000	1.0000	1.0172	1.0640
7	0.4061	1.0000	1.0000	1.0201	1.0358
8	0.3727	1.0000	1.0000	1.0255	0.9845
9	0.3307	1.0000	1.0000	1.0363	0.9069
10	0.2764	1.0000	1.0000	1.0647	0.8022
11	0.1978	1.0000	1.0000	1.2922	0.6726
12	0.	1.0000	0.5000	-0.	0.5235
13	0.	0.	-0.	-0.	0.3639
14	0.	0.	-0.	-0.	0.2055
15	0.	0.	-0.	-0.	0.0628
16	0.	0.	-0.	-0.	-0.0493
17	0.	0.	-0.	-0.	-0.1168
18	0.	0.	-0.	-0.	-0.1301
19	0.	0.	-0.	-0.	-0.0882
20	0.	0.	-0.	-0.	-0.0034
21	0.	0.	-0.	-0.	0.0916
22	0.	0.	-0.	-0.	0.1360
23	0.	0.	-0.	-0.	0.0306
24	0.	0.	0.	0.	-0.3734

FUNKTION 8

24*R	FGROSS	FKLEIN	FKLEIN A	FKLEIN B	FKLEIN D
0	1.0000	0.	0.4078	0.3566	-2.1684
1	1.0035	0.	0.4078	0.3632	-2.0390
2	1.0142	0.	0.4256	0.3833	-1.6620
3	1.0328	0.	0.4505	0.4080	-1.0700
4	1.0607	0.	0.4906	0.4432	-0.3148
5	1.1000	0.	0.5519	0.4946	0.5369
6	1.1547	0.	0.6466	0.5712	1.4082
7	1.2312	0.	0.7986	0.6901	2.2187
8	1.3416	0.	1.0636	0.8881	2.8913
9	1.5119	0.	1.5398	1.2604	3.3596
10	1.8091	0.	2.9085	2.1380	3.5747
11	2.5022	0.	8.1964	16.1805	3.5120
12	0.	0.	6.2609	-0.	3.1759
13	0.	0.	-0.	-0.	2.6026
14	0.	0.	-0.	-0.	1.8607
15	0.	0.	-0.	-0.	1.0471
16	0.	0.	-0.	-0.	0.2787
17	0.	0.	-0.	-0.	-0.3213
18	0.	0.	-0.	-0.	-0.6441
19	0.	0.	-0.	-0.	-0.6239
20	0.	0.	-0.	-0.	-0.2756
21	0.	0.	-0.	-0.	0.2573
22	0.	0.	-0.	-0.	0.6431
23	0.	0.	-0.	-0.	0.2882
24	0.	0.	0.	0.	-1.7497

FUNKTION 9

24*R	FGROSS	FKLEIN	FKLEIN A	FKLEIN B	FKLEIN D
0	0.6667	-0.	0.0985	0.0936	0.3913
1	0.6749	0.1597	0.0986	0.1469	0.4016
2	0.6900	0.3056	0.3029	0.3070	0.4320
3	0.7066	0.4375	0.4304	0.4439	0.4804
4	0.7220	0.5556	0.5465	0.5641	0.5438
5	0.7342	0.6597	0.6496	0.6693	0.6181
6	0.7421	0.7500	0.7395	0.7601	0.6984
7	0.7445	0.8264	0.8157	0.8365	0.7796
8	0.7409	0.8889	0.8784	0.8988	0.8561
9	0.7307	0.9375	0.9272	0.9471	0.9229
10	0.7137	0.9722	0.9624	0.9813	0.9755
11	0.6896	0.9931	0.9837	1.0015	1.0103
12	0.6585	1.0000	0.9913	1.0078	1.0248
13	0.6205	0.9931	0.9851	1.0000	1.0182
14	0.5759	0.9722	0.9651	0.9782	0.9910
15	0.5252	0.9375	0.9314	0.9424	0.9451
16	0.4690	0.8889	0.8838	0.8926	0.8837
17	0.4081	0.8264	0.8226	0.8288	0.8106
18	0.3436	0.7500	0.7477	0.7508	0.7297
19	0.2767	0.6597	0.6592	0.6586	0.6437
20	0.2093	0.5556	0.5573	0.5521	0.5526
21	0.1434	0.4375	0.4422	0.4310	0.4521
22	0.0822	0.3056	0.3148	0.2943	0.3398
23	0.0306	0.1597	0.1775	0.1372	0.1679
24	0.	0.	0.	0.	-0.0711

FUNKTION 10

24*R	FGROSS	FKLEIN	FKLEIN A	FKLEIN B	FKLEIN D
0	0.5333	0.	0.0120	-0.0198	0.0034
1	0.5356	0.0069	0.0120	-0.0106	0.0102
2	0.5424	0.0276	0.0369	0.0168	0.0304
3	0.5534	0.0615	0.0687	0.0545	0.0637
4	0.5681	0.1080	0.1131	0.1038	0.1094
5	0.5856	0.1661	0.1691	0.1643	0.1666
6	0.6052	0.2344	0.2354	0.2348	0.2340
7	0.6256	0.3113	0.3103	0.3138	0.3103
8	0.6456	0.3951	0.3920	0.3995	0.3936
9	0.6639	0.4834	0.4784	0.4896	0.4817
10	0.6789	0.5739	0.5669	0.5818	0.5723
11	0.6891	0.6638	0.6549	0.6732	0.6627
12	0.6928	0.7500	0.7394	0.7607	0.7496
13	0.6886	0.8293	0.8172	0.8410	0.8296
14	0.6748	0.8980	0.8846	0.9104	0.8991
15	0.6501	0.9521	0.9378	0.9650	0.9538
16	0.6135	0.9877	0.9727	1.0004	0.9894
17	0.5640	1.0000	0.9850	1.0120	1.0013
18	0.5016	0.9844	0.9700	0.9949	0.9847
19	0.4265	0.9358	0.9230	0.9437	0.9346
20	0.3403	0.8488	0.8390	0.8527	0.8460
21	0.2458	0.7178	0.7132	0.7154	0.7145
22	0.1485	0.5368	0.5415	0.5238	0.5341
23	0.0581	0.2998	0.3236	0.2608	0.3019
24	0.	0.	0.	0.	0.0138

Tabelle 3

Nr. der Funktion	Methode A	Methode B	Methode D
1	$0,6 \cdot 10^{-4}$	$-0,7 \cdot 10^{-3}$	$3,5 \cdot 10^{-5}$
2	$-0,16 \cdot 10^{-2}$	$-0,16 \cdot 10^{-2}$	$-0,23$
3	$0,11 \cdot 10^{-3}$	-10^{-3}	$0,77 \cdot 10^{-3}$
4	$0,13 \cdot 10^{-3}$	$-0,13 \cdot 10^{-2}$	$-0,11 \cdot 10^{-5}$
5	$0,18 \cdot 10^{-3}$	$-0,15 \cdot 10^{-2}$	$-0,18 \cdot 10^{-4}$
6	$-0,8 \cdot 10^{-2}$	$0,56 \cdot 10^{-1}$	$-0,13 \cdot 10^{-3}$
7	$0,15 \cdot 10^{-4}$	$-0,14 \cdot 10^{-2}$	$-0,02$
8	$0,18$	$-0,18$	$3,6$
9	-10^{-2}	$-0,7 \cdot 10^{-3}$	$-0,18$ *)
10	$-0,3 \cdot 10^{-3}$	$0,17 \cdot 10^{-2}$	$-0,45 \cdot 10^{-5}$

Tabelle der Ungenauigkeiten $d(0)$ für $N = 312$, $k = 10$.
Man vgl. Seite 31.

*) Methode D liefert hier bei $r = 0$ ziemlich ungenaues Resultat, da hier $f'(0) \neq 0$ ist, in Methode D aber $f(r)$ als Polynom in r^2 angesetzt wird.

Tabelle 4 — Anwendung der Methoden A, B, D auf zufällige Funktionen F.
Erläuterung Seite 32.

LAUF 1

24*R	FGROSS	FKLEIN A	FKLEIN B	FKLEIN D
0	0.2046	12.2167	-35.9229	-1.5652
1	-0.4227	12.2002	-19.4938	-1.5254
2	1.1425	5.6791	29.7936	-1.4105
3	-1.1431	7.9674	-3.7710	-1.2337
4	-1.2872	-6.9354	-11.7734	-1.0153
5	-0.2747	-5.5674	-1.8646	-0.7808
6	-0.2129	-2.7715	-7.2166	-0.5579
7	1.2518	3.7089	16.1026	-0.3735
8	-1.2288	1.6797	-11.4231	-0.2499
9	0.6914	-0.5628	9.3902	-0.2014
10	-0.9201	1.7010	-3.2860	-0.2311
11	-0.7342	-3.5180	-5.4461	-0.3289
12	0.2698	-0.6610	3.8434	-0.4698
13	-0.5799	0.1934	-1.6307	-0.6150
14	-0.7261	-3.8290	-8.0499	-0.7147
15	1.0753	-0.8111	4.6368	-0.7134
16	0.4071	2.7809	1.9683	-0.5600
17	0.1132	1.3258	1.9686	-0.2207
18	-0.5635	-1.3329	-5.8607	0.3024
19	1.1285	0.9282	7.8825	0.9466
20	-0.8481	0.7157	-6.3856	1.5578
21	1.0207	0.7497	7.9240	1.8518
22	-1.0639	1.1731	-3.8543	1.3670
23	-0.3792	-2.2816	-1.7023	-0.5924
24	0.	0.	0.	-5.0239

LAUF 2

24*R	FGROSS	FKLEIN A	FKLEIN B	FKLEIN D
0	1.0757	20.3482	22.3913	2.2165
1	0.5716	20.3405	16.1290	2.1464
2	-0.3371	3.8189	-2.6581	1.9416
3	-0.3161	-3.2518	-4.3583	1.6183
4	-0.0825	-3.6944	-6.7316	1.2024
5	0.9665	2.6382	13.5142	0.7276
6	-0.8957	0.5154	-10.2441	0.2328
7	0.2872	-4.4657	-3.3500	-0.2404
8	1.2515	3.7956	11.6381	-0.6514
9	-0.4304	3.6229	-2.0307	-0.9636
10	-0.1196	0.2848	4.4655	-1.1483
11	-1.4446	-2.8652	-8.9170	-1.1876
12	-0.4317	-6.2453	-6.3179	-1.0772
13	0.6804	-1.9667	1.9221	-0.8281
14	0.0833	-2.0213	-8.0139	-0.4673
15	2.2283	0.9835	7.2590	-0.0373
16	1.5796	7.0092	9.6828	0.4071
17	-0.4258	2.6372	-2.2833	0.8035
18	-0.0520	-1.1281	0.4613	1.0897
19	-0.5360	-2.5186	-6.6615	1.2151
20	1.1609	-1.3201	0.8306	1.1553
21	1.8534	5.2503	11.7208	0.9315
22	-1.0827	2.3100	-4.9131	0.6344
23	-0.0206	-1.9572	-0.0923	0.4542
24	0.	0.	0.	0.7161

LAUF 3

24*R	FGROSS	FKLEIN A	FKLEIN B	FKLEIN D
0	-1.5364	-11.9096	-19.4143	-1.8762
1	-1.4942	-11.9110	-16.8006	-1.8888
2	-0.9606	-11.1384	-8.9597	-1.9246
3	-0.7564	-10.3465	-19.8046	-1.9774
4	1.5323	1.2521	20.2383	-2.0373
5	-0.5799	5.5315	-4.9192	-2.0913
6	-0.0139	-0.8544	4.1206	-2.1242
7	-0.9345	-2.8999	-10.4884	-2.1196
8	0.5286	-2.9616	1.3869	-2.0614
9	0.6030	2.4525	2.7554	-1.9347
10	0.6265	4.9619	9.5430	-1.7281
11	-1.1103	2.2272	-0.6919	-1.4345
12	-1.8349	-6.0717	-12.8405	-1.0534
13	0.2864	-4.3241	3.1583	-0.5925
14	-0.8378	-3.2623	-11.0369	-0.0690
15	1.5672	-1.4877	6.7659	0.4888
16	0.1351	0.3095	-7.4178	1.0399
17	2.4638	2.3289	10.2971	1.5301
18	0.94[illegible]	6.7579	6.4441	1.8908
19	-0.5153	1.5247	-2.1835	2.0391
20	-0.0608	-0.6544	0.9214	1.8777
21	-0.4734	-0.9965	-3.7282	1.2960
22	0.6645	0.5641	5.0421	0.1716
23	-0.7345	0.4557	-3.2975	-1.6276
24	0.	0.	0.	-4.2399

LAUF 4

24*R	FGROSS	FKLEIN A	FKLEIN B	FKLEIN D
0	0.8689	38.7075	-11.3531	-2.6423
1	-0.7297	38.6731	-8.2235	-2.5983
2	-0.3511	-2.7538	1.1655	-2.4688
3	-0.5551	-0.1423	3.3146	-2.2613
4	-1.5879	-8.7446	-23.4298	-1.9879
5	0.8643	-6.3879	4.9684	-1.6650
6	0.4487	2.9013	1.9636	-1.3123
7	0.2838	1.3388	0.8637	-0.9525
8	0.2848	1.7473	4.6427	-0.6095
9	-0.7549	-1.8603	-8.5112	-0.3076
10	0.5830	-2.2238	1.8855	-0.0699
11	0.4425	2.0610	4.1678	0.0838
12	-0.6071	-1.5803	-8.0094	0.1388
13	1.[illegible]296	-0.7916	4.6916	0.0884
14	0.3649	2.9370	2.7919	-0.0642
15	-0.2556	0.8099	1.1391	-0.3019
16	-1.1164	-3.5900	-8.3476	-0.5909
17	0.2751	-4.6490	-3.8099	-0.8762
18	1.3397	0.2085	3.9456	-1.0779
19	0.4896	0.5438	-3.3582	-1.0857
20	1.7173	1.5083	6.5487	-0.7541
21	0.2156	1.2686	-3.4443	0.1039
22	1.2714	-0.3600	0.4159	1.7234
23	1.9980	4.2684	8.9696	4.3945
24	0.	0.	0.	8.4706

LAUF 5

24*R	FGROSS	FKLEIN A	FKLEIN B	FKLEIN D
0	1.5091	66.9197	-40.0103	-0.7385
1	-1.3556	66.8559	-25.5512	-0.7749
2	0.1868	-2.4276	17.8259	-0.8809
3	-1.4869	0.1620	-12.1561	-1.0478
4	-0.8306	-9.5241	-14.0829	-1.2613
5	1.0665	1.5897	16.4728	-1.5023
6	-0.9421	3.7779	-6.2338	-1.7480
7	-0.0784	0.1128	7.7976	-1.9729
8	-1.6677	-1.8325	-10.0655	-2.1505
9	-0.5128	-4.5291	0.2211	-2.2544
10	-1.0415	-3.2514	-5.5208	-2.2608
11	-0.7802	-6.5219	-10.0692	-2.1498
12	0.9409	-3.0325	1.6552	-1.9083
13	0.7759	0.9875	0.1406	-1.5313
14	0.9921	1.5018	3.2987	-1.0248
15	0.3921	0.9385	-0.5683	-0.4079
16	0.4529	-0.9252	-2.2724	0.2852
17	1.1963	0.7737	3.8806	1.0026
18	0.3806	0.4704	-3.2903	1.6733
19	1.4851	0.7109	3.1457	2.2046
20	1.3802	3.9265	5.2727	2.4821
21	0.5635	3.7117	4.1603	2.3660
22	-0.5682	0.3101	-2.9843	1.6926
23	0.1388	-0.8780	0.6229	0.2728
24	0.	0.	0.	-2.1075

Tabelle 5: FORTRAN-Programme

a) Das Programm PAUL, das zur Zeit im Routine-Betrieb verwendet wird. Es benötigt die gemäß Methode A (Seite 6-8) programmierte Subroutine ADAM.

```
CPAULO
C       GORENFLO    BERKL           6.11.63
C       PROVISORISCHE ABEL-UMKEHR MIT LOCHKARTEN
C       OHNE GLAETTUNG UND OHNE PLOT          6.11.63
C
C
        DIMENSION GROSI(313),BIFU(313),GLEINI(313),RKLEIN(313),X(313)
C       KLEINI WAERE FIXED-POINT, DESHALB GLEINI
C
        COMMON LER,MAUS,RKLEIN
C
        READ INPUT TAPE 12,100,KMAX
C
        DO 10  LAUF = 1,KMAX
C
        READ INPUT TAPE 12,99
        READ INPUT TAPE 12,100,LER,MAUS,RGROS,VERVI
        LER1 = LER+1
        MAUS1 = MAUS+1
        WRITE OUTPUT TAPE 3,206,LAUF
        WRITE OUTPUT TAPE 3,99
        WRITE OUTPUT TAPE 3,205,LER1,LER,MAUS1,MAUS,RGROS,VERVI
        READ INPUT TAPE 12,101,(GROSI(L) ,L=1,LER1)
C       DATEN SIND EINGELESEN
        TEILER = LER
        AMAUS = MAUS
        URF = VERVI/(2.*RGROS)
        UX = 1./TEILER
        URGRO = RGROS/AMAUS
        CALL ADAM (GROSI,BIFU)
        DO 1  L=1,MAUS1
        AL = L
        GLEINI(L) = URF*BIFU(L)
    1   RKLEIN(L) = (AL-1.)*URGRO
C
C
        IF(LER-MAUS)  2,3,2
    2   DO 4  L=1,LER1
C
        AL =L
    4   X(L) = (AL-1.)*UX
C
C       KONTROLL-AUSGABE DER DATEN
C
        WRITE OUTPUT TAPE 3, 200
        WRITE OUTPUT TAPE 3, 201,(X(L),GROSI(L),L=1,LER1)
C
C       AUSGABE DER RESULTATE
C
        WRITE OUTPUT TAPE 3,  202
        WRITE OUTPUT TAPE 3,  201,(RKLEIN(L),GLEINI(L),L=1,MAUS1)
C
C
        GO TO 10
C
C
    3   WRITE OUTPUT TAPE 3,  203
C       PARALLEL-AUSGABE VON DATEN UND RESULTATEN
C       NUR MOEGLICH WENN LER=MAUS
C
C
        DO 5  L=1,MAUS1
        M = L-1
    5   WRITE OUTPUT TAPE 3,  204, RKLEIN(L),GROSI(L),GLEINI(L),M
C
   10   CONTINUE
```

```
      CALL EXIT
C     FORMAT
  100 FORMAT (2I4,2E12.4)
  101 FORMAT (6F12.4)
  200 FORMAT (1HJ,10X,26HKONTROLL-AUSGABE DER DATEN/1HL,30X,1HX,24X,7HG
     1ROSS I///)
  201 FORMAT (17X,2(F18.4,10X))
  202 FORMAT (1HJ,10X,21HAUSGABE DER RESULTATE/1HL,27X,7HKLEIN R,21X,7H
     1KLEIN I///)
  203 FORMAT (1HL,10X,41HPARALLEL-AUSGABE VON DATEN UND RESULTATEN/1HL,
     122X,14HX ODER KLEIN R,19X,7HGROSS I,21X,7HKLEIN I///)
  204 FORMAT (17X,F18.4,10X,F18.4,10X,F18.4,5X,I5)
  206 FORMAT (1H1,I5,6H. LAUF)
  205 FORMAT(1HJ,13HMESSWERTE....,3X,27HANZAHL DER MESSWERTE       =I4
     1 /17X,27HANZAHL DER INTERVALLE      =I4/1HJ,13HRESULTATE....,3X,
     227HANZAHL DER RESULTATWERTE  =I4/17X,27HANZAHL DER INTERVALLE
     3=I4/17X,9HGROSS R =E12.4/17X,32HUMRECHNUNGSFAKTOR FUER KLEIN I =E1
     42.4//)
   99 FORMAT (72HJ
     1                                  )
      END
D   5 BIFU(J1) = SUM
      RETURN
      END
```

b) ADAM, programmiert gemäß Methode A.

```
*      LABEL
CADAM
       SUBROUTINE ADAM (ORFU,BIFU)
C
C
C      ABEL DISKRETE AUFSUMMIERUNGS-METHODE
C
C
C       DIMENSION B(11,11),BETA(11,11),GAMMA(11,11)
C      DIMENSION ORFU(313),ZWIFU(313),BIFU(313)
C
C
C
        COMMON B,BETA,NK,GAMMA
       COMMON LER,MAUS
       TEILER = LER
C
       ZWIFU (LER + 1) = 0.
C
       ZWIFU (LER) = TEILER * ORFU (LER)/SQRTF(2.*TEILER-1.)
       LERM1 = LER - 1
C
       DO 1   K = 1,LERM1
C
       LERK = LER-K
       ZN = LERK
       Z = TEILER * ORFU (LER K)/SQRTF(2.*ZN-1.)
       SUM = 0.
C
C
       DO 2   L = 1,K
C
C
C
       IZ = LER + 1 - L
         ZI = IZ
C
       AZ = 2.*ZI-1.
C
       AN1 = SQRTF(ZI**2-(ZN-1.)**2)
       AN2 = SQRTF((ZI-1.)**2-(ZN-1.)**2)
C
       A = AZ/(AN1+AN2)
     2 SUM = SUM + A*ZWIFU(IZ)
C
     1 ZWIFU (LER K) = Z - SUM/SQRTF(2.*ZN-1.)
C
C        ANDERE INTERVALLEINTEILUNG , INTERPOLATION , EXTRAPOLATION
C
C
        H = 1./TEILER
        A = (9.*ZWIFU(1)-ZWIFU(2))/8.
C
        B = (ZWIFU(2)-ZWIFU(1))/2.
C
        BIFU(1) = A
C
        DO 3  L=2,MAUS
       IF (LER-MAUS)  7,8,7
     8 I=L
        GO TO 9
     7 AI = FLOATF(L-1)*TEILER/FLOATF(MAUS)+1.
       I = AI
C
     9  R = FLOATF(L-1)/FLOATF(MAUS)
C
C
```

```
      IF(R-3.*H/2.)  10,16,16
   10 BIFU(L) = A+B*R*R
      GO TO 3
   16 IF(R-(1.-H/2.))  11,11,12
   12 BIFU(L) = 2.*TEILER * ZWIFU(LER)*(1.-R)
      GO TO 3
   11 AI = I
      RMITT = (AI-1./2.)/TEILER
      IF(R-RMITT)  13,13,14
   13 ZWIDEL = ZWIFU(I)-ZWIFU(I-1)
      GO TO 15
   14 ZWIDEL = ZWIFU(I+1)-ZWIFU(I)
   15 BIFU(L) = ZWIFU(I) + TEILER*ZWIDEL*(R-RMITT)
    3 CONTINUE
      BIFU(MAUS+1) = ZWIFU(LER+1)
C
C
      RETURN
C
      END
```

```
*       LABEL
        SUBROUTINE BKOEFF
CBKOEFF
D         DIMENSION B(11,11),BETA(11,11),GAMMA(11,11)
C
C
C
          COMMON B,BETA,NK,GAMMA
C
C
C
D        B(1,1) = 1.
C
C
         DO 1  N=2,NK
         N=N
C
C
         DO 1  JP = 1,N
D        SUMB = 0.
         N1 = N-1
         JP=JP
         JP1= JP-1
         NMP = N1-JP1
         J= NMP
C
D        B1=0.
       2 CALL BICO(N1,J,B1)
         IF(B1)   6,6,3
       6 WRITE OUTPUT TAPE 3,204,N1,J,B1
C
D        B2=0.
       3 CALL BICO (J,NMP,B2)
         IF(B2)  5,5,4
       5 WRITE OUTPUT TAPE 3,203,J,NMP,B2
       4 Z = (-1.)**J/(2.*FLOATF(J)+1.)
D        SUMB = SUMB + Z*B1*B2
C
C
         J = J+1
         IF(J-N1) 2,2,7
D      7 B(JP,N) = (-1.)**NMP*SUMB
       1 CONTINUE
         RETURN
     203 FORMAT (1HL,10HERROR EXIT,5X,2HB2,2I12,10X,F10.2)
     204 FORMAT (1HL,10HERROR EXIT,5X,2HB1,2I12,10X,F10.2)
         END
```

c) Routine zur Berechnung der b(p,n). Aus programmtechnischen Gründen sind im Programm die Indices um 1 überhöht.

BICO ist eine in FAP geschriebene SHARE - Subroutine.
BICO(N,M,B) berechnet
$B=\binom{N}{M}$.

Hier und auch in d) und e) muß vor dem Aufruf NK definiert sein. Die b, β und γ werden berechnet für $0 \leq n \leq NK - 1$, $0 \leq p \leq n$. Maximal ist NK = 11 zulässig (sofern man nicht die Dimensionierung abändert).

```
*       LABEL
        SUBROUTINE BETAKO
CBETAKO
C
C         DIMENSION B(11,11),BETA(11,11),GAMMA(11,11)
C
C
          COMMON B,BETA,NK,GAMMA
C
C
C
C
C
        DO 1  K1=1,NK
        K1=K1
C
        DO 1 JP1=1,K1
        K = K1-1
        JP = JP1-1
        KPP = K+JP
C       Z1 =1.
C
        IF(KPP)  5,5,4
      4 DO 3  I=1,KPP
C       A1 = I
C     3 Z1 = Z1*(1.+2.*A1)
      5 JP2 = 2*JP
C
C       FAK2P = 1.
        IF(JP2)  7,7,8
      8   DO 6  I=1,JP2
C       A2 = I
C     6 FAK2P = FAK2P*A2
      7 KMP = K-JP
C
C
C       FAKMP = 1.
        IF(KMP)  9,9,10
     10 DO 11  I=1,KMP
C       A3 = I
C    11 FAKMP = FAKMP*A3
C     9 FAK1 = (-1./2.)**KMP
C       BETA(JP1,K1) = FAK1*Z1/(FAK2P*FAKMP)
      1 CONTINUE
        RETURN
         END
```

d) Routine zur Berechnung der $\beta(p,n)$.

Indices um 1 überhöht.

```
*       LABEL
         SUBROUTINE GAMMAK
D        DIMENSION B(11,11),BETA(11,11),GAMMA(11,11)
C
C
C
         COMMON B,BETA,NK,GAMMA
C
C
C
D        GAMMA (1,1) =1.
C
C
         DO 1  N1=2,NK
D        GAMMA (N1,N1) = BETA(N1,N1)/B(N1,N1)
         N = N1-1
C
         DO 1  J1=1,N
D        SUM = 0.
         NMJ = N1-J1
         NMJP1 = NMJ+1
C
C
         DO 2  LAM=NMJP1,N1
D     2  SUM = SUM + B(NMJ,LAM)*GAMMA(LAM,N1)
D     1  GAMMA(NMJ,N1) = (BETA(NMJ,N1)-SUM)/B(NMJ,NMJ)
C
C
C
         RETURN
         END
```

e) Routine zur Berechnung von $\gamma(p,n)$. Indices um 1 überhöht. Die Routine setzt vorhergehenden Aufruf von BKOEFF und BETAKO voraus.

Benutzeranweisung zum Programm PAUL

Zu den Binär- oder Fortrankarten der vorhandenen Programme liefert der Benutzer nur die Datenkarten.

I. Die erste Datenkarte gibt die Anzahl der gemessenen Kurven an, also die Zahl der gewünschten Durchläufe!
FORMAT I4

II. Datenkartensatz, der sich je nach Anzahl der Messungen beliebig oft wiederholen kann.

1. Karte des Satzes ist für die jeweilige Überschrift reserviert, die über den entsprechenden Ergebnissen ausgedruckt wird.
   Ist keine Überschrift erwünscht, muß an dieser Stelle eine Leerkarte eingelegt werden. In diese Datenkarte können beliebige Zeichen und Zahlen in die Spalten 2 mit 72 gelocht werden.

2. Karte des Satzes gibt
   a) die Anzahl der Meßwertintervalle (= Anzahl der Meßpunkte minus 1),
      FORMAT I4
   b) die Anzahl der Resultatwertintervalle (müssen nicht gleich den Meßwertintervallen sein),
      FORMAT I4
   c) den maximalen X-Wert groß R
      FORMAT E12.4
   d) und einen Umrechnungsfaktor für klein i an.
      Letzterer darf nicht vergessen werden, kann gleich 1 sein.
      FORMAT E12.4

3. und folgende Karten sind den groß I einer Messung zugedacht.
   FORMAT 6F12.4

Anmerkung: groß I = $\mathfrak{J}$, klein i = i (man vgl. Seite 1).