

Ein Versuch zur Klärung des

Langmuir - Paradoxons

Werner Ott

IPP 2/19

März 1963

I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K

G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N

I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K
G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N

Ein Versuch zur Klärung des
Langmuir - Paradoxons

Werner Ott

IPP 2/19

März 1963

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

Inhalt

Zusammenfassung	1
Das Langmuir-Paradoxon	2
Zur Frage hochfrequenter Grenzschicht- schwingungen	6
Längsdrift und Energieverteilung in Querrichtung	13

Anhang:

Literaturverzeichnis	25
Tabelle	26
Abbildungen	27

Zusammenfassung

Das Langmuir-Paradoxon besteht in folgendem:

Da die Wände dem Plasma laufend schnelle Elektronen entziehen, erwartete Langmuir für die Energieverteilung der Elektronen in radialer Richtung eine deutliche Verarmung bei höheren Energien. Langmuirs Sondenmessungen in der positiven Säule von Niederdruckentladungen ergaben jedoch auf der Achse eine Maxwell-Verteilung bis zu Energien, die erheblich über dem Wandpotential lagen. Eine Erklärung für diesen Befund konnte er nicht geben und vermutete daher das Wirken eines unbekanntes Mechanismus. Gabor versuchte, die kurze Relaxationsstrecke mit Hilfe von hochfrequenten Grenzschichtschwingungen zu erklären, die einen intensiven Energieaustausch der Elektronen untereinander bewirken sollten. Die Annahme der allgemeinen Existenz solcher Schwingungen ist jedoch nicht haltbar, und eine Erklärung des Langmuir-Paradoxons muß anderweitig gesucht werden. Es wird im folgenden gezeigt, daß die Streuung schneller Driftelektronen in radiale Richtung genügend kurze Relaxationsstrecken liefert, um dem experimentellen Befund gerecht zu werden.

1. Das Langmuir-Paradoxon

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Langmuir-Paradoxon, das seinen Namen von Gabor erhalten hat, und das dem Inhalt nach auf verschiedene Arbeiten Langmuirs aus den zwanziger Jahren zurückgeht. Langmuir hatte seine berühmte Methode der Sondenmessung entwickelt und in Niederdruckentladungen angewandt. Unter "Niederdruck"-Entladungen sollen hier solche verstanden werden, bei denen der Gasdruck so niedrig ist, daß die freie Weglänge insbesondere der positiven Ionen größer als der Gefäßdurchmesser ist. Für die praktisch verwendeten Rohrdurchmesser von einigen Zentimetern bedeutet das, daß der Gasdruck nicht viel mehr als 10^{-3} Torr betragen darf.

Als Ergebnis seiner Sondenmessungen in der positiven Säule von Niederdruckentladungen ordnete Langmuir den Elektronen neben einer Längsdrift eine ziemlich hohe Temperatur zu. Die Ionen dagegen sollten ungefähr die gleiche Temperatur wie das neutrale Gas besitzen und unter dem Einfluß des von den Elektronen aufgebauten Potentialgradienten (Potentialdifferenz Wand-Achse ungefähr $6 kT_e/e$) zur Wand abgesaugt werden. Die Temperatur der ungerichteten Bewegung der Elektronen lag in der Größenordnung $30\ 000^\circ$. Wie die Messungen zeigten, entsprach ihre Geschwindigkeitsverteilung

einer Maxwell-Verteilung bis zu ungefähr dem Fünffachen der thermischen Geschwindigkeit.

Für Langmuir war das eine sehr erstaunliche Feststellung: Die Wände der Entladung reflektieren wegen ihres negativen Potentials zwar die allermeisten der auftreffenden Elektronen. Doch nehmen sie gerade die energiereichsten unter ihnen auf. Langmuir erwartete daher in der radialen Energieverteilung der Elektronen einen Sprung bei derjenigen Energie, die dem Wandpotential entspricht. Einen solchen Sprung aber hat er nicht gefunden, nicht einmal eine Verarmung gegenüber der Maxwellverteilung bis zu Energien, die weit über dem Wandpotential liegen (z.B. 1), wobei unter "weit" 5 bis 10 eV zu verstehen sind. Für die höheren Energien ist man sehr schnell an der Grenze der Meßgenauigkeit.

Langmuir erwähnt diesen Unterschied zwischen Erwartung und Experiment sehr häufig (1-4) und Gabor (5) spricht in diesem Zusammenhang von einer der schlimmsten Diskrepanzen, die in der Wissenschaft bekannt sind und prägt dafür, wie gesagt, den Namen "Langmuir-Paradoxon" .

Nun kann man aber schon ohne große Versuche folgendes feststellen: Nähme aus irgendeinem Grund die Zahl der schnellen Elektronen in Querrichtung ab, so würde auch sofort das Wandpotential sinken und auf einer niedrigeren Stufe ein neues Gleichgewicht eintreten. Das Wandpotential wird schließlich

nur durch solche Elektronen aufrechterhalten, die eine höhere Querenergie besitzen, als sie dem Wandpotential entspricht.

Das Langmuir-Paradoxon besteht also nur noch in der Frage nach dem Mechanismus, der die schnellen Querelektronen wieder herstellt. Daß es einen solchen Mechanismus geben muß, steht außer Frage; denn andernfalls würde das Wandpotential sinken.

Langmuir diskutierte die verschiedensten Mechanismen, die vielleicht für die experimentell gefundene schnelle Relaxation verantwortlich gemacht werden konnten. So zog er Hochfrequenzschwingungen im gesamten Stromkreis oder innerhalb des Plasmavolumens in Betracht, diskutierte den Einfluß von Stößen langsamer Elektronen mit Atomen oder von Stößen zweiter Art von Elektronen mit angeregten Atomen, dachte auch an Stöße der Elektronen untereinander, an die Wechselwirkung der Elektronen mit Mikrofeldern des Plasmas oder gar an die Wechselwirkung mit Lichtquanten, die eine Art gesteigerten Comptoneffekt darstellen sollte. Alle diese Mechanismen schieden jedoch aus, und man findet in vielen Artikeln Langmuirs die Feststellung, daß die Relaxation durch einen noch unbekanntem Mechanismus herbeigeführt werden müßte, dem eine mittlere freie Weglänge der Elektronen entsprechen sollte, die klein gegen den Rohrdurchmesser sei.

Auch aus Versuchen von Mott-Smith glaubte Langmuir auf einen unbekanntem Wechselwirkungsmechanismus schließen zu müssen (1). Es handelt sich dabei um Experimente mit einem Quecksilberbogen durch einen Metallzylinder, der der Länge nach in zwei gegeneinander isolierte Hälften geschlitzt war. Wurde einer Zylinderhälfte ein stark negatives Potential aufgeprägt, so daß sie auch sehr schnelle Elektronen reflektierte, so zeigten die von der anderen Hälfte gesammelten Elektronen eine deutlich höhere Temperatur. Umgekehrt setzte der Entzug sehr schneller Elektronen die Elektronentemperatur herab, aber "die Maxwellverteilung stellte sich ein, solange sich die Elektronen zwischen den beiden Elektroden bewegten".

Aus einem weiteren Grunde glaubte sich Langmuir in der Annahme eines unbekanntem Wechselwirkungsmechanismus bestätigt (1): Die mittlere freie Weglänge von Elektronen in unionisiertem Quecksilberdampf und im Entladungsplasma waren scheinbar um eine Größenordnung verschieden. Tatsächlich stimmen die aus der Elektronenbeweglichkeit für das Plasma gefundenen Werte jedoch recht gut mit den im unionisierten Quersilberdampf gemessenen überein (vgl. 6 - 10). Langmuir war der Wirkungsquerschnitt des Quecksilbers für 30 - eV- Elektronen bekannt, und er nahm an, daß er für thermische Elektronen (ungefähr 5 eV) kleiner wäre. Spätere

Messungen anderer Autoren ergaben jedoch das Gegenteil.

Langmuirs Vorstellung war offenbar folgende: Die Elektronen der positiven Säule befinden sich in einer Potentialmulde, in der sich die von den Wänden reflektierten langsamen Elektronen unbegrenzt ansammeln würden, falls es nicht einen Mechanismus gäbe, der eine Maxwellverteilung und damit auch schnelle Elektronen auf sehr kurzer Strecke wiederherstellt (vgl. 4).

2. Zur Frage hochfrequenter Grenzschichtschwingungen

So betrachtet, waren die Ergebnisse von Gabor und Mitarbeitern (5) geradezu eine Erlösung. Sie suchten in der Raumladungsschicht zwischen Plasma und isolierter Wand nach Schwingungen, die für einen intensiven Energieaustausch zwischen den Elektronen verantwortlich gemacht werden konnten. Sie schossen hierzu einen fein ausgeblendeten Elektronenstrahl durch die Grenzschicht und fanden neben einem "hash" im Bereich von 10 bis 100 kHz Hochfrequenzschwingungen von 100 bis 120 MHz mit einer Amplitude von 50 V/cm, zur Wand hin ansteigend bis 80 V/cm. Bei einer Erhöhung des Druckes von 0,5 auf 2,5 m Torr soll die Amplitude besagter Schwingungen von 50 V/cm auf Null zurückgehen.

Nach Gabor et al. sollen die Schwingungen mit der Wiederherstellung des schnellen Maxwellschwanzes sogar die Existenz der positiven Säule bei niedrigen Drücken erst ermöglichen, da die so erzeugten schnellen Elektronen für die Ionisation nötig seien. Dem kann man allerdings entgegenhalten, daß solche Schwingungen auch den entgegengesetzten Effekt haben: Aus der von Gabor angegebenen Amplitude der Wechselfeldstärke in der Grenzschicht errechnet sich eine Amplitude der Wechselspannung zwischen Plasma und Wand von 7 Volt. Wegen der nichtlinearen Abhängigkeit des ungerichteten Elektronenstroms zur Wand vom Wandpotential (Boltzmann-Faktor!) würde sich der mittlere Diffusionsstrom der Elektronen auf mehr als das 5-fache erhöhen ⁺⁾ . Die Gabor-Schwingungen würden also die Existenz des Plasmas erschweren.

⁺⁾ Die mittlere Stromdichte erhöht sich auf $\langle j_e \rangle = j_0 \cdot I_0\left(\frac{e\delta V}{kT_e}\right)$, falls noch keine Resonanzüberhöhung eintritt (vgl. (11)), wobei δV die Schwingungsamplitude ist. (I_0 = modifizierte Bessel-Funktion nullter Ordnung). Für $\delta V = 7$ Volt und $T_e = 26\ 000^\circ$ ist $\frac{e\delta V}{kT_e} = 3,1$ und $I_0\left(\frac{e\delta V}{kT_e}\right) = 5,3$. Falls die Ionenstromdichte zur Wand nicht ebenfalls erhöht würde, müßte sich daher das Wandpotential erhöhen, damit ^{die} Diffusionsstromdichte der Elektronen auf den Wert der Ionenstromdichte herabgedrückt wird.

Auch muß man fragen, ob die Grenzschichtschwingungen so wie sie gedacht sind, überhaupt das Problem lösen könnten. Sie sollen nur die Energie der Elektronen untereinander vermischen und damit in einer Gruppe langsamer (reflektierter) Elektronen wieder schnelle Elektronen erzeugen, wobei die Energie dazu von anderen langsamen Elektronen geliefert werden soll. Nun saugen die Wände die schnellen Querelektronen ab, es müßte sich also die mittlere Energie der restlichen Elektronen, also ihre Temperatur fortwährend senken, falls es nicht einen zusätzlichen Mechanismus gäbe, der Energie in die Querrichtung liefert.

Man sieht: Der Mechanismus der Grenzschichtschwingungen wäre schon eine recht fragwürdige Erklärung des Langmuir-Paradoxons. Was aber damit erklärt werden sollte, wäre dann gar nicht mehr feststellbar. Beeinflußt doch ein solcher Mechanismus nicht nur die Energieverteilung der reflektierten Elektronen sondern auch die Verteilung jene Elektronen, die auf die Wand gelangen.

Grenzsichten treten nun bei Sonden immer auf. Schwingungen in der Grenzschicht verfälschen aber die Sondencharakteristik, und alle Schlüsse, die man aus der Sondencharakteristik ziehen wollte, würden äußerst unsicher.

(Dies ist allerdings kein Beweis gegen die Möglichkeit der Existenz solcher Schwingungen). Man könnte also auch nicht behaupten, die Energieverteilung der Elektronen entspräche einer Maxwellverteilung (zumindest nicht als Ergebnis von Sondenmessungen). Man sieht: Die Folgen etwaiger Gaborscher Grenzschichtschwingungen wären verheerend für die Diagnostik von Niederdruckentladungen. In Anbetracht der Wichtigkeit der Frage, ob nun solche Schwingungen allgemein vorhanden sind oder nicht, ist es beruhigend, daß in den acht Jahren seit der Veröffentlichung der Gaborschen Arbeit im Jahre 1955 keine Bestätigung der Grenzschichtschwingungen bekannt geworden ist.

Eine Ausnahme ist lediglich der Artikel von Rompe, Ullrich und Wolff (12), wonach "die Existenz solcher Grenzschichtschwingungen (nach Vlasov) nach den Experimenten von Gabor und Mitarbeitern und ähnlichen eigenen Experimenten gesichert zu sein (scheint)".

Dabei wurde (13) die Geschwindigkeitsverteilung eines anfangs monochromatischen Elektronenstrahls von 30 keV nach Durchgang durch die positive Säule einer Niederdruckentladung in Quecksilberdampf ohne zeitliche Auflösung untersucht. Die mittlere Energie der Strahlelektronen wurde durch das Plasma nicht geändert, es trat also keine Bremsung auf. Dagegen vergrößerte sich die Halbwertsbreite der Energieverteilung der Elektronen um 0,4 bis 0,6 eV. Diese

Erscheinung wird von den Autoren als Folge von Schwingungen der Plasmagrenzschicht gedeutet.

Die Tatsache der Verbreitung der Elektronenenergieverteilung für sich allein ist allerdings keine Bestätigung irgendwelcher Grenzschichtschwingungen, nicht einmal dafür, daß für die Längsstreuung irgendwelche bestimmte Frequenzen verantwortlich sind. Die Streuung könnte vielleicht auch durch das Rauschen der Entladung zustandekommen, vielleicht auch durch Schwingungen des ganzen Plasmas. Um also aus dem angegebenen Versuch irgendwelche Schlüsse auf die Grenzschichtschwingungen ziehen zu können, müssen noch weitere Messungen angestellt werden. Insbesondere müßte das Verhältnis von Grenzschichtdicke zu durchlaufender Plasmalänge geändert und das Frequenzspektrum aufgenommen werden. Auch müßte die Möglichkeit einer Anregung von Schwingungen durch den Strahl geprüft werden.

Es wurden aber Zweifel an der allgemeinen Existenz solcher Schwingungen laut. So weist z.B. Schmidt (14) darauf hin, daß die Grenzschichtschwingungen auch mit empfindlichen Hochfrequenzverstärkern nachweisbar sein müßten, da sie

nicht mehr Energie entziehen würden, als ein durchgeschossener Elektronenstrahl.++)

Selbst wenn die Gabor-Schwingungen im allgemeinen nicht über größere Bereiche konphas wären, so müßte man doch annehmen, daß sie es über den Bereich einer Debye-Länge λ_D seien. In dem von Gabor beschriebenen Fall ($T_e = 26000^\circ\text{K}$, $n_e = 10^9 \text{ cm}^{-3}$) war $\lambda_D^2 = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2$, also der 3000-ste Teil der gesamten Plattenfläche ($2 \times 2 \text{ cm}^2$). Über den Bereich einer Debye-Länge müßten einer etwaigen Gabor-Schwingung $3 \cdot 10^{-12}$ Watt entzogen werden können. Die empfindlichsten HF-Verstärker brauchen demgegenüber nur eine Leistung von 10^{-13} bis 10^{-12} Watt.

Von einem Nachweis der fraglichen Schwingungen durch elektronische Verstärker ist indessen nichts bekannt (vgl. 15, 16).

++) Der Energieentzug durch eine Elektronenstrahlsonde in einem schwingenden Querfeld beträgt $\bar{N} = I_{\text{Str}} \cdot l^2 \cdot E_m^2 / (8U_B)$ solange die Flugzeit des Strahls durch das Wechselfeld klein gegen dessen Schwingungsperiode ist. Bei den von Gabor angegebenen Verhältnissen (Strahlstrom $I_{\text{Str}} = 10^{-7} \text{ A}$, Plattenlänge $l = 2 \text{ cm}$, Feldstärkeamplitude der HF-Schwingung bis zu $E_m = 80 \text{ V/cm}$, Strahlspannung $U_B = 20 \text{ kV}$) beträgt der Energieentzug durch die Elektronenstrahlsonde mehr als 10^{-8} Watt.

In einem Experiment von v. Gierke, Ott und Schwirzke (17) wurde sogar der Versuch von Gabor direkt wiederholt, wobei darauf achtgegeben wurde, daß die Garborschen Entladungsbedingungen nach der Literatur möglichst genau eingehalten wurden. Diese Versuche zeigten jedoch eindeutig, daß keine hochfrequenten Grenzschichtschwingungen mit einer Amplitude von mehr als 5 V/cm vorhanden waren. Dabei waren die Drücke 0,75 und 1,9 mTorr, die Bogenstromstärken schwankten zwischen 30 und 800 mA.

Diese Zweifel betreffen nicht nur die Gaborschen Grenzschichtschwingungen, deren Potential-Amplitude (7 V) das Dreifache der Elektronentemperatur ($kT_e = 2,2$ eV) betragen und deren Frequenz um Faktor 4 unterhalb der Plasmafrequenz liegen sollte, sondern auch die Grenzschichtschwingungen nach Vlasov, wie sie von Rompe, Ullrich und Wolff vertreten werden, deren Amplitude gleich der Plasmafrequenz sein soll. Für den zweiten Fall müßte man sogar erwarten, daß die Diffusion zur Wand besonders hohe Werte annimmt, ähnlich wie bei der Resonanzsonde bei Plasmafrequenz ein Resonanzmaximum des Sondenstroms auftritt (vgl. Takayama, Ikegami und Miyazaki (9)). Es muß also gefolgert werden, daß Hochfrequenzschwingungen in der Grenzschicht höchstens in Spezialfällen auftreten und Sondenmessungen somit sinnvoll sind. Damit stellt sich aber wieder die Frage des Langmuir-Paradoxons.

3. Längsdrift und Energieverteilung in Querrichtung

Schaut man sich daraufhin die Arbeiten Langmuirs noch einmal durch, so fällt auf, daß seine Versuche zur Berechnung der Relaxation immer davon ausgingen, daß die Energien der von der Wand reflektierten Elektronen neu verteilt werden müßten, daß ein intensiver Energieaustausch unter ihnen auftreten müßte. Es wird nie in Erwägung gezogen, daß auf eine der Wand gegenübergestellte Sonde nicht nur von der Wand reflektierte Elektronen gelangen, sondern auch solche, die durch Stöße mit den Gasatomen in dem Raum zwischen Sonde und Wand auf die Sonde eingestreut werden.

Das Problem tritt nur in Niederdruckentladungen auf. Gerade bei diesen aber erreichen die Elektronen in dem elektrischen Längsfeld beträchtliche Driftenergien. Diese wird bei den Stößen zu einem großen Teil in ungerichtete, thermische Energie der Elektronen verwandelt. Die innerhalb des Raums zwischen Sonde und Wand eingestreuten Elektronen bringen also viel "frisches Blut" mit sich und können so möglicherweise für die schnelle Relaxation verantwortlich sein. Langmuir diskutierte diese an sich naheliegende Möglichkeit vielleicht deshalb nicht, weil er die mittlere freie Weglänge der Elektronen in Quecksilberdampf für wesentlich höher hielt (Faktor 10), als sie tatsächlich ist. Für sie gilt bei einer Elektronentemperatur von $30\ 000^\circ$ $\lambda \cdot p = 6,4 \text{ cm} \cdot \text{mTorr}$ (Simons und Seward (9)).

Es soll nun mit dem Bild der Einstreuung schneller Drift-
elektronen versucht werden, die Relaxationsstrecke für die Wand-
störung abzuschätzen. Hierzu sollen zwei aufeinanderfolgende
Streuprozesse betrachtet werden, von denen der erste irgendwo
im Plasma erfolgt und der zweite zur Einstreuung der Elektro-
nen auf die Sonde führt. Beim ersten Streuprozess soll die
Temperatur T der Elektronen gleich der meßbaren Elektronen-
temperatur T_e sein. Bis zum zweiten Streuprozess erlangen die
Elektronen in dem elektrischen Längsfeld eine gewisse Drift-
energie, die beim zweiten Stoß wenigstens zum Teil in unge-
richtete Energie verwandelt wird, so daß die Elektronen jetzt
eine Temperatur $T_e + \Delta T_e$ besitzen.

Es werde eine Gruppe von Elektronen betrachtet, die etwa in
einem kurzen Zylinder der Entladungsröhre quer zur Achse hin-
und herfliegen. Sie sollen zunächst eine Maxwellverteilung
besitzen, die der Temperatur T_e entspricht. Von dieser Gruppe
nimmt die Wand die schnellen auf, die einen Anteil von etwa
0,5 % der ganzen Gruppe darstellen. Dieser schnelle Schwanz
der Verteilung fehlt also bei den reflektierten Elektronen.
Auf dem Weg von der Wand zurück ins Plasma werden die Elektronen
zum Teil herausgestreut und im stationären Fall durch andere
ersetzt. Außerdem müssen durch Ionisation die an die Wand ver-
lorenen Elektronen ersetzt werden. Auf der Strecke von einer
mittleren freien Weglänge λ bleibt der Anteil von $\frac{1}{e}$ der ur-
sprünglichen, von der Wand reflektierten Elektronen erhalten,

die die Störung des fehlenden Maxwellschwanzes mit sich tragen. Besitzen die eingestreuten Elektronen die gleiche Temperatur T_e wie die ursprünglich in der Gruppe vorhandenen Elektronen, so füllen die eingestreuten Elektronen also auch den schnellen Maxwellschwanz auf der Strecke λ wieder bis auf $\frac{1}{e}$ auf, da ja die eingestreuten Elektronen eine voll ausgebildete Maxwellverteilung besitzen sollen. Besitzen aber die eingestreuten Elektronen eine um ΔT_e höhere Temperatur, so wird der Ausgleich schon auf einer kürzeren Strecke erreicht.

Nun treffen die Elektronen nicht nur aus einer einzigen Richtung auf die Sonde, sondern aus dem ganzen Halbraum. Der Weg eines Elektrons von der Wand zur Sonde ist dann nicht mehr gleich dem Abstand z der Sonde von der Wand, sondern $z / \cos \alpha$, wobei α der Winkel der Fluglinie gegen die Wandnormale ist. Die Wahrscheinlichkeit einer Streuung der Elektronen erhöht sich daher, über die verschiedenen Winkel α gemittelt von

$$S_1 = 1 - e^{-z/\lambda}$$

auf

$$S_2 = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-z/(\lambda \cos \alpha)} d\alpha,$$

wenn die Elektronen von einer linearen Wand, bzw.

auf

$$S_3 = 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-z/(\lambda \cos \alpha)} \sin \alpha d\alpha,$$

wenn die Elektronen von einer ebenen Wand zu der betrachteten Sonde gelangen. Die Anisotropie infolge der Längsdrift ist hierbei

vernachlässigt, die "Leuchtdichte" der Wand daher als unabhängig vom Winkel α angenommen. Die S_1 sind in Abb. 1 in Abhängigkeit von z dargestellt. Je größer die Temperaturerhöhung ΔT_e ist, desto größer ist der Bruchteil derjenigen Elektronen in der Maxwellverteilung, die eine bestimmte Energie, z.B. $e \cdot U_w$, überschreiten. Desto weniger Elektronen müssen also insgesamt eingestreut werden, um eine Relaxation zu erreichen. Hierbei sei unter Relaxation der Einfachheit halber nur noch die Bildung einer ausreichenden Zahl schneller Elektronen verstanden, ohne daß ihre genaue Energieverteilung berücksichtigt wird.

Man kann also aus der Temperaturerhöhung ΔT_e der eingestreuten Elektronen die zu einer Relaxation erforderliche Stoßwahrscheinlichkeit S und mit den oben angegebenen Gleichungen für S_1 , S_2 und S_3 die Relaxationsstrecke z_{relax} ausrechnen. Dies ist numerisch gemacht worden und in Abb. 2 für die drei Fälle dargestellt. Für ein kreiszylindrisches Entladungsgefäß liegen die Verhältnisse zwischen den Fällen 2 und 3. Da sich die beiden Kurven nicht wesentlich unterscheiden, wird im folgenden der Fall 2 zugrundegelegt.

Nun soll noch die erhöhte Temperatur der eingestreuten Elektronen abgeschätzt werden, also die Temperaturerhöhung der Elektronen bei einem Stoß, die durch Verwandlung von gerichteter Driftenergie in ungerichtete Energie eintritt.

Die zwischen zwei Stößen eines Elektrons gewonnene Energie ist im Mittel:

$$\overline{\Delta \mathcal{E}} = e \cdot E \cdot \lambda \cdot v_d/v_{th}$$

(v_d/v_{th} = Umwegfaktor, v_d = Driftgeschwindigkeit im Längsfeld, v_{th} = mittlere thermische Geschwindigkeit). Der Bruchteil β davon soll in ungerichtete Energie der Elektronen verwandelt werden (der Rest werde in unelastischen Stößen verbraucht). Dann ist die Temperaturerhöhung bei einem Stoß:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} k \Delta T &= \beta \cdot \overline{\Delta \mathcal{E}} \\ \Delta T &= 7770 \beta \cdot \overline{\Delta \mathcal{E}} \text{ (eV) } (^{\circ}\text{K}) \end{aligned}$$

Diese Überlegungen sollen nun auf ein spezielles Beispiel angewendet werden, das von Langmuir als Beleg für das Wirken eines unbekanntes Mechanismus angeführt wurde (2) ⁺) und auf das in

⁺) Das Experiment ergab hier eine Relaxationsstrecke, die maximal gleich dem Radius der Entladungsröhre ist. In einem einzigen Artikel allerdings (3) sprach Langmuir von Messungen, die eine Relaxation schon auf wenigen Millimetern gezeigt hätten. Doch berichtet er dabei keine Einzelheiten. Wegen grundsätzlicher Einwendungen gegen Sondenmessungen in Wandnähe und auch weil Langmuir diese Behauptung offenbar nicht aufrechterhielt, braucht man wohl nicht von so kurzen Relaxationsstrecken auszugehen.

der späteren Literatur des öfteren verwiesen wird: Positive Säule einer Entladung in Hg-Dampf von 0,75 mTorr, Rohrdurchmesser 3 cm, Entladungsstrom 0,1 A, Plasmadichte $3,4 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-3}$, Elektronentemperatur $36\,000^\circ\text{K}$, in der Achse Maxwellverteilung. Die Längsfeldstärke war leider nicht angegeben. Sie dürfte ungefähr 0,25 V/cm betragen haben. Die mittlere freie Weglänge beträgt bei dem angegebenen Druck 10 cm, das Verhältnis von Drift- zu thermischer Geschwindigkeit berechnet sich zu $v_d/v_{th} = 0,32$. Somit beträgt die mittlere Energiezunahme zwischen zwei Stößen: $\overline{\Delta \mathcal{E}} = 0,8 \text{ eV}$. Dem entspricht eine relative Temperaturzunahme bei einem Stoß von $\Delta T/T = 17\%$ für $\beta = 1$ bzw. von $8,5\%$ für $\beta = 0,5$. Das ergibt nach Abb. 2 eine Relaxationsstrecke von 1,2 bzw. 2,2 cm. Dies befindet sich also in guter Übereinstimmung mit der experimentell bestimmten von 1,5 cm.

Nun sind die angegebenen Relaxationsstrecken für eine mittlere freie Weglänge berechnet, die der mittleren thermischen Energie entspricht. Die Elektronen mit höherer Energie, auf die es hier gerade ankommt, besitzen aber eine größere mittlere freie Weglänge (Faktor 2,5 für Elektronen mit einer Energie, die dem Wandpotential entspricht), und das könnte die Relaxationslänge vergrößern. Nun gewinnen die schnellen Elektronen wegen ihrer größeren freien Weglängen im Mittel auch mehr Driftenergie ($\overline{\Delta \mathcal{E}} \sim \mathcal{E}^{1/3}$), und das bewirkt, daß sich die Relaxationsstrecke doch nur wenig ändert (weniger als Faktor 2).

In Tab. 1 ist eine Auswahl von Meßwerten verschiedener Autoren zusammengestellt und ausgewertet, wobei jeweils die mittlere freie Weglänge bei der mittleren thermischen Energie zugrundegelegt wurde. Es ergibt sich, daß auch bei den niedrigsten Drücken, bei denen ein Betrieb der Entladung noch möglich ist, die berechneten Relaxationsstrecken vergleichbar sind mit dem Rohrradius.

Bei der Berechnung der Relaxationsstrecken wurde allerdings davon ausgegangen, daß in der Richtung parallel zur Achse der Entladung eine genügende Anzahl schneller Elektronen vorhanden ist und das Absaugen der schnellen Elektronen in Querrichtung durch die Wände der Entladung nicht eine Verarmung an schnellen Elektronen in Längsrichtung mit sich bringt. Es muß also noch gezeigt werden, daß der Driftmechanismus wirklich in der Lage ist, eine ausreichende Zahl schneller Elektronen nachzuliefern.

Zur Berechnung der Zahl der runaway-Elektronen ist von Grossmann-Doerth und Junker eine einfache Formel angegeben worden (19), die auf einigen vereinfachenden Voraussetzungen beruht. Sie wurde folgendermaßen abgeleitet: Die Elektronen in einem Gas oder Plasma werden von einem elektrischen Feld beschleunigt. Ihre Energie ϵ hängt infolgedessen von dem im Feld zurückgelegten Weg s ab. Der Wirkungsquerschnitt für vollständigen Impulsaustausch, also der Transportquerschnitt q_{tr} hängt von der Elektronenenergie und damit vom zurückgelegten Weg ab,

damit auch die zugehörige mittlere Weglänge λ . Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Elektron, falls es die Strecke s schon durchquert hat, zwischen s und $s + \Delta s$ nicht stößt, ist $\exp(-\Delta s / \lambda(s))$. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Elektron auf der gesamten Strecke s nicht stößt

$$W(s) = \prod_i e^{-\Delta s_i / \lambda_i} \text{ mit } \sum_i \Delta s_i = s$$

Somit $\ln W(s) = -\sum \frac{s_i}{\lambda_i}$.

Der Grenzübergang $\Delta s_i \rightarrow 0$ liefert:

$$\ln W(s) = - \int_0^s \frac{ds}{\lambda(s)} = - n_0 \int_0^s q_{tr}(s) ds.$$

Grossmann-Doerth und Junker gehen nun davon aus, daß das betreffende Elektron seinen Flug mit der mittleren thermischen Energie in Feldrichtung beginnt, seine augenblickliche Energie also $\xi = \xi_{th} + eE \cdot s$ ist. Damit erhalten sie für die Wahrscheinlichkeit, daß es eine gewisse Energie ξ_0 erreicht

$$\ln W(\xi_0) = - \frac{n_0}{eE} \int_{\xi_{th}}^{\xi_0} q_{tr}(\xi) d\xi$$

oder

$$W(\xi_0) = \exp \left\{ - \frac{n_0}{eE} \int_{\xi_{th}}^{\xi_0} q_{tr}(\xi) d\xi \right\}$$

Nun ist die Voraussetzung, daß das Elektron gleich zu Beginn in Feldrichtung fliegt, zu günstig angenommen. Man geht wohl besser von einer isotropen Verteilung aus und erhält dann:

$$W(\xi_0) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \vartheta \exp \left\{ - \frac{n_0}{eE} \int_{\xi_{th}}^{\xi} \frac{q_{tr}(\xi) d\xi}{\sqrt{1 - (\xi_{th}/\xi) \sin^2 \vartheta}} \right\} d\vartheta$$

Dabei ist der Anteil derjenigen Elektronen vernachlässigt, die nach dem Stoß eine Geschwindigkeitskomponente entgegen der Beschleunigungsrichtung besitzen und evtl. doch bis auf die Energie ξ_0 beschleunigt werden.

Da keine Messung des Transportquerschnitts für den ganzen hier benötigten Energiebereich vorliegt, soll für die vorliegende Abschätzung der von Simons und Seward (6) bestimmte Stoßquerschnitt von

$$q = q_1 \cdot \xi^{-2/3} \text{ mit } q_1 = 1,1 \cdot 10^{-14} \text{ cm}^2 (\text{eV})^{2/3}$$

verwendet werden. Nach einer neueren Arbeit von Verweij (20), in der der Transportquerschnitt in einer Kurve bis zu 9 eV eingezeichnet ist, dürfte der Transportquerschnitt um 20 bis 50 % kleiner als der totale Stoßquerschnitt sein.

Für das Wandpotential gilt bei Quecksilber (vgl. 21):

$$eU_w \approx (-) 6 kT_e = 4 \xi_{th}$$

Damit kann also die Wahrscheinlichkeit $W(\xi_w)$, daß ein Elektron mindestens die Energie $\xi_w = (-) eU_w$ erreicht, numerisch berechnet werden. Die Zahl der Elektronen, die pro sec und cm^3 die Energie ξ_w erreichen, ist

$$z(\xi_w) = n_e (v_{th}/\lambda) \cdot W(\xi_w)$$

($n_e \cdot v_{th}/\lambda$ ist die Zahl der Stoßprozesse pro sec und cm^3).

Die Zahl der pro cm Rohrlänge in 1 sec gebildeten Elektronen mit einer Energie größer ξ_w ist dann:

$$Z(\xi_w) = 0,7 \pi r^2 \cdot z(\xi_w)$$

(Der Faktor 0,7 berücksichtigt die Abnahme der Trägerdichte nach außen, n_e = Trägerdichte auf der Achse).

Die Zahl der pro cm Rohrlänge an die Wand verlorenen Elektronen ist (vgl. 21):

$$Z_w = 2 \pi r \cdot j_{ew} = 2 r \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot n_e \sqrt{\frac{kTe}{m_1}}$$

Auf jedes an die Wand verlorene Elektron kommen also $Z(\xi_w)/Z_w$ Elektronen, die in der Entladung die Energie ξ_w erreichen, wobei

$$\frac{Z(\xi_w)}{Z_w} = 0,93 \cdot \frac{r}{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{m_1}{m_e}} \cdot W(\xi_w)$$

Im dem zitierten Fall von Langmuir ergibt diese Rechnung:

$$Z(\xi_w) = 2,4 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-1} \text{ sec}^{-1}$$

$$Z_w = 2,9 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-1} \text{ sec}^{-1}$$

Diese Überschlagsrechnung zeigt also, daß die Zahl der von dem elektrischen Längsfeld gelieferten schnellen Elektronen in der Größenordnung übereinstimmt mit der Zahl der von den Wänden abgesaugten Elektronen.

Für andere in der Literatur angegebene Messungen sind die Ergebnisse ebenfalls in Tab. 1 zusammengestellt. Dabei fallen zwei Dinge auf:

1. Beim Übergang zu höheren Drücken nimmt die Zahl $Z(\xi_w)$ der nachbeschleunigten Elektronen im Vergleich zur Zahl Z_w der von den Wänden absorbierten Elektronen stark ab. Das rührt wahrscheinlich davon her, daß die hierzu verwendeten Rechnungen im Falle des diffusionsbestimmten Säulenplasmas ($\lambda < r$) sehr falsch werden.
2. Während im Niederdruckgebiet bei den einen Autoren (Langmuir, Killian) die Zahl der nachbeschleunigten Elektronen ungefähr übereinstimmt mit der Zahl der von den Wänden absorbierenden Elektronen, ergeben sich bei den anderen (Klarfeld, Gabor) für die Zahl der nachbeschleunigten Elektronen um eine Größenordnung zu niedrige Werte. Inwieweit das auf Ungenauigkeiten bei den Messungen zurückzuführen ist, kann schwer beurteilt werden. Es muß jedoch noch gesagt werden, daß der der Rechnung zugrunde-gelegte totale Streuquerschnitt größer als der Transportquerschnitt ist, der eigentlich hätte verwendet werden müssen. Da der Wirkungsquerschnitt exponentiell in die Rechnung eingeht, dürfte die Zahl der nachbeschleunigten Elektronen um etliches höher liegen, als in der Tabelle angegeben ist. Ist der Transportquerschnitt z.B. nur halb so groß wie angenommen, so ist die Zahl der nachbeschleunigten Elek-

tronen ungefähr um Faktor 10 höher. Es dürfte also auch bei Klarfeld und Gabor eine ausreichende Zahl schneller Elektronen durch das elektrische Längsfeld nachgeliefert werden.

Der Mechanismus der Streuung von im Driftfeld beschleunigten Elektronen scheint also durchaus in der Lage zu sein, die schnellen Elektronen in radialer Richtung nachzuliefern, und es ergeben sich Relaxationslängen, die mit den experimentell bestimmten übereinstimmen. Man braucht also weder Grenzschichtschwingungen noch einen "unbekannten Mechanismus" heranzuziehen, der die Elektronen einer Neuverteilung der Energie unterziehen soll. Auch scheint es unnötig zu sein, das Langmuir-Paradoxon durch kollektive Wechselwirkung mehrerer Drift-Elektronen mit dem Plasma zu erklären. Vielmehr dürften die hohen ungerichteten Energien der Elektronen in Niederdruckentladungen auf die gleiche Weise erzeugt werden wie bei höheren Drücken: Der geringeren Anzahl der Stöße bei niederen Drücken steht die wesentlich höhere Driftenergie gegenüber, die bei den Stößen thermalisiert wird.

Den Herren Dr. G. von Gierke, Dipl.-Phys. W. Herrmann und Dr. H. Wimmel danke ich für wertvolle Diskussionen und Ratschläge, Fräulein C. Seidel für die Programmierung der Rechnungen.

Literaturverzeichnis

- (1) I. Langmuir, Phys. Rev. 26, 585 (1925)
- (2) I. Langmuir, Proc. Nat. Acad. Sci. 14, 627 (1928)
- (3) I. Langmuir, Estratto Dagli Atti del Congresso Internazionale dei Fisici Como (Sept. 1927)
(Deutsche Übersetzung in Z. Phys. 46, 271 (1928))
- (4) L. Tonks und I. Langmuir, Phys. Rev. 34, 876 (1929),
insbesondere Fußnote 21 auf S. 898
- (5) D. Gabor, E.A. Ash und D. Dracott, Nature 176, 916 (1955);
D. Gabor, IRE Transactions AP 4, 526 (1956)
- (6) T.J. Killian, Phys. Rev. 35, 1238 (1930)
- (7) A. v. Engel und M. Steenbeck, Wiss. Veröff. a.d.
Siemens-Werken 15, H. 3, 42 (1936)
- (8) A. v. Engel, Z. techn. Phys. 17, 404 (1936)
- (9) J.H. Simons und R.P. Seward, J. Chemical Phys. 6, 790 (1938)
- (10) B. Klarfeld, J. Phys. USSR 5, 155 (1941)
- (11) K. Takayama, H. Ikegami und S. Miyazaki, Phys. Rev.
Letters 5, 238 (1960)
Y.H. Ichikawa und H. Ikegami, Progr. Theor. Phys. 28,
315 (1962)
- (12) R. Rompe, S. Ullrich und H. Wolff, Beiträge aus der
Plasmaphysik 1, 245-9 (1960/61)
- (13) Private Mitteilung von S. Ullrich und H. Wolff
- (14) A. Schmidt, Diskussionsbemerkung im Anschluß an den
Vortrag (17)
- (15) A. van der Ziel, Diskussionsbemerkung im Anschluß an
den Vortrag (17)
- (16) M. Emeléus, Nature 177, 943 (1956)
- (17) G. v. Gierke, W. Ott und F. Schwirzke, Proc. Fifth Int.
Conf. on Ionization Phenomena in Gases, Munich 1961,
Vol. II, S. 1412
(North-Holland Publishing Company, Amsterdam)
- (18) B. Klarfeld, J. Technical Phys. USSR 8, 2012 (1938)
- (19) U. Grossmann-Doerth und J. Junker, Laborbericht MPI 1960
- (20) W. Verweij, Philips Res. Repts Suppl. 1961, No 2
- (21) W. Ott, Z. f. Naturforschung 17a, 962 (1962)

	r (cm)	p (mTorr)	I (A)	T _e (°K)	n ₀ (cm ⁻³)	E (V/cm)	v _d v _{th}	λ (cm)	r λ	eEλ (eV)	eE · v _d v _{th} (eV)	ΔI I		Z _{relax} r		Z(ξ _w) (cm ⁻¹ sec ⁻¹)	Z _w (cm ⁻¹ sec ⁻¹)	Z(ξ _w) Z _w
												B = 1	B = 0,5	B = 1	B = 0,5			
Langmuir (1)	1,6	0,75	2	30000	8 · 10 ¹⁰	0,25	0,26	8,8	0,18	2,2	0,57	15	7,4	0,8	1,4	9,3 · 10 ¹⁶	5,4 · 10 ¹⁶	1,7
Langmuir (2)	1,5	0,75	0,1	36000	3,4 · 10 ⁹	0,25 (gest.)	0,32	9,6	0,16	2,4	0,78	17	8,5	0,8	1,4	2,9 · 10 ¹⁵	2,4 · 10 ¹⁵	1,2
Killian (6)	3,1	0,2	5	38000	5,25 · 10 ¹⁰	0,0932	0,51	37	0,084	3,5	1,8	37	19	0,8	1,2	1,5 · 10 ¹⁷	7,8 · 10 ¹⁶	1,9
	3,1	1,0	5	27500	1,03 · 10 ¹¹	0,196	0,14	6,6	0,47	1,3	0,18	5,1	2,6	0,7	0,9	5,3 · 10 ¹⁶	1,3 · 10 ¹⁷	0,4
	3,1	5,4	5	19900	2,16 · 10 ¹¹	0,311	0,078	0,89	3,5	0,28	0,022	0,9	0,4	0,15	0,16	5,2 · 10 ¹²	2,3 · 10 ¹⁷	2,2 · 10 ⁻⁵
Klarfeld (18)	1,6	1	0,1	32500	3,1 · 10 ⁹	0,187	0,32	6,7	0,24	1,25	0,40	9,6	4,8	0,9	1,4	2,3 · 10 ¹⁴	2,2 · 10 ¹⁵	0,1
	1,6	7,5	0,1	20700	7,7 · 10 ⁹	0,527	0,16	0,65	2,5	0,34	0,054	2,1	1,0	0,18	0,20	1,4 · 10 ¹²	4,3 · 10 ¹⁵	3,4 · 10 ⁻⁴
Gabor (5)	1,5	0,8	0,1	26400	1,7 · 10 ⁹	0,127	0,74	7,3	0,21	0,93	0,69	20	10	0,5	1,0	5,1 · 10 ¹³	1,0 · 10 ¹⁵	5,1 · 10 ⁻²
	1,5	1,9	0,1	25500	2,1 · 10 ⁹	0,26	0,61	3,0	0,50	0,78	0,48	15	7,3	0,3	0,5	5,0 · 10 ¹³	1,2 · 10 ¹⁵	4,1 · 10 ⁻²
	1,5	2,7	0,1	23500	2,65 · 10 ⁹	0,36	0,50	2,0	0,75	0,72	0,36	12	6	0,2	0,4	9,4 · 10 ¹³	1,5 · 10 ¹⁵	6,3 · 10 ⁻²

Tabelle 1:

Zusammenstellung und Auswertung in der Literatur angegebener Ergebnisse von Messungen in der positiven Säule einer Quecksilberdampfentladung.

r = Rohrradius, p = Druck, I = Entladungsstromstärke, T_e = Elektronentemperatur, n₀ = Elektronendichte auf der Achse, E = Längsfeldstärke, v_d, v_{th} = Drift- bzw. mittlere thermische Geschwindigkeit, λ = mittlere freie Weglänge der Elektronen, ΔI/I = relative "Temperaturerhöhung" der Elektronen bei einem Stoss, Z_{relax} = Relaxationsstrecke für die Auffüllung des schnellen Teils der Maxwellverteilung, Z(ξ_w) = Zahl der pro cm Rohrlänge und sec auf die Energie ξ_w = (-) eU_w nachbeschleunigten Elektronen, U_w = Wandpotential, Z_w = Zahl der pro cm Rohrlänge und sec von den Wänden absorbierten Elektronen.

Bildunterschriften

Abb. 1: Der Anteil S der durch Stöße hereingestreuten Elektronen in Abhängigkeit vom Wandabstand z/λ_D für die Fälle, daß die Elektronen

- (1) nur in einer Linie,
- (2) nur in einer Ebene,
- (3) aus dem gesamten Halbraum auf die Sonde kommen.

Abb. 2: Die Relaxationsstrecke für die Wandstörung in Abhängigkeit von der relativen Temperaturerhöhung der Elektronen bei den Stößen. Dabei bedeutet Relaxation nur: Der schnelle Maxwellschwanz muß bis auf den Bruchteil $\frac{1}{e}$ aufgefüllt sein, unabhängig von der genauen Energieverteilung der Elektronen. Fall 1, 2 und 3 wie in Abb. 1.

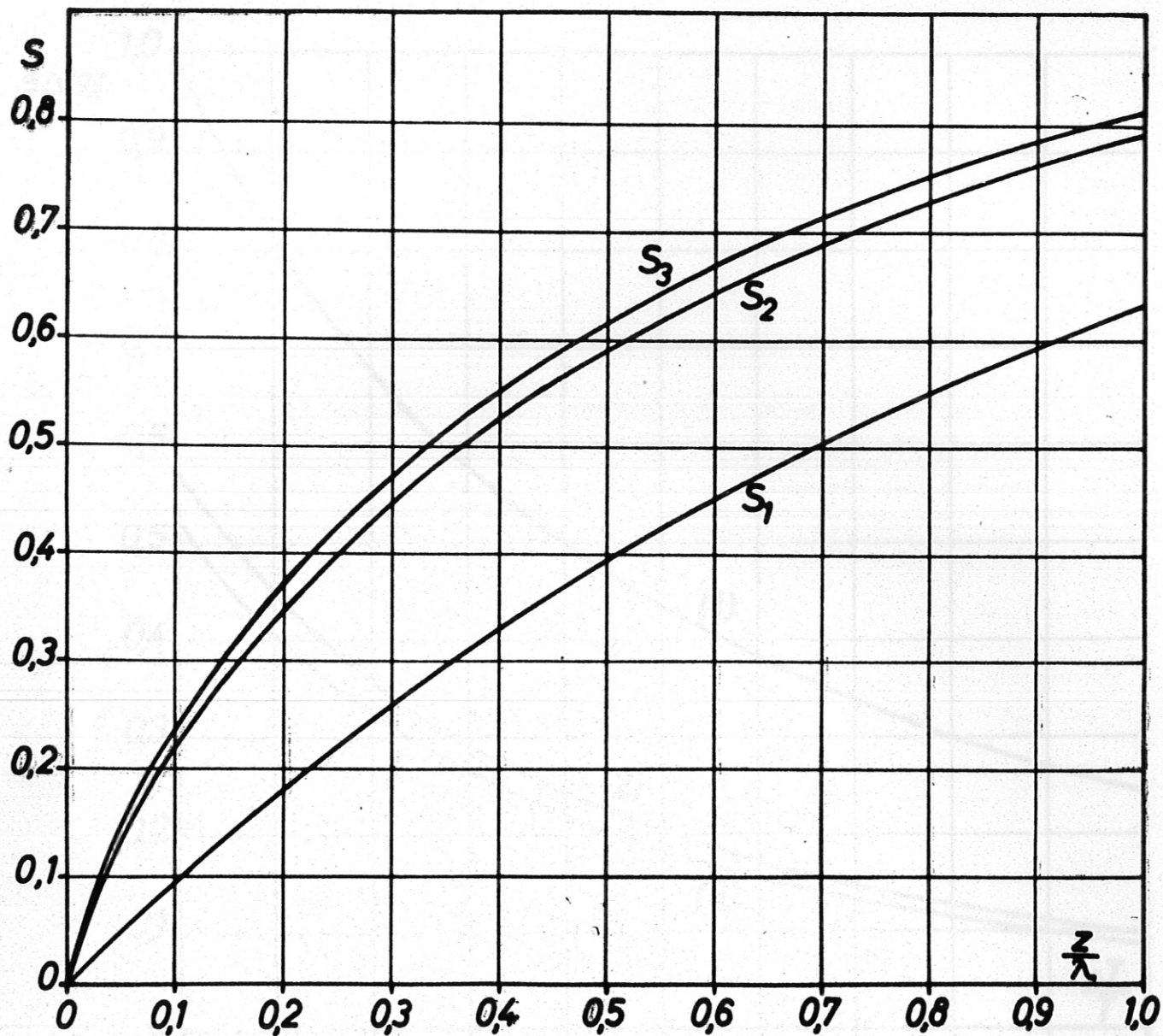


Abb. 1

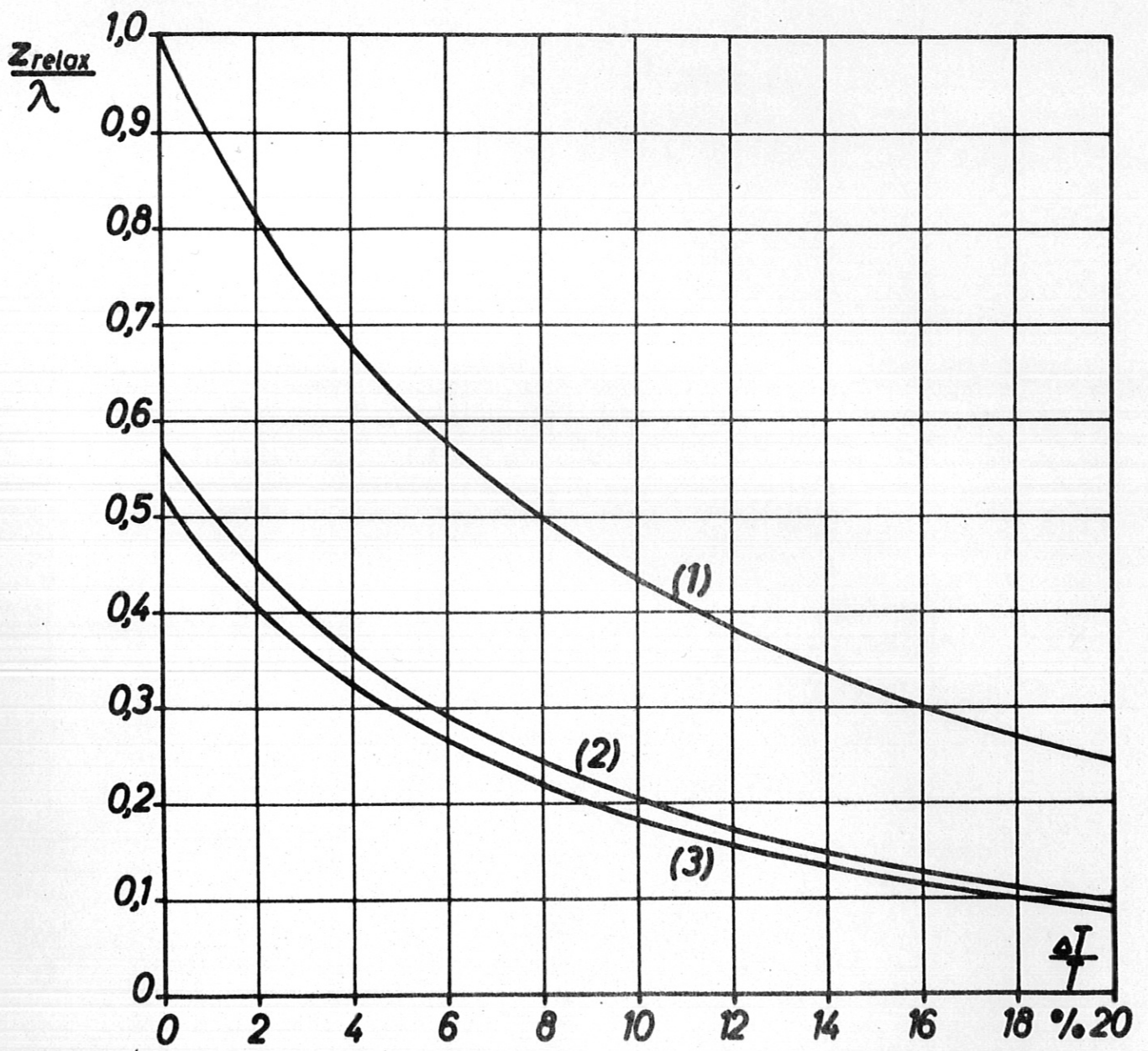


Abb. 2