

ABSCHLIESSENDER BERICHT ÜBER
DIE MESSUNGEN ZUR ANOMALEN DIFFUSION
IN DER POSITIVEN SÄULE IM
LONGITUDINALEN MAGNETFELD
(AQUATRON)

von
K. H. Wöhler ⁺)

IPP 2/11

Jan. 1963

I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K

G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

ABSCHLIESSENDER BERICHT ÜBER DIE MESSUNGEN ZUR ANOMALEN DIFFUSION IN DER POSITIVEN SÄULE IM LONGITUDINALEN MAGNETFELD (AQUATRON)

von
K. H. Wöhler ⁺)

IPP 2/11

Jan. 1963

⁺) Gegenwärtige Anschrift:
US Naval Postgraduate School,
Monterey, California/USA

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

I n h a l t s v e r z e i c h n i s

	(Seite)
Einleitung	1
1. <u>Sondenmessungen</u>	2
1.1. Ionenstrom zu einer ebenen Sonde	2
1.2. Elektronenstrom zur Sonde	2
1.3. Kritik der einfachen Sondentheorie und das BOHMsche Kriterium	4
1.4. Korrektur der Ionenstromdichte zur Sonde	7
1.5. Bestimmung der Elektronentemperatur	8
1.6. Doppelsondenmessung	9
1.7. Deutung der Asymmetrie der Kennlinie	11
1.8. Temperaturbestimmung aus der Doppelsondenmessung bei zusätzlicher HF-Ionisierung	12
1.9. Messung der Geschwindigkeitsverteilung	13
1.10. Messung der axialen elektrischen Feldstärke	14
1.11. Vergleich der gemessenen radialen Potentialverteilung mit der aus der SCHOTTKYSchen Theorie berechneten	16
2. <u>Randbedingungen in der Theorie der positiven Säule</u>	19
2.1. Die modifizierte SCHOTTKYSche Balancegleichung der Säule	19
2.2. Gültigkeitsbereich der Diffusionstheorie	21
2.3. Abschätzung der Größe von $J_0(2,4 R'/R)$	22
2.4. Bedingungen für Zylindersymmetrie und Radialfeldumschlag	24
2.5. Abschätzung der azimuthalen Trägergeschwindigkeiten	27
3. <u>Wirkungsquerschnitt für elastische Streuung von Elektronen an He-Atomen</u>	29
4. <u>Messungen mit zusätzlichen helischen Windungen</u>	31
4.1. Das Vakuumfeld	31
4.2. Die Stromverteilung zur Erzeugung des Feldes	32
4.3. Magnetische Flächen, die ganz im Rohr liegen	34
4.4. Meßergebnisse und einige Gesichtspunkte zu deren Deutung	35
5. <u>Diffusion in der positiven Säule mit zusätzlichem azimuthalen Magnetfeld</u>	38
5.1. Meßergebnisse	38
5.2. Die Grundgleichungen für die Diffusion in der positiven Säule mit zusätzlichem azimuthalen Magnetfeld	39
5.3. Lösung der Grundgleichungen im zylindersymmetrischen Feld	42
5.4. Die Stabilität der Lösung	46
Literatur	70

ABSCHLIESSENDER BERICHT ÜBER
DIE MESSUNGEN ZUR ANOMALEN DIFFUSION
IN DER POSITIVEN SÄULE IM
LONGITUDINALEN MAGNETFELD
(AQUATRON)

K. H. Wöhler

Einleitung

Die Untersuchungen zum sogenannten "LEHNERT-EFFEKT" (seit der Deutung des Effekts durch KADOMTSEV wird das Phänomen häufig als die Konvektionsinstabilität der positiven Säule bezeichnet), die im MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PHYSIK UND ASTROPHYSIK, München, durchgeführt wurden, sind vorläufig abgeschlossen worden. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen wurden zum Teil auf der Salzburger Konferenz ⁺) vorgetragen, zum Teil sind sie als Dissertation bei der Universität München vorgelegt und in dieser Form in der ZEITSCHRIFT FÜR NATURFORSCHUNG ⁺⁺) erschienen. Der vorliegende Bericht stellt eine Ergänzung zu der Dissertation dar. Es werden einige Formeln und Ableitungen etwas ausführlicher dargestellt, als dies in der Dissertation geschehen konnte, wo teilweise nur auf die Literatur verwiesen wurde. Ferner werden die Ergebnisse, die bisher noch ungedeutet sind, zusammengestellt. Die einzelnen Abschnitte des Berichts sind ohne festen inneren Zusammenhang. Im ersten Abschnitt ist einiges über Sondenmessungen zusammengestellt, der zweite Abschnitt befaßt sich mit den Randbedingungen in der Theorie der positiven Säule, der dritte Abschnitt handelt über den Wirkungsquerschnitt für elastische Streuung von Elektronen an He-Atomen, im vierten Abschnitt sind die noch ungedeuteten Ergebnisse der Messungen mit zusätzlichem "Spitzer-Feld" zusammengestellt, und im fünften Abschnitt schließlich sind die Rechnungen zur Stabilität der Säule mit zusätzlichem magnetischen Azimutalfeld etwas ausführlicher behandelt.

⁺) Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Salzburg, Sept. 1961

⁺⁺) Z.f.Naturforschg. 17a, 11, 937, 1962

1. Sondenmessungen

1.1. Ionenstrom zu einer ebenen Sonde

Aus der Gaskinetik kennt man die Zahl der Stöße der Gasmoleküle pro Sekunde auf ein Flächenelement der Wand von 1 cm^2 . Es ist: $\nu_{nw} = \frac{N \bar{v}}{4}$, darin ist N die Teilchendichte, $\bar{v} = (8kT_n / \pi m_n)^{1/2}$ die mittlere thermische Geschwindigkeit, wenn Maxwellverteilung vorausgesetzt wird. In der Grenzschicht einer negativ gegen das umgebende Plasma geladenen Sonde werden positive Ionen zur Sonde hin beschleunigt. Ionen, die bei ihrer thermischen Bewegung die Schichtgrenze berühren, werden bei großer Ausdehnung der Sondenfläche auf die Sonde treffen und als positiver Strom abgeführt werden. Wenn die Schicht nicht zu dick ist, dann wird die Sonde sich den Ionen gegenüber verhalten wie ein Loch in der Wand für das neutrale Gas. Die Zahl der Ionen, die auf die Sonde treffen, ist gleich der Zahl der gaskinetischen Stöße der Ionen auf die Sonde infolge ihrer thermischen Bewegung, also:

$$\nu_{iw} = \frac{n_i \bar{v}_i}{4} = \frac{n_i}{4} \sqrt{\frac{8 kT_i}{\pi m_i}} = n_i \sqrt{\frac{kT_i}{2 \pi m_i}} ; \quad (1)$$

dabei ist n_i die Dichte der Ionen am Sondenort, d.h. an der Schichtgrenze im ungestörten Plasma, T_i die Ionentemperatur (Maxwellverteilung angenommen), m_i die Ionenmasse. Die Ionenstromdichte zur Sonde wird damit:

$$j_i = e n_i \sqrt{\frac{kT_i}{2 \pi m_i}} \quad (2)$$

1.2. Elektronenstrom zur Sonde

Der Bruchteil aller Elektronen in der Volumeneinheit, der eine Geschwindigkeitskomponente zwischen v_x und $v_x + dv_x$ in Richtung auf die ebene Sonde hat, deren Flächennormale in x -Richtung weist, ist:

$$dn_{e,x} = n_e F(v_x) dv_x = n_e \left(\frac{m_e}{2 \pi kT_e} \right)^{1/2} e^{-\frac{m_e v_x^2}{2 kT_e}} dv_x ; \quad (3)$$

der von den Elektronen erzeugte Stromanteil ist:

$$dj_{e,x} = - e n_e v_x \left(\frac{m_e}{2\pi kT_e} \right)^{1/2} e^{-\frac{m_e v_x^2}{2 kT_e}} dv_x \quad (4)$$

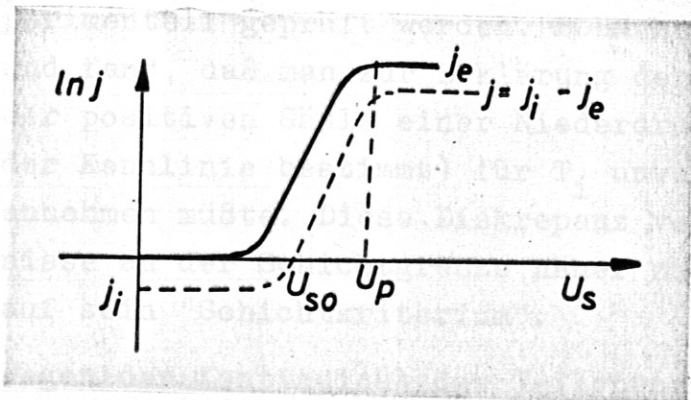
Ist die Sonde gegenüber dem Plasmapotential am Sondenort negativ geladen ($U_s < U_p$), dann gelangen nur die Elektronen zur Sonde, deren kinetische Energie größer ist als die zu durchlaufende Bremsspannung $U_p - U_s$. Bei der Summation ergibt sich wegen

$$\frac{m_e v_x^2}{2} \gg e(U_p - U_s) \text{ als untere Grenze: } \sqrt{\frac{2e(U_p - U_s)}{m_e}}, \text{ also:}$$

$$j_e = e n_e \left(\frac{m_e}{2\pi kT_e} \right)^{1/2} \int_{\sqrt{\frac{2e(U_p - U_s)}{m_e}}}^{\infty} v_x e^{-\frac{m_e v_x^2}{2 kT_e}} dv_x \quad (5)$$

$$= e n_e \left(\frac{kT_e}{2\pi m_e} \right)^{1/2} e^{-\frac{e(U_p - U_s)}{kT_e}}$$

Trägt man den Logarithmus des Elektronenstroms gegen das Sondenpotential auf, dann kann aus dem geradlinigen Teil der Kennlinie die Elektronentemperatur ermittelt werden. Es ist:



$$\ln j_e = \text{const.} + \frac{eU_s}{kT_e} \quad (6)$$

Fig. 30

Wird die Sonde im Plasma gegen den Außenraum isoliert, dann muß der Gesamtstrom verschwinden, also:

$$j = j_i - j_e = \frac{en_i}{4} \left(\frac{8kT_i}{\pi m_i} \right)^{1/2} - \left(\frac{kT_e}{2\pi m_e} \right)^{1/2} e^{-\frac{e(U_p - U_{so})}{kT_e}} \quad (7)$$

Setzt man nun Quasineutralität des Plasmas voraus, also $n_i \approx n_e = n$, dann wird

$$\frac{e(U_p - U_{so})}{kT_e} = \ln \frac{\left(\frac{8kT_e}{\pi m_e} \right)^{1/2}}{\left(\frac{8kT_i}{\pi m_i} \right)^{1/2}}$$

$$U_p - U_{so} = \frac{kT_e}{e} \ln \frac{\bar{v}_e}{\bar{v}_i} = \frac{kT_e}{e} \ln \left(\frac{m_i T_e}{m_e T_i} \right)^{1/2} \quad (8)$$

1.3. Kritik der einfachen Sondentheorie und das BOHMsche Kriterium

Die im vorigen Abschnitt skizzierte einfache Sondentheorie geht auf LANGMUIR zurück. Daß diese Theorie die Verhältnisse nicht richtig beschreibt, wurde zuerst von BOHM⁸⁾ gezeigt. Der Wurzelausdruck $(m_i T_e / m_e T_i)^{1/2}$ ist nämlich gerade das Verhältnis von Elektronen- zu Ionensättigungsstrom zur Sonde und kann experimentell geprüft werden. BOHM hat dieses Verhältnis gemessen und fand, daß man zur Erklärung der gemessenen Werte im Plasma der positiven Säule einer Niederdruckentladung (T_e wurde aus der Kennlinie bestimmt) für T_i unvernünftig hohe Werte ($T_i \approx T_e$) annehmen müßte. Diese Diskrepanz veranlaßte BOHM, die Verhältnisse an der Schichtgrenze näher zu studieren und führte ihn auf sein "Schichtkriterium".

Wegen der Kontinuität des Teilchenflusses gilt für die Ionen, die alle die Sonde erreichen, wenn sie in die Schicht eintreten und wenn die Sonde negativ gegen das umgebende Plasma ist:

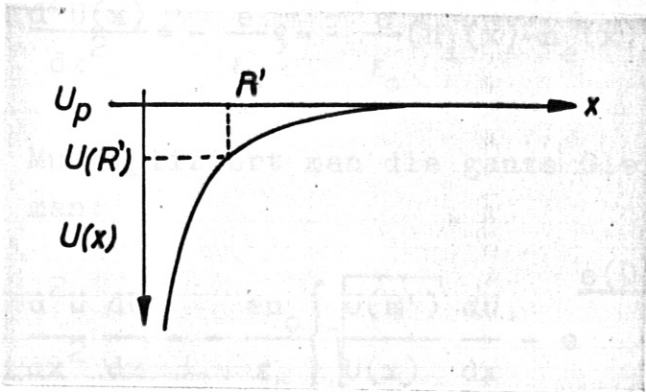


Fig. 31

$$j_i(x) = j_i(R'),$$

d.h.

$$v_{ir}(x)n_i(x) = v_{ir}(R')n_i(R') \quad (9)$$

Wegen des Energiesatzes ist für die Ionen:

$$m_i v_{ir}^2(x) = 2e(U_p - U(x)),$$

also:

$$n_i(x) \sqrt{\frac{2e(U_p - U(x))}{m_i}} = n_i(R') \sqrt{\frac{2e(U_p - U(R'))}{m_i}} \quad (10)$$

Beziehen wir alle Potentiale auf das Potential U_p , setzen also $U_p = 0$, so wird

$$n_i(x) = n_i(R') \sqrt{\frac{U(R')}{U(x)}} \quad (11)$$

Die leichten Elektronen werden in dem Feld vor der Sonde wegen $U(x) < U(R') < U_p = 0$ gebremst und nehmen eine Boltzmannverteilung an:

$$n_e(R') = n_p e^{-\frac{e(U_p - U(R'))}{kT_e}} \quad ;$$

$$n_e(x) = n_p e^{-\frac{e(U_p - U(x))}{kT_e}} \quad ; \quad (12)$$

$$n_e(x) = n_e(R') e^{\frac{e(U(x) - U(R'))}{kT_e}} \quad (13)$$

Nehmen wir nun an, daß $n_e(R') \approx n_i(R') = n_0$ ist, d.h. daß das Gebiet zwischen R' und dem feldfreien Plasma mit $U_p = 0$ nur eine Art Übergangsgebiet ist, in dem noch keine merkliche Raumladung aufgebaut ist, dann können wir für das eigentliche Raum-

ladungsgebiet die Poissongleichung in der Form anschreiben:

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} = - \frac{e}{\epsilon_0} \rho = - \frac{e}{\epsilon_0} (n_i(x) - n_e(x)) = - \frac{e}{\epsilon_0} n_0 \left\{ \sqrt{\frac{U(R')}{U(x)}} - e^{\frac{e(U(x)-U(R'))}{kT_e}} \right\}. \quad (13)$$

Multipliziert man die ganze Gleichung mit dU/dx , dann erhält man:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} \frac{dU}{dx} = - \frac{en_0}{\epsilon_0} \left\{ \sqrt{\frac{U(R')}{U(x)}} \frac{dU}{dx} - e^{\frac{e(U(x)-U(R'))}{kT_e}} \frac{dU}{dx} \right\}$$

oder

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{dU}{dx} \right)^2 = \frac{en_0}{\epsilon_0} \left\{ \frac{kT_e}{e} \frac{d}{dx} e^{\frac{e(U(x)-U(R'))}{kT_e}} - \frac{d}{dx} 2 \sqrt{U(R')U(x)} \right\}.$$

Integration ergibt:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dU}{dx} \right)^2 = \frac{en_0}{\epsilon_0} \left\{ \frac{kT_e}{e} e^{\frac{e(U(x)-U(R'))}{kT_e}} - 2 \sqrt{U(x)U(R')} \right\} + \text{const}. \quad (14)$$

Die Integrationskonstante kann so bestimmt werden, daß wir annehmen, an der Stelle $x = R'$, $U = U'$ soll das elektrische Feld dU/dx praktisch Null sein, verglichen mit dem Feld in der Schicht $x < R'$. Man erhält also:

$$\text{const} = \frac{en_0}{\epsilon_0} \left\{ 2 U(R') - \frac{kT_e}{e} \right\}$$

und damit:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dU}{dx} \right)^2 = \frac{en_0}{\epsilon_0} \left\{ \frac{kT_e}{e} \left(e^{\frac{e(U(x)-U(R'))}{kT_e}} - 1 \right) + 2 U(R') \left(1 - \sqrt{\frac{U(x)}{U(R')}} \right) \right\}. \quad (15)$$

Entwickeln wir U in der Nähe von U' , also $U - U' = \Delta U \ll U'$, bis zur zweiten Ordnung:

$$e^{\frac{e(U(x)-U(R'))}{kT_e}} \approx 1 + \frac{e}{kT_e} \Delta U + \frac{1}{2} \left(\frac{e}{kT_e} \right)^2 \Delta U^2;$$

$$\sqrt{\frac{U(x)}{U(R')}} = \sqrt{1 + \frac{\Delta U}{U(R')}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta U}{U(R')} - \frac{1}{8} \frac{\Delta U^2}{U'^2} ; \left(\frac{dU}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d\Delta U}{dx}\right)^2 ;$$

dann wird:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\Delta U}{dx}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{en_o}{\epsilon_o} \left\{ \frac{e}{kT_e} + \frac{1}{2} \frac{1}{U(R')} \right\} \Delta U^2 \quad (16)$$

Damit dieser Ausdruck reell bleibt, muß die Klammer positiv bleiben. $U(R')$ ist aber negativ. Das bedeutet: der Bereich, in dem es eine merkliche Raumladung geben und die Poisson-Gleichung sinnvoll angewandt werden kann, beginnt an der Stelle $x = R'$, an der

$$\frac{e}{kT_e} - \frac{1}{2} \frac{1}{|U(R')|} > 0 \quad \text{oder} \quad |U(R')| > \frac{1}{2} \frac{kT_e}{e} \quad (17)$$

erfüllt ist. Anders ausgedrückt: die Raumladungsschicht beginnt an der Stelle $x = R'$, an der die Ionen in der davor liegenden Übergangsschicht eine Geschwindigkeit

$$v_{ir}(R') = \left(\frac{2e|U(R')|}{m_i}\right)^{1/2} > \left(\frac{kT_e}{m_i}\right)^{1/2} \quad (18)$$

erreicht haben.

1.4. Korrektur der Ionenstromdichte zur Sonde

Ausgehend von dem Schichtkriterium, hat BOHM den Ionensättigungsstrom zu einer ebenen Sonde korrigiert. Danach fallen die Ionen jetzt nicht mehr gemäß ihrer thermischen Geschwindigkeit $\bar{v}_i = (8kT_i/\pi m_i)^{1/2}$ in die Grenzschicht hinein, sondern in der Stoßzahl $\nu_{iw} = n_i \bar{v}_i / 4$ ist für \bar{v}_i die Geschwindigkeit der Ionen einzusetzen, die diese an der Schichtgrenze haben, also:

$$v_{ir}(R') = \left(\frac{kT_e}{m_i}\right)^{1/2} \quad \nu_{iw} = \frac{n_i}{4\sqrt{2}} \left(\frac{2kT_e}{m_i}\right)^{1/2}$$

Von BOHM wurde für Sonden, deren Durchmesser klein gegen die freie Weglänge der Ionen ist, für die Ionenstromdichte der Ausdruck angegeben:

$$j_i = 0,4 e n_i \left(\frac{2kT_e}{m_i}\right)^{1/2} \quad (19)$$

(der etwas andere Faktor rührt von der endlichen Ausdehnung der Sonde her).

Auch das Floatingpotential muß entsprechend modifiziert werden, und man erhält:

$$U_p - U_{so} = \frac{kT_e}{e} \ln \frac{\bar{v}_e}{v_{ir}(R')} = \frac{kT_e}{e} \ln \left(\frac{8m_i}{\sqrt{m_e}} \right)^{1/2} \quad (20)$$

1.5. Bestimmung der Elektronentemperatur

Zur Bestimmung der Elektronentemperatur aus der Sondenkennlinie ist erforderlich, daß das Plasmapotential keine starken zeitlichen Schwankungen zeigt. Schwankt das Potential zwischen zwei Endwerten, so wird bei der Messung des Elektronenstroms zur Sonde ein mittlerer Strom gemessen, d.h. die Kennlinie ist verzerrt. Die Elektronentemperatur wird zu hoch bestimmt (s. Fig. 5).

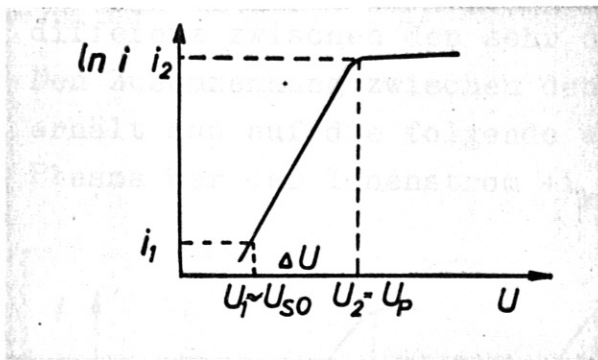


Fig. 32

Es ist:

$$T_e = \text{const} \frac{\Delta U}{\ln \frac{i_2}{i_1}} \quad (21)$$

Wird für i_2 der Sättigungsstrom, für i_1 ein sehr kleiner Strom gewählt, dann darf für ΔU annähernd die Differenz $\Delta U_G = U_p - U_{so}$

zwischen Plasmapotential und Floatingpotential gesetzt werden. Schwankt nun das Plasmapotential um ΔU_p , so ist:

$$T'_e = \frac{\text{const}}{\ln \frac{i_2}{i_1}} (\Delta U_G + \Delta U_p) = T_e + \frac{\text{const}}{\ln \frac{i_2}{i_1}} \Delta U_p = T_e + \frac{T_e \Delta U_p}{\Delta U_G}$$

also:

$$\frac{T'_e - T_e}{T_e} = \frac{\Delta U_p}{\Delta U_G} \quad (22)$$

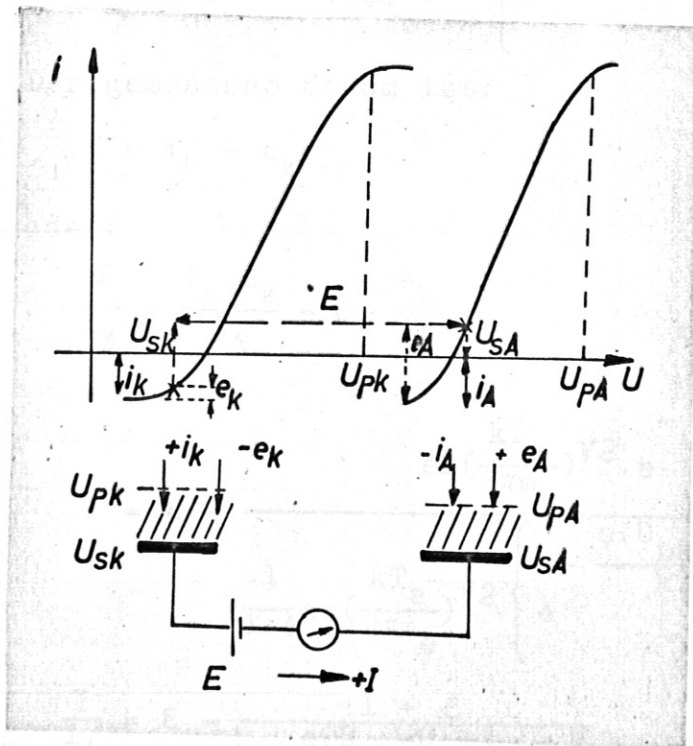
Für Heliumatome findet man bei einer Elektronentemperatur von 3 eV ein $\Delta U_G \approx 12$ Volt, wobei die durch das BOHM-Kriterium

modifizierten Ausdrücke benutzt wurden. Die Schwankungen des Plasmapotentials waren bei den Experimenten ohne HF-Ionisierung und unterhalb der kritischen magnetischen Feldstärke bis zu etwa 1,5 Volt groß. Die Elektronentemperaturen werden also etwa 10 % zu hoch bestimmt sein.

Bei zusätzlicher HF-Ionisierung erwies sich diese Methode der Temperaturbestimmung als völlig ungeeignet, da Fluktuationen bis zu 10 Volt auftraten.

1.6. Doppelsondenmessung

Aus den oben erwähnten Gründen ist versucht worden, die Elektronentemperatur aus einer Doppelsondenmessung zu bestimmen. Bei der Doppelsondenmessung geht nicht die große Amplitude der Schwankungen des Plasmapotentials gegen Erde in die Messung ein, sondern nur die viel kleineren Schwankungen der Potentialdifferenz zwischen den sehr dicht beieinander liegenden Sonden. Den Zusammenhang zwischen den Meßgrößen und der Temperatur erhält man auf die folgende Weise: Auf die Sonde K trifft vom Plasma her der Ionenstrom $+i_k$. Diesem entspreche im äußeren



Sondenkreis der neutralisierende Elektronenstrom $+i_k$. Der aus dem Plasma kommende Elektronenstrom $-e_k$ ist in dem Stromkreis entsprechend negativ zu zählen. Entsprechend sind die Ströme bei der Sonde A zu zählen (umgekehrtes Vorzeichen). Da der Strom durch beide Sonden gleich sein muß, gilt:

$$i_k - e_k = -i_A + e_A \quad (23)$$

Fig. 33

Der Elektronenstrom zur Sonde ist:

$$i_m = en \left(\frac{kT_e}{2\pi m_e} \right)^{1/2} e^{-\frac{e(U_{pm} - U_{sm})}{kT_e}} \quad (24)$$

Ferner ist:

$$U_{sk} + E = U_{sA} \quad (25)$$

Wir betrachten nun zunächst den etwas allgemeineren Fall, daß die Ionenströme zu den beiden Sonden nicht genau gleich sind, sondern daß

$$i_k/i_A = \epsilon = 1 + \eta \quad ; \quad (26)$$

dann ist:

$$i_k + i_A = e_k + e_A = i_A(1 + \epsilon) \quad (27)$$

Setzt man (24) in (27) ein, dann wird

$$i_A(1 + \epsilon) = en \left(\frac{kT_e}{2\pi m_e} \right)^{1/2} \left\{ e^{-\frac{e(U_{pk} - U_{sk})}{kT_e}} + e^{-\frac{e(U_{pA} - U_{sA})}{kT_e}} \right\} \quad (28)$$

Der gemessene Strom ist:

$$I = i_k - e_k \quad (29)$$

oder:

$$\frac{I}{i_A} = \frac{i_k - e_k}{i_A} = \epsilon - \frac{e_k}{i_A} \quad (30)$$

$$= \epsilon - \frac{en \left(\frac{kT_e}{2\pi m_e} \right)^{1/2} e^{-\frac{e(U_{pk} - U_{sk})}{kT_e}}}{1 + \epsilon en \left(\frac{kT_e}{2\pi m_e} \right)^{1/2} \left\{ e^{-\frac{e(U_{pk} - U_{sk})}{kT_e}} + e^{-\frac{e(U_{pA} - U_{sA})}{kT_e}} \right\}} \quad (30)$$

$$\frac{I}{i_A} = \epsilon - \frac{1 + \epsilon}{1 + \epsilon} \frac{e^{-\frac{e(U_{pk} - U_{sk})}{kT_e}}}{e^{-\frac{e(U_{pk} - U_{pA})}{kT_e}} + e^{-\frac{e(U_{pA} - U_{sA})}{kT_e}}} \quad (31)$$

Daraus liest man ab: Für $E = 0$ stellt sich ein Strom ein, der durch die Plasmapotentiale an den Sondenorten und durch die Ionensättigungsströme gegeben ist. Für $E \rightarrow +\infty$ wird $I/i_A \rightarrow \epsilon$. Für $E = U_{pA} - U_{pk}$ wird $I/i_A = \epsilon - \frac{1+\epsilon}{2}$, d.h. für $\epsilon = 1$ wird $I = 0$. Für $E \rightarrow -\infty$ vertauschen sich die Rollen der beiden Sonden. Nehmen wir jetzt an, daß die beiden Sonden gleich, die beiden Ionenströme zu ihnen gleich sind, also $\epsilon = 1$, dann ist die Kennliniensteigung:

$$\frac{dI}{dE} = \frac{2i_A \frac{e}{kT_e} e^{\frac{eE}{kT_e}} \frac{e(U_{pk} - U_{pA})}{kT_e}}{\left(1 + e^{\frac{e(U_{pk} - U_{pA})}{kT_e}} e^{\frac{eE}{kT_e}}\right)^2} \quad (32)$$

An der Stelle $I = 0$ ist:

$$e^{\frac{e(U_{pk} - U_{pA})}{kT_e}} e^{\frac{eE}{kT_e}} = 1,$$

also:

$$\left(\frac{dI}{dE}\right)_{I=0} = \frac{2i_A \frac{e}{kT_e}}{4} = \frac{i_A}{2} \frac{e}{kT_e} \quad (33)$$

Aus der Kennlinie (Fig. 8) liest man ab:

$$\left(\frac{dI}{dE}\right)_{I=0} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{i_A}{V^+}, \quad T_e = \frac{e}{2K} V^+ = 0,58 \cdot 10^4 V^+ \quad (34)$$

1.7. Deutung der Asymmetrie der Kennlinie

Bei der Messung nach der Doppelsondenmethode wurden zwei ebene Sonden von 4 mm Durchmesser Rücken an Rücken, im Abstand von 5 mm, gegeneinander isoliert, in die Entladung eingeführt und senkrecht zum Magnetfeld und zur Rohrachse orientiert. Die Meßschaltung zeigt Fig. 7. Die gemessenen Kennlinien zeigten dann,

wenn die der Kathode zugewandte Elektrode stark positiv war, mit Magnetfeld einen geringeren Sättigungsstrom. Diese Asymmetrie kann aus einer Verschiedenheit der beiden Ionensättigungsströme zur Sonde erklärt werden.

Nehmen wir an, daß die beiden Plasmapotentiale an den beiden Sondenorten nahezu gleich seien, so folgt aus (31):

$$\frac{I}{i_A} = 1 + \eta - \frac{1 + 1 + \eta}{1 + e^{\frac{e E}{kT}}} \quad (35)$$

oder mit:

$$\frac{e E}{kT} = e^{\frac{e(U_{SA} - U_{SK})}{kT}} = S$$

$$\frac{I}{i_A} = 1 + \eta - \frac{2 + \eta}{1 + S} = -\frac{1 - S}{1 + S} + \frac{\eta S}{1 + S} \quad (36)$$

Für $U_{SK} \gg U_{SA}$ kann S gegen 1 vernachlässigt werden, und man erhält für den Sättigungsstrom in dem Fall stark positiver Sonde K:

$$\frac{I}{i_A} \approx -1 + \eta S \quad (37)$$

Für positive η , d.h. $i_K > i_A$ wird der Absolutwert des Sättigungsstromes kleiner.

Die beobachtete Asymmetrie rührt also daher, daß der Ionenstrom zu der der Kathode zugewandten Sonde größer ist als der der Anode zugewandten Sonde. Das kann seinen Grund darin haben, daß die Sonde einen Schatten wirft. In dem Schatten fehlen die zur Erzeugung der Ionen notwendigen, auf die Anode hin beschleunigten Elektronen.

1.8. Temperaturbestimmung aus der Doppelsondenmessung bei zusätzlicher HF-Ionisierung

Als Maß für den Beitrag der HF zur gesamten Ionisierung kann die Verminderung der elektrischen axialen Feldstärke angesehen

werden. Fig. 34 zeigt die aus der Doppelsondenmessung bestimmten Elektronentemperaturen in Abhängigkeit von der elektrischen Feldstärke beim kritischen Punkt. Der abnorm starke Anstieg der gefundenen Werte schon bei geringen Änderungen der elektrischen Feldstärke läßt vermuten, daß es sich nicht wirklich um Elektronen handelt, die eine Maxwellverteilung mit einer solch hohen Temperatur haben. Eine mögliche Erklärung ist die folgende. Bei der Doppelsondenmessung wird nur der Teil der Elektronen gemessen und zur Temperaturbestimmung benutzt, der dem schnellen Schwanz der Verteilung angehört. Die Sondenpotentiale werden nur in einem engen Bereich um das Floatingpotential variiert, bei dem nur die schnellsten Elektronen die Sonde erreichen und den Ionenstrom kompensieren. Es ist denkbar, daß durch die HF ein Teil der Elektronen große Geschwindigkeiten erhält. Dadurch wird die Verteilungsfunktion am unteren Knickpunkt angehoben, sie erscheint flacher und täuscht die hohe Temperatur vor.

Der Fehler durch Verzerrung der Kennlinie infolge von Fluktuationen des Plasmapotentials kann vernachlässigt werden. Die Spannung zwischen den beiden Sonden im stromlosen Zustand wurde stets kleiner als 1 Volt gefunden. V^+ lag in der Größenordnung von 6 V, so daß der Fehler durch Verzerrung der Kennlinie kleiner als 20 % ist.

1.9. Messung der Geschwindigkeitsverteilung

Es ist versucht worden, die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen zu messen. Die Meßmethode beruht darauf, daß für eine ebene Sonde die Verteilungsfunktion proportional der zweiten Ableitung der Sondenkennlinie d^2I/dU^2 einerseits ist. Andererseits ist die Amplitude der ersten Oberwelle des von einer kleinen Wechselamplitude überlagerten Sondenstroms ebenfalls proportional der zweiten Ableitung der Sondenkennlinie. Dieser Zusammenhang gestattet, die Verteilungsfunktion direkt zu messen (s. SLOAN, GREGOR ¹⁸), BOYD, TWIDDY ¹⁹). Die Methode setzt aber voraus, daß die Verteilungsfunktion keine merkliche Driftkomponente enthält und wegen der hohen Empfindlichkeit eine sehr hohe Konstanz des Plasmapotentials am Sondenort. Ohne HF-Ionisierung

konnte die Geschwindigkeitsverteilung bei verschiedenen Gasdrucken und Magnetfeldern zwar gemessen werden, lieferte aber keine eindeutigen Ergebnisse. Bei Drucken $p > 10^{-1}$ Torr fällt auf, daß das Maximum der Verteilung bei verschiedenen Messungen beim gleichen Druck und Magnetfeld nicht bei der gleichen Energie lag. Auch scheint die Energie, bei der das Maximum liegt, sehr hoch. Das deutet darauf hin, daß die Sonde ^{nicht} wirklich die Energieverteilung der Elektronen in der positiven Säule gemessen hat, sondern die durch die Schichtung der Säule veränderte Verteilung. Die Schichtung der Säule ist gerade bei diesen Drucken sehr deutlich ausgeprägt. Da die Sonde bei verschiedenen Messungen beim gleichen Druck an verschiedenen Stellen einer Schicht gestanden haben kann, kann sich daraus die verschiedene Lage des Maximums erklären. Einheitlich scheint die Verschiebung des Maximums mit zunehmendem Magnetfeld zu höheren Energien und die Herausbildung eines neuen Maximums bei niedrigeren Energien (Fig. 35).

Bei einem Gasdruck von 10^{-1} Torr wurde eine Verteilungsfunktion beobachtet, die einer Maxwellverteilung sehr ähnlich sieht und die sich mit zunehmendem Magnetfeld ein wenig zu höheren Energien verschiebt. Das Maximum der Verteilung lag an der Stelle, die man nach der vorherigen Temperaturbestimmung erwarten würde (Fig. 36).

Bei 10^{-2} Torr hatte die Verteilungsfunktion eine sehr scharfe Spitze bei einer Energie, die niedriger als die thermische Energie der Elektronen war, die aus der Temperaturmessung gewonnen wurde. Der Schwanz der Verteilung ist stark angehoben und das Maximum der Verteilung wandert mit zunehmendem Magnetfeld zu höheren Energien (Fig. 37).

Bei zusätzlicher HF-Ionisierung war die Messung der Geschwindigkeitsverteilung wegen der starken Schwankungen des Plasmapotentials nicht möglich.

1.10. Messung der axialen elektrischen Feldstärke

Das axiale elektrische Feld wurde bestimmt aus der Potentialdifferenz zwischen zwei Zylindersonden in der Rohrachse in 1 m

Abstand voneinander. Die beiden Sonden wurden über hohe Widerstände mit Erde verbunden, so daß der Sondenstrom stets kleiner als $3 \mu\text{A}$ war und die Sonden sich praktisch immer auf Floating-potential befanden. An Teilwiderständen wurde die Spannung abgegriffen und auf die Eingänge eines Differentialverstärkers Typ D zum Tektronix 555 gegeben. Die horizontale Auslenkung des Oszillographenstrahls erfolgte mit einer dem Magnetfeld proportionalen Spannung. (Die Spulenerwärmung betrug maximal 5°C , was einer Änderung des Cu-Widerstandes von weniger als 2 % entspricht. Daher konnte die Spannung an den Spulen zur Horizontablenkung benutzt werden.) Auf diese Weise wurde die axiale elektrische Feldstärke direkt als Funktion der Magnetfeldstärke registriert (Fig. 4). Mit Hilfe einer Kompensationsspannung wurde die Anzeige des elektrischen Feldes bei $B = 0$ kompensiert. Der Oszillograph zeichnet dann nur die Feldstärkenänderung auf, wodurch an Empfindlichkeit gewonnen wurde. Die Genauigkeit der Methode hängt noch ab: a) davon, wie gut bei Variation des Magnetfeldes die Grenzsichtpotentialdifferenzen der beiden Sonden gleich sind, d.h. wie genau $U_{\text{so}} - U_{\text{p}}$ gleich sind; b) davon, wie groß die Fälschung des Plasmapotentials an den Sondenorten durch die Schichtung der Säule ist.

Die klassische Sondentheorie lieferte für die Potentialdifferenz $U_{\text{p}} - U_{\text{so}}$ in der Grenzsicht den Ausdruck:

$$\Delta U_{\text{G}} = U_{\text{p}} - U_{\text{so}} = \frac{kT_{\text{e}}}{e} \ln \left(\frac{m_{\text{i}} T_{\text{e}}}{m_{\text{e}} T_{\text{i}}} \right)^{1/2} \quad (38)$$

Für He-Ionen und für $T_{\text{e}} = 30000^\circ\text{K}$, $T_{\text{i}} = 500^\circ\text{K}$ erhält man:
 $\Delta U_{\text{G}} \approx 20 \text{ V}$. Berücksichtigt man das BOHMsche Kriterium, so wird:
 $\Delta U_{\text{G}} \approx 12 \text{ V}$. Da die niedrigste vorkommende elektrische Feldstärke 100 V/m ist und weil die beiden Sonden einen Abstand von 1 m haben, muß der Fehler durch Verschiedenheit der Grenzsichtspannungen wesentlich kleiner als 20 % im ganzen Druckbereich sein. Nach Messungen von PENNING³²⁾ sind die Potentialdifferenzen zwischen Schichtkopf und Schichtende in einer He-Säule von der Größenordnung 20 Volt. Da die Schichten nur bei hohen Drucken, d.h. bei elektrischen Feldstärken größer als 300 V/m auftreten, wird der Fehler, der dadurch zustandekommt, daß eine Sonde im

Schichtkopf, die andere im Schwanz steht, bei dem Sondenabstand von 1 m sicher kleiner als $20 : 300 \approx 10 \%$.

1.11. Vergleich der gemessenen radialen Potentialverteilung mit der aus der SCHOTTKYSchen Theorie berechneten

Die SCHOTTKYSche¹⁾ Theorie der positiven Säule liefert für die radiale Potentialverteilung den Ausdruck (Herleitung kann den Rechnungen in Abschnitt 5 entnommen werden):

$$U(r) - U(r_0) = \frac{D_e - D_i}{b_e + b_i} \ln \frac{n(r)}{n(r_0)} \quad ; \quad (39)$$

wählt man $r_0 = 0$, dann ist wegen

$$n(r) = n_0 J_0 \left(2,3 \frac{r}{R} \right) \quad , \quad (40)$$

wobei n_0 die Trägerdichte auf der Rohrachse ist:

$$U(r) - U(0) = \frac{D_e - D_i}{b_e + b_i} \ln J_0 \left(\frac{2,4}{R} r \right) \quad . \quad (41)$$

Für $B = 0$ ist $D_e = D_{e0} \gg D_{i0}$, $b_e = b_{e0} \gg b_{i0}$, so daß der Faktor vor dem Logarithmus wird:

$$D_{e0}/b_{e0} = kT_e/e = T_e(\text{eV})/1,16$$

($\ln J_0$ aus Fig. 38).

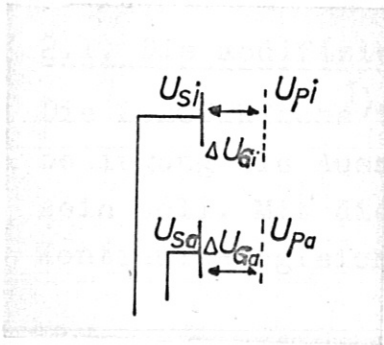
p(Torr)	T_e (eV)	D_{e0}/b_{e0}	U(r/R) - U(0) - Werte für			
			r/R=0,2	0,4	0,6	0,8
1,0	2,6	2,3	0,15	0,6	1,4	3,0
3×10^{-1}	3,6	3,1	0,2	0,8	1,8	4,0
10^{-1}	4,2	3,6	0,24	0,9	2,2	4,7
6×10^{-1}	5,0	4,3	0,28	1,1	2,6	5,6
10^{-2}	6,0	5,2	0,35	1,3	3,1	6,7

Die gemessenen Werte der Potentialverteilung bei $B = 0$ sind:
(Fig. 16)

p(Torr)	r/R =	0,2	0,4	0,6	0,8
1,0		1,0	3,0	5,3	9,4
3×10^{-1}		0,7	1,9	3,4	5,5
10^{-1}		0,5	1,4	2,6	4,5
6×10^{-2}		0,7	1,7	3,0	5,3
3×10^{-2}		0,7	1,9	3,5	6,3

Ein Vergleich mit den theoretischen Werten zeigt, daß die radiale Potentialverteilung sich bei Drucken $p > 3 \times 10^{-1}$ Torr nicht so verhält, wie es die Theorie vorhersagt. Das elektrische Radialfeld erscheint viel größer. Im folgenden werden drei mögliche Erklärungen diskutiert.

- 1) Die beiden Sonden, die im Abstand von 10 mm zur Kathode gerichtet aufgestellt sind und bei festgehaltenem Abstand gemeinsam radial beweglich sind, haben in der Achse und am Rand der Entladung verschiedene Grenzschichten. Bei der Messung wird die Sonde jeweils um 10 mm verschoben und die gemessene Potentialdifferenz, in der Achse beginnend, zu den vorher gemessenen addiert. Differenzen in den Grenzschichtspannungen der beiden Sonden addieren sich dann bis zum Rand auf. Eine Bestimmung der Plasmapotentiale aus dem oberen Knick der Kennlinie würde bei jeder einzelnen Messung die Messung der ganzen Kennlinie und die Bestimmung des Potentials mindestens eines Punktes der Kennlinie relativ zum Erdpotential erfordern. Diese Methode ist bei der vorliegenden Anordnung deshalb ungenauer, weil das Plasmapotential am Ort der Sonde bis zu 600 Volt betragen kann und auf 1 % genau bestimmt werden müßte. Um aber nun bei der benutzten Methode eine um den Faktor 3 größere Potentialdifferenz zwischen Rand und Achse aus der Verschiedenheit der Grenzschichtspannungen erklären zu können, müßte man annehmen, daß die Grenzschichtspannung bei $r = 0$ etwa 6 Volt größer ist als die am Rand; denn es ist:



$$U_{pi} - U_{pa} + \Delta U_{Gi} = \Delta U_{Ga} + (U_{si} - U_{sa}) \quad (42)$$

$$U_{pi} - U_{pa} = (U_{si} - U_{sa}) + \Delta U_{Ga} - \Delta U_{Gi}$$

Soll also $U_{pi} - U_{pa} = 3$ Volt werden, wenn $U_{si} - U_{sa} = 9$ Volt gemessen wurde, so müßte

$$\Delta U_{Ga} - \Delta U_{Gi} = -6 \text{ Volt sein.}$$

Wegen $\Delta U_G \approx \frac{kT_e}{e} \ln \left(\frac{2m_i}{m_e} \right)^{1/2} \approx \frac{kT_e}{e} \cdot 5 = \frac{T_e (\text{eV})}{1,16} \cdot 5$

folgt daraus, daß T_e am Rande um 1,4 eV, d.h. um 50 % kleiner sein müßte als T_e in der Achse. Ein so großer Temperaturgradient scheint nicht sehr wahrscheinlich.

- 2) Der Einfluß der Ionentemperatur macht sich am Rande stark bemerkbar.

Es ist:

$$\Delta U_{Ga} \approx \left(\frac{D_{eo} - D_{io}}{b_{eo}} \right) (a) \cdot 5 ; \quad \Delta U_{Gi} \approx \left(\frac{D_{eo} - D_{io}}{b_{eo}} \right) (i) \cdot 5 ;$$

$$\Delta U_{Ga} - \Delta U_{Gi} = \frac{D_{io}^{(i)} - D_{io}^{(a)}}{b_{eo}} \cdot 5 = -6 ;$$

dann wäre $D_{io}^{(a)} - D_{io}^{(i)} \approx b_{eo} = 90$. Da $D_{io} = \frac{kT_i b_{io}}{e}$ etwa 3×10^{-2} ist, müßte T_i oder b_{io} am Rande um den Faktor 3000 größer sein als in der Mitte, was auch unwahrscheinlich ist. "Rand" heißt hier $r = 0,8 R$, d.h. bei einem Rohr vom Radius 3 cm, 0,6 cm von der Wand entfernt, also noch keineswegs in der Wandschicht.

- 3) Als dritte Erklärungsmöglichkeit kommt der Einfluß der Schichten in Frage, die bei den hohen Drucken stark ausgeprägt sind. Die Schichtköpfe erscheinen zur Kathode hin konvex gekrümmt. Es ist denkbar, daß diese Wölbung mit einer Verzerrung der Potentiallinien zusammenhängt, die durch den Schichtmechanismus in Verbindung mit der Wand entsteht.

2. Randbedingungen in der Theorie der positiven Säule

2.1. Die modifizierte SCHOTTKYSche Balancegleichung der Säule

Die SCHOTTKYSche¹⁾ Theorie der positiven Säule benutzt als Randbedingung die Aussage, daß die Teilchendichte am Rande Null sein soll. Mit dieser Bedingung erhält man aus der Lösung der Kontinuitätsgleichung

$$n(r) = n_0 J_0 \left(\sqrt{\frac{Z}{D_a}} r \right) \quad (1)$$

die Bedingung

$$J_0 \left(\sqrt{\frac{Z}{D_a}} R \right) = 0 \quad (2)$$

Da keine negative Dichte auftreten soll, heißt das: $\sqrt{\frac{Z}{D_a}} R$ muß den Wert der ersten Nullstelle der Besselfunktion Nullter Ordnung, also 2,403, haben. Die Relation

$$\left(\frac{Z}{D_a} \right)^{1/2} R = 2,403 \quad (3)$$

stellt die Balancegleichung dar; denn Z und D_a sind eindeutig Funktionen der Elektronentemperatur, so daß durch diese Gleichung die Elektronentemperatur festgelegt wird.

Diese Bedingung ist aber sicher nicht ganz richtig; denn beispielsweise liefert sie wegen

$$V(r) - V(0) = \frac{D_e - D_i}{b_e + b_i} \ln J_0 \left(2,4 \frac{r}{R} \right) \quad (4)$$

ein unendlich negatives Potential an der Wand bei $r = R$, was gewiß nicht zutreffend sein kann. Eine genauere Betrachtung muß die Wandschicht berücksichtigen. Man läßt daher am Rande eine dünne Grenzschicht noch unbekannter Dicke zu und betrachtet die Säule nur bis zu einem Radius $R' < R$, wobei $R - R'/R \approx 1$ ist. Die Grenzschicht ist eine positive Raumladungsschicht, d.h. Ionen, die einmal in die Schicht eintreten, fallen in dem Raumladungsfeld beschleunigt zur Wand hin. Die Schichtgrenze

verhält sich also gegenüber Ionenverlusten wie eine gaskinetisch betrachtete Wand. Ionen, die die Schichtgrenze mit ihrer thermischen Geschwindigkeitskomponente in radialer Richtung $\bar{v}_{ir} = (3kT_i^+/m_i)^{1/2}$ treffen, sind für die Entladung verloren. T_i^+ ist eine Temperatur, die wir der Komponente \bar{v}_{ir} zuschreiben, wobei klar ist, daß es sich nicht um eine Temperatur im strengen Sinne handelt. Nach den elementaren Gesetzen der Gaskinetik wird die Flächeneinheit pro sek. von $\nu_{iw} = n_i \bar{v}_{ir} / 4$ Ionen getroffen. Die pro Längeneinheit des Rohres und pro sek. verlorenen Ionen sind:

$$N_- = 2 \pi R' \frac{n_i(R') \bar{v}_{ir}(R')}{4} \quad (5)$$

Diesen Trägerverlusten müssen im stationären Fall ebenso viele Trägererzeugungen gegenüberstehen, d.h.:

$$\begin{aligned} N_+ &= \int_0^{R'} 2\pi r Z n dr = 2 \pi n_0 Z \int_0^{R'} r J_0 \left(\sqrt{\frac{Z}{D_a}} r \right) dr \\ &= 2 \pi n_0 Z \frac{D_a}{Z} \int_0^{R' \sqrt{\frac{Z}{D_a}}} x J_0(x) dx = 2 \pi n_0 D_a x J_1(x) \Big|_0^{R' \sqrt{\frac{Z}{D_a}}} \\ &= 2 \pi n_0 D_a R' \sqrt{\frac{Z}{D_a}} J_1 \left(\sqrt{\frac{Z}{D_a}} R' \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Wegen $N_- = N_+$ ergibt das schließlich die Beziehung:

$$\frac{\bar{v}_{ir} J_0 \left(\sqrt{\frac{Z}{D_a}} R' \right)}{4} = D_a \sqrt{\frac{Z}{D_a}} J_1 \left(\sqrt{\frac{Z}{D_a}} R' \right) \quad (7)$$

Wenn man aus anderen Überlegungen eine Aussage über die Schichtdicke $R-R'$ gewonnen hat, dann stellt diese Beziehung wieder die Balancegleichung dar, aus der sich T_e ermitteln läßt.

Für \bar{v}_{ir} kann man nun wieder den Ausdruck einsetzen, der aus dem SCHWischen Schichtkriterium gewonnen wird, also:

2.2. Gültigkeitsbereich der Diffusionstheorie

Die modifizierte SCHOTTKYSche Balancegleichung kann benutzt werden, um eine Abschätzung über den Gültigkeitsbereich der Diffusionstheorie zu machen. Die Funktion J_1 ist in der Nähe der Nullstelle von J_0 nicht sehr stark abhängig von r , so daß wir für $r = R'$ annähernd den Wert an der Nullstelle von J_0 , also bei $r = R$ einsetzen dürfen. Es ist $J_1(2,403) = 0,52$. Weiter kann man annehmen, daß die Größe nicht sehr verschieden sein wird von dem Wert, den die einfache SCHOTTKYSche Theorie dafür angibt, nämlich: $2,403/R$. Für D_a erhält man, wenn man b_{io} gegenüber b_{eo} und T_i gegen T_e vernachlässigen kann:

$$D_a \approx \frac{kT_e}{e} \frac{b_{io}}{1 + b_{io} b_{eo} B^2} \quad (8)$$

Damit wird:

$$J_0 \left(\sqrt{\frac{Z}{D_0}} R' \right) = \frac{n(R')}{n_0} \approx \frac{4 D_a}{\bar{v}_{ir}} \frac{2,4}{R} 0,52 = \frac{5 D_a}{R \bar{v}_{ir}} \quad (9)$$

Physikalisch sinnvoll sind nur solche Bereiche, in denen $n(R') \ll n_0$. Nur dann wird auch die primitive SCHOTTKYSche Theorie brauchbar sein. Man verlangt also:

$$\frac{5 D_a}{R \bar{v}_{ir}} = \frac{5 \frac{kT_e}{e} b_{io}}{R \bar{v}_{ir} (1 + b_{io} b_{eo} B^2)} \ll 1 \quad (10)$$

Für die Beweglichkeiten findet man aus dem Datenbuch von BROWN und ALLIS²²⁾ für Helium annähernd folgende Ausdrücke:

$$b_{io} \approx \frac{0,7}{p} \quad b_{eo} \approx \frac{90}{p} \quad (11)$$

in m^2/Vs , wobei p in Torr angegeben ist. Damit erhält man:

$$\frac{3 T_e (eV)}{R \bar{v}_{ir} p (1 + 63 B^2/p^2)} \ll 1 \quad (12)$$

Für \bar{v}_{ir} kann man nun wieder den Ausdruck einsetzen, der aus dem BOHMSchen Schichtkriterium gewonnen wird, also:

$$\bar{v}_{ir} = \left(\frac{kT_e}{m_i}\right)^{1/2} = T_e^{1/2}(\text{eV}) \cdot 0,46 \cdot 10^4 .$$

Für $B = 0$, $R = 3 \times 10^{-2}$, $T_e = 4$ folgt $p \gg 4 \times 10^{-2}$ Torr. Das bedeutet, daß es für Drucke unter 10^{-1} Torr ohne die Anwesenheit eines Magnetfeldes nicht mehr sinnvoll ist, von Diffusion zu sprechen.

2.3. Abschätzung der Größe von $J_0(2,4 R'/R)$

Eine Abschätzung erhält man, wenn man in die Formel

$$J_0\left(\frac{2,4}{R} R'\right) = \frac{5 D_a}{R \bar{v}_{ir}} \quad (13)$$

des vorigen Abschnitts die Näherung für D_a und für \bar{v}_{ir} den Ausdruck aus dem BOHMschen Kriterium einsetzt. Man erhält so:

$$\begin{aligned} J_0\left(\frac{2,4}{R} R'\right) &= \frac{\frac{5 \cdot 0,7}{1,16} T_e(\text{eV})}{R p T_e^{1/2}(\text{eV}) 0,46 \cdot 10^4 (1+63 B^2/p^2)} \\ &= \frac{6,5 \cdot 10^{-4} T_e^{1/2}}{R p (1+63 B^2/p^2)} \end{aligned} \quad (14)$$

Für $B = 0$, $R = 3 \times 10^{-2}$ erhält man daraus die folgenden Werte für J_0 bei verschiedenen Drucken:

p (Torr)	1,0	10^{-1}	10^{-2}
T_e (eV)	2,6	4,2	6,0
J_0	$3,5 \times 10^{-2}$	$4,4 \times 10^{-1}$	(5,4)

Der letzte Wert zeigt wieder, daß bei diesen niedrigen Drucken diese Betrachtung ihren Sinn verliert.

Von HOH ⁷⁾ wurde J_0 aus dem Zusammenhang mit der Raumladung an der Schichtgrenze berechnet. Die Poissongleichung in Zylinderkoordinaten ist:

$$\text{div } \mathcal{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) = \frac{1}{r} E_r + \frac{dE_r}{dr} = \frac{e}{\epsilon_0} (n_i - n_e) \quad (15)$$

Aus der SCHOTTKYschen Theorie entnimmt man für E_r wieder den Ausdruck:

$$E_r = - \frac{D_e - D_i}{b_e + b_i} \frac{1}{n} \frac{dn}{dr},$$

also:

$$\operatorname{div} \mathcal{E} = \frac{D_i - D_e}{b_i + b_e} \left\{ \frac{1}{r} \frac{1}{n} \frac{dn}{dr} - \frac{1}{n^2} \left(\frac{dn}{dr} \right)^2 + \frac{1}{n} \frac{d^2 n}{dr^2} \right\} \quad (18)$$

Wegen

$$\frac{d^2 n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dn}{dr} + \frac{Z}{D_a} n = 0$$

folgt

$$\operatorname{div} \mathcal{E} = \frac{D_i - D_e}{b_i + b_e} \left\{ - \frac{Z}{D_a} - \left(\frac{1}{n} \frac{dn}{dr} \right)^2 \right\} \quad (19)$$

Wegen

$$n = n_0 J_0 \left(\sqrt{\frac{Z}{D_a}} r \right);$$

$$\frac{dn}{dr} = n_0 \frac{dJ_0}{dx} \frac{dx}{dr} = - n_0 J_1(x) \sqrt{\frac{Z}{D_a}} = - n_0 \sqrt{\frac{Z}{D_a}} J_1 \left(\sqrt{\frac{Z}{D_a}} r \right) \quad (20)$$

folgt

$$\operatorname{div} \mathcal{E} = \frac{D_i - D_e}{b_i + b_e} \frac{Z}{D_a} \left\{ -1 + \frac{J_1^2}{J_0^2} \right\}$$

In der SCHOTTKYschen Näherung ist $ZR/D_a = 2,4$, also:

$$\operatorname{div} \mathcal{E} = \frac{e}{\epsilon_0} (n_i - n_e) = \frac{D_i - D_e}{b_i + b_e} \left(\frac{2,4}{R} \right)^2 \left\{ \frac{J_1^2 \left(\frac{2,4}{R} r \right)}{J_0^2 \left(\frac{2,4}{R} r \right)} - 1 \right\} \quad (16)$$

Für $r = R'$ ist $J_1^2 \approx 0,52$, $J_0 \approx 10^{-2}$, d.h. $J_1^2/J_0^2 \gg 1$, also kann man schreiben:

$$J_0^3 \left(\frac{2,4}{R} R' \right) \approx \frac{\epsilon_0}{en_0} \frac{D_i - D_e}{b_i + b_e} \left(\frac{2,4}{R} \right)^2 J_1^2 \left(\frac{2,4}{R} R' \right) \frac{n_e(R')}{n_i(R') - n_e(R')} \quad (17)$$

2.4. Bedingungen für Zylindersymmetrie und Radialfeldumschlag

Wenn nur Axialsymmetrie vorausgesetzt wird (alle vorkommenden Größen hängen nicht vom Winkel ab, können aber von z abhängen), dann lautet die Kontinuitätsgleichung für die Elektronen:

$$- b_e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n E_r) - D_e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial n}{\partial r}) - b_{eo} \frac{\partial}{\partial z} (n E_z) - D_{eo} \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} = Zn \quad (18)$$

Eine entsprechende Gleichung gilt für die Ionen. Zylindersymmetrie herrscht, wenn:

$$b_e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n E_r) \gg b_{eo} \frac{\partial}{\partial z} (n E_z) + D_{eo} \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \quad (19)$$

Setzt man für $\partial n / \partial z$ näherungsweise $\frac{n}{L^2}$, so steht auf der rechten Seite:

$$\frac{2 b_{eo} E_z n}{L} + D_{eo} \frac{4n}{L^2} \quad (20)$$

Mit $L = 2m$ ist $b_{eo} E_z$ mit D_{eo} zu vergleichen, und man sieht aus der Tabelle, daß der zweite Term immer vernachlässigt werden kann.

Zylindersymmetrie bedeutet also jetzt:

$$b_e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n E_r) \gg \frac{2 b_{eo} E_z n}{L} \quad (21)$$

Aus der SCHOTTKYschen Theorie folgt wieder:

$$n E_r = \frac{D_i - D_e}{b_i + b_e} \frac{dn}{dr} \quad ;$$

damit:

$$b_e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{dn}{dr}) \frac{D_i - D_e}{b_i + b_e} \gg \frac{2 b_{eo} E_z n}{L} \quad (22)$$

Wegen:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial n}{\partial r}) = - \frac{Z}{D_a} n$$

also:

$$b_e \frac{D_e - D_i}{b_i + b_e} \frac{Z}{D_a} \gg \frac{2 b_{eo} E_z}{L} \quad (23)$$

Nun ist:

$$b_e = \frac{b_{eo}}{1+b_{eo}^2 B^2} ; \quad D_e = \frac{D_{eo}}{1+b_{eo}^2 B^2} ; \quad D_i = \frac{D_{io}}{1+b_{io}^2 B^2} ;$$

$$b_i = \frac{b_{io}}{1+b_{io}^2 B^2} ; \quad \frac{Z}{D_a} = \left(\frac{2,4}{R}\right)^2 ; \quad (26)$$

$$\frac{D_e - D_i}{b_e + b_i} = \frac{D_{eo}(1+b_{io}^2 B^2) - D_{io}(1+b_{eo}^2 B^2)}{b_{eo}(1+b_{io}^2 B^2) + b_{io}(1+b_{eo}^2 B^2)} \quad (22)$$

Wegen $D_{eo} \gg D_{io}$, $b_{eo} \gg b_{io}$ vereinfacht sich dieser Ausdruck zu:

$$\frac{D_{eo} - (D_{io} b_{eo}^2 - b_{io}^2 D_{eo}) B^2}{b_{eo}(1+b_{eo} b_{io} B^2)}$$

also ist jetzt:

$$\left(\frac{2,4}{R}\right)^2 \frac{D_{eo} - (D_{io} b_{eo}^2 - D_e b_{io}^2) B^2}{(1+b_{eo}^2 B^2)(1+b_{eo} b_{io} B^2)} \gg \frac{2 b_{eo} E_z}{L}$$

Setzt man nun:

$$\frac{B^2}{p^2} = y; \quad D_{eo} = \frac{kT_e}{e} \frac{b'_{eo}}{p}; \quad D_{io} = \frac{kT_i}{e} \frac{b'_{io}}{p}; \quad b_{eo} = \frac{b'_{eo}}{p};$$

$$b_{io} = \frac{b'_{io}}{p}; \quad (23)$$

so wird:

$$\phi\left(\frac{T_i}{T_e}; \frac{B^2}{p^2}\right) = \frac{1 - \left(\frac{T_i}{T_e} \frac{b'_{eo}}{b'_{io}} - 1\right) b_{io}^2 y}{(1+b_{eo}^2 y)(1+b_{eo} b_{io} y)} \gg \left(\frac{R}{2,4}\right)^2 \frac{e}{k} \frac{2 E_z}{L T_e} \quad (24)$$

Die Funktion ϕ kann als Funktion von y bei festen Parametern T_i/T_e , b_{io} und b_{eo} aufgezeichnet werden (Fig. 39). Aus den Kurven kann bei vorgegebenen L , R , E_z , T_e als Funktion vom Druck p für die Bedingung

$$\phi = \left(\frac{R}{2,4}\right)^2 \frac{e}{k} \frac{2 E_z}{L T_e} \approx 1,5 \frac{E_z}{T_e} \quad (25)$$

das zugehörige B/p abgelesen werden. Damit erhält man Kurven $B_{\text{kurzschl.}}$ als Funktion von p (siehe Dissertation).

Die Funktion ϕ hat die Bedeutung:

$$\phi = \frac{b'_{eo}}{T_e} \frac{D_e - D_i}{b_e + b_i} \quad (26)$$

Das Verschwinden von ϕ , d.h. das Verschwinden des Zählers von ϕ :

$$1 - \left(\frac{T_i}{T_e} \frac{b'_{eo}}{b'_{io}} - 1 \right) b_{io}^2 \frac{B^2}{p^2} = \phi \quad (27)$$

ist auch die Bedingung für das Verschwinden des Radialfeldes. Das für den Radialfeldumschlag kritische Magnetfeld kann in Abhängigkeit vom Druck für verschiedene Temperaturverhältnisse T_e/T_i und Beweglichkeiten aufgetragen werden (siehe Dissertation).

Von Herrn Dr. G. Müller wurde ich darauf aufmerksam gemacht, daß man auch die z-abhängigen Terme mit dem Diffusionsterm $D_s \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial n}{\partial r} \right)$ vergleichen müsse, und zwar dann, wenn wegen des Radialfeldumschlages das Radialfeld verschwindet. Es kann dann immer noch Zylindersymmetrie vorliegen, wenn nur

$$D_s \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial n}{\partial r} \right) \gg b_{so} \frac{\partial}{\partial z} (n E_z)$$

ist.

Für $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial n}{\partial r} \right)$ kann man, solange einigermaßen Zylindersymmetrie herrscht, $\frac{Z}{D_a}$ setzen.

Also ist die Abschätzung jetzt:

$$D_s \frac{Z}{D_a} n \gg \frac{2 b_{so} E_z n}{L}$$

Es ist aber $\frac{Z}{D_a} \approx \left(\frac{2,4}{R} \right)^2$; $D_s = \frac{k T_s b_{so}}{e(1+b_{so}^2 B_z^2)}$; also:

$$\frac{1}{1+b_{so}^2 B_z^2} \gg 2 \frac{e}{k} \left(\frac{R}{2,4} \right)^2 \frac{E_z}{L T_s}$$

oder

$$\frac{T_s/T_e}{1+b_{so}^2 B_z^2} \gg \left(\frac{R}{2,4} \right)^2 \frac{e}{k} \frac{2 E_z}{L T_e}$$

Die Funktion auf der linken Seite steht jetzt statt unserer bisherigen Funktion ϕ . Für $s = i$ wird diese Funktion von y kaum unabhängig und ungefähr 10^{-2} . Für $s = e$ steht links $\frac{1}{1+10^4 y}$, wenn $b'_{so} \approx 100$. Die so gefundenen kritischen Feldstärken werden zu klein.

$P(\text{Torr})$	B_{kr} gem.	\sqrt{y} gem.	y gem.	E_z gem.	T_e gem.	ϕ	B_{th} (1)	B_{th} (4)
10^{-2}	10^{-2}	1	1	80	$5,5 \cdot 10^4$	$2,1 \cdot 10^{-3}$	0,004	0,002
10^{-1}	$3 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-1}$	10^{-1}	200	$4,0 \cdot 10^4$	$7,0 \cdot 10^{-3}$	0,03	0,012
1	10^{-1}	10^{-1}	10^{-2}	550	$2,8 \cdot 10^4$	$2,8 \cdot 10^{-2}$	0,14	0,055

$$R = 3 \cdot 10^{-2}; L = 2,5; e = 1,6 \cdot 10^{-19}; K = 1,38 \cdot 10^{-23}$$

$$(R/2,4)^2 \cdot (e/K) \cdot (2/2,5) = 1,45$$

2.5. Abschätzung der azimuthalen Trägergeschwindigkeiten

Es ist die Frage gestellt worden, ob die azimuthale Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger, die proportional $E_r B_z$ ist, in der Nähe der Wand die Schallgeschwindigkeit erreicht und dadurch eventuell ein instabiles Verhalten der Säule hervorruft.

Aus der SCHOTTKYSchen Theorie folgt:

$$v_e \psi = b_{eo} B_z v_{er} ; \quad v_i \psi = - b_{io} B_z v_{ir} ;$$

es ist außerdem:

$$v_{er} = v_{ir} = - D_a \frac{1}{n} \frac{dn}{dr}$$

$$n = n_0 J_0(\alpha r) \quad \frac{dn}{dr} = \frac{dn}{dx} \frac{dx}{dr} = n_0 J_1(\alpha r)$$

$$\frac{1}{n} \frac{dn}{dr} = - \sqrt{\frac{Z}{D_a}} \frac{J_1\left(\frac{2,4}{R} r\right)}{J_0\left(\frac{2,4}{R} r\right)} = \frac{2,4}{R} \frac{J_1\left(\frac{2,4}{R} r\right)}{J_0\left(\frac{2,4}{R} r\right)}$$

$$v_r = D_a \frac{2,4}{R} \frac{J_1\left(\frac{2,4}{R} r\right)}{J_0\left(\frac{2,4}{R} r\right)} \quad (29)$$

Für D_a wird wieder der Näherungsausdruck eingesetzt:

$$D_a \approx \frac{b_{io}}{b_{eo}} \frac{D_{eo}}{1 + b_{io} b_{eo} B^2}$$

Damit wird:

$$v_{e\varphi}(R') = b_{eo} B_z \frac{b_{io}}{b_{eo}} D_{eo} \frac{1}{1 + b_{io} b_{eo} B_z^2} \frac{2,4}{R} \frac{J_1\left(\frac{2,4}{R} R'\right)}{J_0\left(\frac{2,4}{R} R'\right)}$$

p (Torr)		1,0	10^{-1}
$D_{ao} = b_{io} D_{eo} / b_{eo}$ [m ² /s]		1,6	22
$J_0(2,4 R'/R)$		$3,5 \cdot 10^{-2}$	$4,4 \cdot 10^{-1}$
$J_1(2,4 R'/R)$		0,52	0,52
b_{eo} [m ² /Vs]		90	900
b_{io} [m ² /Vs]		0,7	7,0
B_{kr} [Vs/m ²]		0,1	0,03
$1 + b_{io} b_{eo} B_{kr}^2$		1,63	6,4
$v_{e\varphi; B_{kr}}$ [m/s]		10^4	$0,85 \cdot 10^4$
$v_{i\varphi; B_{kr}}$ [m/s]		80	70
$v_{e, th}$ [m/s]		10^6	$1,4 \cdot 10^6$
$v_{i, th}$ [m/s]		$1,8 \cdot 10^3$	$1,8 \cdot 10^3$

Die thermische Geschwindigkeit der Elektronen ist um zwei Zehnerpotenzen größer als die azimutale Drift an der Wandschicht, die thermische Geschwindigkeit der Ionen ist noch um den Faktor 20 größer als die azimutale Drift der Ionen an der Wandschicht. Es ist also nicht anzunehmen, daß die Schallgeschwindigkeit schon eine Rolle spielt.

3. Wirkungsquerschnitt für elastische Streuung von Elektronen an He-Atomen

Zur Beurteilung des Anteils von Run-away-Elektronen in der Entladung ist die Kenntnis des Wirkungsquerschnitts für elastische Streuung bis zu hohen Energien notwendig. Die höchste Energie, die vorkommen kann, entspricht der Gesamtspannung am Entladungsrohr. Bis zu Energien von 100 eV können die Stoßwahrscheinlichkeiten P_c aus dem Datenbuch von BROWN und ALLIS entnommen werden. Dabei bedeutet P_c die Zahl der Stöße pro cm Weg und Torr. Es ist:

$$P = \frac{110}{760} q, \quad (1)$$

wobei q der Stoßquerschnitt in cm^2 ist, $n_0 = 2,7 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ die Zahl der streuenden Gasmoleküle pro cm^3 bei Normaldruck. Für höhere Energien muß der Querschnitt in Abhängigkeit von der Energie einer Rechnung entnommen werden, die auf der BORNschen Näherung für die elastische Elektronenstreuung an Atomen beruht. Die Durchführung der Rechnung findet man z.B. bei GRANOWSKI²⁸). Das Ergebnis ist:

$$q = \frac{2^{12} \pi^5 a^4 m^2 e_0^4 Z^2}{3 h^4} \cdot \frac{3 + 18a^2 k_1^2 + 4a^4 k_1^4}{(1 + 4a^2 k_1^2)^3}. \quad (2)$$

Dabei bedeutet a der effektive Atomradius, $a = \frac{a_0}{Z_{\text{eff}}}$, wobei Z_{eff} für He 1,69 ist, $a_0 = 0,528 \text{ \AA}$ der Radius der ersten BOHRschen Kreisbahn; m ist die Elektronenmasse, e_0 die Elementarladung, Z die Kernladung, h die PLANCKsche Wirkungskonstante, $k_1 = \frac{2\pi m}{h} c_1$ ist proportional dem Elektronenimpuls, c_1 ist die Geschwindigkeit der Elektronen. Setzt man für

$$c_1 = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{\epsilon} = 5,95 \cdot 10^5 \sqrt{\epsilon(\text{eV})} \quad [\text{m/s}], \quad (3)$$

so erhält man

$$x = a k_1 = 8 \cdot 10^{-2} \sqrt{\epsilon(\text{eV})} \quad x^2 = 0,64 \cdot 10^{-2} \epsilon(\text{eV}).$$

Die hier benutzte Näherung geht davon aus, daß für hohe Energien die Energieabhängigkeit des Querschnitts der BORNschen Näherung entsprechen sollte und daß der Faktor so gewählt wird, daß die Kurve stetig an die Werte anschließt, die für niedrige Energien aus dem Datenbuch entnommen wurden.

Es ist also (Fig. 40):

$$q = f \frac{3+18x^2+4x^4}{(1+4x^2)^3} = 7,2 \cdot 10^{-16} \frac{1+3,6 \cdot 10^{-2} + 5,3 \cdot 10^{-5} \epsilon^2}{(1+2,5 \cdot 10^{-2})^3} \text{ [cm}^2\text{]}. \quad (4)$$

Für die Zahl der pro Sekunde und cm^3 im elektrischen Feld E bei einer Neutralgasdichte n_n auf die Energie ϵ beschleunigten Elektronen erhält man (siehe GROSSMANN-DOERTH ²⁷):

$$\varphi(\epsilon) = \nu_{th} n_e e - \frac{n_n}{E} \int_{\epsilon_{th}}^{\epsilon} q(\epsilon) d\epsilon \quad (5)$$

Dabei ist n_e die Dichte der Elektronen, ϵ_{th} deren thermische Energie, ν_{th} die Stoßfrequenz der Elektronen bei der thermischen Energie $\nu_{th} = \bar{v}_{e,th} n_n q_{th}$, $n_n = 3,6 \cdot 10^{16} \cdot p$ (Torr).

Für $\epsilon_{th} = 3 \text{ eV}$, $q_{th} = 5,5 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2$, $n_e = 10^{10} \text{ cm}^{-3}$, $\bar{v}_{e,th} = 5,95 \cdot 10^7 \sqrt{\epsilon_{th}} \text{ cm/s}$, $\nu_{th} = 2 \cdot 10^9 \cdot p$ (Torr) wird:

$$\begin{aligned} \varphi(\epsilon) &= p \cdot 2 \cdot 10^{19} e - \frac{26}{E/p} \int_3^{\epsilon} \frac{1+3,6 \cdot 10^{-2} \epsilon + 5,3 \cdot 10^{-5} \epsilon^2}{(1+2,5 \cdot 10^{-2})^3} d\epsilon \\ &= p \cdot 2 \cdot 10^{19} e - \frac{26\chi(\epsilon)}{E/p} \end{aligned} \quad (6)$$

Diese Funktion kann für verschiedene Drucke p , für die das Verhältnis E/p aus den Messungen gewonnen wird, aufgezeichnet werden (Fig. 41). Es ergibt sich die folgende Gegenüberstellung:

p (Torr)	1,0	$E/p=5,6$	10^{-1}	$E/p=20$
Z (s^{-1})	10^4		10^5	
φ ($\epsilon=5 \text{ eV}$)	10^8		10^{16}	
n_e	10^{10}		10^{10}	
ν_{in}	$3 \cdot 10^7$		$3 \cdot 10^6$	
ν_{en}	$2 \cdot 10^9$		$2 \cdot 10^8$	

Jedes hundertste Elektron wird bei 1 Torr einmal in der Sekunde

bis zu 5 eV beschleunigt, erleidet aber in der Zeit 10^9 Stöße, so daß dieses eine Ereignis nebensächlich ist. Bei 0,1 Torr wird jedes Elektron schon 10^6 mal pro Sekunde auf 5 eV beschleunigt. Das bedeutet, nach jeweils 100 Stößen wird jedes Elektron einmal auf 5 eV beschleunigt. Beschleunigung auf 10 eV ist bei diesem Druck schon genauso selten wie 5 eV bei 1 Torr.

ϵ (eV)	$\chi(\epsilon)$
5	6,1
7	11,0
10	18,7

4. Messungen mit zusätzlichen helischen Windungen

4.1. Das Vakuumfeld

Auf der Salzburger Konferenz 1961 wurde schon über unsere Versuche berichtet, das Einsetzen der Instabilität durch ein zusätzliches Magnetfeld mit azimuthaler Komponente zu beeinflussen. Das einfachste schien zunächst zu sein, dem B_z -Feld ein äußeres Magnetfeld zu überlagern, und zwar durch Bewicklung des Entladungsröhres mit einem System von multipolaren Windungen, den sogenannten "Spitzerdrähten". Die Vorstellung dabei war, daß ein solches "Spitzerfeld" im Sinne seiner Rotationstransformation in grober Näherung als ein Feld mit einer mittleren zusätzlichen Azimutalkomponente angesehen werden kann. Eine magnetische Azimutalkomponente erzeugt zusammen mit dem j_z -Strom eine radiale Drift, die sich den Verlusten durch Diffusion überlagert und damit einen dämpfenden oder entdämpfenden Einfluß auf die Instabilität haben sollte, je nach Richtung dieser Drift. Einer Arbeit von J.L. JOHNSON³³⁾ entnimmt man für die erste Näherung des magnetischen Feldes einer linearen Anordnung mit der Windungslänge L, dem Rohrradius a und einem bei Fortschreiten in positiver z-Richtung rechtsgängigen System von ℓ Paaren helischer Windungen den folgenden Ausdruck:

$$\vec{B} = n_z B_0 - \frac{J}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^{\ell-1} \left[n_r \sin(\ell\theta - \ell z) + n_\theta \cos(\ell\theta - \ell z) \right] \quad (1)$$

Dabei ist B_0 das homogene z-Feld, J ist ein Maß für den Strom in den Spitzerdrähten, $h = (2\pi \ell)/L$ ist ein Maß für die sogenannte "Feldperiode" (alle $L/\ell = 2\pi/h$ cm wird der gleiche Zustand des Feldes vorliegen). Die magnetischen Oberflächen für $r < a$, d.h. die Flächen, auf denen alle Feldlinien einer Flußröhre liegen, die einen bestimmten Fluß einschließen, sind gegeben durch :

$$(\mathcal{L} \cdot \text{grad } \psi) = 0 \quad ,$$

und es ist:

$$\psi = \pi r^2 B_0 + \frac{\pi a}{h} J \left(\frac{r}{a}\right)^\ell \cos(\ell\theta - hz) \quad , \quad (2)$$

so daß - nach r aufgelöst - als Gleichung der Fläche folgt:

$$r(\psi, \theta, z) = \sqrt{\frac{\psi}{\pi B_0}} - \frac{J}{2hB_0} \left(\frac{r_0}{a}\right)^{\ell-1} \cos(\ell\theta - hz) \quad . \quad (3)$$

Dabei ist $r_0 = \sqrt{\frac{\psi}{\pi B_0}}$ der Radius einer zylindrischen Röhre, die den Fluß ψ einschließt, wenn nur das Feld B_0 wirksam wäre.

Die Feldlinie, die an der Stelle $\{\hat{r}_0, \hat{\theta}, z\}$ durchläuft, hat die Gleichungen:

$$r(\hat{r}_0, \hat{\theta}_0, z) = \sqrt{\frac{\hat{\psi}}{\pi B_0}} - \frac{J}{2hB_0} \left(\frac{\hat{r}_0}{a}\right)^{\ell-1} \cos(\ell\hat{\theta}_0 - (h-li)z) \quad , \quad (4)$$

$$\theta(\hat{r}_0, \hat{\theta}_0, z) = \frac{J}{2haB_0} \left(\frac{\hat{r}_0}{a}\right)^{\ell-2} \sin(\ell\hat{\theta}_0 - (h-li)z) \quad .$$

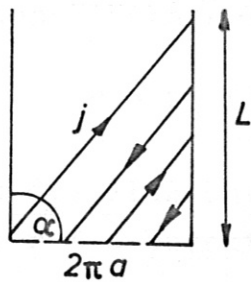
Hierin definiert \hat{r}_0 eine Röhre konstanten Flusses mit der mittleren B_z -Feldstärke B_0 ; i ist die sogenannte "Rotationstransformation und gibt die Windung der Feldlinien in Grad/cm an:

$$i = \frac{(\ell-1) J^2}{4a^2 h B_0^2} \left(\frac{\hat{r}_0}{a}\right)^{2\ell-4} \quad . \quad (5)$$

4.2. Die Stromverteilung zur Erzeugung des Feldes

Die Größe B_0 ist in A/cm angegeben und bezieht sich damit auf die Flächenstromdichte A/cm Rohrlänge des Stroms $j_{\theta 0}$, der das B_0 -Feld erzeugt.

Die Stromverteilung der Spitzerströme wird erhalten, wenn wir uns den Rohrmantel aufgeschnitten und in die Ebene abgewickelt denken:



$$j = j_z + j_\theta = \bar{I} \sin \alpha + \bar{I} \cos \alpha$$

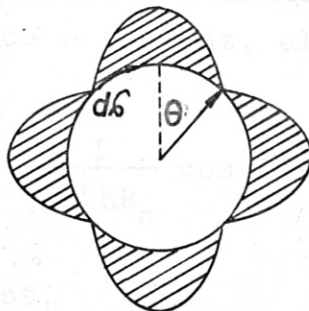
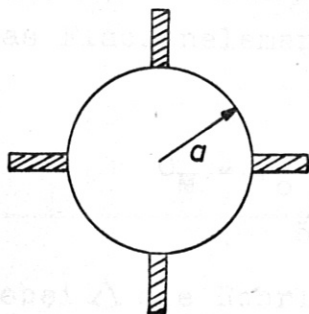
$$\alpha \approx \frac{\pi}{2} \quad \sin \alpha \approx 1 \quad \cos \alpha \approx \frac{2\pi a}{L} \quad (6)$$

$$j = \bar{I} \left(n_z + n_\theta \frac{2\pi a}{L} \right)$$

Die Verteilung der Amplitude \bar{I} in einem Querschnitt kann durch eine Fourrierreihe dargestellt werden:

$$\bar{I} = J_{hs} \sum_n \alpha_n \cos n(\ell\theta - hz) \quad (7)$$

Um einen Zusammenhang mit dem Gesamtstrom in den Spitzerdrähten zu bekommen, nehmen wir näherungsweise statt der Rechteckfunktionen auf dem Querschnitt eine Sinusverteilung, berücksichtigen also nur das erste Glied der Fourrierreihe, und sehen bei der Integration auch von der Azimutalkomponente ab.



$$I = \int_{-\pi/2\ell}^{+\pi/2\ell} j d\delta$$

$$= \int_{-\pi/2\ell}^{+\pi/2\ell} j a d\theta \quad (11)$$

$$I = a \int_{-\pi/2\ell}^{+\pi/2\ell} J_{hs} \alpha_1 \cos \ell\theta d\theta = \frac{a J_{hs} \alpha_1}{\ell} \sin \ell\theta \Big|_{-\pi/2\ell}^{+\pi/2\ell} = \frac{2a J_{hs} \alpha_1}{\ell}$$

Für $\ell = 2$: $J_{hs} \alpha_1 = \frac{I}{a}$. (8)

4.3. Magnetische Flächen, die ganz im Rohr liegen

Im vorliegenden Fall war $a = 3$ cm; $L = 100$ cm; $\ell = 2$; $h = 0,12$.
Damit ist $\sqrt{2}ha = 1,4$. Für den Radius der zu r_0 gehörigen magnetischen Fläche erhält man:

$$r = r_0 \left(1 - \frac{J}{2haB_0} \cos(2\theta - 0,12z) \right) \quad (9)$$

Damit die Flußröhre ganz in dem Rohr verläuft, muß $0 < r < a$ sein. $r < a$ bedeutet:

$$\left(1 + \frac{J}{2haB_0} \right) r_0 < a$$

oder mit dem Strom in den Spitzerdrähten:

$$\left(1 + \frac{I}{2ha^2B_0} \right) r_0 = \left(1 + \frac{0,47 I}{B_0} \right) r_0 < a \quad (10)$$

Man kann jetzt die Größe der Oberfläche derjenigen magnetischen Fläche berechnen, die gerade noch ganz in dem Entladungsrohr liegt. Die Größe dieser Fläche wird ein Maß für die Verluste der Entladung sein; denn alle Teilchen, die diese Fläche nach außen überschreiten, können entlang von Feldlinien zur Wand gelangen.

Das Flächenelement ist $dF = r d\theta dz$, also:

$$O_M = r_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\Lambda} \left(1 - \frac{I}{2a^2hB_0} \cos(2\theta - hz) \right) d\theta dz \quad (11)$$

wobei Λ die Rohrlänge ist.

$$O_M = 2\pi r_0 \Lambda - \frac{r_0 I}{2a^2hB_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\Lambda} \cos(2\theta - hz) d\theta dz$$

Das Integral, das übrig bleibt, ist Null, weil über eine volle Periode des Winkels integriert wird. Also ist:

$$O_M = 2\pi r_0 \Lambda \quad (12)$$

Der maximale Radius der Fläche ist der, für den der $\cos = -1$ ist.

$$r_{\max} = r_0 \left(1 + \frac{I}{2a^2h |B_0|} \right) = a \quad (13)$$

Damit wird für die Oberfläche der größten magnetischen Fläche:

$$C_{M,\max} = \frac{2\pi a \Lambda}{1 + \frac{I}{2a^2h |B_0|}} \quad (14)$$

4.4. Meßergebnisse und einige Gesichtspunkte zu deren Deutung

Bei der Messung wurde bei festem Druck und bei fester Erregung des helischen Feldes das magnetische B_z -Feld verändert und die axiale elektrische Feldstärke als Funktion der B_z -Feldstärke registriert. Außerdem wurde der Einfluß der Stromrichtung relativ zu der durch das B_z -Feld ausgezeichneten Richtung untersucht (im Experiment wurde nicht die Stromrichtung, sondern die B_z -Feldrichtung umgepolt, was gleichwertig ist, da der Schraubensinn der Helix von der Achsenorientierung unabhängig ist). B_z -Richtung "(-)" bedeutet, daß B_z -Richtung und Stromrichtung parallel sind, bei B_z -Richtung "(+)" sind B_z -Feld und Strom antiparallel.

Die folgenden Aussagen lassen sich aus den Oszillogrammen ablesen (Fig. 42 bis 48):

- 1) In allen Fällen nimmt E_0 , das elektrische Axialfeld bei $B_z = 0$, mit zunehmender Erregung des Spitzerfeldes zu.
- 2) In den Fällen, in denen das Einsetzen der Instabilität eindeutig markiert ist (scharfes Einsetzen der Schwingungen), wird eine schwache Stabilisierung mit zunehmender Erregung des Spitzerfeldes bei beiden Stromrichtungen beobachtet.
- 3) Es besteht eine deutliche Abhängigkeit der $E_z(B_z)$ -Kurven von der Stromrichtung. Bei hohen Drucken (1 Torr) hat das Spitzerfeld bei $B_z(+)$ nur einen ganz geringen Einfluß. Bei $B_z(-)$ wird dE_z/dB_z mit zunehmender Erregung des Spitzerfeldes immer geringer. Schließlich gibt es sogar vor Einsetzen der Turbulenz ein Minimum der Verluste (siehe Bilder Pl 179 9/2 und Pl 177 6/3). Bei niedrigerem Drucken ($P < 4 \cdot 10^{-1}$ Torr) wird das scharfe Einsetzen der Instabilität bei $B_z(+)$ mit zunehmender Erregung des

Spitzerfeldes zu einem breiten Minimum verschmiert, die Schwingungen wachsen kontinuierlich an. Bei $B_z(-)$ wird der Charakter der $E_z(B_z)$ -Kurven gänzlich anders. Die Schwingungen wachsen auch hier kontinuierlich an, das Minimum der Verluste, das sich vor dem Einsetzen der Turbulenz bei kleinen Erregungen des Spitzerfeldes ausbildet, wird immer flacher und verschiebt sich zu kleineren B_z -Feldern. Für höhere B_z steigt E_z zu hohen Werten, die wesentlich über dem Wert bei $B = 0$ liegen. Bei noch höheren B_z fällt E_z wieder. Bei $p < 10^{-1}$ Torr und $B_z(-)$ wird E_z bei großen Erregungen des Spitzerfeldes eine mit B zunächst wachsende Funktion, die dann mehrere ausgeprägte Maxima und Minima hat. Ein besonders deutliches Maximum wandert mit zunehmender Erregung des Spitzerfeldes zu höheren Werten des B_z -Feldes.

- 4) Messungen mit einem dreipaarigen Spitzerfeld ($\ell = 3$) zeigen im wesentlichen das gleiche Bild. Der Verlauf von $E_z(B_z)$ ist aber jenseits der vermuteten Stabilitätsgrenze noch unübersichtlicher als im Fall $\ell = 2$.

Eine befriedigende Deutung dieser Beobachtungen war bisher nicht möglich. Es können lediglich einige Gesichtspunkte angegeben werden, die bei der Deutung eine Rolle spielen müssen:

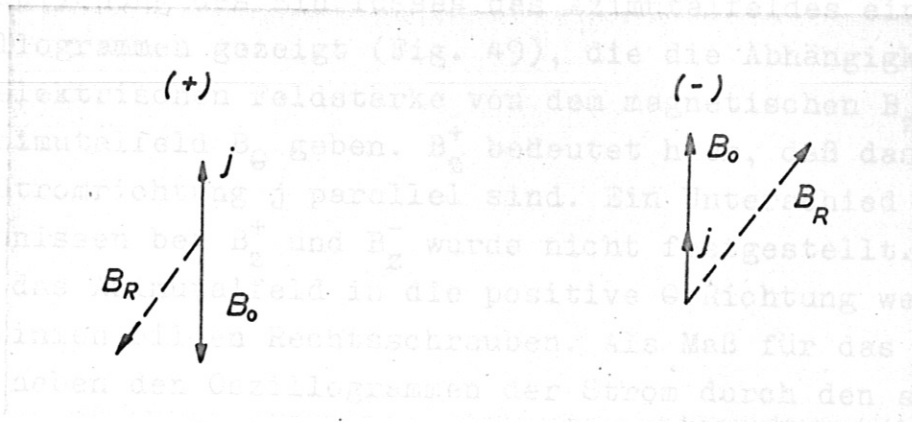
- 1) Bei $B_z \ll B_{z,kr}$ und Spitzerfeld ungleich Null wird ein großer Teil der Feldlinien die Rohrwand durchstoßen. Der effektive Entladungskanal hat einen Radius

$$r_0 \leq \frac{a}{1 + \frac{1}{2a^2 h} \frac{I}{|B_0|}} \quad (13)$$

Teilchen, die auf Feldlinien geraten, die irgendwo die Wand durchstoßen, müssen von vornherein als verloren gelten, weil die Fortbewegung längs Feldlinien bevorzugt ist. Der effektive Kanalradius wächst mit B_0 bei konstanter Erregung I des Spitzerfeldes. Der Radius verringert sich (höhere Verluste) mit zunehmendem I .

- 2) Zu den Verlusten durch Einengung des Entladungskanals addieren sich die normalen Verluste durch transversale Diffusion. Diese Diffusion wird in der Nähe der Rohrwand stark behindert

- 5) durch die azimutale Komponente des Spitzerfeldes. Dieser Einfluß muß auch abhängig sein vom Verhältnis der beiden Erregungen.
- 3) Es kommt eine weitere Beeinflussung der Verluste durch eine $j \cdot B$ -Drift in radialer Richtung hinzu. Das Spitzerfeld erzeugt eine mittlere Rotationstransformation der Feldlinien. In grober Näherung kann man sich vorstellen, daß das Magnetfeld im Mittel eine Θ -Komponente in positiver Θ -Richtung hat (Helix ist eine Rechtsschraube). Allgemein kann man sagen, daß die Azimutalkomponente des Spitzerfeldes zusammen mit der z -Komponente des Stroms eine Driftgeschwindigkeit in radialer Richtung ergibt, die positiv oder negativ je nach Richtung der Azimutalkomponente des Feldes ist.



- Wenn man nun tatsächlich von einer mittleren Rechtsschraubung der Feldlinien sprechen kann, wenn man also näherungsweise von einer im Mittel positiven Azimutalkomponente sprechen darf, dann hat man als resultierendes Feld ein rechtsschraubendes Feld, das im (+)-Fall eine Drift nach außen, also erhöhte Verluste, im (-)-Fall eine Drift nach innen, also Verminderung der Verluste, ergibt.
- 4) Mit wachsendem B_z -Feld werden im (+)-Fall drei verschiedene Verlustmechanismen verringert: a) die normale transversale Diffusion, b) die radiale Drift nach außen, weil der Vektor B_R des resultierenden Feldes sich in die Richtung von B_0 dreht, c) der effektive Säulenquerschnitt wird größer, weil immer weniger Feldlinien die Rohrwand durchstoßen. Im (-)-Fall wird die verlustmindernde Drift nach innen mit zunehmendem B_0 geringer. Das könnte erklären, daß in diesem Fall die Verluste mit wachsendem B_0 weniger schnell kleiner werden.

- 5) Die erhöhte Stabilität in allen Fällen, in denen das Einsetzen der Turbulenz einwandfrei festgelegt werden kann, könnte seinen Grund in den in allen Fällen höheren Verlusten haben, die bei der Konvektionsinstabilität eine dämpfende Rolle spielen.

5. Diffusion in der positiven Säule mit zusätzlichem azimuthalen Magnetfeld

5.1. Meßergebnisse

Die Apparatur und die Meßergebnisse der Versuche mit zusätzlichem Azimutalfeld sind in der Dissertation beschrieben. Hier wird zur Veranschaulichung des Einflusses des Azimutalfeldes eine Reihe von Oszillogrammen gezeigt (Fig. 49), die die Abhängigkeit der axialen elektrischen Feldstärke von dem magnetischen B_z -Feld bei festem Azimutalfeld B_θ geben. B_z^+ bedeutet hier, daß das B_z -Feld und die Stromrichtung j parallel sind. Ein Unterschied zwischen den Ergebnissen bei B_z^+ und B_z^- wurde nicht festgestellt. B_θ^+ bedeutet, daß das Azimutalfeld in die positive θ -Richtung weist, d.h. die Feldlinien bilden Rechtsschrauben. Als Maß für das Azimutalfeld ist neben den Oszillogrammen der Strom durch den axialen Leiter angegeben. E_0 ist die axiale elektrische Feldstärke bei $B_z = 0$. Die zweite Spur auf den Oszillogrammen ist die Fluktuation des Plasmopotentials, das von einer Sonde über einen Blockkondensator auf den Oszillographen gegeben wurde.

Auch hier wird mit zunehmendem Azimutalfeld eine geringfügige Zunahme der Verluste bei $B_z = 0$ beobachtet. (Erhöhung von E_0 um 0,3 V/cm bei $B_\theta = 500$.) Die durch eine solche Änderung der Verluste bedingte Änderung der Stabilität allein, wie man sie aus den $B_{kr}(E_z)$ -Kurven bei zusätzlicher HF-Ionisierung ablesen kann, kann die tatsächlich beobachtete Verschiebung nicht erklären. Vielmehr muß hier der Einfluß der zusätzlichen radialen Drift berücksichtigt werden, wie in der Dissertation dargelegt wurde.

5.2. Die Grundgleichungen für die Diffusion in der positiven Säule mit zusätzlichem azimutalen Magnetfeld

Es soll in diesem und in den folgenden Abschnitten die Erweiterung der üblichen Theorie der Säule auf den Fall mit zusätzlichem Azimutalfeld sowie die Betrachtung der Stabilität dieser Säule etwas ausführlicher dargestellt werden.

Die Bewegung der Ladungsträger wird beschrieben durch die Erhaltungssätze für Impuls und Masse, die wir in der Form anschreiben:

$$m_i n \left\{ \frac{\partial \omega_i}{\partial t} + (\omega_i \nabla) \omega_i \right\} = en(\mathcal{E} + [\omega_i \mathcal{B}]) - kT_i \nabla n - m_i n \nu_{in} \omega_i \quad ,$$

$$m_e n \left\{ \frac{\partial \omega_e}{\partial t} + (\omega_e \nabla) \omega_e \right\} = -en(\mathcal{E} + [\omega_e \mathcal{B}]) - kT_e \nabla n - m_e n \nu_{en} \omega_e \quad ,$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(\omega_i n) = Z_n \quad ; \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(\omega_e n) = Z_n \quad . \quad (1)$$

Hierin sind m_i , m_e die Massen der Ionen bzw. Elektronen; e , $-e$ deren Ladungen; ω_i , ω_e die mittleren Geschwindigkeiten aller Teilchen einer Sorte in einem Volumenelement. Die folgenden Voraussetzungen liegen diesen Gleichungen zugrunde, die bei der Anwendung auf das Plasma einer Niederdruckentladung zulässig sind: Es ist angenommen, daß die Geschwindigkeitsverteilung der Ionen und Elektronen nur von der Temperatur abhängt und daß die Temperaturen T_i , T_e nicht vom Ort abhängen. Es wird angenommen, daß das Plasma quasineutral, d.h. daß $n_i \approx n_e = n$ sei. Es wird angenommen, daß der Ionisationsgrad so niedrig sei, daß die Stöße der Elektronen gegen die Ionen, der Elektronen gegen die Elektronen und der Ionen gegen die Ionen vernachlässigbar seien. Die Reibungskräfte der Elektronen, die von ihren Stößen gegen das Neutralgas herrühren, nehmen wir proportional ihrer Relativgeschwindigkeit bezüglich des Neutralgases an. Wir nehmen an, daß das Neutralgas ruht. Dann ist für die Impulstransporte der Elektronen bzw. Ionen auf das Neutralgas pro Volumen- und Zeiteinheit

$$P_{in} = -m_i \nu_{in} n \omega_i \quad ; \quad P_{en} = -m_e \nu_{en} n \omega_e \quad . \quad (2)$$

Die Proportionalitätsfaktoren ν sind die Stoßfrequenzen, d.h. die Frequenzen, mit denen im Mittel die Teilchen bei einem Stoß um 90° abgelenkt werden und ihren gesamten Impuls in der Anfangs-

richtung verlieren. Es wird angenommen, daß die freien Weglängen der Ladungsträger, λ_i , λ_e oder im starken Magnetfeld die Gyroradien klein seien gegenüber den Gefäßdimensionen, so daß die Teilchen häufig stoßen, ehe sie an die Wand gelangen. Nur unter diesen Voraussetzungen kann von Diffusion gesprochen werden und ist das Flüssigkeitsmodell brauchbar. (6)

Wir setzen voraus, daß die Trägerdichte so niedrig sei, daß auch von einer Volumenrekombination abgesehen werden kann. Die Trägererzeugung im Volumen setzen wir proportional der Trägerdichte an: $Q = Zn$, wobei Z die Ionisationsrate ist, d.h. die Zahl der von einem Elektron in der Zeiteinheit erzeugten Ionenpaare. Z ist eine Funktion der Elektronentemperatur T_e und der Gasdichte:

$$Z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{m_e}{e} a p \frac{273}{T_n} \left(\frac{2kT_e}{m_e} \right)^{3/2} \left(1 + \frac{eV_j}{2kT_e} \right) e^{-\frac{eV_j}{kT_e}} \quad (3)$$

Dabei ist p der Neutralgasdruck in $\text{kg} \cdot \text{m} / (\text{s}^2 \text{m}^2)$; für Helium ist $a = 0,0347 \text{ A} \cdot \text{s}^5 / (\text{kg}^2 \text{m}^2)$; $V_{j, \text{He}} = 24,54$ ist die Ionisationsspannung.

Das Magnetfeld sei ein von außen angelegtes Feld, das Eigenfeld des Stroms sei vernachlässigbar klein dagegen.

Im stationären Fall ist $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. Außerdem dürfen wir aber auch den Term $mn(\nabla \cdot \omega)$ gegenüber $kT \nabla n = \nabla p$ vernachlässigen, weil außerhalb der Randschicht die kinetische Energiedichte $mn(\omega^2/2)$ der Plasmabewegung sicher klein ist, verglichen mit dem Druck p . (8)

Führt man nun die folgenden Abkürzungen ein: (9)

$$b_{eo} = \frac{e}{m_e \nu_{en}} ; \quad b_{io} = \frac{e}{m_i \nu_{in}} ; \quad D_{eo} = \frac{kT_e}{m_e \nu_{en}} ; \quad D_{io} = \frac{kT_i}{m_i \nu_{in}} , \quad (4)$$

dann erhält man für den stationären Fall das System der Grundgleichungen in der Form: (10)

$$\begin{aligned} b_{io} \mathcal{L} + b_{io} [\omega_i \mathcal{L}] - D_{io} \frac{1}{n} \nabla n - \omega_i &= 0 \\ - b_{eo} \mathcal{L} - b_{eo} [\omega_e \mathcal{L}] - D_{eo} \frac{1}{n} \nabla n - \omega_e &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\nabla(n\omega_i) = Zn ; \quad \nabla(n\omega_e) = Zn ; \quad \mathcal{L} = -\nabla \cdot$$

Die beiden Bewegungsgleichungen können nach den Geschwindigkeiten aufgelöst werden. Bezeichnen wir mit q_i , q_e die Ladungen der Teilchen, einschließlich der Vorzeichen, dann nehmen beide die Gestalt an:

$$b_{so} \frac{q_s}{e} \mathcal{L} + \frac{q_s}{e} b_{so} [\mathcal{L} \mathcal{L}] - D_{so} \frac{1}{n} \nabla n - \mathcal{L} = 0 \quad (6)$$

Multipliziert man einmal mit \mathcal{L} vektoriell, einmal skalar, so erhält man:

$$\begin{aligned} [\mathcal{L} \mathcal{L}] &= \frac{q_s}{e} b_{so} [\mathcal{L} \mathcal{L}] + \frac{q_s}{e} b_{so} \left\{ \mathcal{L} (\mathcal{L} \mathcal{L}) - \mathcal{L} \mathcal{L}^2 \right\} - D_{so} \frac{1}{n} [\nabla n \mathcal{L}], \\ (\mathcal{L} \mathcal{L}) &= \frac{q_s}{e} b_{so} (\mathcal{L} \mathcal{L}) - D_{so} \frac{1}{n} (\nabla n \mathcal{L}). \end{aligned} \quad (7)$$

Setzt man diese Ausdrücke in die erste Gleichung ein, dann erhält man für \mathcal{L} den Ausdruck:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} (1 + (\frac{q_s}{e} b_{so} \mathcal{L})^2) &= \mathcal{L} (1 + b_{so}^2 B^2) \\ &= b_{so} \frac{q_s}{e} \mathcal{L} - D_{so} \frac{1}{n} \nabla n + b_{so}^2 [\mathcal{L} \mathcal{L}] - \frac{q_s}{e} b_{so} D_{so} \frac{1}{n} [\nabla n \mathcal{L}] \\ &\quad + \frac{q_s}{e} b_{so}^3 (\mathcal{L} \mathcal{L}) \mathcal{L} - b_{so}^2 D_{so} \frac{1}{n} (\nabla n \mathcal{L}) \mathcal{L} \end{aligned} \quad (8)$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$b_s = \frac{b_{so}}{1 + b_{so}^2 B^2}; \quad D_s = \frac{D_{so}}{1 + b_{so}^2 B^2}, \quad (9)$$

so wird:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{q_s}{e} b_s \mathcal{L} - D_s \frac{1}{n} \nabla n + b_s b_{so} [\mathcal{L} \mathcal{L}] - \frac{q_s}{e} D_{so} b_s \frac{1}{n} [\nabla n \mathcal{L}] \\ &\quad + \frac{q_s}{e} b_{so}^2 b_s (\mathcal{L} \mathcal{L}) \mathcal{L} - b_{so}^2 D_s \frac{1}{n} (\nabla n \mathcal{L}) \mathcal{L} \end{aligned} \quad (10)$$

5.3. Lösung der Grundgleichungen im zylindersymmetrischen Feld

Im folgenden betrachten wir eine zylindersymmetrische Anordnung, d.h. keine der Größen hängt von den Koordinaten φ oder z ab. In Richtung der positiven z -Achse weise auch der homogene Anteil des magnetischen Feldes. Die vorkommenden Vektorgrößen haben im stationären Fall dann die Komponentendarstellungen:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \{r, \varphi, z\} ; & \mathcal{E} &= \{E_r, 0, E_z\} ; & \mathcal{L} &= \{0, B_\varphi, B_z\} ; \\ \mathcal{v}_e &= \{v_{er}, v_{e\varphi}, v_{ez}\} ; & \mathcal{v}_i &= \{v_{ir}, v_{i\varphi}, v_{iz}\} ; & \nabla n &= \left\{ \frac{\partial n}{\partial r}, 0, 0 \right\} . \end{aligned} \quad (11)$$

Die E_φ -Komponente verschwindet wegen $\text{rot } \mathcal{E} = 0$ und der Forderung nach Singularitätsfreiheit auf den Punkten $r = 0$. Die Kontinuitätsgleichungen erhalten dann die einfache Form:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n v_{er}) = Z n ; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n v_{ir}) = Z n . \quad (12)$$

Aus der Bedingung, daß der elektrische Strom zur Wand gleich Null sein muß im Falle der Zylindersymmetrie, folgt noch die wichtige Beziehung:

$$v_{er} - v_{ir} = 0 . \quad (13)$$

Im vorliegenden Fall, in dem das Magnetfeld eine z -Komponente und eine Azimutalkomponente hat, ist:

$$\begin{aligned} [\nabla n \mathcal{L}] &= \left\{ 0 ; - \frac{\partial n}{\partial r} B_z ; \frac{\partial n}{\partial r} B_\varphi \right\} , \\ [\mathcal{E} \mathcal{L}] &= \left\{ - E_z B_\varphi ; - E_r B_z ; E_r B_\varphi \right\} , \\ (\mathcal{E} \mathcal{L}) &= E_z B_z , \quad (\nabla n \mathcal{L}) = 0 . \end{aligned} \quad (14)$$

Daraus folgen die Geschwindigkeitskomponenten:

$$\begin{aligned} v_{sr} &= \frac{q_s b_s}{e} E_r - D_s \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} - b_s b_{so} E_z B_\varphi , \\ (15) \quad v_s &= - b_s b_{so} E_r B_z + \frac{q_s b_s D_{so} B_z}{e} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} + \frac{q_s b_s b_{so}^2 E_z B_z B_\varphi}{e} , \\ v_{sz} &= \frac{q_s b_s}{e} E_z + b_s b_{so} E_r B_\varphi - \frac{q_s b_s D_{so} B_\varphi}{e} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} + \frac{q_s b_s b_{so}^2 E_z B_z^2}{e} . \end{aligned} \quad (15)$$

Mit Hilfe der Bedingung $v_{er} = v_{ir}$ kann aus der ersten Gleichung E_r ausgedrückt werden:

$$E_r = \frac{D_i - D_e}{b_i + b_e} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} - \frac{b_e b_{eo} - b_i b_{io}}{b_i + b_e} E_z B_\varphi \quad (16)$$

Eliminiert man nun E_r aus den Gleichungen für v_{sr} , so erhält man:

$$v_{er} = - \frac{b_i D_e + b_e D_i}{b_i + b_e} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} - \frac{b_i b_e (b_{io} + b_{eo})}{b_i + b_e} E_z B_\varphi \quad (17)$$

oder:

$$v_{er} = v_{ir} = - D_a \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} - d E_z B_\varphi$$

mit

$$D_a = \frac{b_i D_e + b_e D_i}{b_i + b_e}, \quad d = \frac{b_i b_e (b_{io} + b_{eo})}{b_i + b_e}$$

Mit dem Ausdruck für v_{er} geht man in die Kontinuitätsgleichung und erhält eine Differentialgleichung für $n(r)$. Da die Azimutalkomponente des Magnetfeldes eine Funktion des Radius ist: $B_\varphi = I/r$; da andererseits B_φ in den Koeffizienten b_e, b_i, D_e, D_i enthalten ist, würden diese Koeffizienten jetzt explizite von r abhängen und die analytische Lösung der Differentialgleichung sehr erschweren. Wir nehmen jetzt an, daß $B_\varphi^2 \ll B_z^2$ sei, dann können wir es in den Koeffizienten vernachlässigen und mit konstanten Koeffizienten rechnen. Eine weitere Einschränkung werde bezüglich E_z gemacht. E_z ist mit B_z variabel und hängt in komplizierter Weise mit den übrigen Parametern der Entladung zusammen. (E_z könnte mit Hilfe des Energiesatzes eliminiert werden.) Da sich aber E_z bei genügend hohen Gasdrucken mit B_z nur um weniger als 10 % ändert, können wir E_z näherungsweise als konstant ansehen, als Parameter, der nur vom Gasdruck abhängt. Die Kontinuitätsgleichung wird mit

$$B_\varphi = \frac{I}{r}; \quad I = 2 \cdot 10^{-7} i \text{ (Amp)}; \quad \frac{dE_z I}{D_a} = 2\gamma; \quad \frac{Z}{D_a} = Q; \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n v_{er}) - Z n &= \frac{n v_{er}}{r} + \frac{\partial}{\partial r} (n v_{er}) - Z n, \\ &= - \frac{1}{r} \frac{\partial n}{\partial r} - \frac{2n\gamma}{r^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial n}{\partial r} + \frac{2n\gamma}{r} \right\} - Q n = 0, \end{aligned}$$

also:

$$\frac{\partial^2 n}{\partial r^2} + (1+2\gamma) \frac{1}{r} \frac{\partial n}{\partial r} + Q n = 0 \quad (19)$$

Führt man in diese Differentialgleichung die folgenden dimensionslosen Größen ein:

$$r/R = x \quad , \quad n/N = y \quad , \quad q/R^2 = Q \quad , \quad (20)$$

so nimmt sie die Gestalt an:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (1+2\gamma) \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + Qy = 0 \quad . \quad (21)$$

Diese Differentialgleichung hat die Form (siehe JAHNKE-EMDE):

$$y'' + \frac{1-2\alpha}{x} y' + \left[(p\varphi x^{\varphi-1})^2 r \frac{\alpha^2 - p^2 \varphi^2}{x^2} \right] y = 0 \quad (23)$$

mit der Lösung:

$$y = x^\alpha Z_p(\beta x^\varphi) \quad . \quad (24)$$

Vergleich liefert:

$$\alpha = -\gamma; \quad \varphi = 1; \quad \beta = \sqrt{Q}; \quad \alpha^2 - p^2 = 0; \quad p = \pm \gamma.$$

Die Ordnungszahl γ kann positiv oder negativ sein, je nach Polung des Stroms in dem axialen Leiter. Da wir aber Singularitäten ausschließen müssen, sind nur solche Lösungen mit Zylinderfunktionen positiver Ordnung physikalisch sinnvoll (die Zylinderfunktionen negativer Ordnung haben Singularitäten). Wir haben also:

$$y = x^{-\gamma} Z_{|\gamma|}(\sqrt{Q} x) \quad , \quad (25)$$

$$n(r) = N \left(\frac{r}{R}\right)^{-\gamma} Z_{|\gamma|} \left(\frac{\sqrt{Q}}{R} r\right) \quad . \quad (22)$$

Die Konstanten müssen aus den Randbedingungen bestimmt werden. Am äußeren Rand des Rohres $r = R$ haben wir die Bedingung $n(R) = 0$ zu erfüllen. Diese Bedingung kann erfüllt werden, wenn man für $Z_{|\gamma|}$ einfach die Besselfunktion 1. Art setzt und $q^{1/2} = \alpha_\gamma$ verlangt, wo α_γ die erste Nullstelle der Funktion J_γ ist. Die Besselfunktion ist eine Reihe von der Form:

$$J_{|\gamma|}(\alpha_\gamma x) = \frac{(\frac{1}{2}\alpha_\gamma x)^{|\gamma|}}{0! \gamma!} - \frac{(\frac{1}{2}\alpha_\gamma x)^{|\gamma|+2}}{1! (\gamma+1)!} + \dots$$

Für $\gamma < 0$ liefert Multiplikation mit $x^{-\gamma}$ eine Reihe, die mit $x^{2|\gamma|}$ anfängt, und folglich verschwindet die Dichte bei $x = 0$, wie es sein muß wegen des isolierten Innenleiters. Für $\gamma > 0$

kommt aber die Dichte bei $x = 0$ endlich heraus. Diese Lösungen wären nur dann näherungsweise brauchbar, wenn die freien Weglängen der Ladungsträger oder deren Gyrationradien groß sind gegen den Radius a des Innenleiters. Im vorliegenden Fall ist $a = 0,5$ cm, bei $p = 1$ Torr ist $\lambda_e \approx 10^{-2}$ cm, bei $B = 1000$ Gauss ist $r_e = 10^{-3}$ cm. $J_{|\gamma|}$ ist also keine brauchbare Lösung, sondern es muß die allgemeine Lösung benutzt werden:

$$n(r) = N \left(\frac{r}{R}\right)^{-\gamma} \left\{ J_\gamma(B_\gamma r) + C_\gamma N_\gamma(B_\gamma r) \right\} \quad (23)$$

Dabei sind J_γ , N_γ die Bessel- bzw. Neumannfunktionen der Ordnung $|\gamma|$; $B_\gamma = \sqrt{Q} = \sqrt{q}/R$; und C_γ Konstanten, die durch die beiden Randbedingungen

$$n(a) = 0 \quad , \quad n(R) = 0 \quad (24)$$

bestimmt werden können. Diese beiden Bedingungen führen auf die Relationen:

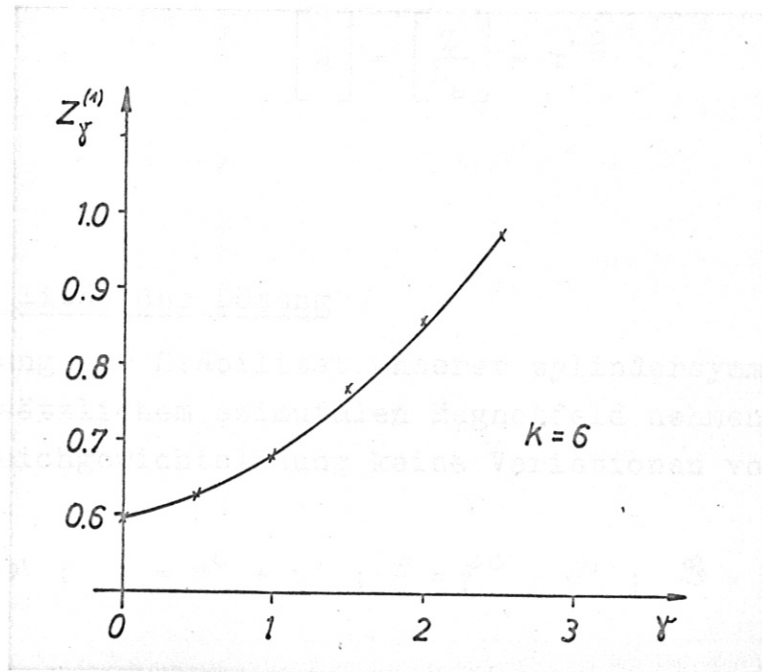
$$\begin{aligned} J_\gamma(B_\gamma a) + C_\gamma N_\gamma(B_\gamma a) &= 0 \quad , \\ J_\gamma(B_\gamma R) + C_\gamma N_\gamma(B_\gamma R) &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (25)$$

setzt man $R/a = k$, $aB_\gamma^{(1)} = z_\gamma^{(1)}$ die erste $z = 0$ - Stelle der Gleichung

$$J_\gamma(z_\gamma^{(1)}) N_\gamma(kz_\gamma^{(1)}) - J_\gamma(kz_\gamma^{(1)}) N_\gamma(z_\gamma^{(1)}) = 0 \quad . \quad (26)$$

Diese Nullstellen sind im JAHNKE-EMDE tabelliert bis $\gamma = 2,5$. Die höheren Nullstellen interessieren hier nicht, da dann negative Werte der Funktion Z_γ zugelassen werden müßten, d.h. negative Dichten.

Fig. 50



In der Fig. 50 sind die Funktionen $n = \left(\frac{r}{R}\right)^{-\gamma} \left\{ J_{\gamma}(B_{\gamma}r) + C_{\gamma} N_{\gamma}(B_{\gamma}r) \right\}$ für verschiedene γ mit $k = R/a = 6$ aufgezeichnet. Zur Bestimmung der wahren Dichte sind die Normierungsfaktoren so festgelegt zu denken, daß der Gesamtstrom richtig herauskommt. Die Durchrechnung ist kompliziert, weil die durch das Azimutalfeld veränderten Beweglichkeiten in z-Richtung eingehen. Der Wert der Normierungskonstanten ist aber auch bei der weiteren Rechnung nicht von Bedeutung und die Ausrechnung muß nicht ausgeführt werden. Einen ganz ähnlichen Verlauf der Dichte zeigt die Funktion

$$n = \left(\frac{r}{R}\right)^{-\gamma} \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{r}{R} - \frac{a}{R}\right) \cos \frac{\pi}{2} \frac{r}{R} \quad , \quad (27)$$

und für Näherungsrechnungen wird man dort, wo die Verwendung der Besselfunktion die Rechnung sehr erschwert, diese Funktion für die Dichte benutzen können.

Zum Schluß seien die Dimensionen der im folgenden immer wieder benutzten Größen zusammengestellt:

$$\begin{aligned} [b_{so}] &= \frac{m^2}{Vs} \quad ; \quad [D_{so}] = \frac{m^2}{s} \quad ; \quad [D_a] = \frac{m^2}{s} \quad ; \\ [d] &= \frac{m^4}{V^2 s^2} \quad ; \quad [E_z] = \frac{V}{m} \quad ; \quad [B] = \frac{Vs}{m^2} \quad ; \quad B_{\varphi} = \frac{I}{r} \quad ; \\ B_{\varphi} [G] &= \frac{i(\text{Amp})}{5 \cdot r(\text{cm})} \quad ; \quad B_{\varphi} \left[\frac{Vs}{m^2} \right] = \frac{10^{-4} i(\text{Amp})}{5 \cdot r(\text{cm})} = \frac{2 \cdot 10^{-7} i(\text{Amp})}{r(\text{m})} \quad ; \\ [I] &= \frac{Vs}{m} \quad ; \quad I \left[\frac{Vs}{m} \right] = 2 \cdot 10^{-7} i(\text{Amp}) \quad ; \quad (28) \\ [\gamma] \cdot \left[\frac{dE_z I}{D_a} \right] &= 1 \quad ; \quad [Q] = \left[\frac{Z}{D_a} \right] = m^{-2} \quad . \end{aligned}$$

5.4. Die Stabilität der Lösung

Zur Untersuchung der Stabilität unserer zylindersymmetrischen Lösung bei zusätzlichem azimutalen Magnetfeld nehmen wir an den Größen der Gleichgewichtslösung keine Variationen vor, indem wir schreiben:

$$\omega = \omega^0 + \omega' \quad ; \quad n = n^0 + n' \quad ; \quad \xi = \xi^0 + \xi' \quad ; \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}^0 + \mathcal{L}' \quad . \quad (29)$$

Die mit Null indizierten Größen sollen die Gleichgewichtsgleichungen erfüllen, die gestrichenen Größen sind die Störgrößen. Es ist zu prüfen, ob es Lösungen des Systems der Bewegungsgleichungen gibt derart, daß die gestrichenen Größen exponentiell anwachsende Störungen sind. Die volle Bewegungsgleichung für die Teilchensorte s heißt jetzt (siehe Gl.(1))

$$m_s n \left(\frac{\partial \varpi_s}{\partial t} + (\varpi_s \nabla) \varpi_s \right) = q_s n \left(\mathcal{E} + [\varpi_s \mathcal{L}] \right) - kT_s \nabla n - m_s \nu_{sn} n \varpi_s, \quad (30)$$

und die Kontinuitätsgleichung lautet:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(n \varpi_s) = Zn.$$

Für die ungestörten Größen gilt:

$$\frac{\partial \varpi_s^0}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial n^0}{\partial t} = 0; \quad (\varpi_s^0 \nabla) \varpi_s^0 \approx 0; \quad (31)$$

$$q_s n^0 \left(\mathcal{E}^0 + [\varpi_s^0 \mathcal{L}] \right) - kT_s \nabla n^0 - m_s n^0 \nu_{sn} \varpi_s^0 = 0.$$

(Hier ist schon vorausgesetzt, daß $\mathcal{L} = \mathcal{L}^0$, d.h. das Feld ist von außen angelegt und zeitlich konstant. Wir werden diese Voraussetzung auch weiterhin beibehalten.) Für die Störungsrechnung machen wir nun die übliche Linearisierung, d.h. Terme, die in den Störgrößen quadratisch sind, werden unterdrückt.

Weiter werden wir uns - wie üblich - auf die Methode der sogenannten Normalschwingungen beschränken, d.h. wir machen für die Störgrößen einen in z , φ und t periodischen Ansatz, da die Stabilität gegen solche Störungen das System ausreichend charakterisiert. Wir setzen:

$$n' = \xi(r) e^{im\varphi + ikz - i\omega t}; \quad V' = \eta(r) e^{im\varphi + ikz - i\omega t}; \quad (32)$$

denn es ist auch hier $\mathcal{E}' = -\nabla V'$ wegen $\mathcal{L} = \text{const.}$ Entsprechendes auch für die anderen Größen.

Wir führen zunächst die Linearisierung durch und erhalten:

$$m_s n^0 \left\{ \frac{\partial \varpi_s'}{\partial t} + (\varpi_s^0 \nabla) \varpi_s' + (\varpi_s' \nabla) \varpi_s^0 \right\} = q_s n^0 \left(\mathcal{E}' + [\varpi_s' \mathcal{L}] \right) + q_s n' \left(\mathcal{E}^0 + [\varpi_s^0 \mathcal{L}] \right) - kT_s \nabla n' - m_s \nu_{sn} n^0 \varpi_s' - m_s \nu_{sn} n' \varpi_s^0, \\ \frac{\partial n'}{\partial t} + \nabla(n^0 \varpi_s' + \varpi_s^0 n') = Zn'. \quad (33)$$

Wir machen nun die folgenden weiteren Annahmen, die die Behandlung des Problems erheblich vereinfachen (siehe KADOMTSEV⁹):

- a) Wegen der niedrigen Frequenzen, die bei den Rauschmessungen an der instabilen Entladung gefunden wurden, beschränken wir uns auf solche Vorgänge, die mit niedrigen Frequenzen ablaufen. Bei der periodischen Störung wird $\partial \omega'_S / \partial t = -i\omega \omega'_S$ und $\partial n' / \partial t = -i\omega n'$, wobei ω die Frequenz der Störbewegung ist. Wir vergleichen den Term $\partial \omega'_S / \partial t$ mit $\nu_{sn} \omega'_S$ und sehen, daß $\partial \omega'_S / \partial t$ vernachlässigt werden darf, wenn $\omega \ll \nu_{sn}$ ist. Die Bedingung ist für $p > 10^{-1}$ Torr erfüllt. ($\nu_e > 10^8$; $\nu_i > 10^6$; $\omega \approx 10^4$.) In der Kontinuitätsgleichung ist aber $\partial n' / \partial t = -i\omega n'$ mit Zn' zu vergleichen und nicht vernachlässigbar, da $Z \approx 10^4$.
- b) Wir nehmen an, daß auch die anderen Trägheitsterme vernachlässigt werden dürfen. Wenn wir annehmen, daß sich die Geschwindigkeiten nur über Längen merklich ändern, die vergleichbar mit dem Rohrradius R sind, dann dürfen wir abschätzen:

$$(\omega'_S \nabla) \omega'_S \approx (\omega'_S \nabla) \omega'_S \approx \omega'_S \frac{1}{R} \omega'_S \ll \frac{\bar{v}_{sth}}{R} \omega'_S = \nu_{sn} \frac{\lambda_{sn}}{R} \omega'_S. \quad (34)$$

Wir können diesen Term vergleichen mit dem Term $\nu_{sn} \omega'_S$ und sehen, daß er unter der Annahme $\lambda_S \ll R$ vernachlässigt werden darf. In den Fällen, in denen die freie Weglänge λ_S vergleichbar mit dem Rohrradius ist, haben wir den Term

$$(\omega'_S \nabla) \omega'_S \approx \omega'_S \frac{1}{\lambda_S} \omega'_S \ll \frac{\bar{v}_{sth}}{\lambda_S} \omega'_S = \nu_{sn} \omega'_S \quad (35)$$

mit dem Term

$$\frac{q_S}{m_S} \omega'_S \mathcal{L} = \omega_S \omega'_S$$

zu vergleichen. Wir dürfen den Trägheitsterm vernachlässigen, wenn $\omega_S \gg \nu_{sn}$ ist. Die Tabelle zeigt, daß damit die Vernachlässigung der Trägheitsterme immer erlaubt ist, wenn $p > 10^{-1}$ Torr bzw. $B_z > 0,01$ Vs/m².

- c) Wir nehmen an, daß die Bewegung der Ionen im wesentlichen durch das elektrische Feld bestimmt wird und vernachlässigen den Diffusionsterm und den magnetischen Term. Eine Größenordnungs-

abschätzung für die Geschwindigkeiten zeigt nämlich, daß dies für Drucke $p > 10^{-1}$ Torr erlaubt ist. Die Impulserhaltungsgleichungen können mit den in den vorigen Abschnitten begründeten Vernachlässigungen der Trägheitsterme nach den Geschwindigkeiten aufgelöst werden, und man erhält, wie im stationären Fall, nur mit dem Unterschied, daß die Größen hier gestörte sind:

$$n\varphi_s = \frac{q_s}{e} b_s n \xi - D_s \nabla n + b_s b_{s0} n [\xi \mathcal{L}] - \frac{q_s}{e} D_{s0} b_s [\nabla n \mathcal{L}] + \frac{q_s}{e} b_s b_{s0}^2 n (\xi \mathcal{L}) \mathcal{L} - b_{s0}^2 D_s (\nabla n \mathcal{L}) \mathcal{L} \quad (36)$$

Für die Ionen ist in dem betrachteten Druck- und Magnetfeldbereich $b_{i0} B \ll 1$. Damit sind in der Ionengleichung auf der rechten Seite der dritte und fünfte Term klein gegen den ersten, der vierte und sechste Term sind klein gegen den zweiten. Es ist $b_i \approx b_{i0}$ und $D_i \approx D_{i0}$. Außerdem ist für $B_\varphi = 0$:

$$E_r \approx \frac{D_e}{b_e} \frac{1}{n} \frac{dn}{dr} = \frac{D_{e0}}{b_{e0}} \frac{1}{n} \frac{dn}{dr} \quad (37)$$

Es ist also $b_{i0} \frac{D_{e0}}{b_{e0}}$ mit D_{i0} zu vergleichen, und man sieht aus der Tabelle, daß auch der Term $D_{i0} \nabla n$ gegen den ersten vernachlässigbar ist; denn die Änderung durch B_φ ist nur geringfügig.

Das System der Störgleichungen erhalten wir nun, wenn wir die Geschwindigkeiten mit Hilfe der Impulsgleichungen aus den Kontinuitätsgleichungen eliminieren. Wir haben also (die Striche an den Produkten bedeuten, daß die Terme noch zu linearisieren sind):

$$\frac{\partial n'}{\partial t} + \nabla(n\varphi_i)' = Zn' \quad ; \quad \frac{\partial n'}{\partial t} + \nabla(n\varphi_e)' = Zn' \quad (38)$$

$$n\varphi_i = b_{i0} n \xi \quad ,$$

$$n\varphi_e = -b_e n \xi - D_e \nabla n + b_e b_{e0} n [\xi \mathcal{L}] - b_e b_{e0}^2 n (\xi \mathcal{L}) \mathcal{L} - b_{e0}^2 D_e (\nabla n \mathcal{L}) \mathcal{L} + b_e D_{e0} [\nabla n \mathcal{L}] \quad .$$

Es ist:

$$\begin{aligned} \nabla(n\omega_1)' &= b_{i0} \nabla(n^0 \xi') + b_{i0} \nabla(n' \xi^0) \quad , \\ \nabla(n^0 \xi') &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rn^0 E'_r) + \frac{n'_0}{r} \frac{\partial E'_\varphi}{\partial \varphi} + n^0 \frac{\partial E'_z}{\partial z} \quad , \\ \nabla(n' \xi^0) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rn' E^0_r) + E^0_z \frac{\partial n'}{\partial z} \quad . \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \nabla(n\omega_e) &= -b_e \nabla(n\xi) - D_e \nabla n + b_e b_{e0} \nabla(n[\xi \mathcal{L}]) \\ &\quad - b_e b_{e0}^2 \nabla(n\mathcal{L}(\xi \mathcal{L})) - b_{e0}^2 D_e \nabla \mathcal{L}(\nabla n \mathcal{L}) + b_e D_{e0} \nabla[\nabla n \mathcal{L}] \quad ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla\{n[\xi \mathcal{L}]\} &= ([\xi \mathcal{L}]\nabla n) + n\nabla[\xi \mathcal{L}] - ([\xi \mathcal{L}]\nabla n) \quad \text{wegen } \text{rot } \mathcal{L} = 0, \\ &\quad \text{rot } \xi = 0; \end{aligned}$$

$$\nabla\{n\mathcal{L}(\xi \mathcal{L})\} = (\xi \mathcal{L})(\mathcal{L}\nabla n) + n(\mathcal{L}\nabla(\xi \mathcal{L})) \quad ;$$

$$\nabla\{\mathcal{L}(\nabla n \mathcal{L})\} = (\mathcal{L}\nabla(\mathcal{L}\nabla n)) \quad ;$$

$$\nabla[\nabla n \mathcal{L}] = \mathcal{L} \text{ rot grad } n - \text{grad } n \text{ rot } \mathcal{L} = 0$$

$$\nabla n' = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial n'}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 n'}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 n'}{\partial z^2} \quad ;$$

$$\begin{aligned} ([\xi^0 \mathcal{L}]\nabla n') &= \left\{ -E^0_z B_\varphi; -E^0_r B_z; E^0_r B_\varphi \right\} \nabla n' \\ &= -E^0_z B_\varphi \frac{\partial n'}{\partial r} - \frac{1}{r} E^0_r B_z \frac{\partial n'}{\partial \varphi} + E^0_r B_\varphi \frac{\partial n'}{\partial z} \quad ; \end{aligned} \quad (40)$$

$$([\xi' \mathcal{L}]\nabla n^0) = (E'_\varphi B_z - E'_z B_\varphi) \frac{\partial n^0}{\partial r} \quad ;$$

$$(\xi \mathcal{L})(\mathcal{L}\nabla n') = E^0_z B_z \left(\frac{B_\varphi}{r} \frac{\partial n'}{\partial \varphi} + B_z \frac{\partial n'}{\partial z} \right);$$

$$(\mathcal{L}\nabla n^0) = 0 \quad ,$$

$$\nabla(\xi^0 \mathcal{L}) = 0 \quad ;$$

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}\nabla(\mathcal{L}'\mathcal{L})) &= B_\varphi \nabla_\varphi(\mathcal{L}'\mathcal{L}) + B_z \nabla_z(\mathcal{L}'\mathcal{L}) \\
 &= \frac{B_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (E'_\varphi B_\varphi + E'_z B_z) + B_z \frac{\partial}{\partial z} (E'_\varphi B_\varphi + E'_z B_z) \\
 &= \frac{B_\varphi^2}{r^2} \frac{\partial E'_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{B_\varphi B_z}{r} \frac{\partial E'_z}{\partial \varphi} + B_\varphi B_z \frac{\partial E'_\varphi}{\partial z} + B_z^2 \frac{\partial E'_z}{\partial z} ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}\nabla(\mathcal{L}\nabla n')) &= B_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{B_\varphi}{r} \frac{\partial n'}{\partial \varphi} + B_z \frac{\partial n'}{\partial z} \right) + B_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{B_\varphi}{r} \frac{\partial n'}{\partial \varphi} + B_z \frac{\partial n'}{\partial z} \right), \\
 &= \frac{B_\varphi^2}{r^2} \frac{\partial^2 n'}{\partial \varphi^2} + \frac{2B_\varphi B_z}{r} \frac{\partial^2 n'}{\partial \varphi \partial z} + B_z^2 \frac{\partial^2 n'}{\partial z^2} ;
 \end{aligned}$$

wir erhalten schließlich nach geeigneter Zusammenfassung als Störgleichung:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial n'}{\partial t} - Zn' + b_{io} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rn^0 E'_r + rn' E_r^0) + b_{io} \frac{n^0}{r} \frac{\partial E'_\varphi}{\partial \varphi} \\
 + b_{io} n^0 \frac{\partial E'_z}{\partial z} + b_{io} E_z^0 \frac{\partial n'}{\partial z} = 0 ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial n'}{\partial t} - Zn' - b_e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rn^0 E'_r + rn' E_r^0) - D_e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial n'}{\partial r} \right) \\
 - b_e b_{eo} E_z^0 B_\varphi \frac{\partial n'}{\partial r} - b_e E_z^0 \frac{\partial n'}{\partial z} (1 + b_{eo}^2 B_z^2) - D_e \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 n'}{\partial \varphi^2} \\
 - D_e (1 + b_{eo}^2 B_z^2) \frac{\partial^2 n'}{\partial z^2} + b_e b_{eo} E_r^0 \left(B_\varphi \frac{\partial n'}{\partial z} - \frac{B_z}{r} \frac{\partial n'}{\partial \varphi} \right) \\
 - b_e b_{eo}^2 E_z^0 \frac{B_z B_\varphi}{r} \frac{\partial n'}{\partial \varphi} - b_e \frac{n^0}{r} \frac{\partial E'_\varphi}{\partial \varphi} - b_e b_{eo} D_{eo} \left(\frac{B_\varphi^2}{r^2} \frac{\partial^2 n'}{\partial \varphi^2} + \frac{2B_\varphi B_z}{r} \frac{\partial^2 n'}{\partial \varphi \partial z} \right) \\
 - b_e n^0 (1 + b_{eo}^2 B_z^2) \frac{\partial E'_z}{\partial z} + b_e b_{eo} \frac{\partial n^0}{\partial r} (E'_\varphi B_z - E'_z B_\varphi) \\
 - b_e b_{eo}^2 n^0 \left(\frac{B_\varphi^2}{r^2} \frac{\partial E'_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{B_\varphi B_z}{r} \frac{\partial E'_z}{\partial \varphi} + B_\varphi B_z \frac{\partial E'_\varphi}{\partial z} \right) = 0 . \quad (41)
 \end{aligned}$$

Wir machen nun den periodischen Ansatz für die Störgrößen n' und ψ' bzw. V' . Außerdem benutzen wir die Annahme $b_{eo}^2 B_z^2 \gg 1$, die in den hier betrachteten Fällen immer erfüllt ist.

Man erhält:

$$n' = \xi(r) e^{im\varphi + ikz - i\omega t} \quad (42)$$

$$\frac{\partial n'}{\partial t} = -i\omega n' ; \quad \frac{\partial n'}{\partial z} = ikn' ; \quad \frac{\partial n'}{\partial \varphi} = imn' ; \quad \frac{\partial^2 n'}{\partial z^2} = -k^2 n' ;$$

$$\frac{\partial^2 n'}{\partial \varphi^2} = -m^2 n' ; \quad \psi' = -\nabla V' ; \quad V' = \eta(r) e^{im\varphi + ikz - i\omega t} ;$$

$$E'_r = -\frac{\partial V'}{\partial r} ; \quad E'_\varphi = -\frac{imV'}{r} ; \quad E'_z = -ikV' ;$$

$$\frac{\partial E'_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{m^2}{r} V' ; \quad \frac{\partial E'_\varphi}{\partial z} = \frac{mk}{r} V' ; \quad \frac{\partial E'_z}{\partial \varphi} = mkV' ; \quad \frac{\partial E'_z}{\partial z} = k^2 V' .$$

In die Störgleichung eingesetzt, ergibt dies:

$$(ib_{io} k E_z^0 - i\omega - Z)n' + b_{io} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rn' E_r^0 + rn^0 E'_r) + b_{io} \left(\frac{m^2}{r^2} + k^2 \right) n^0 V' = 0 ;$$

$$-b_e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rn^0 E'_r + rn' E_r^0) - D_e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial n'}{\partial r} \right) - b_e b_{eo} E_z^0 I \frac{1}{r} \frac{\partial n'}{\partial r}$$

$$+ n' (-i\omega - Z - ikb_{eo} E_z^0 + D_{eo} k^2) + \frac{n'}{r^2} (D_e m^2 + 2D_{eo} mk \frac{I}{B_z} - imb_{eo} E_z^0 \frac{I}{B_z})$$

$$+ i \frac{E_r^0}{B_z} \left(\frac{I}{B_z} k - m \right) \frac{n'}{r} + \frac{n'}{r^4} D_{eo} m^2 \frac{I^2}{B_z^2} - b_{eo} n^0 k^2 V'$$

$$- b_e (m^2 + 2b_{eo}^2 B_z mk I) \frac{n^0}{r^2} V' + i \frac{V'}{r} \frac{\partial n^0}{\partial r} \frac{1}{B_z} \left(\frac{I}{B_z} k - m \right)$$

$$- b_e b_{eo}^2 n^0 m^2 \frac{I^2}{r^4} V' = 0 \quad (43)$$

Wir benutzen jetzt folgende Abkürzungen:

$$E_r^0 = \epsilon_1 \frac{1}{n^0} \frac{\partial n^0}{\partial r} - \frac{\epsilon_2}{r} ;$$

$$\epsilon_1 = \frac{(D_{io} b_{eo}^2 - D_{eo} b_{io}^2) B_z^2 - D_{eo}}{b_{eo} (1 + b_{io} b_{eo} B_z^2)} ; \quad \epsilon_2 = \frac{b_{eo} E_z^0 I}{1 + b_{io} b_{eo} B_z^2} ;$$

$$b_e b_{eo} E_z^0 I = \gamma_{13} ;$$

$$- i\omega - Z - i k b_{eo} E_z^0 + D_{eo} k^2 = - i\omega + i\gamma_{14} \tau_\gamma^2 + \gamma_{15} \tau_\gamma^2 = \vartheta_2 ;$$

$$D_e m^2 - i m b_{eo} E_z^0 \frac{I}{B_z} + 2 D_{eo} m k \frac{I}{B_z} = \gamma_{16} - i\gamma_{17} = \vartheta_3 ;$$

$$i \frac{1}{B_z} \left(\frac{I}{B_z} k - m \right) = i\gamma_6 ;$$

$$b_{eo} k^2 = \tau_\gamma^2 \gamma_8 ;$$

$$\frac{1}{B_z} \left(\frac{m^2}{b_{eo} B_z} + 2 b_{eo} I m k \right) = b_e (m^2 + 2 m k b_{eo}^2 I B_z) = \gamma_7 ;$$

$$b_{io} k^2 = \tau_\gamma^2 \gamma_9 ;$$

$$b_{io} m^2 = \gamma_{10} ;$$

$$- i\omega - Z + i b_{io} E_z^0 k = - i\omega + i\tau_\gamma^2 \gamma_2 + \tau_\gamma^2 \gamma_3 = \vartheta_2^* ;$$

$$b_e b_{eo} D_{eo} I^2 m^2 = \frac{\gamma_{20}}{\tau_\gamma^2} ;$$

$$b_e b_{eo} m^2 I^2 = \frac{\gamma_{21}}{\tau_\gamma^2} .$$

Multipliziert man beide Störgleichungen mit r^2 , dann erhält man das System:

$$- b_{io} r \frac{\partial}{\partial r} (r n^0 \frac{\partial V'}{\partial r}) - b_e \epsilon_1 r \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{n'}{n^0} \frac{\partial n^0}{\partial r}) - b_{io} \epsilon_2 r \frac{\partial n'}{\partial r} + \vartheta_2^* r^2 n' + \gamma_{10} n^0 V' + \tau_\gamma^2 \gamma_9 r^2 n^0 V' = 0 . \quad (45)$$

$$b_e r \frac{\partial}{\partial r} (r n^0 \frac{\partial V'}{\partial r}) - b_e \epsilon_1 r \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{n'}{n^0} \frac{\partial n^0}{\partial r}) + b_e \epsilon_2 r \frac{\partial n'}{\partial r} - D_e r \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial n'}{\partial r}) - \gamma_{13} r \frac{\partial n'}{\partial r} + \vartheta_2 r^2 n' + \vartheta_3 n' + i\gamma_6 \epsilon_1 \frac{1}{n^0} \frac{\partial n^0}{\partial r} n' r - i\gamma_6 \epsilon_2 n' + \frac{\gamma_{20}}{\tau_\gamma^2} \frac{n'}{r^2} - \tau_\gamma^2 \gamma_8 r^2 n^0 V' - \gamma_7 n^0 V' + i\gamma_6 r \frac{\partial n^0}{\partial r} V' - \frac{\gamma_{21}}{\tau_\gamma^2} \frac{n^0}{r^2} V' = 0 . \quad (46)$$

Für $I = 0$, d.h. ohne magnetisches Azimutalfeld, ist dieses System identisch mit den Gleichungen (8) und (9) in der Arbeit von KADOMTSEV⁹⁾. Das Gleichungssystem ist linear in den Störgrößen n' und V' und stellt also ein lineares Differentialgleichungssystem für die Funktionen $\xi(r)$ und $\eta(r)$ dar und definiert außerdem ein Eigenwertproblem, das nur für bestimmte Werte der Parameter ω , k und m Lösungen hat. Die Lösung des Eigenwertproblems ist wegen der Kompliziertheit der in ihm vorkommenden Funktionen sicher sehr verwickelt. Wir begnügen uns mit einer einfachen Näherung, indem wir wie KADOMTSEV für die gesuchten Funktionen n' und V' plausible Ansätze machen:

$$\xi(r) = \bar{n} \psi^{(0)}(r) \quad ; \quad \eta(r) = \bar{V} \psi^{(0)}(r) \quad . \quad (46)$$

Dabei nehmen wir an, daß diese Funktionen den wahren Eigenfunktionen des Systems nahe kommen. Das Eigenwertproblem hat die Gestalt:

$$T \psi - \omega \psi = 0 \quad , \quad (47)$$

wobei T den Differentialoperator repräsentiert. Kennt man nun Funktionen $\psi^{(0)}$, die das System näherungsweise lösen, dann erhält man Näherungswerte der Eigenwerte, wenn man das Quadrat der Abweichung

$$D = T \psi^{(0)} - \omega^{(0)} \psi^{(0)} \quad (48)$$

zu einem Minimum macht. Es ist:

$$\overline{D^2} = \int_D D^* d\tau \quad , \quad (49)$$

da D im vorliegenden Falle nicht-hermitescher Operatoren komplex sein kann. Man hat nun, um das Extremum aufzusuchen, die Variation von

$$\int (T - \omega^{(0)})^* \psi^{(0)*} (T - \omega^{(0)}) \psi^{(0)} d\tau \quad (50)$$

zu bilden. Dabei kann, statt nach Real- und Imaginärteil von $\omega^{(0)}$ zu variieren, nach $\omega^{(0)}$ und $\omega^{(0)*}$ variiert werden. Variation nach $\omega^{(0)*}$ ergibt:

$$\int \psi^{(0)*} (T - \omega^{(0)}) \psi^{(0)} d\tau = 0 \quad . \quad (51)$$

Die genäherten Eigenfunktionen seien nun normiert, d.h.

$$\int \psi^{(0)*} \psi^{(0)} d\tau = 1 \quad , \quad (52)$$

dann folgt für die Näherungswerte der Eigenwerte:

$$\omega^{(0)} = \int \psi^{(0)*} T \psi^{(0)} d\tau \quad . \quad (53)$$

Diese Näherungsmethode wurde offenbar auch in der Arbeit von KADOMTSEV benutzt.

Setzen wir also die gewählten Näherungsfunktionen in unser Gleichungssystem (45) ein, multiplizieren nochmals mit der Näherungslösung und integrieren bezüglich r zwischen den Rändern, dann erhalten wir ein lineares homogenes Gleichungssystem für die konstanten Amplituden der Näherungslösung. Dieses Gleichungssystem ist nichttrivial lösbar, wenn die Koeffizientendeterminante identisch verschwindet. Dies liefert die Dispersionsrelation, die man nach den Eigenwerten $\omega^{(0)}$ auflösen kann. Da das System nicht-hermitesch ist, können die Eigenwerte komplex sein. Wir interessieren uns für den Imaginärteil der Frequenz, d.h. für exponentiell an- oder abklingende Störungen.

Wegen:

$$n'(r) = \xi(r) e^{im\varphi + ikz - i(\Re + iJ)t} = \xi(r) e^{im\varphi + ikz} e^{-i\Re t} e^{Jt} \quad (54)$$

haben wir es mit stabilen, exponentiell abklingenden Störungen zu tun, wenn $J < 0$, und wir erhalten als Stabilitätskriterium:

$$Jm\omega < 0 \quad . \quad (55)$$

Als Näherungslösungen für die Eigenfunktionen haben wir solche zu wählen, die zumindest die Randbedingungen erfüllen, d.h. Funktionen, die bei $r = a$ und $r = R$ verschwinden. Wir nennen diese Funktionen jetzt:

$$\psi^{(0)} = \phi_{\lambda}^{(s)}(\tau_{\lambda} r) \quad , \quad (56)$$

wobei s , τ_{λ} und λ die Funktion näher charakterisierende Parameter sind. Eine physikalisch plausible Näherung wird eine Funktion sein, die der Gleichgewichtslösung der Dichtefunktion verwandt ist, also z.B.

$$\phi_{\lambda}^{(1)}(\tau_{\lambda} r) = (\tau_{\lambda} r)^{-\lambda} \left\{ J_{\lambda}(\tau_{\lambda} r) + C_{\lambda} N_{\lambda}(\tau_{\lambda} r) \right\} \quad , \quad (57)$$

wobei $\tau_{\lambda} = \beta_{\lambda}$ und C_{λ} aus den Randbedingungen zu bestimmen sind, während die Ordnung λ noch frei verfügbar ist. Ein ähnliches Verhalten hat auch die Funktion:

$$\phi_{\lambda}^{(2)}(\tau_{\lambda} r) = (\tau_{\lambda} r)^{-\lambda} \sin \tau_{\lambda} (r-a) \cos \tau_{\lambda} r \quad (58)$$

mit $\tau_{\lambda} = \pi/2R$. Dieser Ansatz läßt sich numerisch leichter behandeln. Die in (45) noch auftretende ungestörte Dichteverteilung $n^0(r)$

kann ebenfalls durch eine Funktion

$$n^{\circ}(r) \approx N^{\circ} \phi_{\gamma}^{(2)}(\tau_{\gamma}r) = N^{\circ} (\tau_{\gamma}r)^{-\gamma} \sin \tau_{\gamma}(r-a) \cos \tau_{\gamma}r \quad (59)$$

angenähert werden, die der richtigen Lösung

$$n^{\circ}(r) = N^{\circ} \phi_{\gamma}^{(1)}(\tau_{\gamma}r) = N^{\circ} (\tau_{\gamma}r)^{-\gamma} \left\{ J_{\gamma}(\tau_{\gamma}r) + C_{\gamma} N_{\gamma}(\tau_{\gamma}r) \right\} \quad (60)$$

im betrachteten Bereich nahe kommt ($\tau_{\gamma} = \beta_{\gamma}$). Wir haben also:

$$\xi(r) = \bar{n} \phi_{\lambda}(\tau_{\lambda}r); \quad \eta(r) = \bar{v} \phi_{\lambda}(\tau_{\lambda}r); \quad n^{\circ}(r) = N^{\circ} \phi_{\gamma}(\tau_{\gamma}r). \quad (61)$$

Substituieren wir:

$$\tau_{\gamma}r = x,$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \tau_{\gamma} \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\tau_{\lambda}r = \frac{\tau_{\lambda}}{\tau_{\gamma}} \tau_{\gamma}r = \frac{\tau_{\lambda}}{\tau_{\gamma}} x = \xi x,$$

$$\xi = \frac{\tau_{\lambda}}{\tau_{\gamma}}$$

und setzen dies in unsere Störgleichung ein, dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} & - b_{i0} x \frac{\partial}{\partial x} \left(x \phi_{\gamma} \frac{\partial \phi_{\lambda}}{\partial x} \right) N^{\circ} \bar{v} + \epsilon_1 b_{i0} x \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\phi_{\lambda}}{\phi_{\gamma}} \frac{\partial \phi_{\gamma}}{\partial x} \right) \bar{n} \\ & - b_{i0} \epsilon_2 x \frac{\partial}{\partial x} \phi_{\lambda} \bar{n} + \frac{\varrho_2^*}{\tau_{\gamma}^2} x^2 \phi_{\lambda} \bar{n} + \gamma_{10} \phi_{\gamma} \phi_{\lambda} N^{\circ} \bar{v} + \gamma_9 x^2 \phi_{\gamma} \phi_{\lambda} N^{\circ} \bar{v} = 0; \\ & b_e x \frac{\partial}{\partial x} \left(x \phi_{\gamma} \frac{\partial \phi_{\lambda}}{\partial x} \right) N^{\circ} \bar{v} - b_e \epsilon_1 x \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\phi_{\lambda}}{\phi_{\gamma}} \frac{\partial \phi_{\gamma}}{\partial x} \right) \bar{n} + b_e \epsilon_2 x \frac{\partial \phi_{\lambda}}{\partial x} \bar{n} \\ & - D_e x \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \phi_{\lambda}}{\partial x} \right) \bar{n} - \gamma_{13} x \frac{\partial \phi_{\lambda}}{\partial x} \bar{n} + \frac{\varrho_2}{\tau_{\gamma}^2} x^2 \phi_{\lambda} \bar{n} + \varrho_3 \phi_{\lambda} \bar{n} \\ & - i \gamma_6 \epsilon_2 \phi_{\lambda} \bar{n} + i \gamma_6 \epsilon_1 x \frac{\phi_{\lambda}}{\phi_{\gamma}} \frac{\partial \phi_{\gamma}}{\partial x} \bar{n} + \gamma_{20} \frac{\phi_{\lambda}}{x^2} \bar{n} - \gamma_8 x^2 \phi_{\lambda} \phi_{\gamma} N^{\circ} \bar{v} \\ & - \gamma_7 \phi_{\lambda} \phi_{\gamma} N^{\circ} \bar{v} + i \gamma_6 x \phi_{\lambda} \frac{\partial \phi_{\gamma}}{\partial x} N^{\circ} \bar{v} - \gamma_{21} \frac{1}{x^2} \phi_{\lambda} \phi_{\gamma} N^{\circ} \bar{v} = \phi. \end{aligned} \quad (63)$$

Multiplizieren wir die Gleichungen mit ϕ_{λ} , integrieren zwischen $x_a = \tau_{\gamma}a$ und $x_R = \tau_{\gamma}R$, dividieren durch N° und nennen $\bar{n}/N^{\circ} = \bar{N}$, dann erhalten wir das System von linearen Gleichungen für die unbekanntenen Koeffizienten \bar{v} und \bar{N} :

$$\bar{V} \left\{ -b_{io}\psi_6 + \gamma_{10}\psi_5 + \gamma_9\psi_4 \right\} + \bar{N} \left\{ \frac{\beta_2^*}{\tau_2^2} \psi_1 - b_{io}\epsilon_2\psi_3 + \epsilon_1 b_{io}\psi_2 \right\} = 0. \quad (64)$$

$$\bar{V} \left\{ b_e\psi_6 - \gamma_8\psi_4 - \gamma_7\psi_5 + i\gamma_6\psi_{10} - \gamma_{21}\psi_{12} \right\} + \bar{N} \left\{ -b_e\epsilon_1\psi_2 + b_e\epsilon_2\psi_3 - D_e\psi_7 - \gamma_{13}\psi_3 + \frac{\beta_2}{\tau_2^2} \psi_1 + \beta_3\psi_8 + i\gamma_6\epsilon_1\psi_9 - i\gamma_6\epsilon_2\psi_8 + \gamma_{20}\psi_{11} \right\} = 0.$$

Die Größen ψ_i darin haben die Bedeutung:

$$\psi_i = \int_{x_a}^{x_R} \varphi_1(x) \phi_\lambda(\xi x) dx \quad (65)$$

mit:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= x^2 \phi_\lambda(\xi x) & , & \quad \varphi_8 = \phi_\lambda(\xi x) & , \\ \varphi_2 &= x \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\phi_\lambda(\xi x)}{\phi_\gamma(x)} \frac{\partial \phi_\gamma(x)}{\partial x} \right) & , & \quad \varphi_9 = x \frac{\phi_\lambda(\xi x)}{\phi_\gamma(x)} \frac{\partial \phi_\gamma(x)}{\partial x} & , \\ \varphi_3 &= x \frac{\partial \phi_\lambda(\xi x)}{\partial x} & , & \quad \varphi_{10} = x \phi_\lambda(\xi x) \frac{\partial \phi_\gamma(x)}{\partial x} & , \\ \varphi_4 &= x^2 \phi_\lambda(\xi x) \phi_\gamma(x) & , & \quad \varphi_{11} = \frac{1}{x^2} \phi_\lambda(\xi x) & , \\ \varphi_5 &= \phi_\lambda(\xi x) \phi_\gamma(x) & , & \quad \varphi_{12} = \frac{\phi_\lambda(\xi x) \phi_\gamma(x)}{x^2} & . \\ \varphi_6 &= x \frac{\partial}{\partial x} \left(x \phi_\gamma(x) \frac{\partial \phi_\lambda(\xi x)}{x} \right) & , & & \\ \varphi_7 &= x \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \phi_\lambda(\xi x)}{\partial x} \right) & , & & \end{aligned} \quad (66)$$

Wir stellen nun noch einmal die Näherungswerte der häufig gebrauchten Ausdrücke zusammen. Die Näherung beruht auf den folgenden Annahmen:

$$\begin{aligned} b_{eo} \gg b_{io} & , \quad D_{eo} \gg D_{io} & , \quad b_{eo}^2 B^2 \gg 1 & , \\ b_{io}^2 B^2 \ll 1 & , \quad B_\varphi^2 \ll B_z^2 & . & \end{aligned} \quad (67)$$

Damit wird:

$$\begin{aligned}
 b_e &= \frac{b_{eo}}{1+b_{eo}^2 B^2} \approx \frac{b_{eo}}{b_{eo}^2 B^2} ; & b_i &= \frac{b_{io}}{1+b_{io}^2 B^2} \approx b_{io} ; \\
 D_e &= \frac{D_{eo}}{1+b_{eo}^2 B^2} \approx \frac{D_{eo}}{b_{eo}^2 B^2} ; & D_i &\approx D_{io} ; & D_a &= \frac{D_i b_e + D_e b_i}{b_i + b_e} \approx \frac{b_{io}}{b_{eo}} \frac{D_{eo}}{1+b_{io} b_{eo} B^2} ; \\
 d &= \frac{b_i b_e (b_{io} + b_{eo})}{b_i + b_e} \approx \frac{b_{io} b_{eo}}{1+b_{io} b_{eo} B^2} ; \\
 E_r &= \frac{D_i - D_e}{b_i + b_e} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} - \frac{b_e b_{eo} - b_i b_{io}}{b_i + b_e} E_z B_\varphi = \epsilon_1 \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} - \epsilon_2 \frac{1}{r} ; \\
 \epsilon_1 &= \frac{D_{io} (1+b_{eo}^2 B^2) - D_{eo} (1+b_{io}^2 B^2)}{b_{io} (1+b_{eo}^2 B^2) + b_{eo} (1+b_{io}^2 B^2)} \approx \frac{(D_{io} b_{eo}^2 - D_{eo} b_{io}^2) B^2 - D_{eo}}{b_{eo} (1+b_{io} b_{eo} B^2)} \\
 &\approx - \frac{D_{eo}}{b_{eo} (1+b_{io} b_{eo} B^2)} ;
 \end{aligned} \tag{68}$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon_2 &= \frac{b_e b_{eo} - b_i b_{io}}{b_i + b_e} E_z I \approx \frac{b_{eo} E_z I}{1+b_{io} b_{eo} B^2} ; \\
 \frac{d}{D_a} &\approx \frac{b_{eo}^2}{D_{eo}} ; & \gamma &= \frac{dE_z^0 I}{2D_a} \approx \frac{b_{eo} E_z^0 I}{2D_{eo}} ;
 \end{aligned}$$

$$Z = Q D_a = \frac{q}{R^2} D_a = (B^2 D_a) \approx B^2 \frac{b_{io}}{b_{eo}} \frac{D_{eo}}{1+b_{io} b_{eo} B^2}$$

Nun führen wir neue Variable ein, die bei der Auswertung der Stabilitätsbedingungen bequem sind:

$$\begin{aligned}
 b_{io} b_{eo} B^2 &= y^2 ; & \frac{k b_{eo} B_z}{\tau_\gamma} &= X ; & \frac{b_{eo} E_z^0}{D_{eo} \tau_\gamma} &= V ; \\
 \frac{b_{io}}{b_{eo}} &= s ; & \frac{b_{io} D_{eo}}{b_{eo}} &= u ; & \frac{B^2}{\tau_\gamma^2} &= \alpha ;
 \end{aligned} \tag{69}$$

Damit werden:

$$\begin{aligned}
 b_e &\approx \frac{b_{io}}{y^2} ; & D_e &= \frac{u}{y^2} ; & \gamma_3 &= -\frac{Z}{\tau_\gamma^2} = -\frac{\alpha u}{1+y^2} ; \\
 \gamma_2 &= \frac{b_{io} k E_z^0}{\tau_\gamma^2} = \sqrt{s} u \frac{XV}{y} ; \\
 \epsilon_1 b_{io} &= \gamma_4 \approx -\frac{u}{1+y^2} ; & \epsilon_2 b_{io} &= \gamma_5 = \frac{2u\gamma}{1+y^2} ; \\
 \gamma_6 &= \frac{1}{B} \left(\frac{I}{B} k - m \right) = b_{io} \sqrt{s} \left(\frac{2\gamma X}{Vy^3} - \frac{1}{s} \frac{m}{y} \right) ; \\
 \gamma_7 &= b_e (m^2 + 2mk b_{eo}^2 I B_z) = \frac{b_{io}}{y^2} (m^2 + 4m\gamma \frac{X}{V}) ; \\
 \gamma_8 &= \frac{b_{eo} k^2}{\tau_\gamma^2} = b_{io} \frac{X^2}{y^2} ; & \gamma_9 &= \frac{b_{io} k^2}{\tau_\gamma^2} = b_{io} s \frac{X^2}{y^2} ; \\
 \gamma_{10} &= b_{io} m^2 ; & \gamma_{11} &= b_e \epsilon_1 \approx -\frac{u}{y^2(1+y^2)} ; \\
 \gamma_{12} &= b_e \epsilon_2 = b_e \frac{b_{eo} E_z^0 I}{1 + b_{io} b_{eo} B_z^2} = \frac{2u\gamma}{y^2(1+y^2)} ; \\
 \gamma_{13} &= b_e b_{eo} E_z^0 I = \frac{2u\gamma}{y^2} ; & \gamma_{14} &= -\frac{b_{eo} E_z^0 k}{\tau_\gamma^2} = -\frac{u}{\sqrt{s}} \frac{XV}{y} ; \\
 \gamma_{15} &= -\frac{Z}{\tau_\gamma^2} + \frac{D_{eo} k^2}{\tau_\gamma^2} = u \frac{X^2}{y^2} - \frac{\alpha u}{1+y^2} ; \\
 \gamma_{16} &= D_e m^2 + 2D_{eo} mk \frac{I}{B_z} = \frac{u}{y^2} (m^2 + 4m\gamma \frac{X}{V}) ; \\
 \gamma_{17} &= mb_{eo} E_z^0 \frac{I}{B} = \frac{u}{\sqrt{s}} \frac{2\gamma m}{y} ; & \gamma_{18} &= \frac{1}{B} \left(\frac{I}{B} k - m \right) \epsilon_2 = \frac{2u\gamma\sqrt{s}}{1+y^2} \left(\frac{2\gamma X}{Vy^3} - \frac{1}{s} \frac{m}{y} \right) ; \\
 \gamma_{19} &= \frac{1}{B} \left(\frac{I}{B} k - m \right) \epsilon_1 \approx -\frac{n\sqrt{s}}{1+y^2} \left(\frac{2\gamma X}{Vy^3} - \frac{1}{s} \frac{m}{y} \right) ;
 \end{aligned}
 \tag{70}$$

$$\gamma_{20} = \tau_{\gamma}^2 b_e b_{eo} D_{eo} m^2 I^2 = \frac{4um^2 \gamma^2}{V^2 y^2} ; \quad \gamma_{21} = \tau_{\gamma}^2 b_e b_{eo}^2 m^2 I^2 = \frac{4b_{io} m^2 \gamma^2}{V^2 y^2} ;$$

Die Störungsgleichungen haben die Form:

$$\begin{aligned} \bar{V} \left\{ -b_{io} \psi_6 + \gamma_{10} \psi_5 + \gamma_9 \psi_4 \right\} + \bar{N} \left\{ -\frac{i\omega}{\tau_{\gamma}^2} \psi_1 + i\gamma_2 \psi_1 + \gamma_3 \psi_1 - \gamma_5 \psi_3 + \gamma_4 \psi_2 \right\} &= 0 ; \\ \bar{V} \left\{ b_e \psi_6 - \gamma_8 \psi_4 - \gamma_7 \psi_5 + i\gamma_6 \psi_{10} - \gamma_{21} \psi_{12} \right\} + \bar{N} \left\{ -\gamma_{11} \psi_2 + \gamma_{12} \psi_3 - D_e \psi_7 - \gamma_{13} \psi_3 \right. & \\ \left. - \frac{i\omega}{\tau_{\gamma}^2} \psi_1 + \gamma_{15} \psi_1 + i\gamma_{14} \psi_1 + \gamma_{16} \psi_8 - i\gamma_{17} \psi_8 - i\gamma_{18} \psi_8 + i\gamma_{19} \psi_9 + \gamma_{20} \psi_{11} \right\} &= 0 ; \end{aligned} \quad (71)$$

oder - wenn wir die vorhin gemachten Näherungen einsetzen:

$$\begin{aligned} \bar{V} \left\{ -b_{io} \psi_6 + b_{io} m^2 \psi_5 + \frac{b_{io} k^2}{\tau_{\gamma}^2} \psi_4 \right\} + \bar{N} \left\{ -i\omega - Z + i b_{io} k E_z^0 \right\} \frac{\psi_1}{\tau_{\gamma}^2} - \frac{b_{io} b_{eo}}{1 + b_{io} b_{eo} B_z^2} E_z^0 I \psi_3 & \\ + \frac{b_{io}}{b_{eo}} \left(\frac{(D_{io} b_{eo}^2 - D_{eo} b_{io}^2) B_z^2 - D_{eo}}{1 + b_{io} b_{eo} B_z^2} \right) \psi_2 \right\} &= 0 ; \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} \bar{V} \left\{ b_e \psi_6 - \frac{b_{eo}}{\tau_{\gamma}^2} k^2 \psi_4 - b_e (m^2 + 2mk b_{eo}^2 I B_z) \psi_5 + i \frac{1}{B_z} \left(\frac{I}{B_z} k - m \right) \psi_{10} - \tau_{\gamma}^2 b_e b_{eo}^2 I^2 m^2 \psi_{12} \right\} & \\ + \bar{N} \left\{ -b_e \psi_2 \frac{(D_{io} b_{eo}^2 - D_{eo} b_{io}^2) B_z^2 - D_{eo}}{1 + b_{io} b_{eo} B_z^2} + b_e \psi_3 \frac{b_{io} b_{eo}}{1 + b_{io} b_{eo} B_z^2} E_z^0 I - D_e \psi_7 \right. & \\ - b_e b_{eo} E_z^0 I \psi_3 + \frac{1}{\tau_{\gamma}^2} (-i\omega - Z - i k b_{eo} E_z^0 + D_{eo} k^2) \psi_1 + (D_e m^2 - i m b_{eo} E_z^0 \frac{I}{B_z} + 2 D_{eo} m k \frac{I}{B_z}) \psi_8 & \\ - i \frac{1}{B_z} \left(\frac{I}{B_z} k - m \right) \frac{b_{io} b_{eo}}{1 + b_{io} b_{eo} B_z^2} E_z^0 I \psi_8 + i \frac{1}{B} \left(\frac{I}{B} k - m \right) \frac{(D_{io} b_{eo}^2 - D_{eo} b_{io}^2) B_z^2 - D_{eo}}{1 + b_{io} b_{eo} B_z^2} \psi_9 & \\ \left. + \tau_{\gamma}^2 b_e b_{eo} D_{eo} m^2 I^2 \psi_{11} \right\} &= 0 . \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen können wir nun die folgenden Abschätzungen vornehmen, die die Lösung der Dispersionsrelation vereinfachen:

1) Es ist $(\frac{m}{r})^2 \gg k^2 = \frac{4\pi^2}{\Lambda^2}$, wobei Λ die Wellenlänge der Störung ist. Für $m = 1$ ist also $\Lambda \gg 2\pi r$, was bedeutet, daß die Wellenlänge der Störung groß gegen den Rohrumfang ist. Dann ist auch $\Lambda \gg 2\pi r B_\varphi/B_z$, d.h. $I/B_z k \ll m$. (73)

2) Es ist:

$$\frac{D_{eo}}{r^4} m^2 \frac{I^2}{B_z^2} \ll \frac{D_{eo} m k}{r^2} \frac{I}{B_z},$$

$$\ll \frac{D_e m^2}{r^2} \quad \text{und} \quad \ll D_{eo} k^2,$$

d.h. für $m = 1$:

$$\frac{B_\varphi^2}{B_z^2} \ll r k \frac{B_\varphi}{B_z}, \quad \frac{B_\varphi}{B_z} \Lambda \ll 2\pi r, \quad (74)$$

bedeutet ebenfalls:

$$\frac{D_{eo}}{r^4} m^2 \frac{I^2}{B_z^2} \ll D_{eo} k^2, \quad \frac{B_\varphi^2}{B_z^2} \Lambda^2 \ll 4 r^2.$$

Schließlich bedeutet:

$$\frac{D_{eo}}{r^4} m^2 \frac{I^2}{B_z^2} \ll \frac{D_e m^2}{r^2}, \quad \frac{B_\varphi^2}{B_z^2} \ll \frac{1}{1+b_{eo}^2 B_z^2} \approx \frac{1}{b_{eo}^2 B_z^2},$$

also $B_\varphi \ll \frac{1}{b_{eo}}$

Diese letzte Bedingung ist für Drucke um 1 Torr mit $b_{eo} \approx 100$ noch annähernd erfüllt. Die Bedingung $(B_\varphi/B_z)\Lambda \ll 2\pi r$ hat nun folgende anschauliche Bedeutung:

Es ist:

$$2\pi r \cdot \operatorname{tg}\alpha = 2\pi r \frac{B_z}{B_\varphi} = L, \quad (75)$$

also bedeutet die Relation

$$\Lambda \ll L, \quad (75)$$

d.h. die Wellenlänge der Störung sei klein gegen die Feldperiode L , d.h. die Betrachtungen gelten nur für genügend kleine B_φ .

Schließlich können wir noch

$$b_e b_{eo}^2 m^2 \frac{I^2}{r^4} \quad \text{mit} \quad b_e \frac{m^2}{r^2}$$

vergleichen, und wenn $b_{eo}^2 B_\varphi^2 \ll 1$ ist, dann dürfen wir auch diesen Term vernachlässigen; denn es ist auch:

$$\frac{2b_e b_{eo}^2 B_z m k I}{r^2} \gg b_e b_{eo}^2 m^2 \frac{I^2}{r^4},$$

was wieder auf

$$2\pi r \gg \frac{B_\varphi}{B_z} \Lambda \quad \text{führt.} \quad (79)$$

- 3) Man wird auch $i b_{i0} k E_z^0$ gegen $i\omega$ vernachlässigen dürfen; denn die beobachteten Frequenzen liegen in der Größenordnung $f > 5$ kHz, d.h. in $i\omega = i\mathcal{R} - J$ ist $\mathcal{R} \approx 30$ kHz. Bei 1 Torr ist:

$$b_{i0} \approx 0,7; \quad E_z^0 \approx 600; \quad k \approx 2.$$

- 4) Die Wellenzahl k wurde von PAULIKAS und PYLE¹⁵⁾ zu ungefähr $k \ll 2$ bestimmt. Dann darf für Überschlagsrechnungen auch $D_{eo} k^2$ gegen Z vernachlässigt werden, wie man der Tabelle entnimmt. Diese Einschränkung wurde in der Dissertation noch nicht benutzt. Die Bedingung $m^2 \gg k^2 / \tau_\gamma^2$ macht γ_9 zu Null. $\frac{I}{B} k \ll m$ bedeutet Vereinfachung der Größen $\gamma_6, \gamma_{18}, \gamma_{19}$. Vernachlässigung der in I quadratischen Terme bedeutet $\gamma_{21} = \gamma_{20} = 0$. Vernachlässigung von $b_{i0} k E_z^0$ gegen $\mathcal{R}\omega$ bedeutet $\gamma_2 = 0$. Vernachlässigung von $D_{eo} k^2$ gegen Z bedeutet Vereinfachung von γ_{15} .

Damit erhalten wir ein etwas einfacheres System.

Die bei den Abschätzungen auftretenden Radian kommen aus den ψ_i . Man sieht dies besser an den noch nicht integrierten Gleichungen (43). Die Determinante der Störgleichungen, die unsere Dispersionsrelation ist, bekommt die folgende Form:

$$b_3 \left(-i \frac{\psi_1}{\tau \gamma} \omega + ia_4 + b_4 \right) = \left(-i \frac{\psi_1}{\tau \gamma} \omega + b_1 \right) (ia_3 + b_2) \quad (76)$$

oder nach ω aufgelöst:

$$\frac{\psi_1}{\tau \gamma} = \frac{[(b_1 b_2 - b_3 b_4) + i(a_3 b_1 - a_4 b_3)](-a_3 - i(b_2 - b_3))}{a_3^2 + (b_2 - b_3)^2} \quad (77)$$

Der Imaginärteil ist:

$$\frac{\psi_1}{\tau \gamma} \text{Im} \omega = \frac{-(b_2 - b_3)(b_1 b_2 - b_3 b_4) - a_3(a_3 b_1 - a_4 b_3)}{a_3^2 + (b_2 - b_3)^2} \quad (78)$$

Da ψ_1 offenbar positiv ist, schreibt sich unsere Stabilitätsbedingung $\text{Im} \omega < 0$ schließlich:

$$\boxed{(b_2 - b_3)(b_1 b_2 - b_3 b_4) + a_3(a_3 b_1 - a_4 b_3) > 0} \quad (79)$$

Die darin vorkommenden Größen haben die Bedeutung (die man aus dem Vergleich von (76) und (71) entnimmt):

$$b_3 = b_{i0} (m^2 \psi_5 - \psi_6) \quad ;$$

$$a_4 = \gamma_{14} \psi_1 - \gamma_{17} \psi_8 + \gamma_{19} \psi_9 - \gamma_{18} \psi_8 \quad ,$$

$$= \frac{u}{\sqrt{s}} \left\{ -\frac{XV}{y} \psi_1 - \frac{2m\gamma}{y} \psi_8 + \frac{2\gamma m}{y(1+y^2)} \psi_8 + \frac{m}{y(1+y^2)} \psi_9 \right\} ;$$

$$b_4 = -\gamma_{11} \psi_2 + \gamma_{12} \psi_3 - \gamma_{13} \psi_3 + \gamma_{15} \psi_1 + \gamma_{16} \psi_8 \quad ,$$

$$= u \left\{ \frac{1}{y^2(1+y^2)} \psi_2 + \frac{2\gamma}{y^2(1+y^2)} \psi_3 - \frac{\psi_7}{y^2} - \frac{2\gamma}{y^2} \psi_3 + \frac{X^2}{y^2} \psi_1 - \frac{\alpha \psi_1}{1+y^2} + \frac{1}{y^2} (m^2 + 4m\gamma \frac{X}{V}) \psi_8 \right\} ; \quad (80)$$

$$b_1 = \gamma_3 \psi_1 - \gamma_5 \psi_3 + \gamma_4 \psi_2 = u \left\{ -\frac{\alpha \psi_1}{1+y^2} - \frac{2\gamma}{1+y^2} \psi_3 - \frac{\psi_2}{1+y^2} \right\} \quad ;$$

$$a_3 = \gamma_6 \psi_{10} \approx - \frac{b_{10}}{\sqrt{s}} \frac{m}{y} \psi_{10} \quad ;$$

$$b_2 = b_e \psi_6 - \gamma_8 \psi_4 - \gamma_7 \psi_5 = b_{10} \left\{ \frac{\psi_6}{y^2} - \frac{x^2}{y^2} \psi_4 - \frac{1}{y^2} (m^2 + 4m\gamma \frac{x}{V}) \psi_5 \right\} .$$

Wir ordnen nach den Variablen X und V, indem wir setzen:

$$\begin{aligned} b_3 &= b_{10} A_{16} \quad ; \quad b_1 = u A_1 \quad ; \quad a_3 = \sqrt{s} b_{10} A_2 \quad ; \\ a_4 &= \frac{u}{\sqrt{s}} (s A_7 + s A_9 X V) \quad ; \\ b_3 - b_2 &= b_{10} (A_{10} + A_{11} X^2 + A_{12} \frac{X}{V}) \quad ; \quad (81) \\ b_1 b_2 &= u b_{10} (A_{13} + A_{14} X^2 + A_{15} \frac{X}{V}) \quad ; \\ b_4 &= u (A_{18} + A_{19} X^2 + A_{20} \frac{X}{V}) \quad . \end{aligned}$$

Nun bekommt die Stabilitätsrelation die Gestalt:

$$\begin{aligned} b_{10}^2 u \left[A_{16} (A_{18} + A_{19} X^2 + A_{20} \frac{X}{V}) - (A_{13} + A_{14} X^2 + A_{15} \frac{X}{V}) \right] \\ (A_{10} + A_{11} X^2 + A_{12} \frac{X}{V}) + b_{10}^2 u s \left[A_1 A_2^2 + A_2 A_{16} (A_7 + A_9 X V) \right] > 0. \end{aligned} \quad (82)$$

Die Koeffizienten A sind Funktionen von y und haben die Formen:

$$\begin{aligned} A_{16} &= m^2 \psi_5 - \psi_6 \quad ; \quad A_1 = - \frac{1}{1+y^2} (\alpha \psi_1 + 2\gamma \psi_3 + \psi_2) \quad ; \\ A_7 &= \frac{m}{s} \left(\frac{2\gamma \psi_8 + \psi_9}{y(1+y^2)} - \frac{2\gamma \psi_8}{y} \right) \quad ; \quad A_9 = - \frac{\psi_1}{s y} \quad ; \\ A_{10} &= (m^2 \psi_5 - \psi_6) \left(1 + \frac{1}{y^2} \right) \quad ; \quad A_{11} = \frac{\psi_4}{y^2} \quad ; \\ A_{12} &= \frac{4m\gamma}{y^2} \psi_5 \quad ; \quad A_{13} = \frac{m^2 \psi_5 - \psi_6}{y^2 (1+y^2)} (\alpha \psi_1 + 2\gamma \psi_3 + \psi_2) \quad ; \\ A_{14} &= \frac{\psi_4}{y^2} (\alpha \psi_1 + 2\gamma \psi_3 + \psi_2) \quad ; \quad A_{15} = \frac{4m\gamma}{y^2} 5 (\alpha \psi_1 + 2\gamma \psi_3 + \psi_2) \quad ; \end{aligned} \quad (83)$$

$$A_{18} = \frac{\psi_2 + 2\gamma\psi_3}{y^2(1+y^2)} - \frac{\alpha\psi_1}{1+y^2} + \frac{1}{y^2} (m^2\psi_8 - \psi_7 - 2\gamma\psi_3) ;$$

$$A_{19} = \frac{\psi_1}{y^2} ; \quad A_{20} = \frac{4m\gamma\psi_8}{y^2} ; \quad A_2 = - \frac{m\psi_{10}}{sy} .$$

In der hier angeschriebenen Stabilitätsrelation ist die oben unter Punkt 4) erwähnte Vernachlässigung noch nicht gemacht worden. Diese würde bedeuten, daß in b_4 der Term mit X^2 verschwindet, d.h.

$$A_{19} = 0 .$$

Führt man nun noch die neuen Variablen

$$\frac{X}{V} = \xi , \quad v^2 = \eta \quad (84)$$

ein und ordnet die Relation nach Potenzen von ξ , dann erhält man:

$$F(\xi\eta) = C_0 + C_1\xi + C_2\xi^2 + D_1\xi\eta + D_2\xi^2\eta + D_3\xi^3\eta + D_4\xi^4\eta^2 . \quad (85)$$

Die Koeffizienten C_i und D_i sind gewisse Funktionen:

$$C_i(y\psi_k m\gamma) , \quad D_i(y\psi_k m\gamma) .$$

Die Größe ξ repräsentiert im wesentlichen die Wellenzahl der angenommenen Störung, η die elektrische Feldstärke in der Entladung, y die magnetische Feldstärke in z-Richtung. Für einen vorgegebenen Wert y und feste Parameter γ und m sind die Koeffizienten der Relation (85) feste Größen. Für feste Koeffizienten ist die Frage, ob es Werte ξ und η gibt, die die linke Seite der Stabilitätsrelation negativ machen. Die Stabilitätsgrenze ist definiert durch die Schnittkurve der $F(\xi\eta)$ -Fläche mit der $\xi\eta$ -Ebene. Von dieser Schnittkurve interessiert uns der Punkt, der zu dem niedrigsten Wert der Größe η gehört. Wir verlangen also außerdem:

$$\frac{\partial F(\xi\eta)}{\partial \xi} = 0 . \quad (86)$$

Damit haben wir zwei unabhängige Relationen, um die Grenze der Stabilität zu bestimmen. Da F vom 4. Grad in ξ und vom 2. Grad in η ist, können 6 Lösungen auftreten. Physikalisch von Interesse sind nur die reellen Lösungen und von diesen gibt diejenige mit dem niedrigsten positiven Wert von η die Stabilitätsgrenze. Diese Lösung ist für jeden Wert von y durchzuführen, und man erhält als Stabilitätsgrenze eine Kurve in der y -Ebene. Variiert man nun γ und m , so erhält man eine zweiparametrische Kurvenschar in der $y\eta$ -Ebene. Die Variation von γ gibt die Abhängigkeit der Stabilitätsgrenze von dem Erregerstrom für das Azimutalfeld.

Bezüglich des Parameters m folgert man aus dem anschaulichen Bild der Störung, daß solche mit $m > 0$ stabil sein müssen. Nur für $m < 0$ darf es instabile Lösungen geben. Die linke Seite der Stabilitätsrelation ist für große Werte von m proportional zu $a m^6$, wobei a positiv ist. Für große m ist das System stets stabil. Wir können annehmen, daß $m = -1$ den instabilsten Fall gibt.

Die Ermittlung der durch $F(\xi\eta) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial \xi} = 0$ definierten Stabilitätsgrenze und ihre Darstellung als Kurve in der $y\eta$ -Ebene mit γ als Parameter erforderte erheblichen Rechenaufwand, der mit der elektronischen Rechenmaschine G3 bewältigt wurde. Das Ergebnis ist für die Parameter $\gamma = -1,0 + 1$ in Fig. 29 dargestellt. Die Stabilität ist im Falle $\gamma = 0$ etwas höher als die aus der Theorie von KADOMTSEV folgende. Das hat seinen Grund in der stabilisierenden Wirkung des Innenleiters. Für die Verhältnisse bei $p = 1,2$ Torr erhält man aus diesen Rechnungen eine Änderung der kritischen magnetischen Feldstärke von $\Delta B_z / \Delta j \approx 100 \text{ G}/400 \text{ A}$, was mit dem experimentellen Ergebnis in Fig. 20 recht gut übereinstimmt.

Tabelle 1

	p (Torr)	10 ⁰	10 ⁻¹	10 ⁻²
Experimentell bestimmte Werte für He, Rohrradius 3 cm	E _Z (B=0) V/m	560	200	100
	E _Z (B=B _c) V/m	550	180	50
	B _c Vs/m ²	0,09	0,03	0,01
	T _e (B=0) eV	2,6	4,2	6,0
	T _e (B=B _c) eV	2,5	3,8	5,0
	E _Z /p (B=0) V/cm Torr	5,6	20	100
Drift der Elektronen aus BROWN	u _e m/s	5 x 10 ⁴	2 x 10 ⁵	9 x 10 ⁵
	u _i m/s	0,4 x 10 ³	1,3 x 10 ³	4 x 10 ³
Drift von He ⁺ in He (T _i = 500°K)				
	b _{eo} m ² /Vs	90	900	9000
	b _{io} m ² /Vs	0,7	6,5	40
	v _e s ⁻¹	2 x 10 ⁹	2 x 10 ⁸	2 x 10 ⁷
v _i s ⁻¹	3 x 10 ⁷	3 x 10 ⁶	6 x 10 ⁵	
Aus Driftgeschwindigkeit errechnete Beweglichkeiten; daraus berechnete Stoßfrequenzen	D _{eo} m ² /s	200	3100	47000
	D _{io} m ² /s	0,03	0,17	1,0
	D _a m ² /s	1,6	22	210
	Z s ⁻¹	7700	10 ⁵	10 ⁶
Diffusionskoeffizient				
	D _o = kTb _o /e			
$\frac{b_{io}D_{eo} - b_{eo}D_{io}}{b_{eo} + b_{io}} =$				
$D_a \cdot (2,4/R)^2 =$				

	p (Torr)	10 ⁰	10 ⁻¹	10 ⁻²
Thermische Geschwindigkeit $(3kT_e/m_e)^{1/2} = 6,7 \times 10^3 T_e^{1/2} =$ $80 \times T_e^{1/2} =$ $(T_e = 500^\circ K)$	v _{etherm} m/s v _{itherm} m/s	1,1 x 10 ⁶ 1,8 x 10 ³	1,4 x 10 ⁶	1,6 x 10 ⁶
Freie Weglängen $v_{th}/v = \lambda$	λ _e cm λ _i cm	5 x 10 ⁻² 5 x 10 ⁻³	0,7 5 x 10 ⁻²	8,0 0,3
Teilchendichte gerechnet: $I = u_e 1,35R^2 en_0 = 0,1$ gemessen bei B = 0 Plasmafrequenz: $(4\pi n_0 e^2/m_e)^{1/2}$ $(m_e/m_i)^{1/2} \omega_{pe} =$ Debyelänge: $6,9 \times 10^2 (T_e (eV) k_e)^{1/2} =$	n ₀ cm ⁻³ n ₀ s ⁻¹ ω _{pe} s ⁻¹ ω _{pi} s ⁻¹ λ _{io} cm	10 ¹⁰ 4 x 10 ⁹ 4 x 10 ⁹ 5 x 10 ⁷ 1,4 x 10 ⁻²	3 x 10 ⁹ 5 x 10 ⁹	6 x 10 ⁸ 10 ⁹ 4 x 10 ⁻²
Gyrofrequenzen: $(\omega_e/v_e)^2 = b_{e0}^2 B^2 = 0,8 \times 10^{-4} B^2/p^2$ B in Gauss, p in Torr $(\omega_i/v_e)^2 = b_{i0}^2 B^2 = 0,4 \times 10^{-8} B^2/p^2$	ω _e s ⁻¹ ω _i s ⁻¹ 100 G 500 G 1000 G 100 G 500 G 1000 G	1,76 x 10 ⁷ x B(G) 2,4 x 10 ³ x B(G) 1,0 20 100 10 ⁴ 10 2 x 10 ⁻³ 0,4 x 10 ⁻²		10 ⁴ 2 x 10 ⁵ 10 ⁶ 0,4 10 40

	p (Torr)	10 ⁰	10 ⁻¹	10 ⁻²
$b_{i0} b_{e0} B^2$	100 G 300 G 500 G 1000 G 1500 G	0,06 0,07 0,16 0,63 1,4	0,6 5,4 15 60 140	36 300 900 3600 8100
Gyroradien:	$3,4 \times T_e^{1/2} / B = r_e$ $3,4 \times 86 T_i^{1/2} / B = r_i$	5/B 65/B	6/B 65/B	8/B 65/B
($T_i = 0,05$) T in eV, B in Gauss	cm cm			

Literatur

- 1) I.V. Schottky, Phys. Zeitschr. 25, 635 (1924)
- 2) L. Tonks, I. Langmuir, Phys. Rev. 34, 876 (1929)
- 3) R.J. Bickerton, A.v. Engel, Proc. Phys. Soc. 69, 468 (1956)
- 4) B. Lehnert, Proc. Second Int. Conf. on Peaceful Use of Atomic Energy, Geneva 1958, 32, 349 (1958)
- 5) B. Lehnert, F.C. Hoh, Proc. Fourth Int. Conf. on Ioniz. Phen. in Gases, Uppsala 1960, 2, 604 (1960)
- 6) B. Lehnert, F.C. Hoh, Phys. Fluids 3, 600 (1960)
- 7) F.C. Hoh, Phys. Rev. Letters 4, 559 (1960)
- 8) D. Bohm, "The Characteristics of Electrical Discharges in Magnetic Field", McGraw Hill, New York (1949)
- 9) B.B. Kadomtsev, A.V. Nedospasov, J. Nucl. Energy 1, 230 (1960)
- 10) T.K. Allen, G.A. Paulikas, R.V. Pyle, Bull. American Phys. Soc. 5, 314 (1960)
- 11) T.K. Allen, M.C. Horton, G.A. Paulikas, R.V. Pyle, F. Voelker, UCRL-Rep. 8887 (1956)
- 12) T.K. Allen, M.C. Horton, G.A. Paulikas, R.V. Pyle, H.F. Rugge, J.W. Steorns, F. Voelker, UCRL-Rep. 9002 (1959)
- 13) T.K. Allen, G.A. Paulikas, R.V. Pyle, Phys. Rev. Letter 5, 409 (1960)
- 14) C. Ekman, F.C. Hoh, B. Lehnert, Phys. Fluids 3, 833 (1960)
- 15) G.A. Paulikas, R.V. Pyle, UCRL-Rep. 9682 (1961)
- 16) G. Spiwak, E. Reichrudel, Z. exp. theor. Phys. 6, 816 (1936)
- 17) Johnson, Malter, Phys. Rev. 80, 58 (1950)
- 18) Sloane, Gregor, Phil Mag. 18, 193 (1934)
- 19) R.L.F. Boyd, N.D. Twiddy, Proc. Roy. Soc. A 250, 53 (1959)

- 20) A.v.Engel, M. Steenbeck, "Elektrische Gasentladungen", Springer, Berlin (1934)
- 21) H. Kamke, H.J. Rose, Z. Phys. 145, 83 (1956)
- 22) C. Brown, W.P. Allis, "Basic Data of Plasmaphysics", J. Wiley & Sons, New York (1959)
- 23) A. Simon, ORNL-Rep. 1960 (1958)
- 24) S. Flügge, "Handbuch der Physik, Gasentladungen II", Springer, Berlin (1956)
- 25) L. Spitzer jr., Matt-Rep. 40 (1960)
- 26) I.E. Bernstein, E.A. Friemann, R.M. Kulsrud, M.N. Rosenbluth, Phys. Fluids, 3, 136 (1960)
- 27) U. Grossmann-Doerth, J. Junker, MPI-Laborbericht (1961)
- 28) W.L. Granowski, "Der elektrische Strom im Gas", Akademie Verlag, Berlin (1955)
- 29) M. Knoll, F. Ollendorf, R. Rompe, "Gasentladungstabellen", Springer, Berlin (1935)
- 30) T.K. Allen, G.A. Paulikas, R.V. Pyle, UCRL-Rep. 9110 (1960)
- 31) G. Ecker, K.S. Masterson, J.H. McClure, Proc. Fifth Int. Conf. on Ioniz. Phen. in Gases, Munich 1961
- 32) F.M. Penning, Z. Phys. 41 (1926)
- 33) I.L. Johnson, NYO-Rep. 8051 (1958)
- 34) K. Wöhler, "Anomale Diffusion in der positiven Säule im longitudinalen Magnetfeld", Inaugural-Dissertation, Ludwig-Maximilians-Universität München (1962), Z. f. Naturf. 17a, 937 (1962).

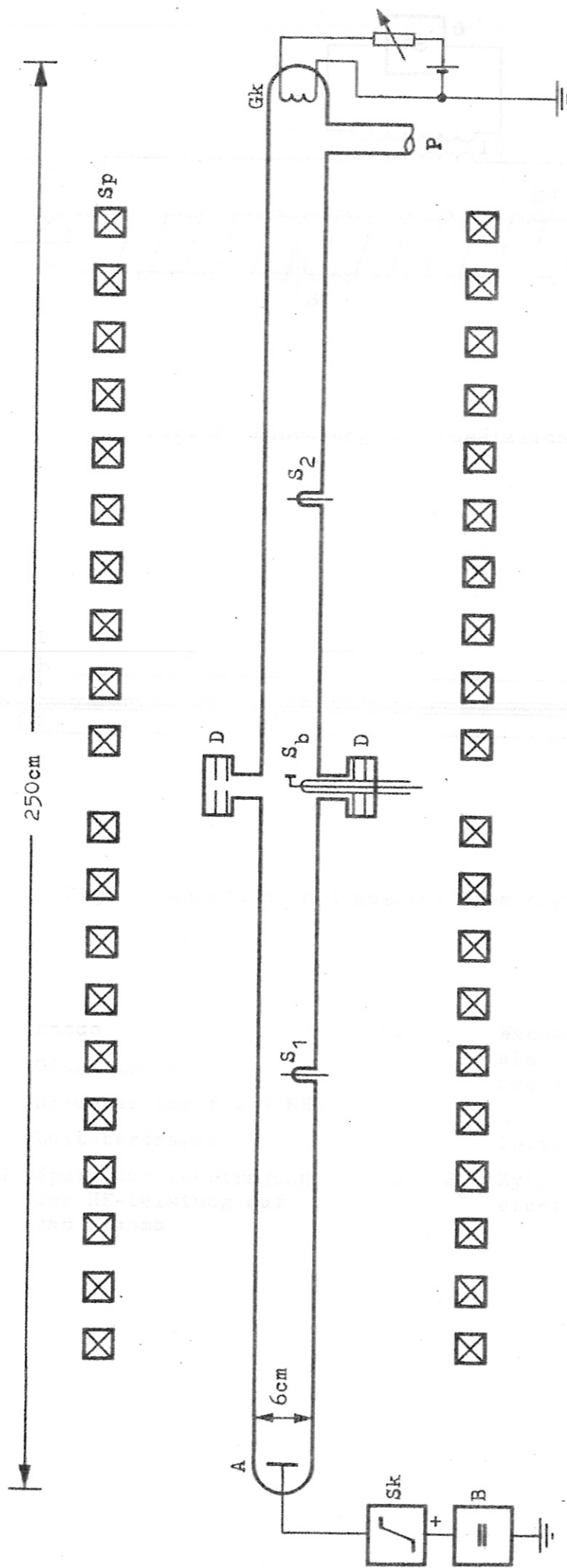


Fig. 1 Experimentelle Anordnung.

- | | | | |
|----|--|---------------------------------|--|
| A | Anode | D | Schleusen zur Durchföhrung radial beweglicher Sonden |
| Gk | Glöhkathode | S _b | Radial bewegliche Flächensonde |
| P | Pumpstutzen zum Pumpsystem und Gaseinlaß | S ₁ , S ₂ | Zylindersonden zur Messung der elektrischen Feldstärke |
| Sk | Elektronischer Stromregler | Sp | Magnetfeldspulen |
| B | Spannungsquelle | | |

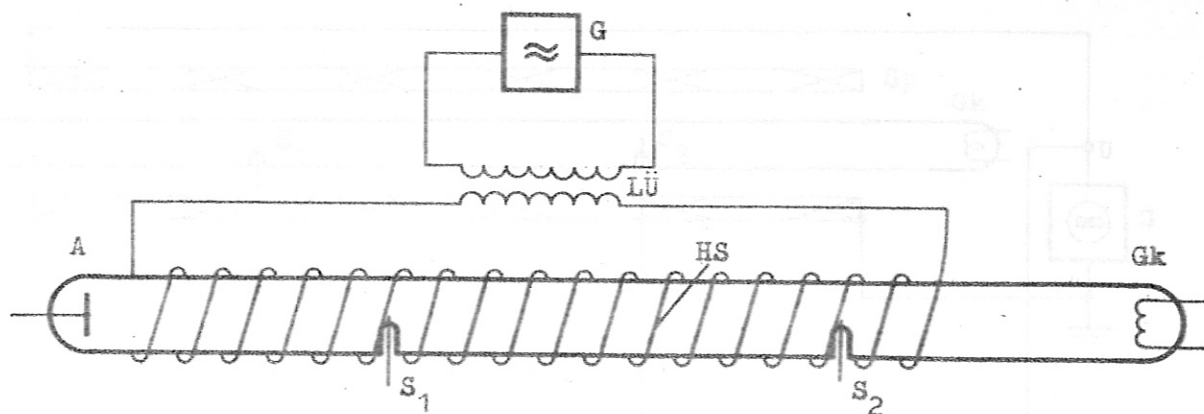


Fig. 2 Anordnung mit zusätzlicher HF-Ionisierung

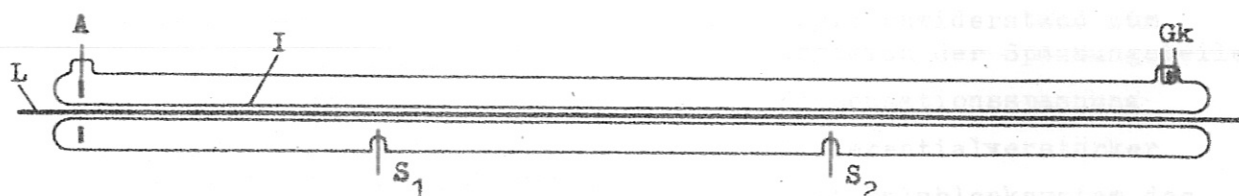


Fig. 3 Anordnung mit zusätzlichem magnetischen Azimutalfeld

A	Anode	L	Wassergekühltes Kupferrohr als Leiter zur Erzeugung des magnetischen Azimutalfeldes
Gk	Glühkathode	I	Glasisolierung für den Kupfer- leiter
G	HF-Generator $f = 4$ MHz	S_1, S_2	Zylindersonden zur Messung der elektrischen Axialfeldstärke
LÜ	Luftübertrager		
HS	Spule zur Übertragung der HF-Leistung auf das Plasma		

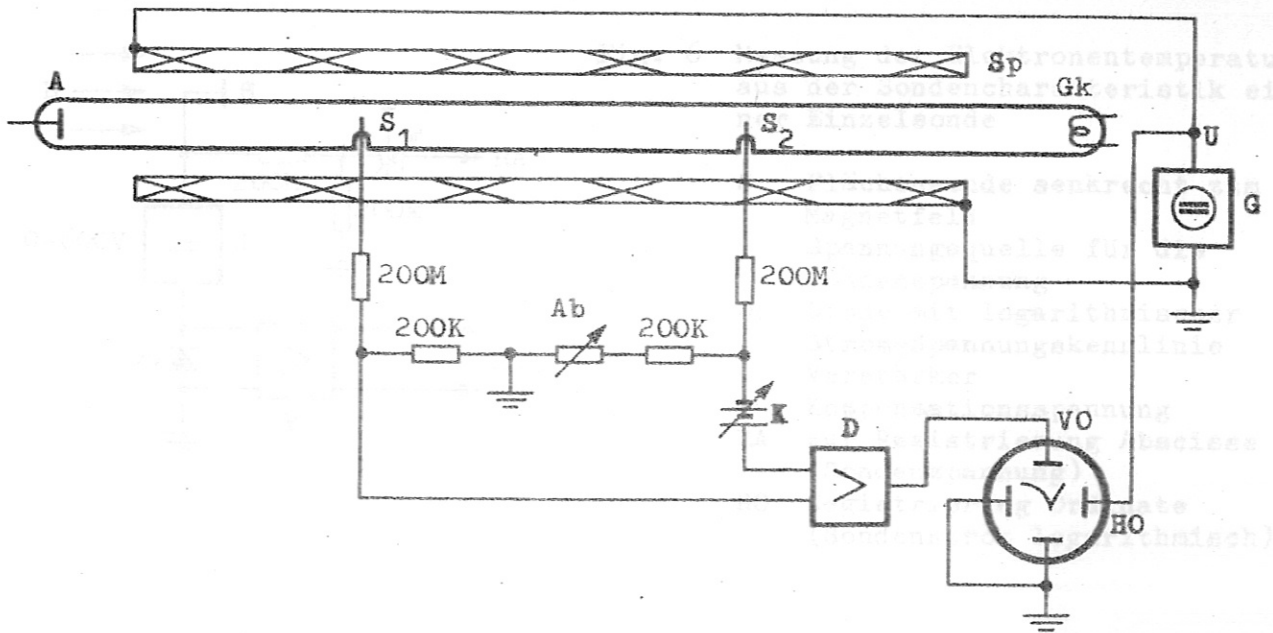


Fig. 4 Meßanordnung zur Messung der axialen elektrischen Feldstärke in Abhängigkeit vom Magnetfeld

Sp	Magnetspulen	Ab	Abgleichwiderstand zum Abgleich der Spannungsteiler
G	Generator zur Erzeugung des Spulenstroms	K	Kompensationsspannung
U	Abgriff einer dem Spulenstrom proportionalen Spannung	D	Differentialverstärker
S ₁ , S ₂	Sonden zur Messung der elektrischen Feldstärke	VO	Vertikalablenksystem des Oszillographen
		HO	Horizontalablenksystem

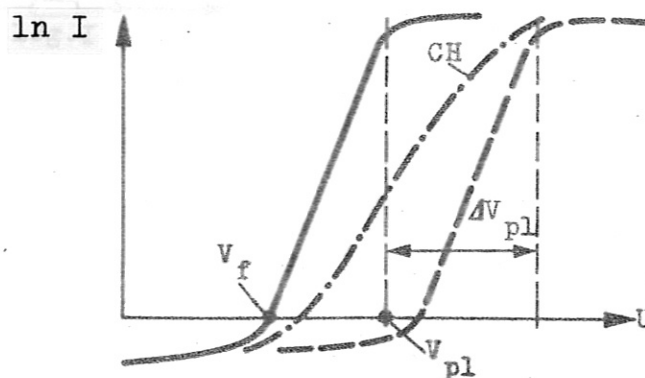


Fig. Idealisierte Strom-Spannungscharakteristik einer Sonde

V_{pl}	Plasmapotential
V_f	Floating-Potential = Aufladespannung einer isolierten Sonde
ΔV_{pl}	Fluktuation des Plasmapotentials
CH	Verzerrte Charakteristik. Mittelwert des Sondenstroms bei Fluktuation des Plasmapotentials

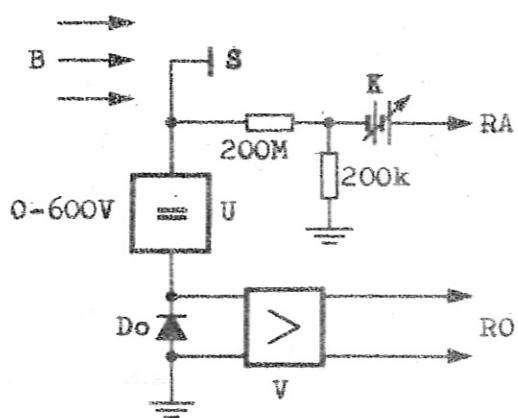


Fig. 6 Messung der Elektronentemperatur aus der Sondencharakteristik einer Einzelsonde

- S Flächensonde senkrecht zum Magnetfeld
 U Spannungsquelle für die Sondenspannung
 Do Diode mit logarithmischer Strom-Spannungskennlinie
 V Verstärker
 K Kompensationsspannung
 RA zur Registrierung Abszisse (Sondenspannung)
 RO Registrierung Ordinate (Sondenstrom logarithmisch)

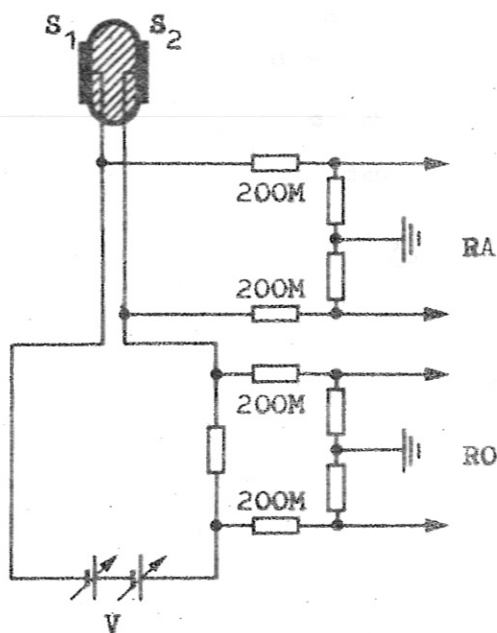


Fig. 7 Messung der Elektronentemperatur aus einer Doppelsondencharakteristik

- S₁, S₂ Doppelsonde
 V Spannung zwischen den Sonden

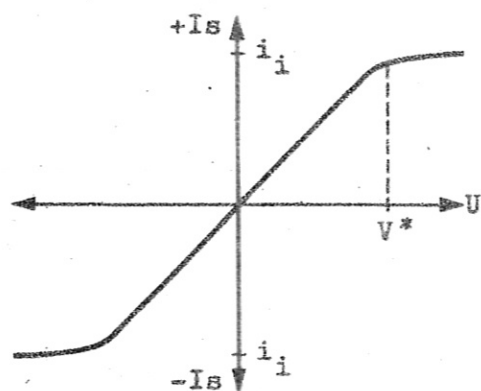


Fig. 8 Idealisierte Doppelsondencharakteristik

- i_i Ionensättigungsstrom
 $T_e = \frac{e}{2k} V^*$

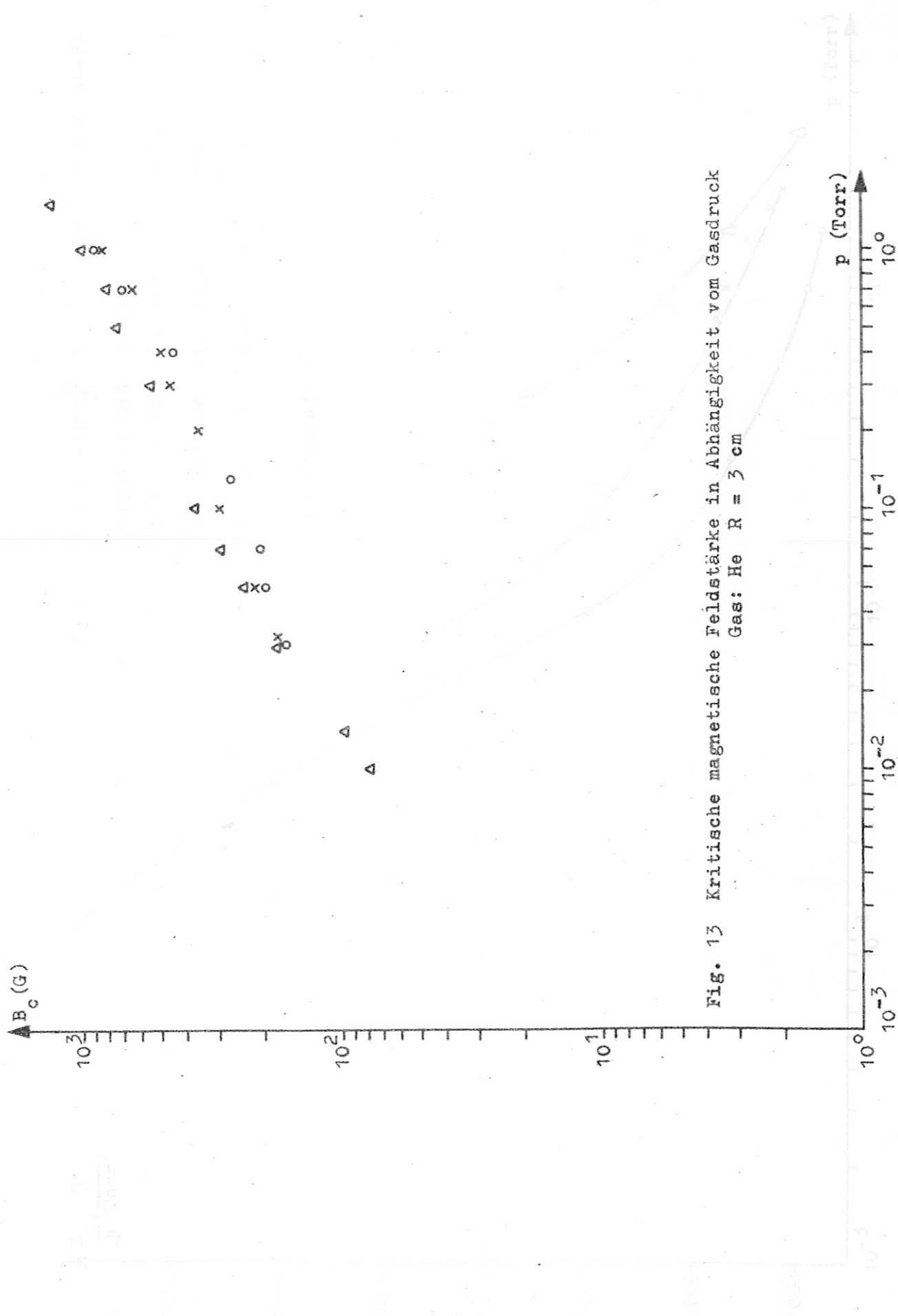


Fig. 13 Kritische magnetische Feldstärke in Abhängigkeit vom Gasdruck.
 Gas: He $R = 3$ cm

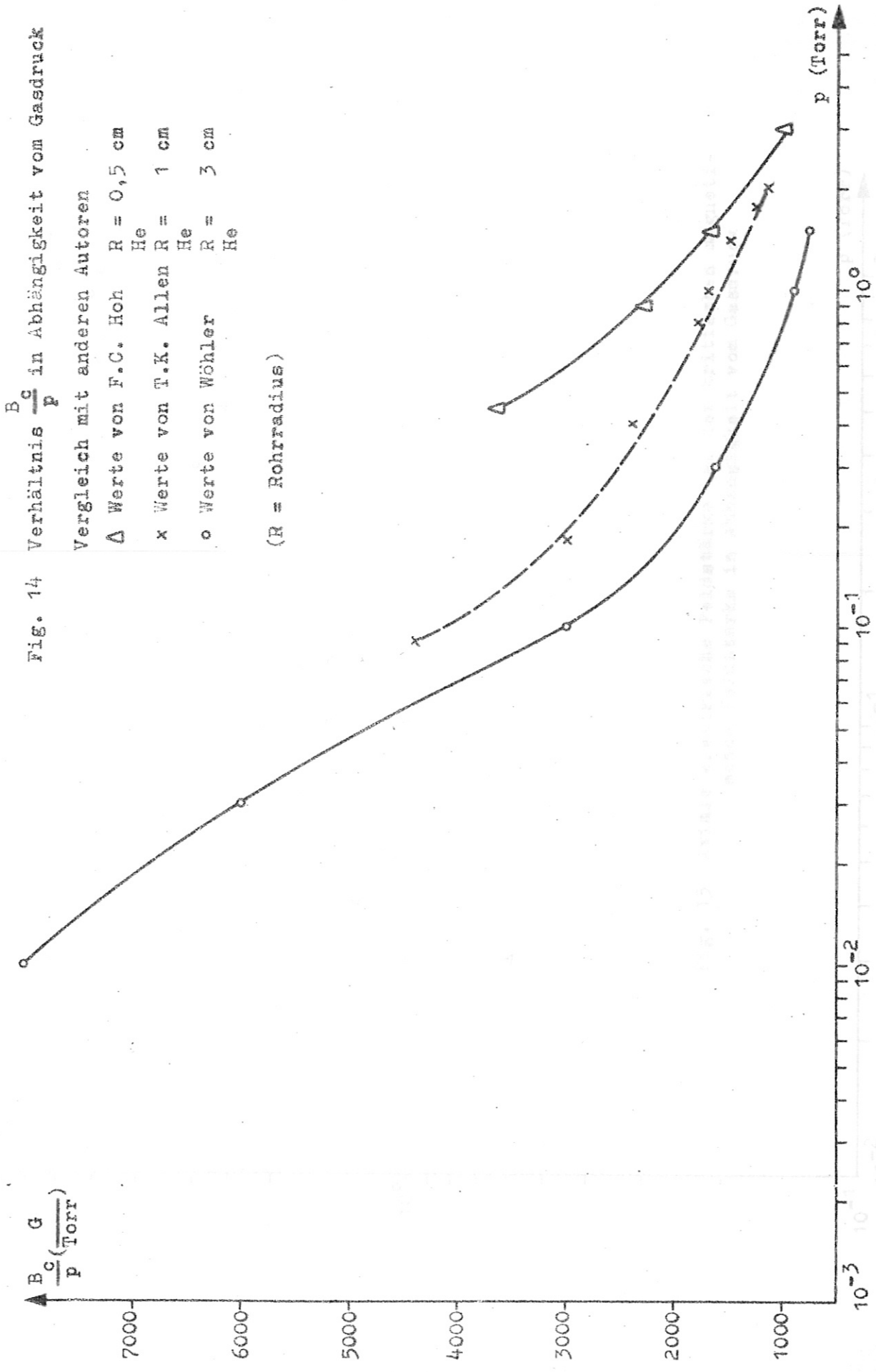


Fig. 14 Verhältnis $\frac{B_C}{P}$ in Abhängigkeit vom Gasdruck

Vergleich mit anderen Autoren

- Δ Werte von F.C. Hoh R = 0,5 cm He
- x Werte von T.K. Allen R = 1 cm He
- o Werte von Wöhler R = 3 cm He

(R = Rohrradius)

$E_c \left(\frac{V}{cm} \right)$

10^1

10^0

10^{-1}

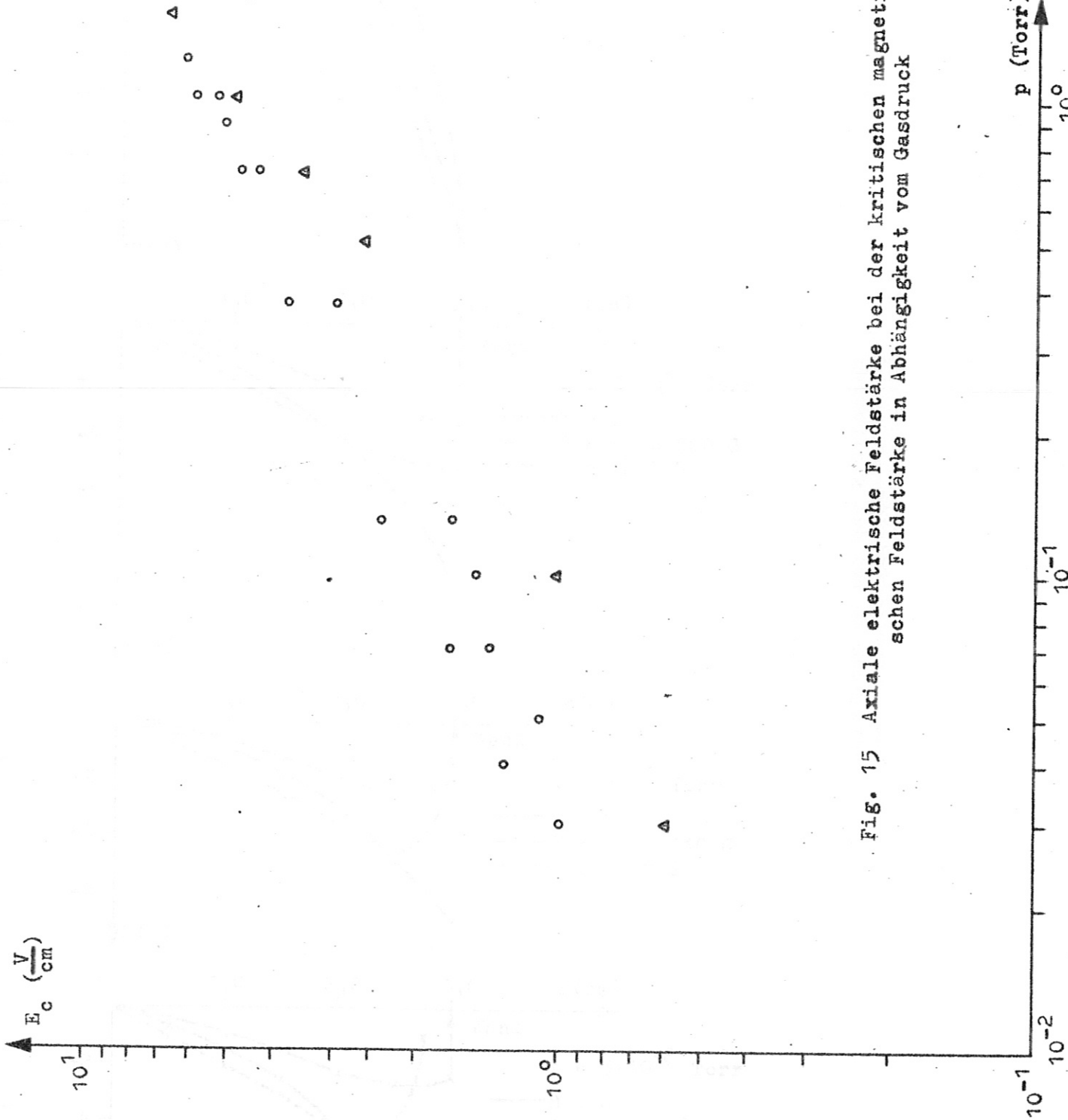


Fig. 15 Axiale elektrische Feldstärke bei der kritischen magnetischen Feldstärke in Abhängigkeit vom Gasdruck

Fig. 16 Radiale Potentialverteilung für verschiedene magnetische Feldstärken und Gasdrücke

p (Torr)

10^0

10^{-1}

10^{-2}

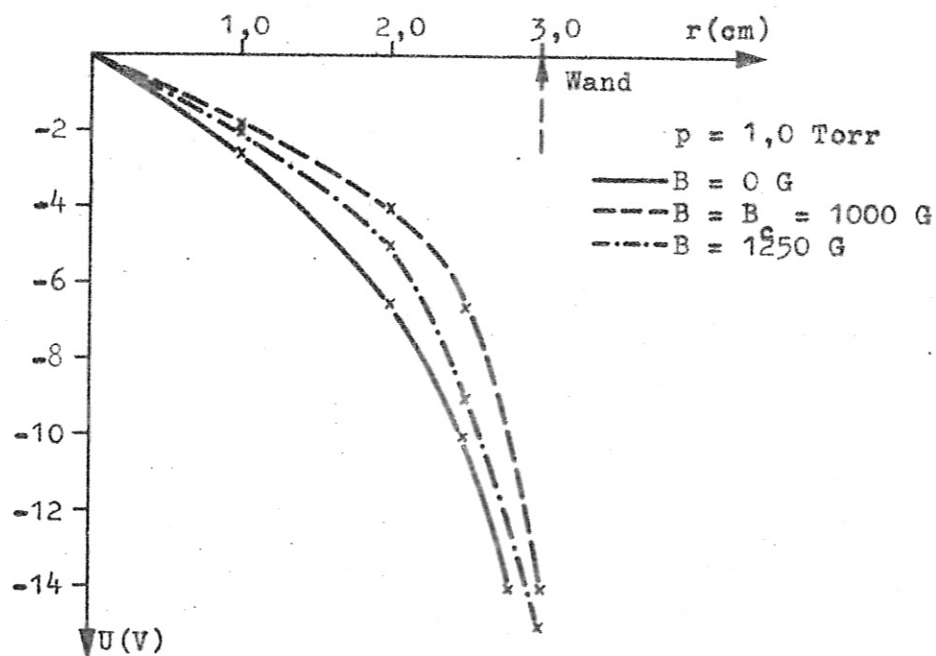
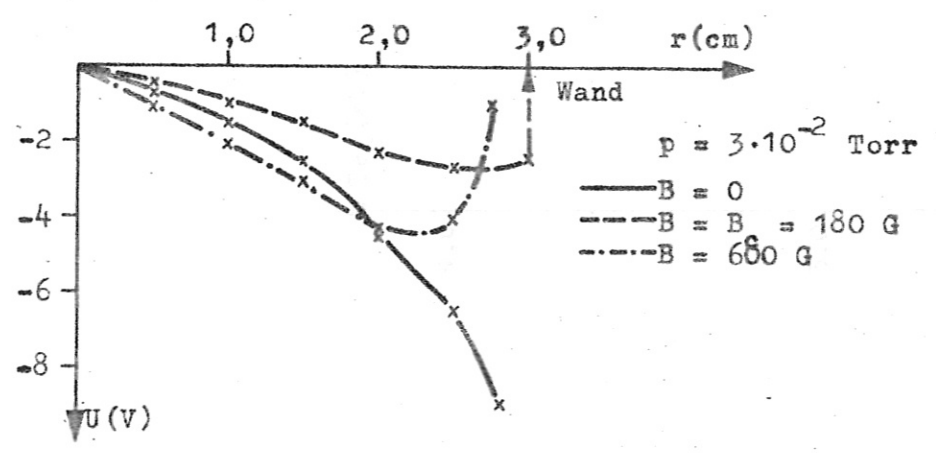
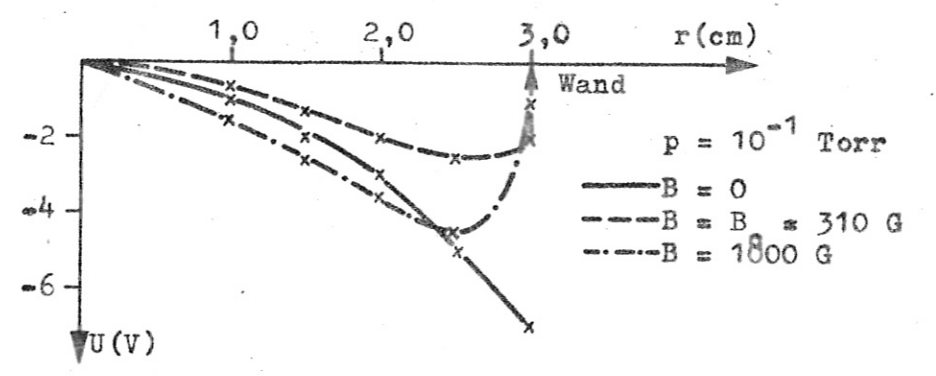
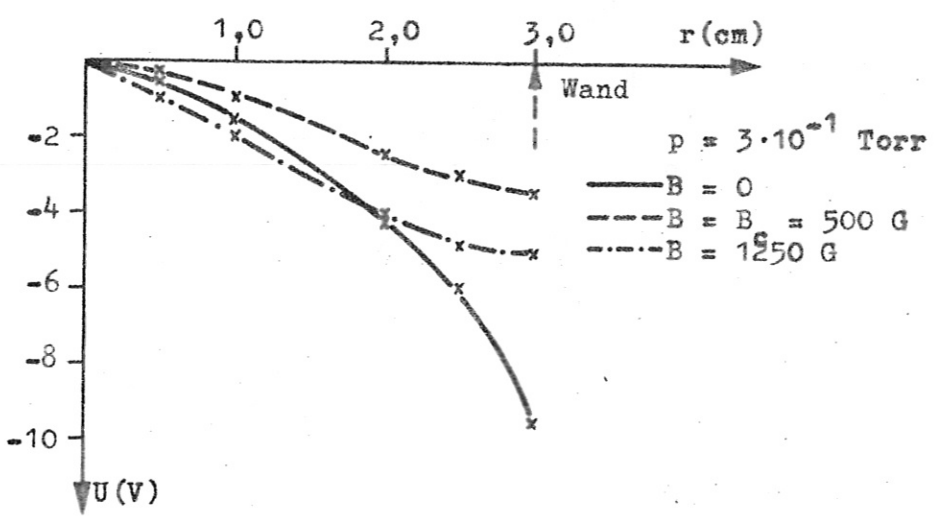


Fig. 16 Radiale Potentialverteilung für verschiedene magnetische Feldstärken und Gasdrucke



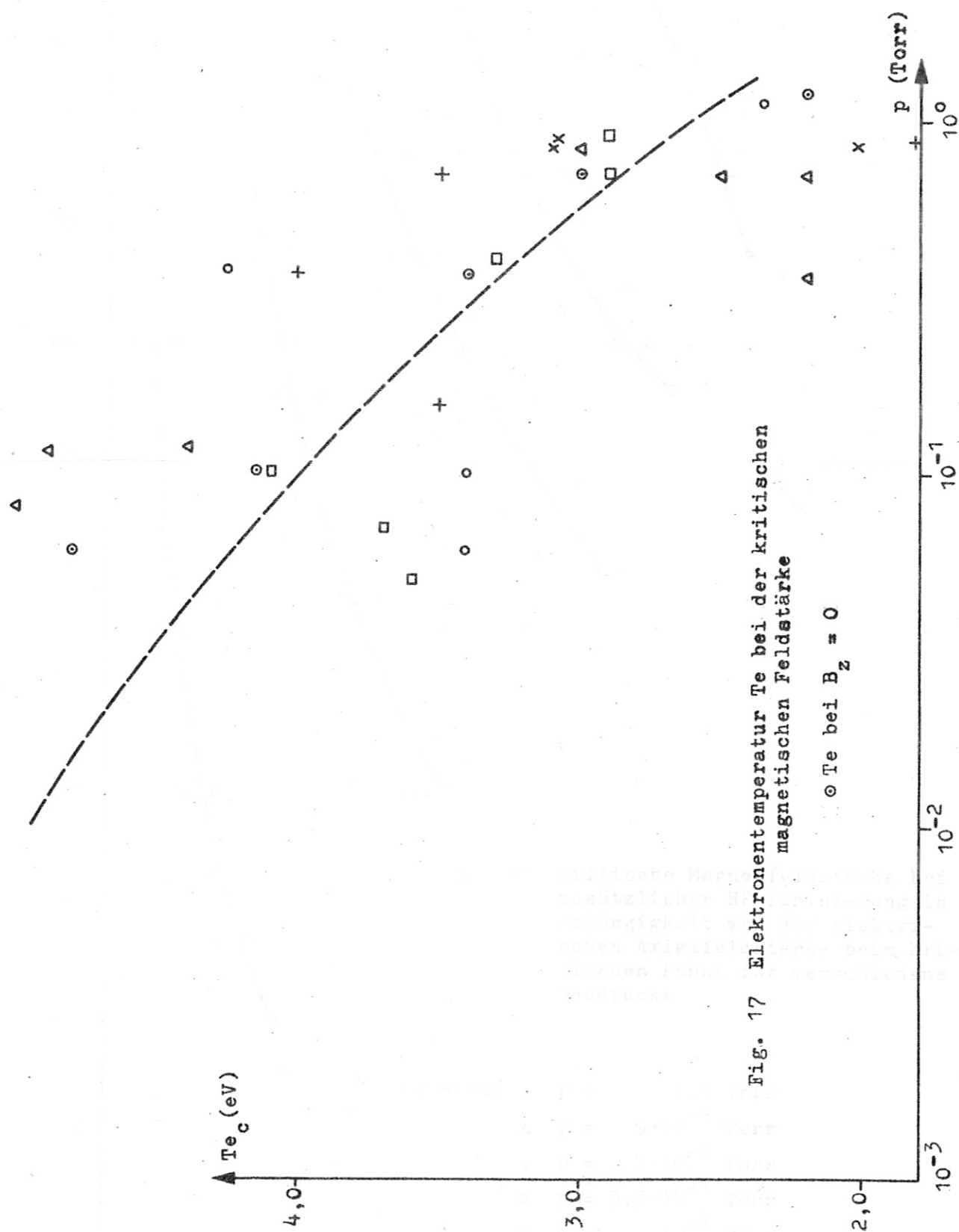


Fig. 17 Elektronentemperatur T_{e_c} bei der kritischen magnetischen Feldstärke

\circ T_{e_c} bei $B_z = 0$

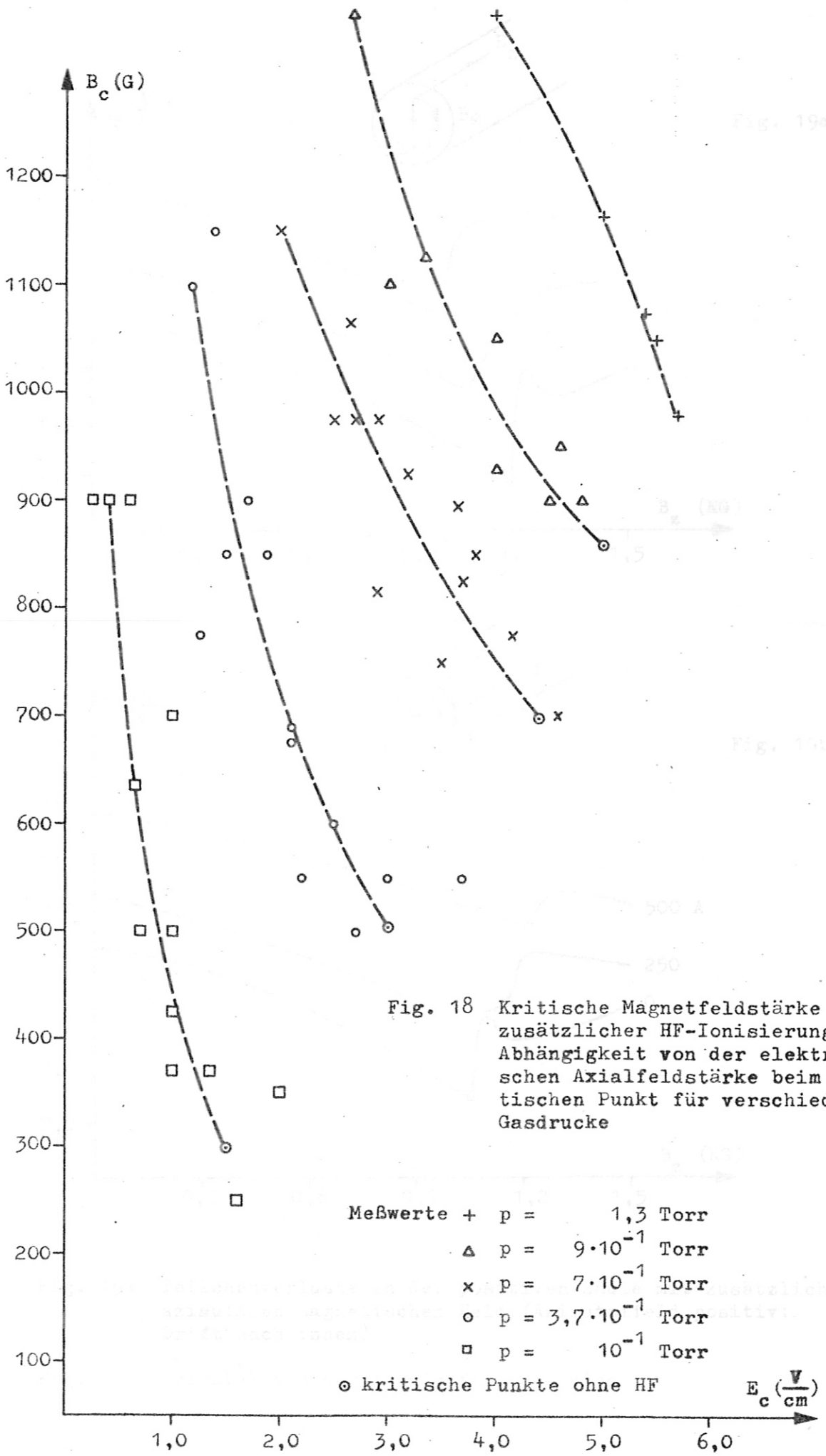


Fig. 18 Kritische Magnetfeldstärke bei zusätzlicher HF-Ionisierung in Abhängigkeit von der elektrischen Axialfeldstärke beim kritischen Punkt für verschiedene Gasdrücke

Meßwerte + p = 1,3 Torr
 Δ p = 9 · 10⁻¹ Torr
 x p = 7 · 10⁻¹ Torr
 o p = 3,7 · 10⁻¹ Torr
 □ p = 10⁻¹ Torr

○ kritische Punkte ohne HF

E_c ($\frac{V}{cm}$)

kritischer Punkt (Einsetzen des Kauschens)

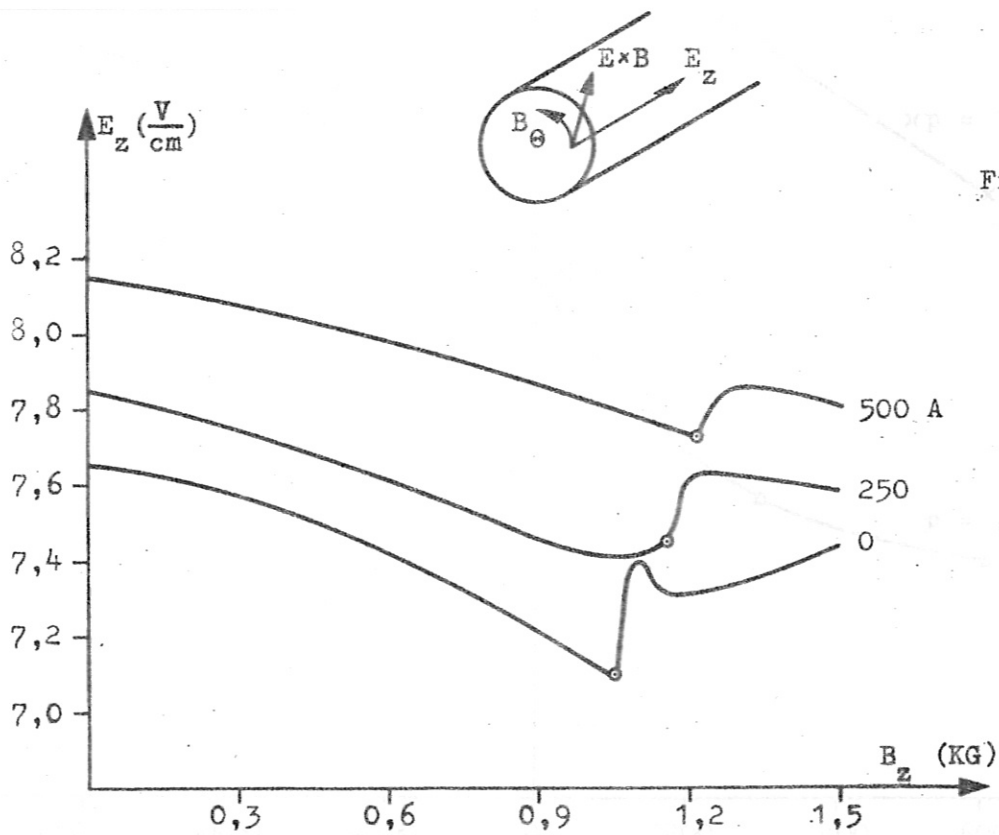
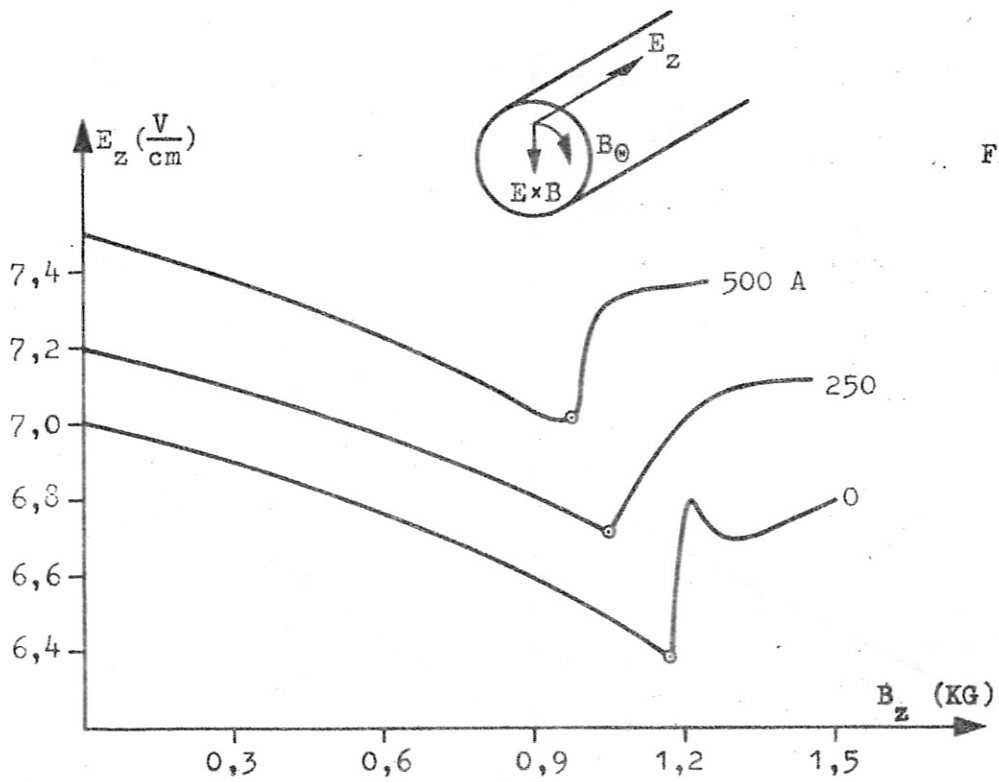


Fig. 19a Teilchenverluste in der positiven Säule mit zusätzlichem azimuthalen magnetischen Feld (Azimutalfeld positiv; Drift nach innen)

Fig. 19b Azimutalfeld negativ; Drift nach außen

° kritischer Punkt (Einsetzen des Rauschens)

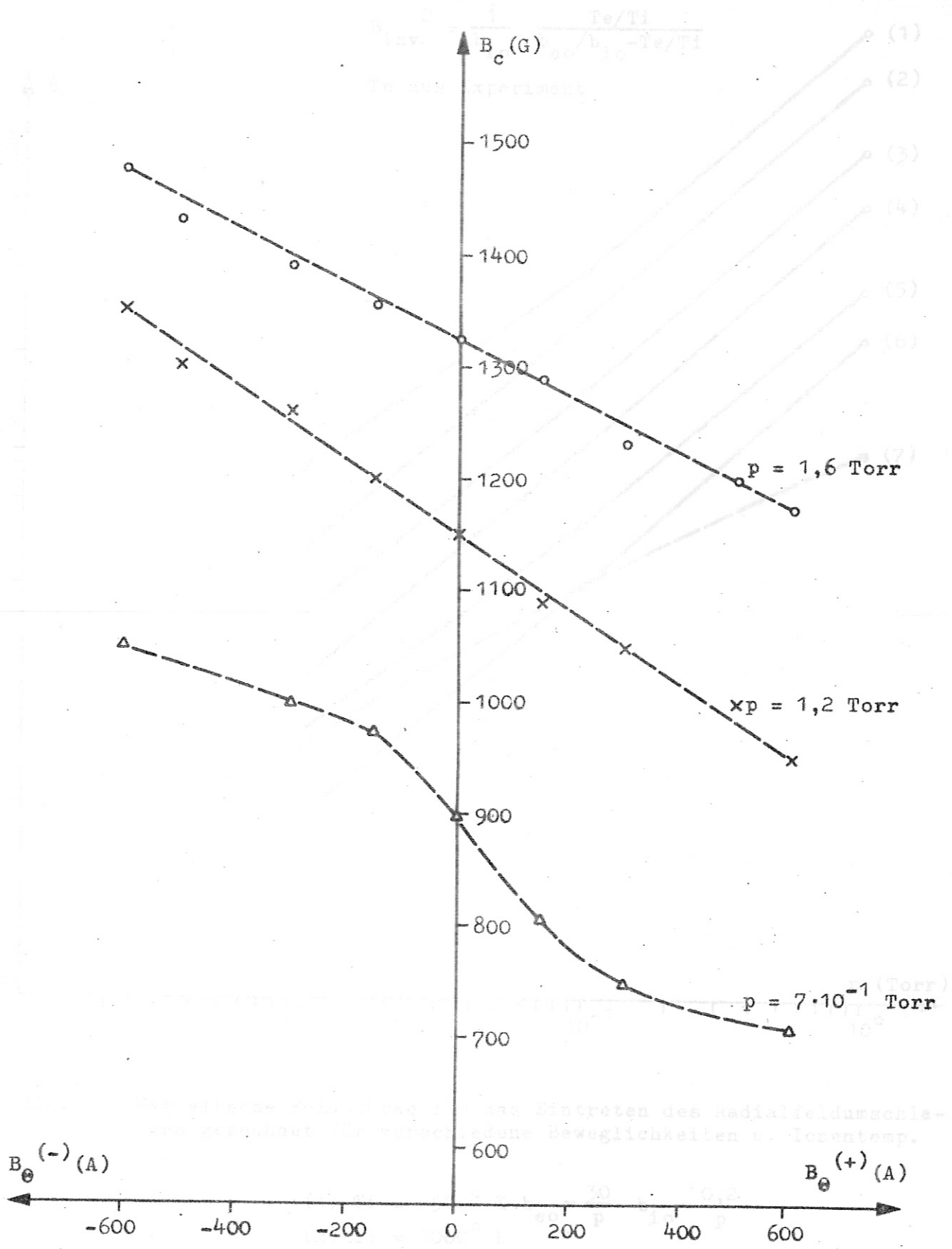


Fig. 20 Kritische magnetische Feldstärke in Abhängigkeit vom Erregestrom des Azimutalfeldes für verschiedene Gasdrucke

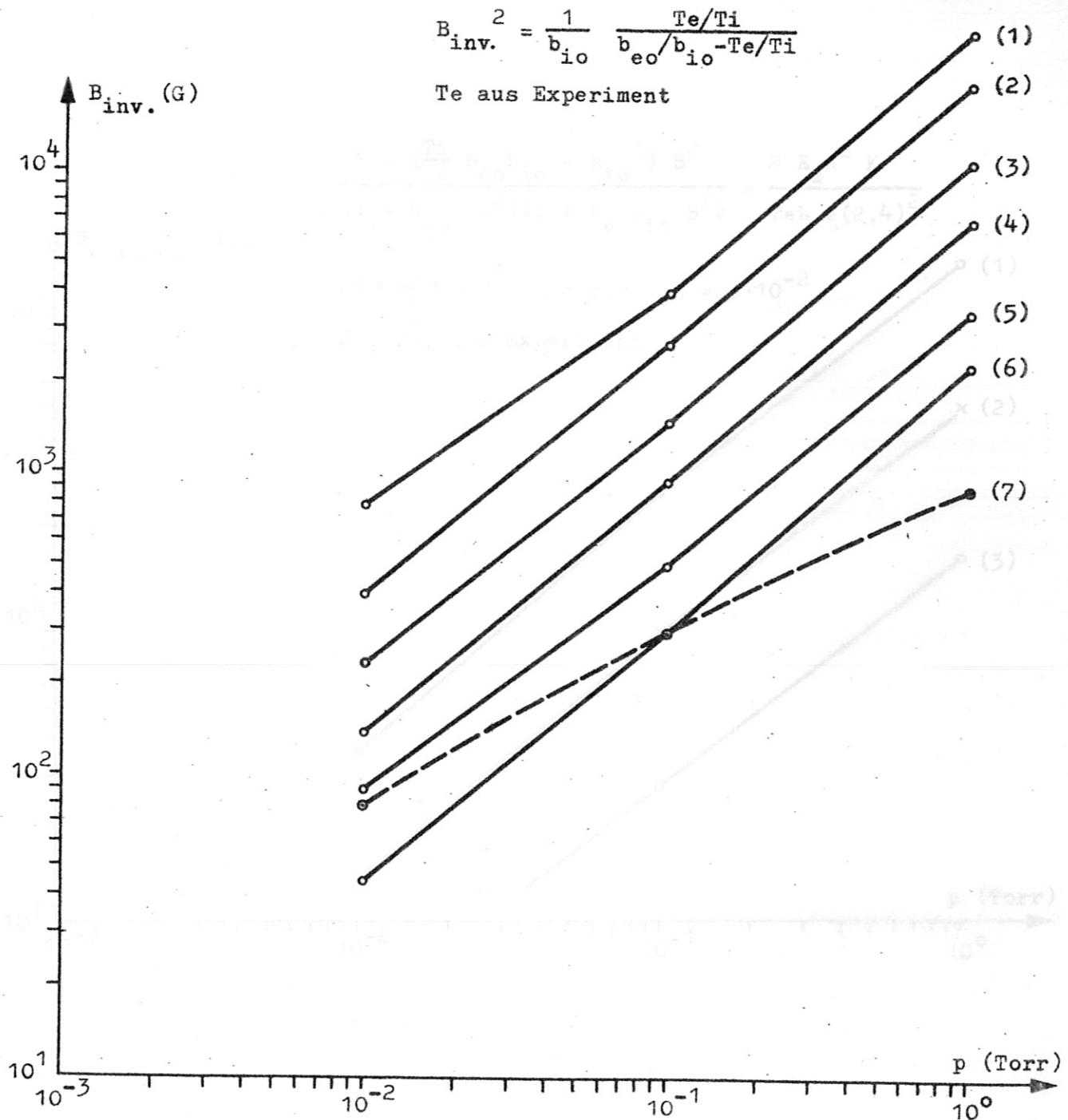


Fig. 21 Magnetische Feldstärke für das Eintreten des Radialfeldumschlages gerechnet für verschiedene Beweglichkeiten u. Ionentemp.

- (1) $Ti = 500^\circ K$ $b_{eo} \approx \frac{30}{p}$ $b_{io} \approx \frac{0,2}{p}$
 (2) $Ti = 1000^\circ K$ " " " "
 (3) $Ti = 500^\circ K$ $b_{eo} \approx \frac{90}{p}$ $b_{io} \approx \frac{0,6}{p}$
 (4) $Ti = 1000^\circ K$ " " " "
 (5) $Ti = 500^\circ K$ $b_{eo} \approx \frac{270}{p}$ $b_{io} \approx \frac{1,8}{p}$
 (6) $Ti = 1000^\circ K$ " " " "
 (7) gemessene Werte der krit. Feldstärke

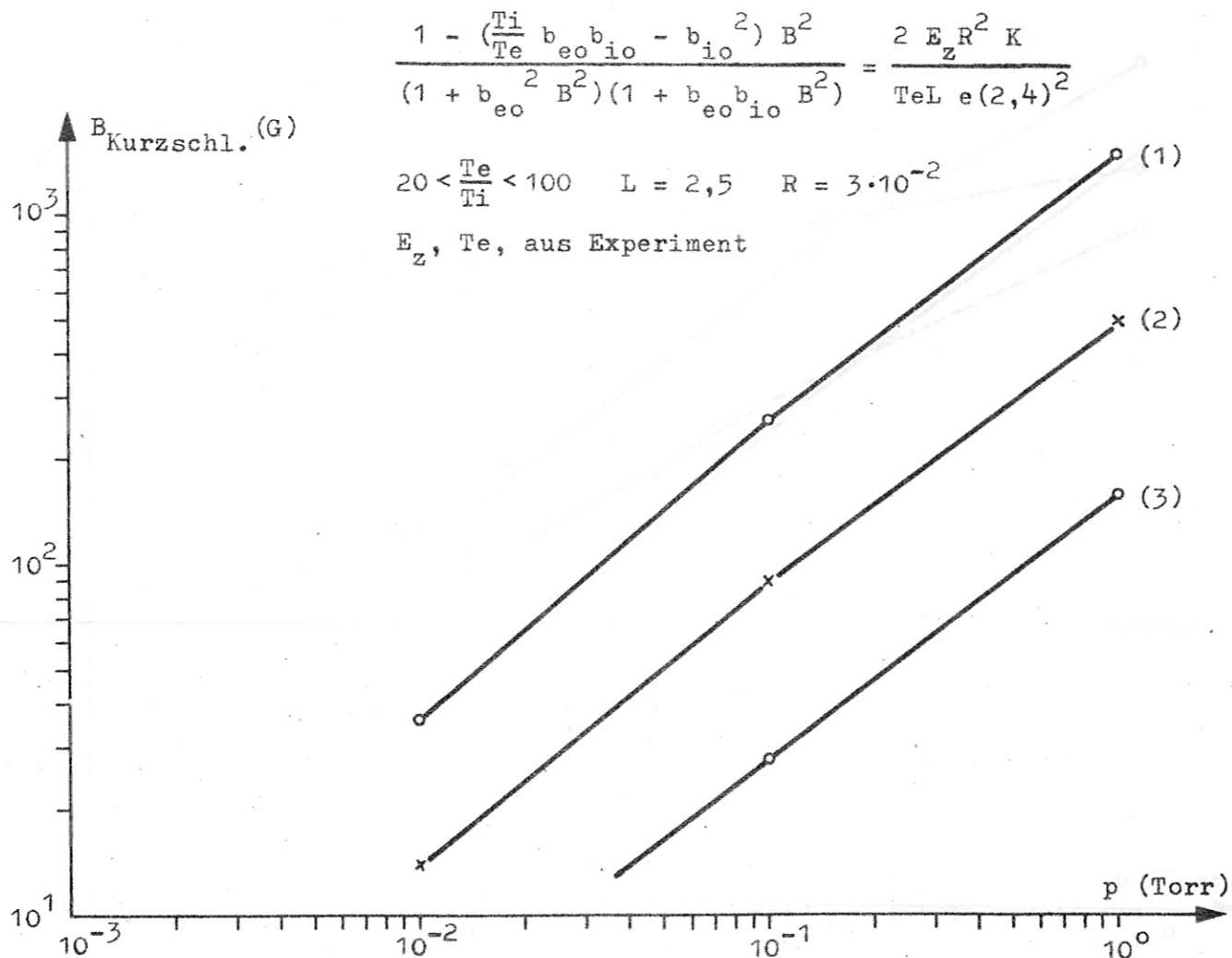


Fig. 22 Magnetische Feldstärke für das Eintreten des Kurzschlußeffektes gerechnet für verschiedene Beweglichkeiten

$$(1) b_{eo} \approx \frac{30}{p} \quad b_{io} \approx \frac{0,2}{p}$$

$$(2) b_{eo} \approx \frac{90}{p} \quad b_{io} \approx \frac{0,6}{p}$$

$$(3) b_{eo} \approx \frac{270}{p} \quad b_{io} \approx \frac{1,8}{p}$$

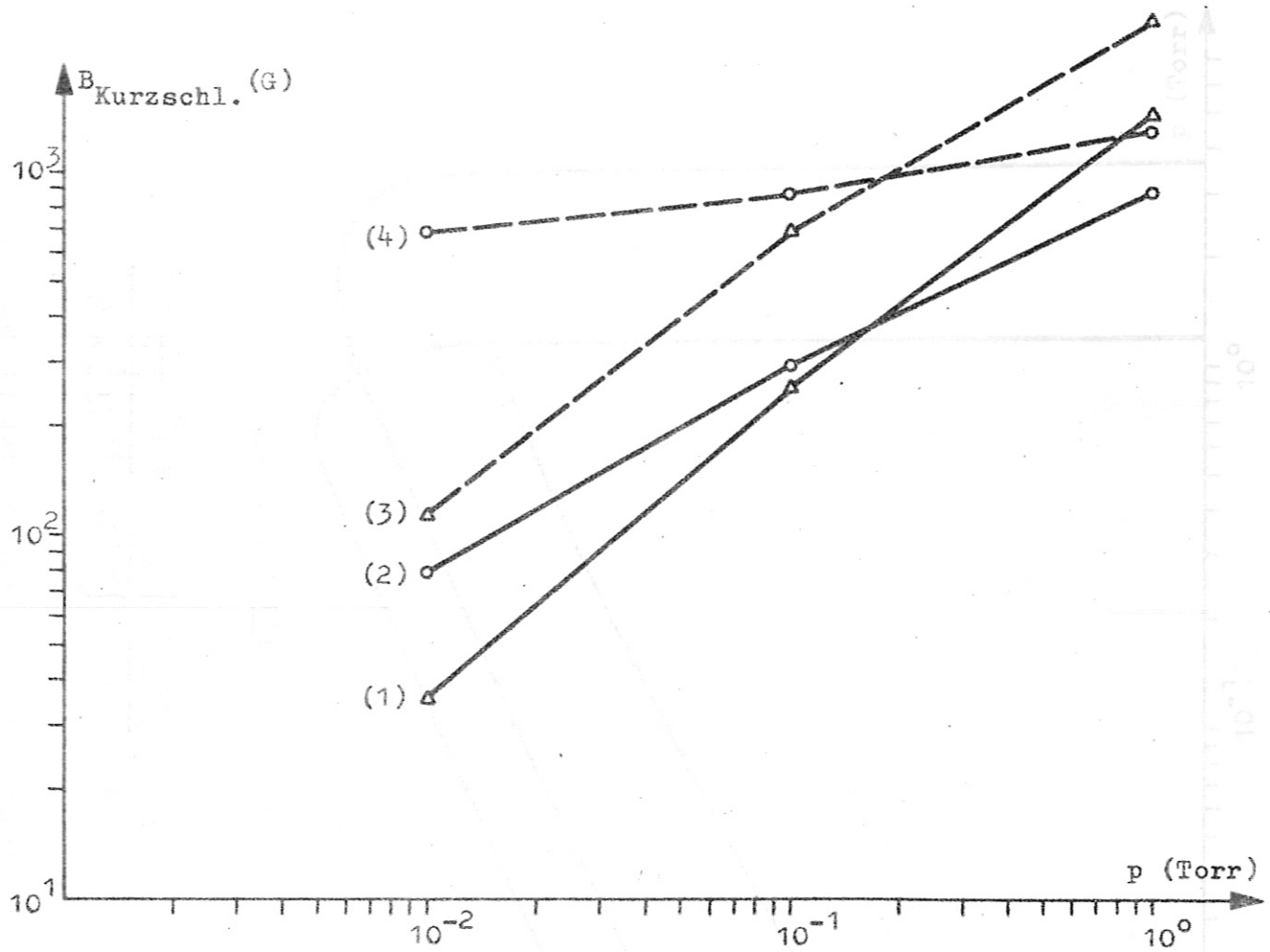


Fig. 23 Magnetische Feldstärke für das Einsetzen des Kurzschlußeffektes verglichen mit den gemessenen kritischen Feldstärken

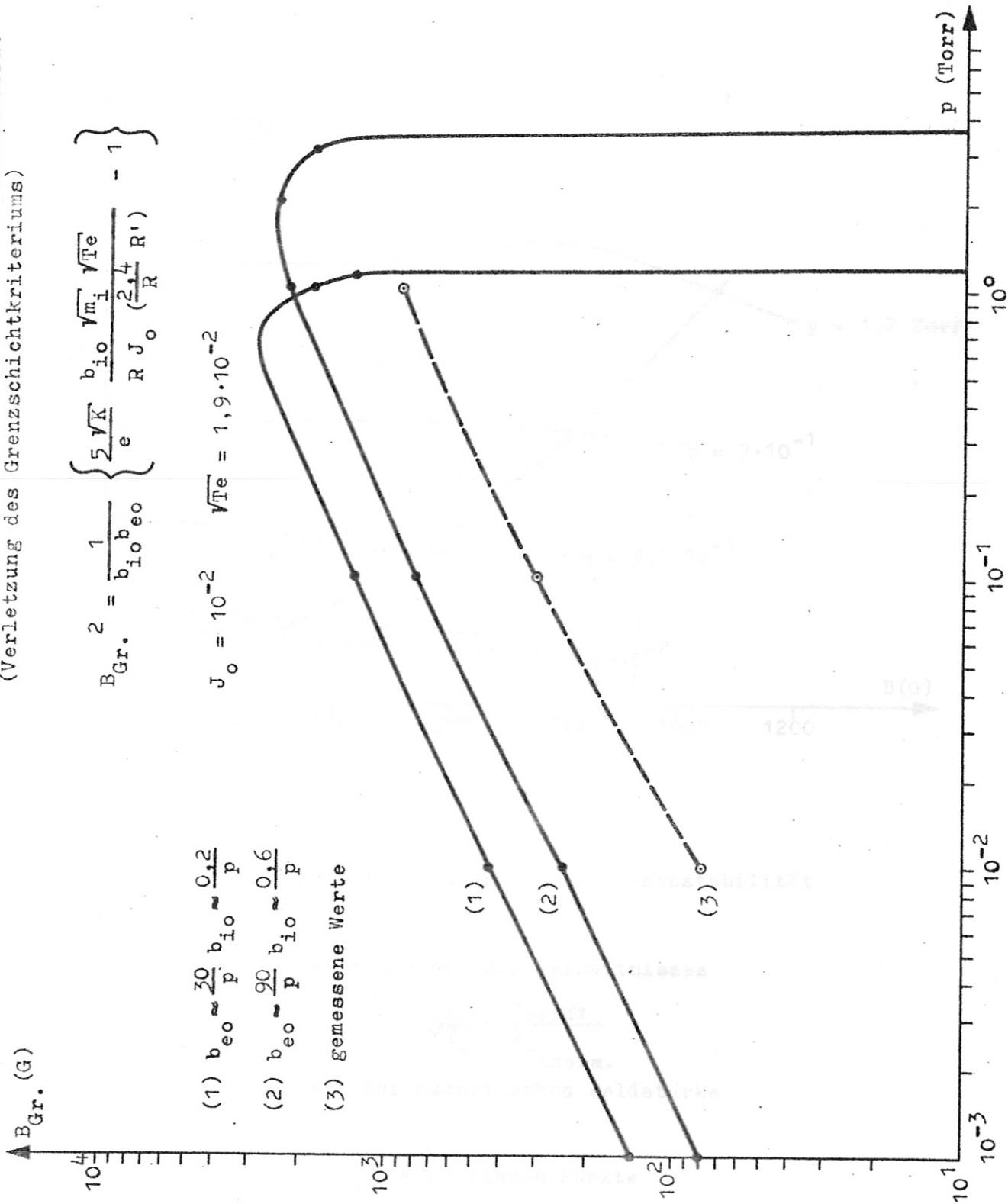
(1) gerechnete Werte für $b_{eo} \approx \frac{30}{p}$ $b_{io} \approx \frac{0,2}{p}$ ohne HF

(2) gemessene Werte ohne HF

(3) gerechnete Werte mit HF-Ionisation für $b_{eo} \approx \frac{30}{p}$ $b_{io} \approx \frac{0,2}{p}$

(4) gemessene Werte mit HF-Ionisation

Fig. 24 Kritische magnetische Feldstärke aus der Hon'schen Theorie
(Verletzung des Grenzschichtkriteriums)



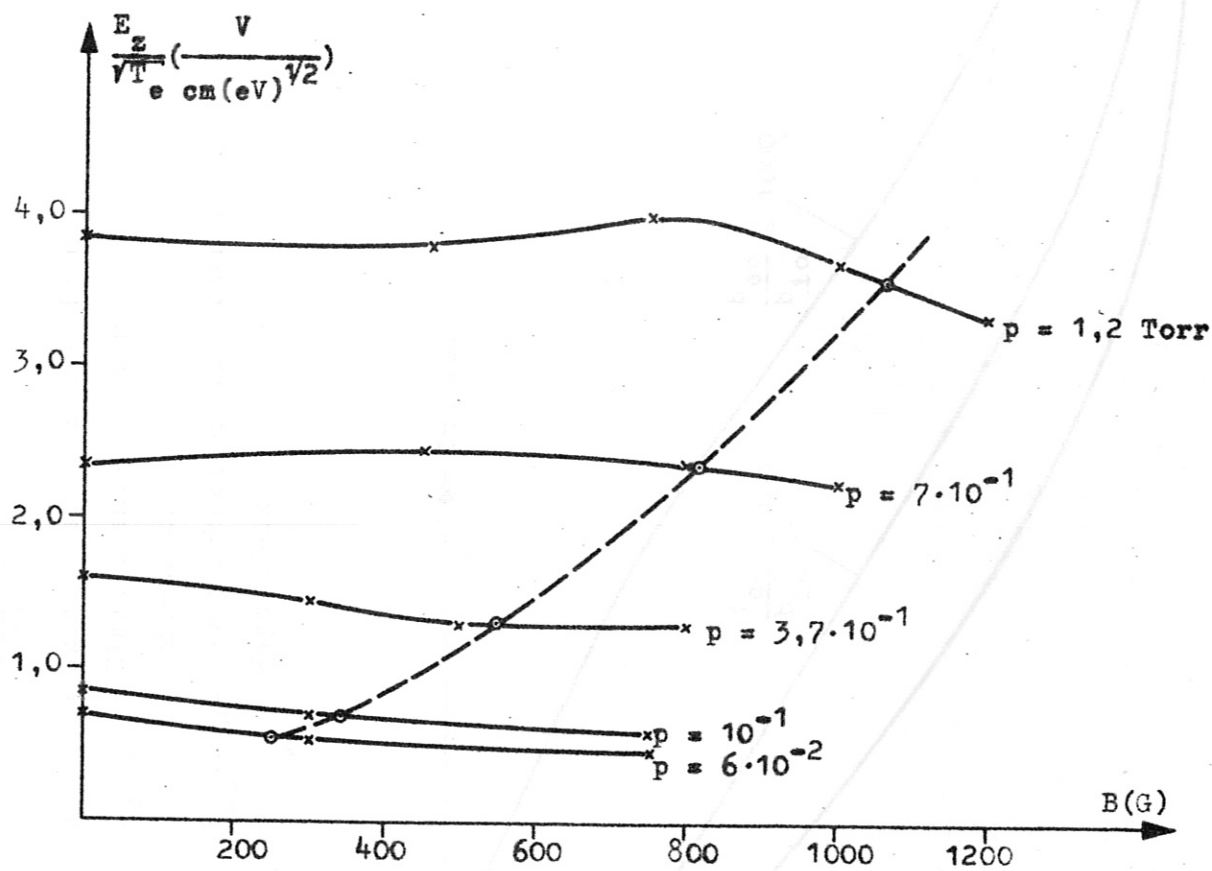


Fig. 25 Zur Prüfung einer Ionenwelleninstabilität

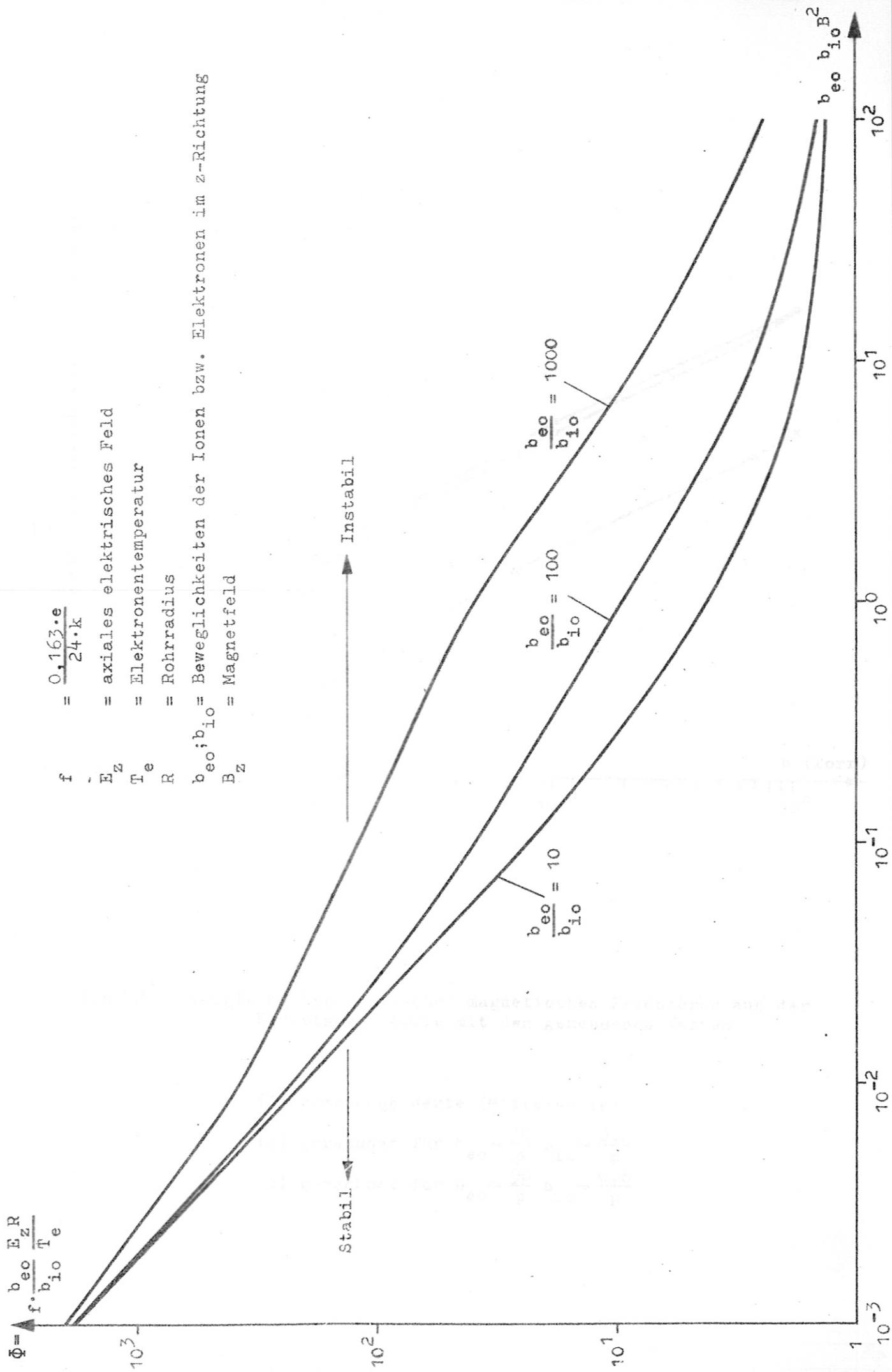
Abhängigkeit des Verhältnisses

$$\frac{E_z}{\sqrt{T_e}} \sim \frac{u_{\text{Drift}}}{v_{e \text{ therm.}}}$$

von der magnetischen Feldstärke

• kritische Punkte

Fig. 26 Darstellung des Stabilitätskriteriums aus der Theorie von Kadomtsev



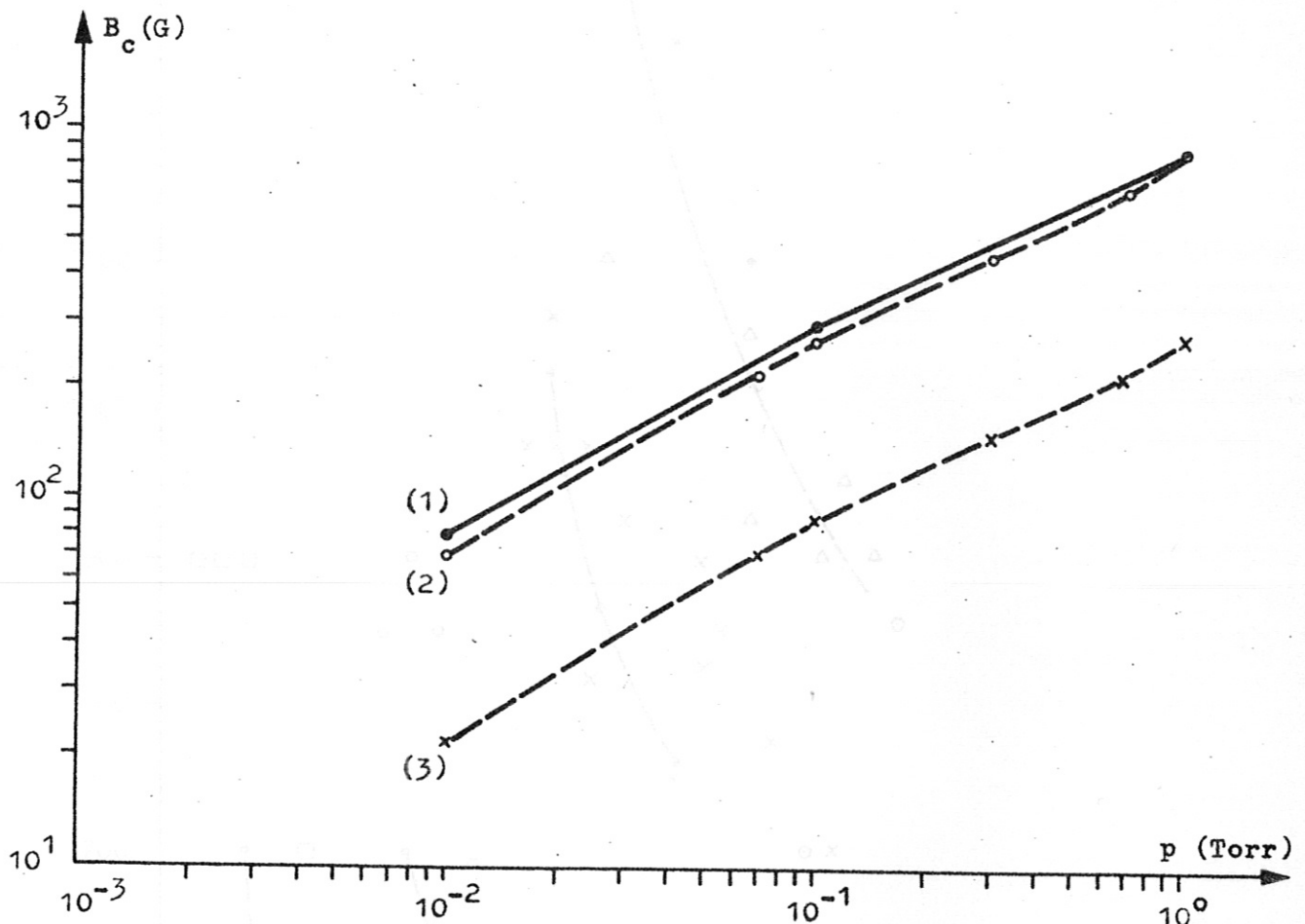


Fig. 27 Vergleich der kritischen magnetischen Feldstärke aus der Kadomtsev-Theorie mit den gemessenen Werten

(1) gemessene Werte (Mittelwerte)

(2) gerechnet für $b_{eo} \approx \frac{30}{p}$ $b_{io} \approx \frac{0.2}{p}$

(3) gerechnet für $b_{eo} \approx \frac{90}{p}$ $b_{io} \approx \frac{0.6}{p}$

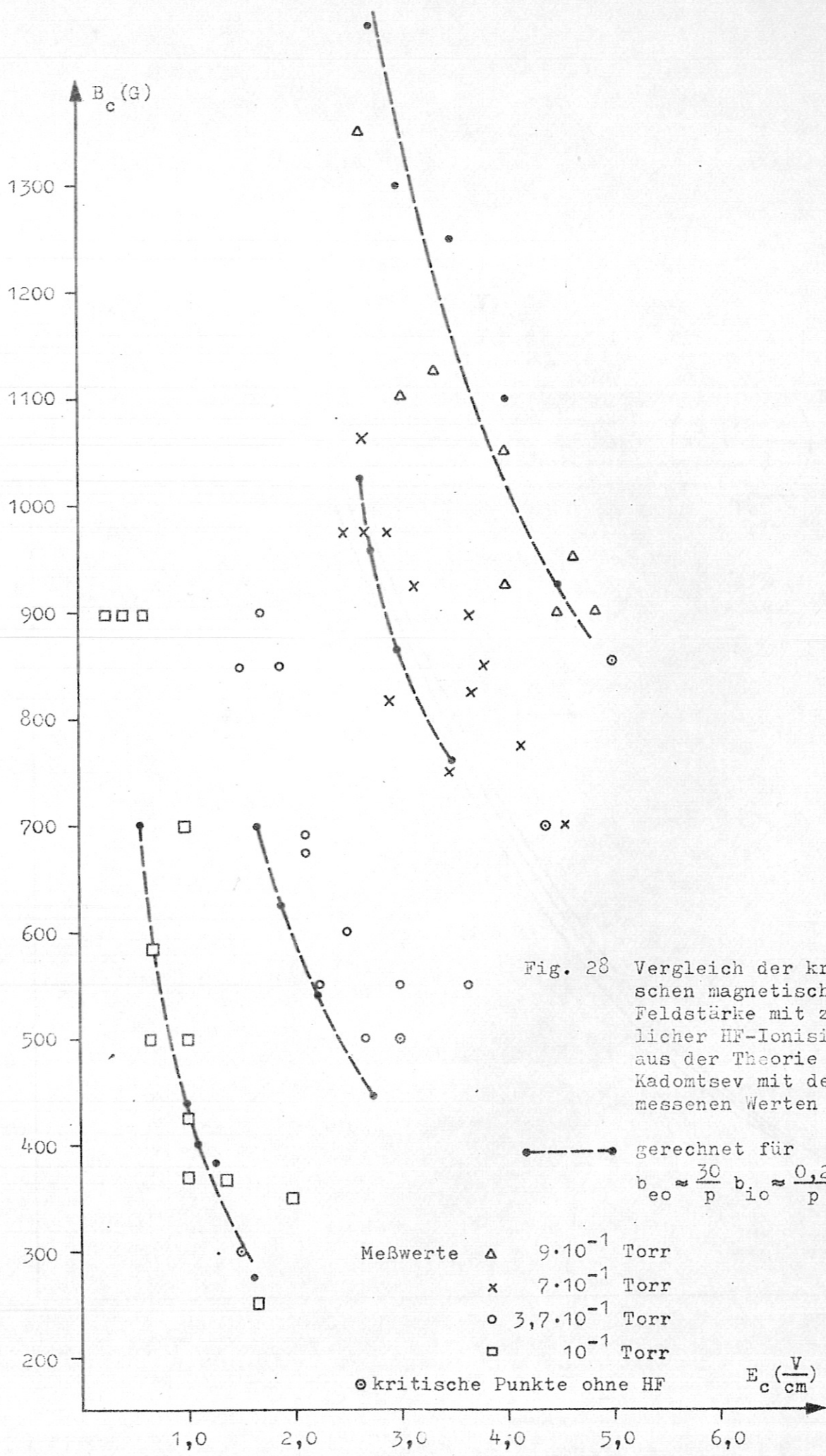
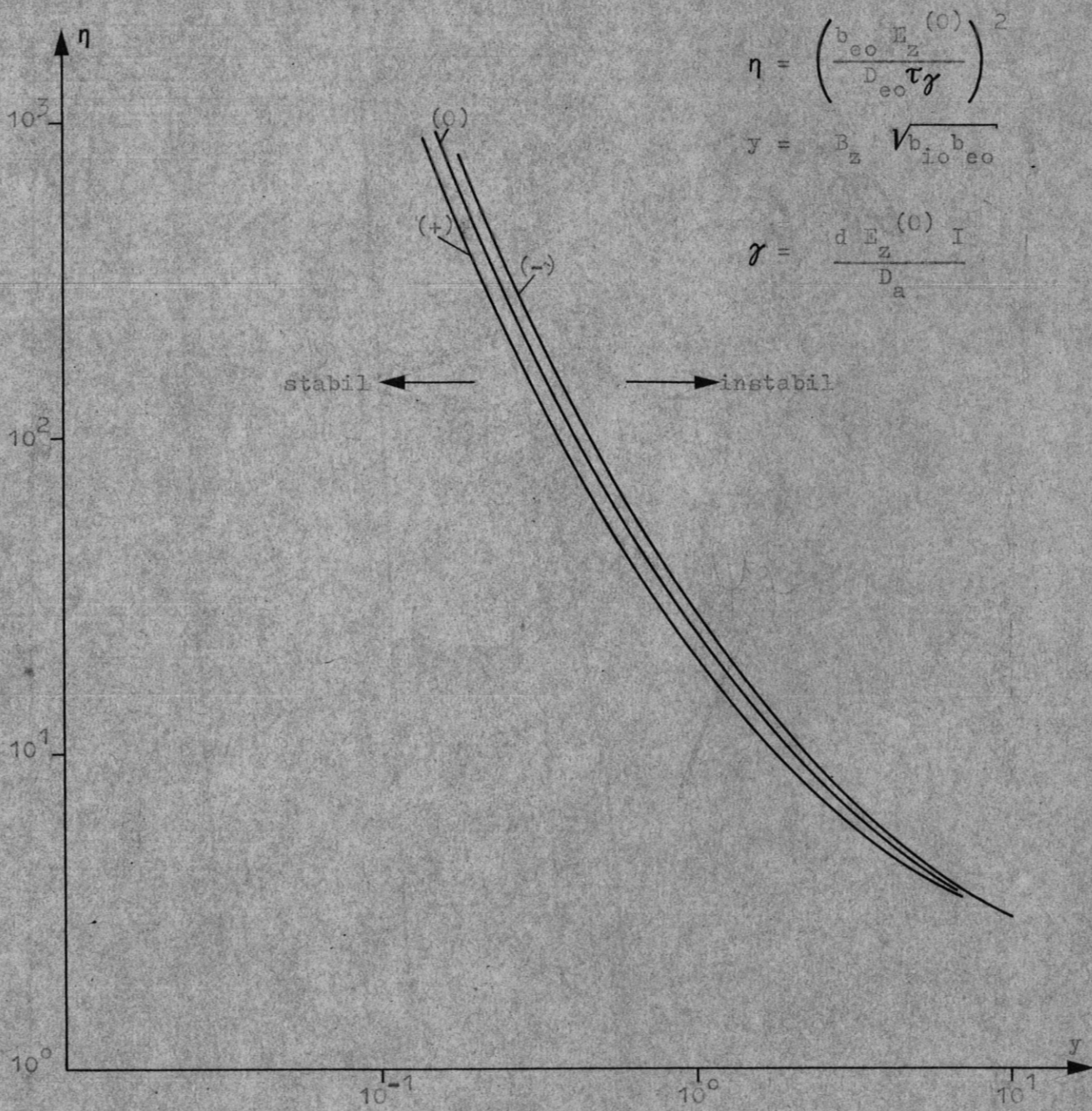


Fig. 29 Stabilitätsgrenze mit zusätzlichem magnetischen Azimutalfeld

- (-) Kurve für $\gamma = -1$
- (0) Kurve für $\gamma = 0$
- (+) Kurve für $\gamma = +1$

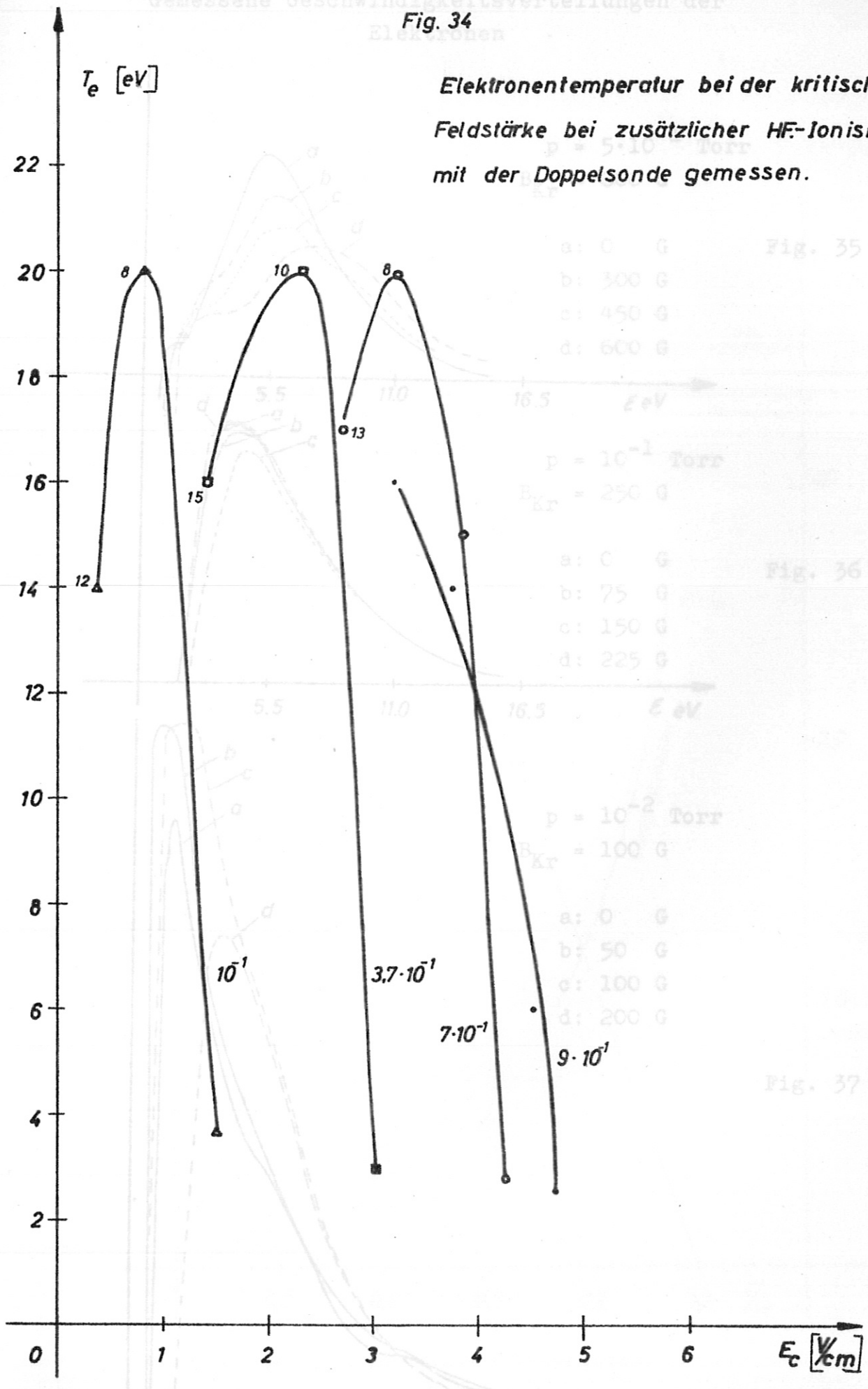


$$\eta = \left(\frac{b_{eo} E_z^{(0)}}{D_{eo} \tau \gamma} \right)^2$$

$$\gamma = \frac{B_z}{V_{b_{io} b_{eo}}}$$

$$\gamma = \frac{d E_z^{(0)} I}{D_a}$$

Fig. 34



Elektronentemperatur bei der kritischen
Feldstärke bei zusätzlicher HF-Ionisierung
mit der Doppelsonde gemessen.

a: 0 G Fig. 35
b: 300 G
c: 450 G
d: 600 G

$p = 10^{-1}$ Torr
 $B_{kr} = 250$ G
a: 0 G Fig. 36
b: 75 G
c: 150 G
d: 225 G

$p = 10^{-2}$ Torr
 $B_{kr} = 100$ G
a: 0 G Fig. 37
b: 50 G
c: 100 G
d: 200 G

Gemessene Geschwindigkeitsverteilungen der
Elektronen

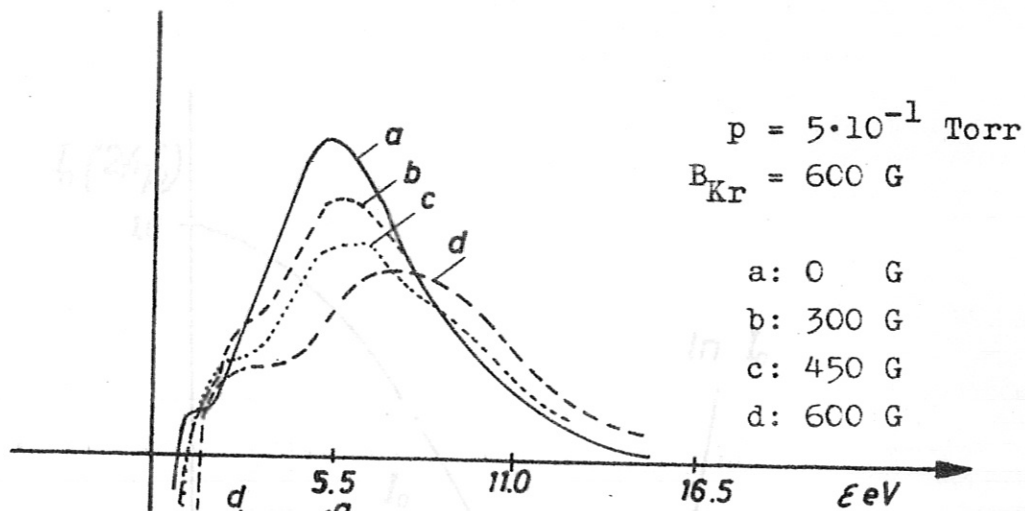


Fig. 35

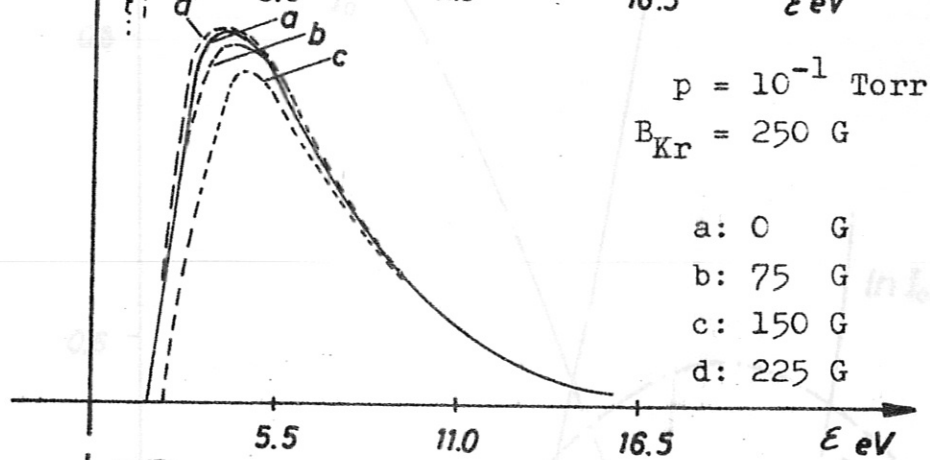


Fig. 36

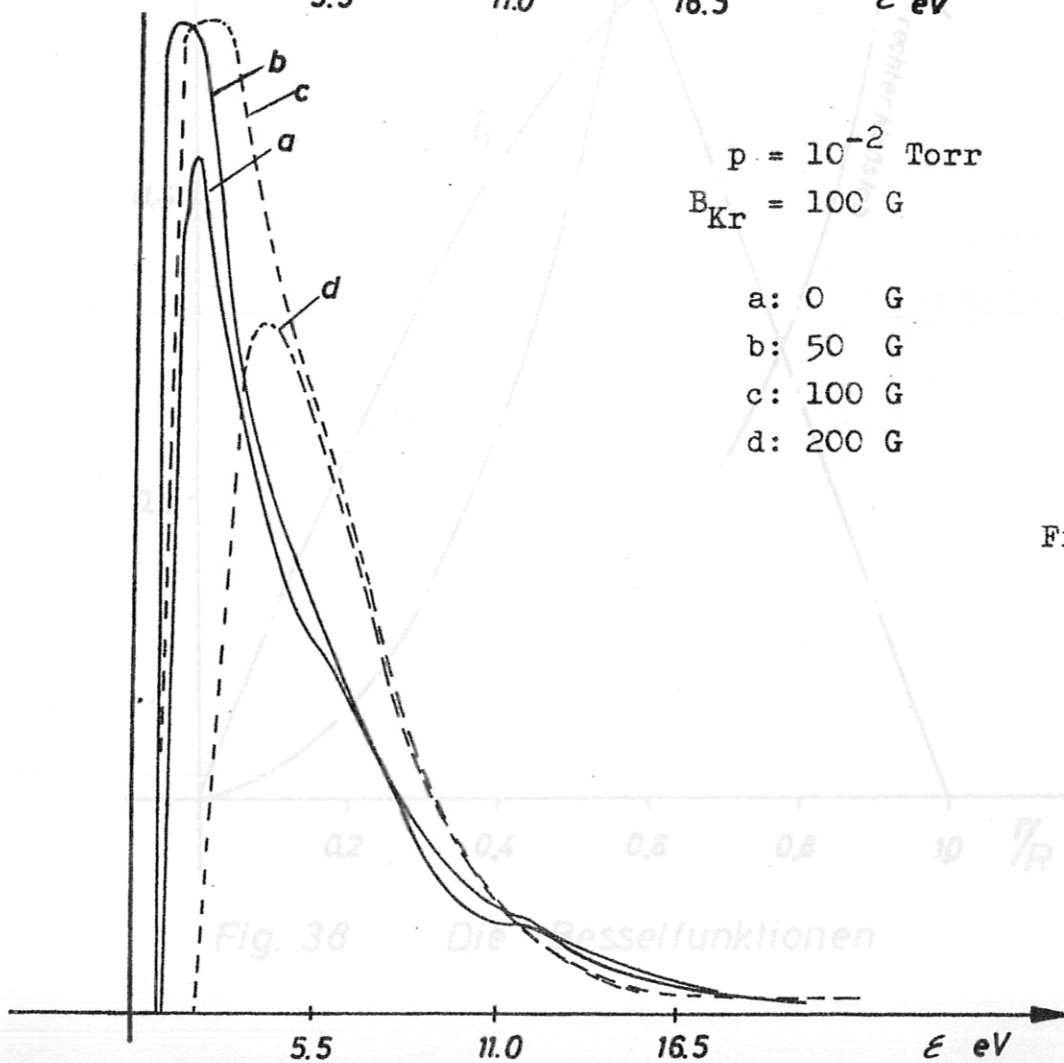


Fig. 37

Fig. 38 Die Besselfunktionen

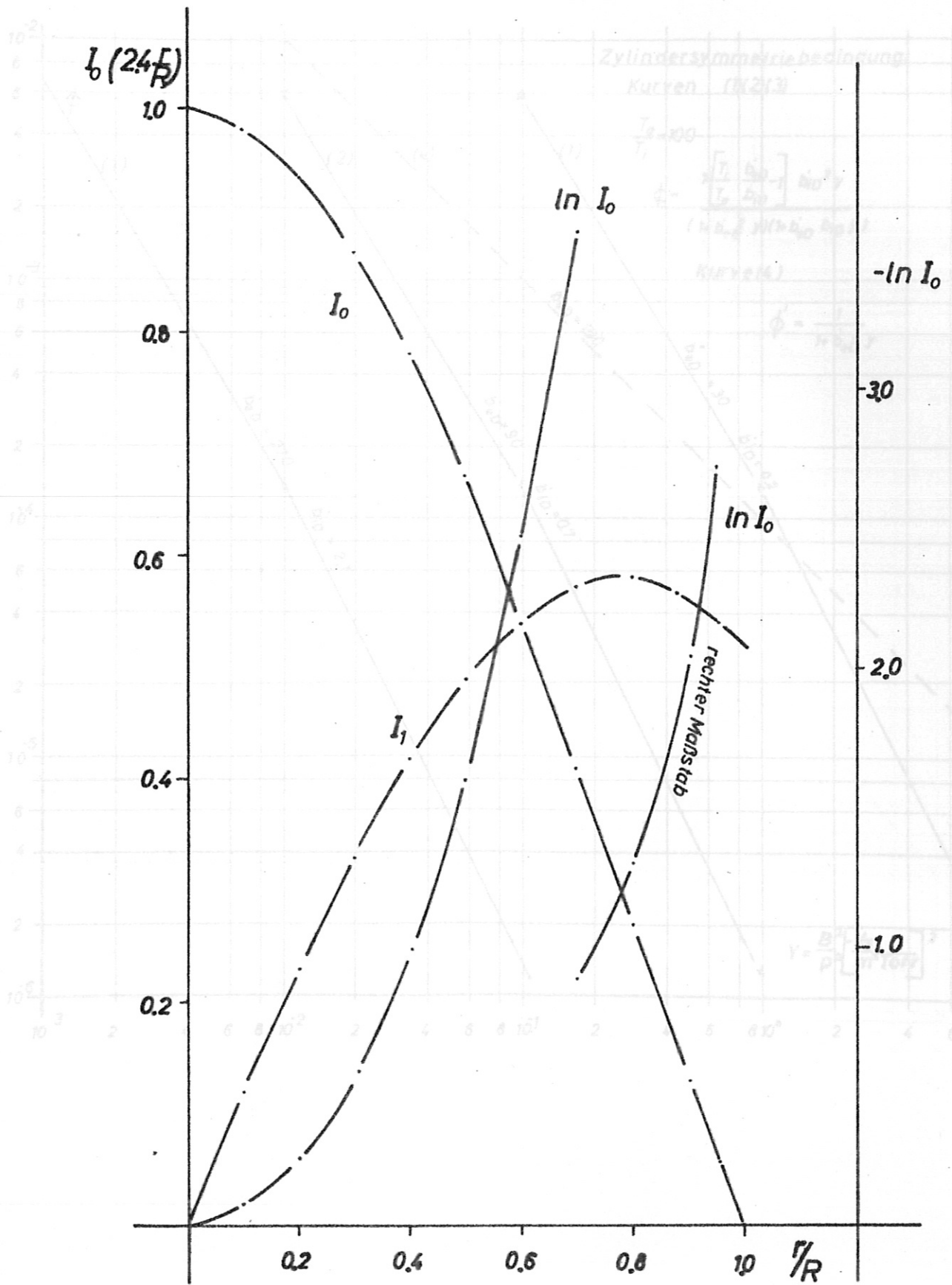


Fig. 38 Die Besselfunktionen

Fig. 39

Fig. 40

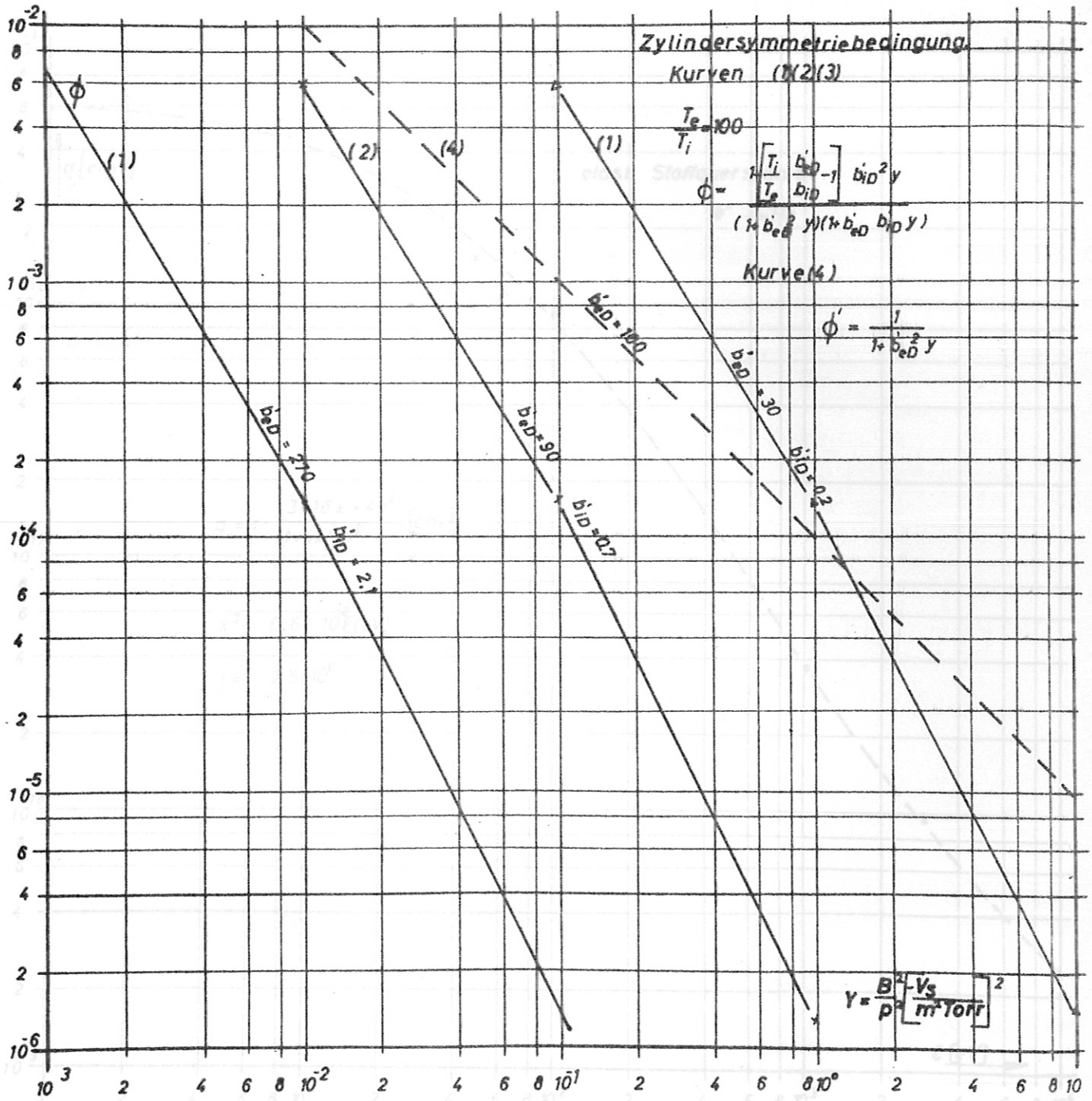
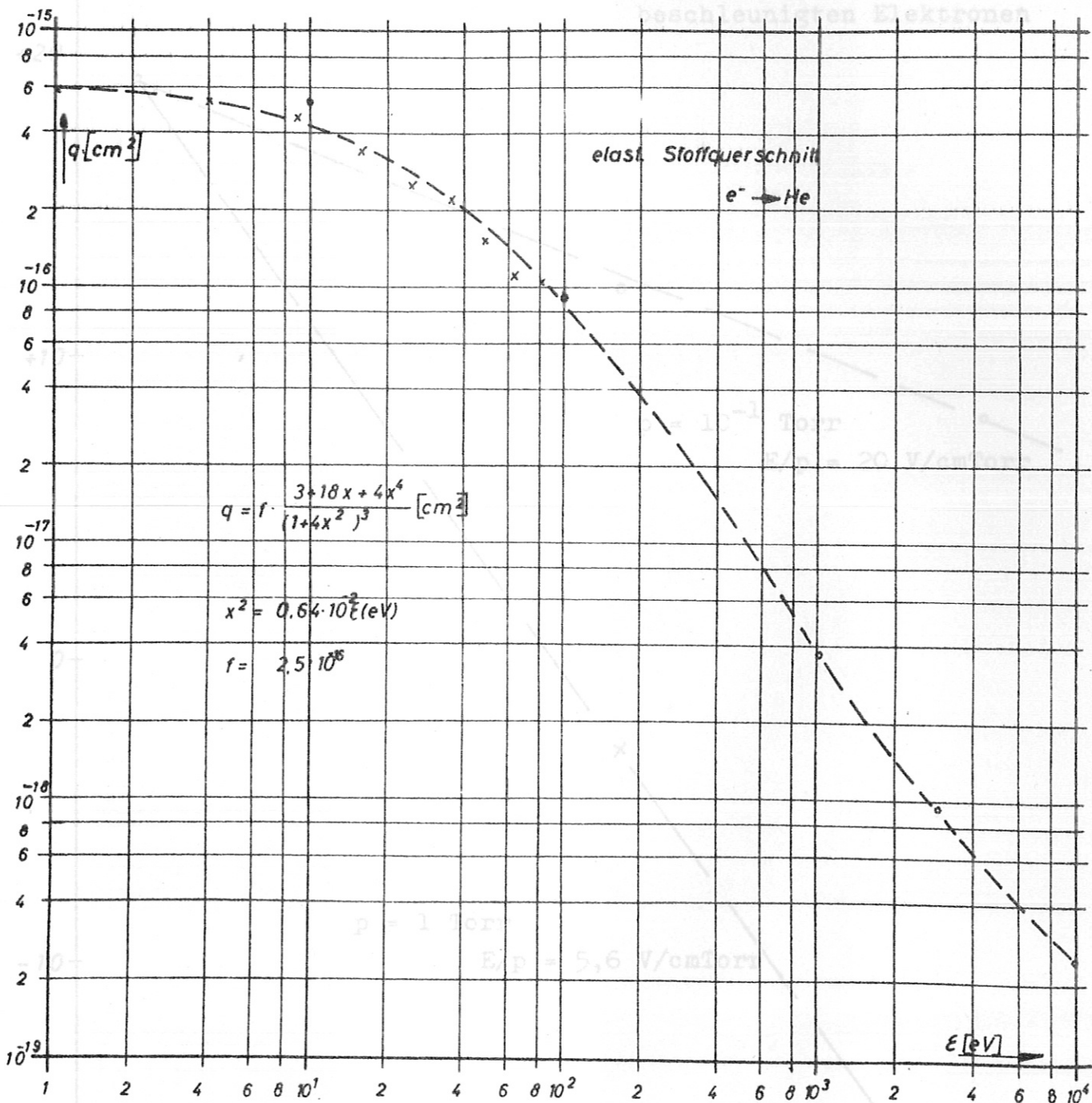


Fig. 40



$\psi(\epsilon) = 10^{-15}$

Fig. 41

Zahl der pro sec. und cm^3
 auf die Energie ϵ
 beschleunigten Elektronen

$p = 1 \text{ Torr}$
 $E_{ap} = 5,6 \text{ V/cmTorr}$

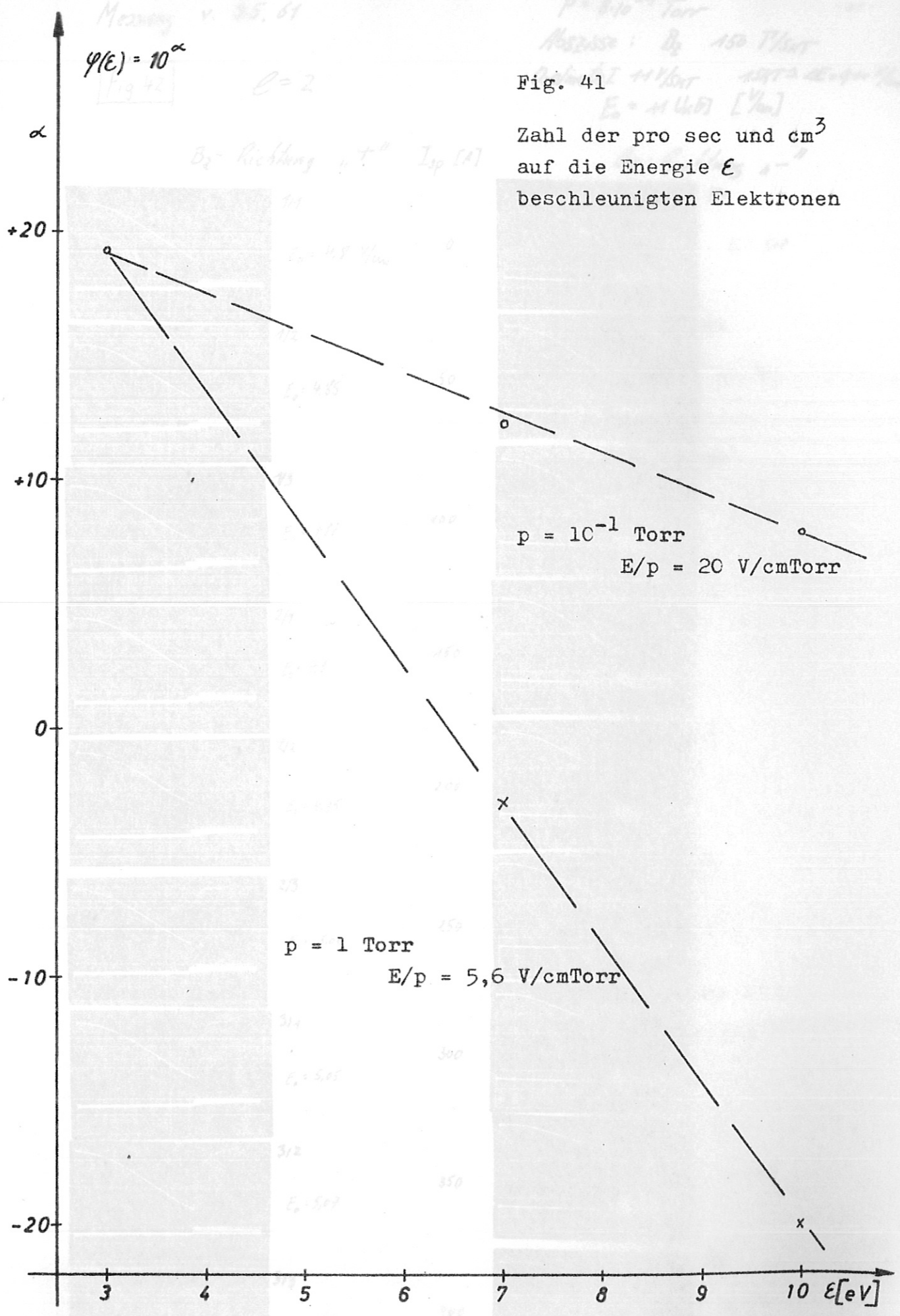
10^{-19}

3 4 5 6 7 8 9 10 ϵ [eV]

Messung v. 25. 61
 $\varphi(E) = 10^{\alpha}$
 $\ell = 2$

$p = 10^{-1}$ Torr
 Messung: D_2 150 Thut
 $E_0 = 1400$ [V/cm]

Fig. 41
 Zahl der pro sec und cm^3
 auf die Energie ϵ
 beschleunigten Elektronen



Messung v. 9.5.61

$P = 8 \cdot 10^{-1}$ Torr

- 41 -

Abszisse: B_2 150 T/SMT

Ordinate I 11 V/SMT 1 SMT $\Delta E = 9.14$ V/cm

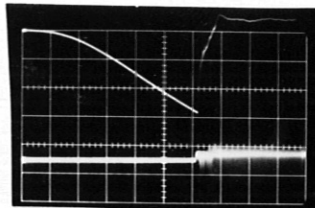
$E_0 = 11$ kV [V/cm]

Fig 42

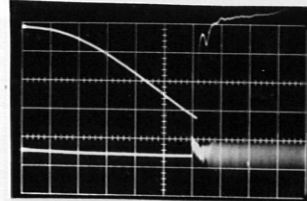
$e = 2$

B_2 -Richtung " + " I_{sp} [A]

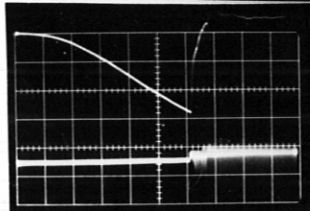
B_2 -Richtung " - "



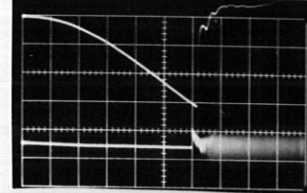
1/1
 $E_0 = 4.8$ V/cm



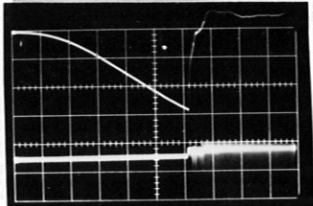
4/1
 $E_0 = 5.07$



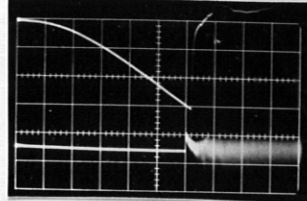
1/2
 $E_0 = 4.85$ 50



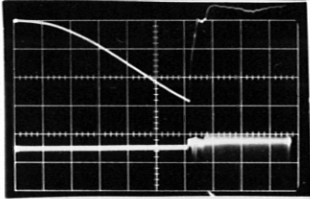
4/2
 $E_0 = 5.07$



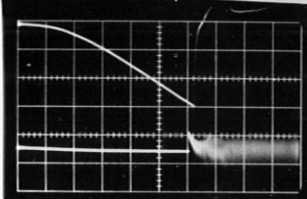
1/3
 $E_0 = 4.87$ 100



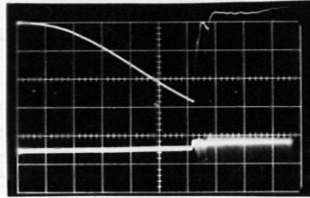
4/3
 $E_0 = 5.10$



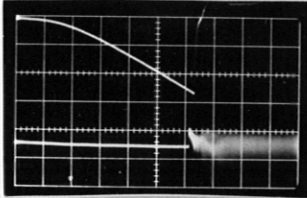
2/1
 $E_0 = 4.9$ 150



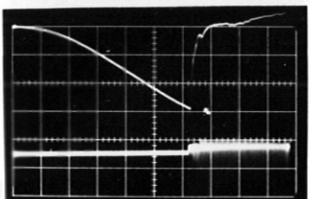
5/1
 $E_0 = 5.15$



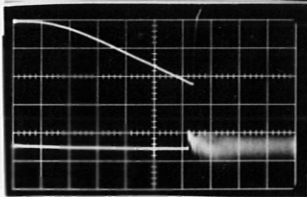
2/2
 $E_0 = 4.95$ 200



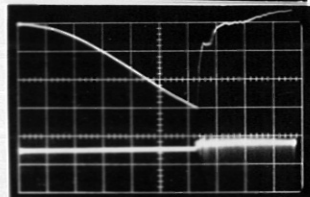
5/2
 $E_0 = 5.17$



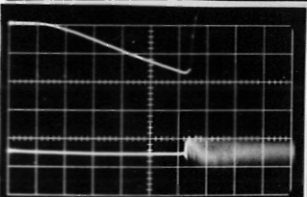
2/3
 $E_0 = 5.00$ 250



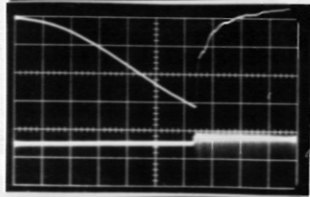
5/3
 $E_0 = 5.17$



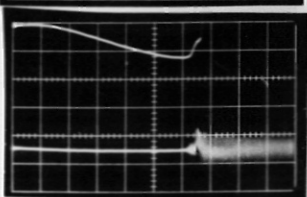
3/1
 $E_0 = 5.05$ 300



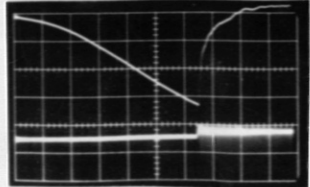
6/1
 $E_0 = 5.2$



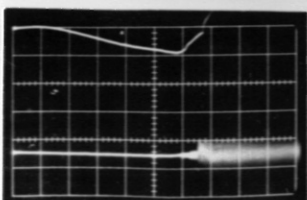
3/2
 $E_0 = 5.07$ 350



6/2
 $E_0 = 5.27$



3/3
 $E_0 = 5.1$ 400



6/3
 $E_0 = 5.3$

Messung v. 9.5.61

D 1177

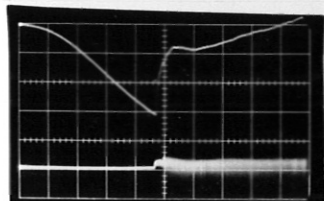
$p = 5,2 \cdot 10^{-1}$ Torr -42-
Abszisse B_2 150 T/ST
Ordinate I 11 V/ST $1ST = \Delta E = 9,11$ V/cm

Fig 43

$l = 2$

B_2 - Richtung " + " I_{sp} [A]

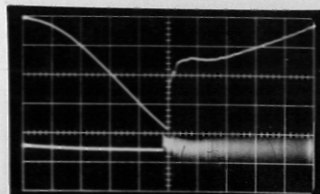
B_2 - Richtung " - "



10/1

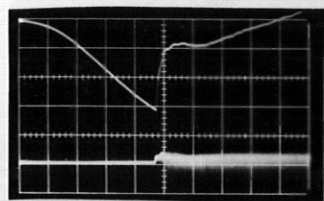
$E_0 = 4,10$ V/cm

0



7/1

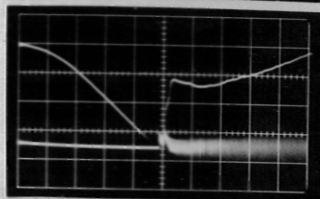
$E_0 = 3,96$



11/3

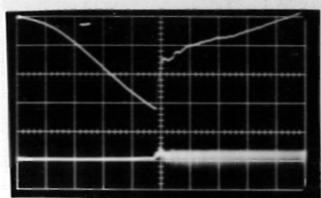
$E_0 = 4,15$

100



7/3

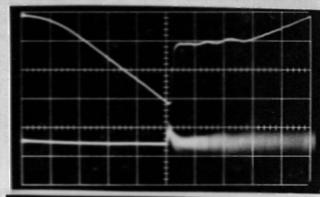
$E_0 = 4,00$



11/2

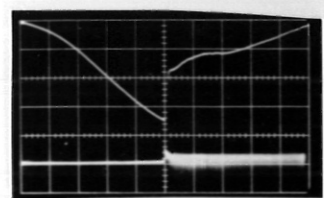
$E_0 = 4,17$

200



8/2

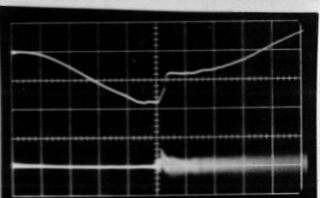
$E_0 = 4,07$



12/1

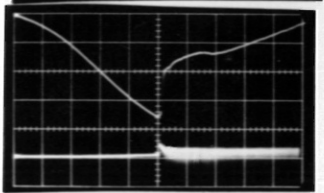
$E_0 = 4,20$

300



9/1

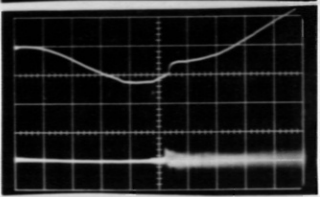
$E_0 = 4,13$



12/2

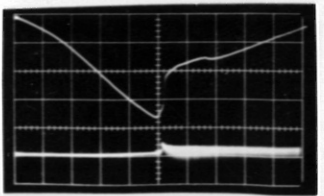
$E_0 = 4,25$

350



9/2

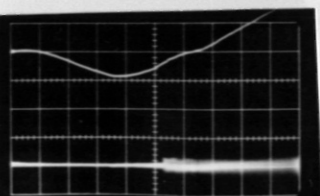
$E_0 = 4,17$



12/3

$E_0 = 4,30$

400



9/3

$E_0 = 4,17$

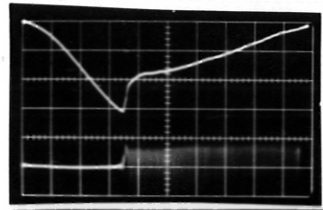
Fig 44

$l = 2$

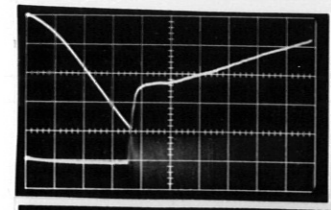
B_2 - Richtung " + "

I_{sp} [A]

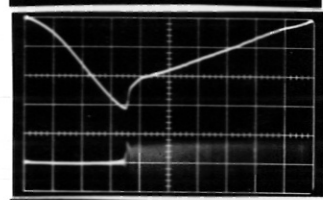
B_2 - Richtung " - "



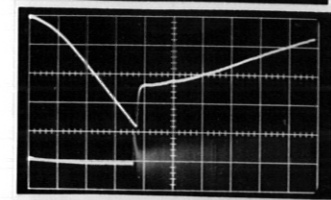
10/1
 $E_0 = 3,52$ V/cm



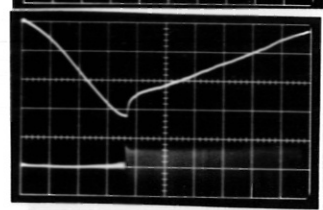
7/1
 $E_0 = 3,30$



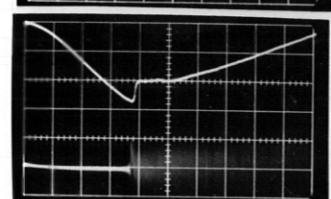
10/2
 $E_0 = 3,52$



7/2
 $E_0 = 3,39$

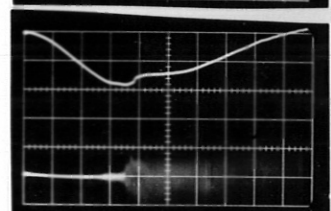


10/3
 $E_0 = 3,58$

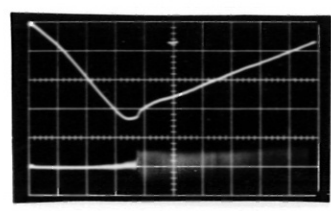


7/3
 $E_0 = 3,43$

250

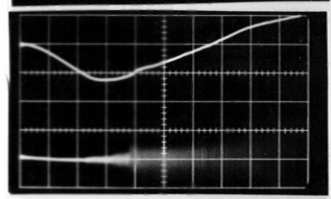


8/1
 $E_0 = 3,51$



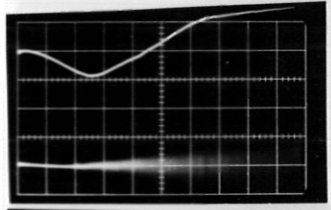
11/2
 $E_0 = 3,65$

300

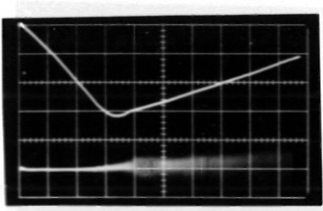


8/2
 $E_0 = 3,52$

350

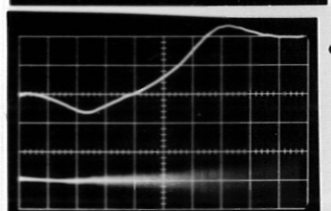


8/3
 $E_0 = 3,55$



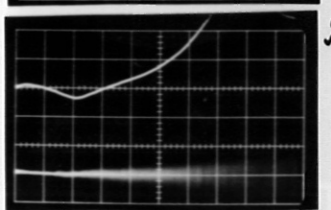
12/1
 $E_0 = 3,74$

400

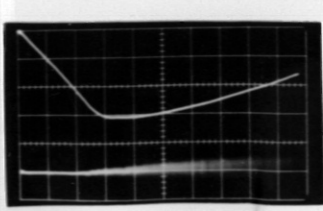


9/1
 $E_0 = 3,64$

450

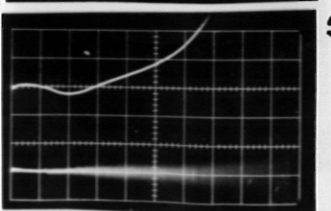


9/2
 $E_0 = 3,66$



12/3
 $E_0 = 3,82$

500



9/3
 $E_0 = 3,74$

Manung v. 9.5.61

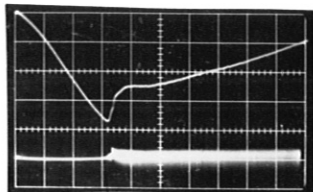
Fig 45

$C=2$

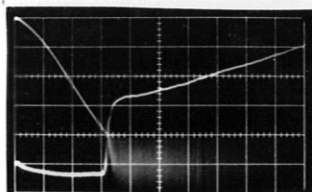
$p = 2,8 \cdot 10^{-1}$ Torr
Abszisse B_2 150 T/SAT
Ordinate I MV/SAT 1SAT = $\Delta E = 911$ V/cm

B_2 - Richtung " + " I_{sp} [A]

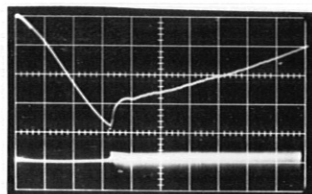
B_2 - Richtung " - "



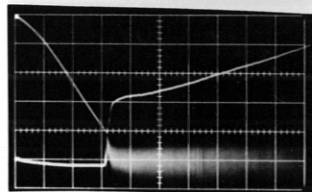
1311
 $E_0 = 2,86$ V/cm



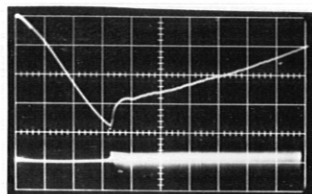
1511
 $E_0 = 3,03$



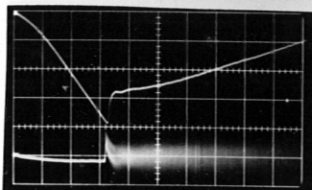
1312
 $E_0 = 2,94$



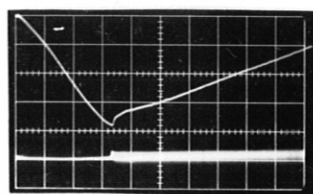
1512
 $E_0 = 3,08$



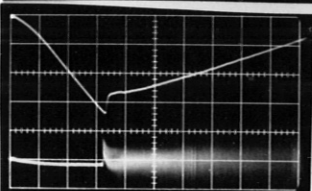
1313
 $E_0 = 3,00$



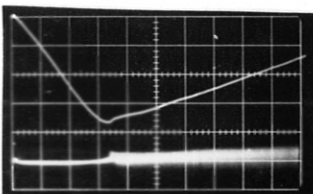
1513
 $E_0 = 3,12$



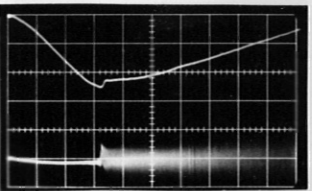
1314
 $E_0 = 3,08$



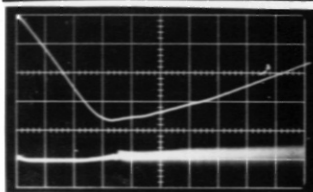
1611
 $E_0 = 3,12$



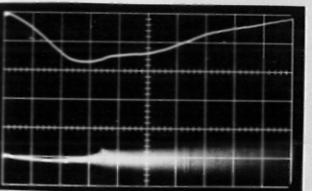
1411
 $E_0 = 3,08$



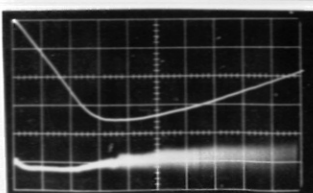
1612
 $E_0 = 3,16$



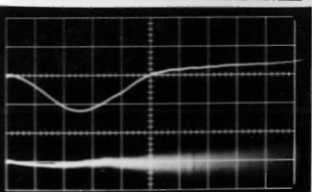
1412
 $E_0 = 3,14$



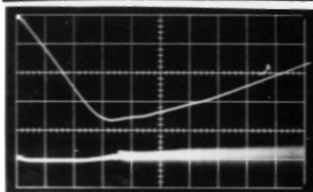
1613
 $E_0 = 3,19$



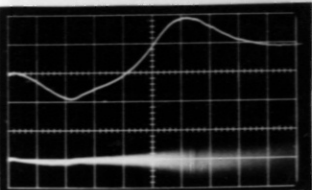
1413
 $E_0 = 3,19$



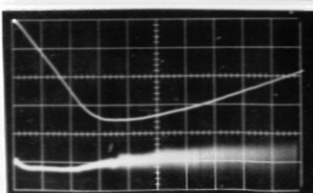
1711
 $E_0 = 3,22$



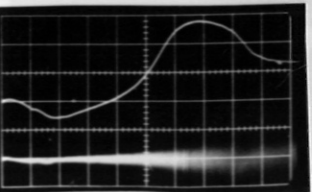
1414
 $E_0 = 3,14$



1712
 $E_0 = 3,28$



1415
 $E_0 = 3,19$



1713
 $E_0 = 3,30$

Messung v. 9.5.61

711-177

$p = 1,2 \cdot 10^{-1}$ Torr

-45-

Fig 46

$\ell = 2$

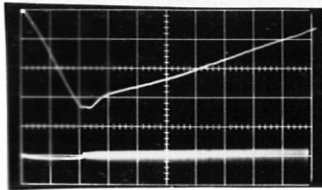
Abszisse B_2 150 T/SKT

Ordinate I 11 V/SKT 1 SKT $\Delta E = 0,1$ V/cm

B_2 -Richtung " + "

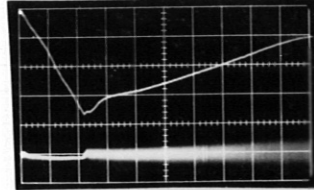
I_{sp} [A]

B_2 -Richtung " - "



21/1

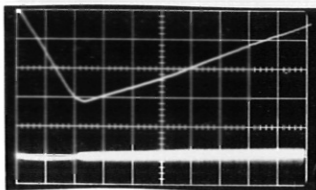
$E_0 = 2,51$ V/cm



18/1

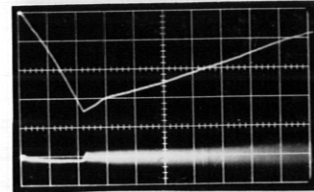
$E_0 = 2,26$

0



21/2

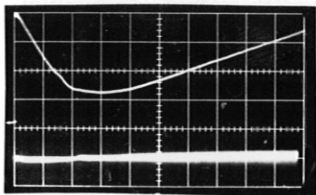
$E_0 = 2,53$



18/2

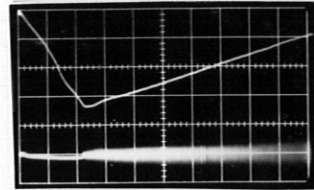
$E_0 = 2,31$

50



21/3

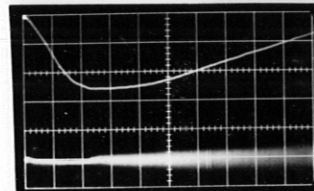
$E_0 = 2,55$



18/3

$E_0 = 2,37$

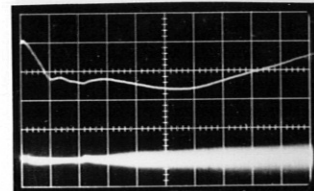
100



19/1

$E_0 = 2,42$

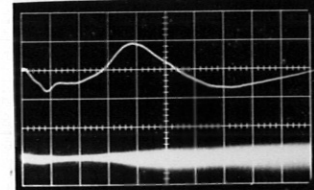
150



19/2

$E_0 = 2,43$

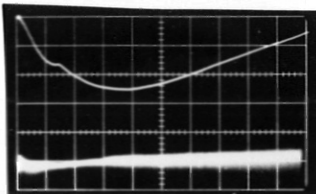
200



19/3

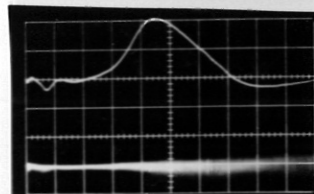
$E_0 = 2,45$

250



22/1

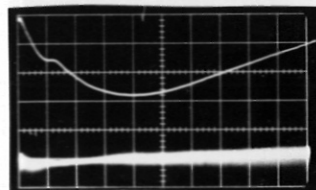
$E_0 = 2,59$



20/1

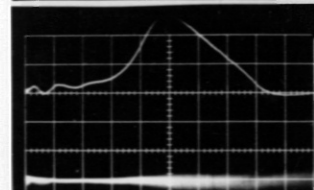
$E_0 = 2,53$

300



22/2

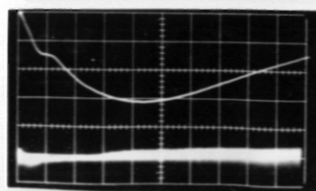
$E_0 = 2,64$



20/2

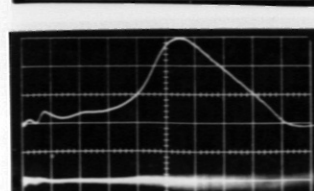
$E_0 = 2,57$

350



22/3

$E_0 = 2,75$



20/3

$E_0 = 2,64$

400

Messung v. 9.5.67

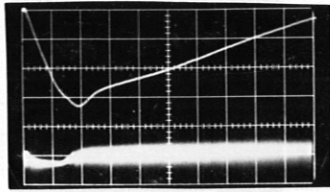
Fig 47

$\ell = 2$

$\rho = 6,3 \cdot 10^{-2}$ Torr
Abszisse B_z 150 T/SKT
Ordinate I 11 V/SKT
 $15KT \approx \Delta E = 911$ V/cm

B_z -Richtung " + " $I_{sp.} [A]$

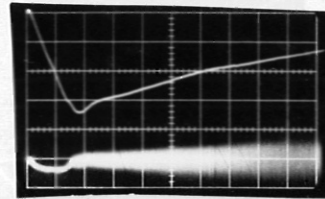
B_z -Richtung " - "



2311

$E_0 = 1,76$ V/cm

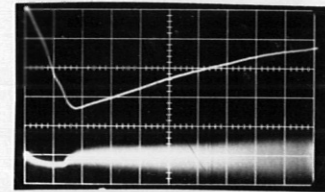
0



2511

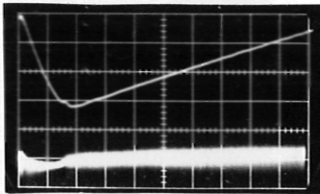
$E_0 = 1,85$

50



2512

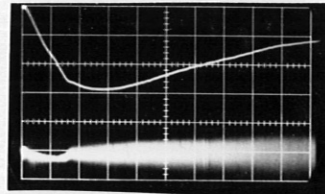
$E_0 = 1,87$



2312

$E_0 = 1,85$

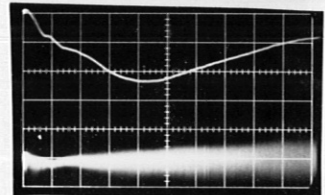
100



2513

$E_0 = 1,93$

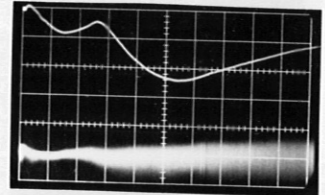
150



2411

$E_0 = 1,95$

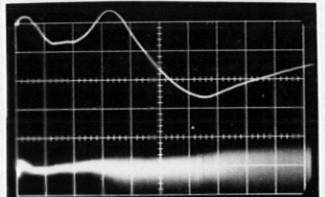
200



2612

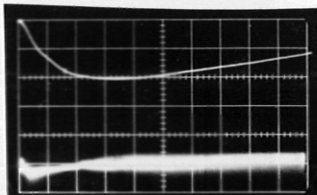
$E_0 = 2,04$

250



2613

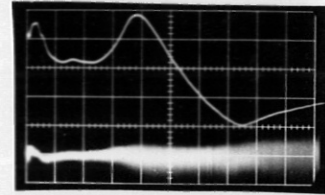
$E_0 = 2,09$



2411

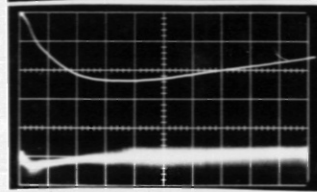
22 V/SKT
 $E_0 = 2,12$

300



2711

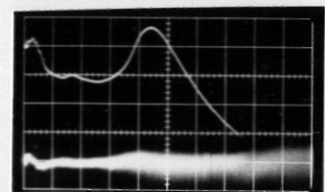
$E_0 = 2,26$



2412

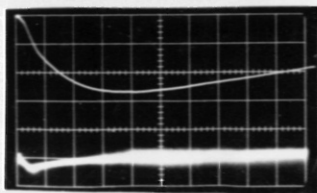
22 V/SKT
 $E_0 = 2,29$

350



2712

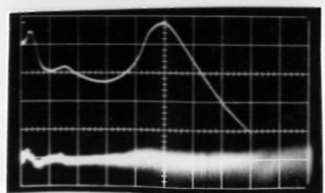
$E_0 = 2,42$



2413

22 V/SKT
 $E_0 = 2,40$

400



2713

$E_0 = 2,49$

Fig 48

$\varrho = 3$

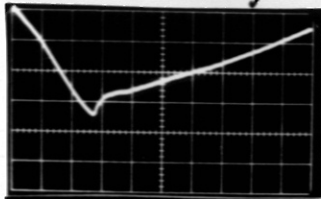
Abszisse 150 T/SKT

Ordinate 11V/SKT 1SKT $\triangleq \Delta E$ 11V/m

B_z-Richtung " + "

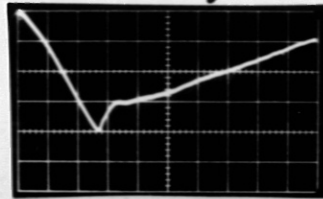
I_{sp} [A]

B_z-Richtung " - "



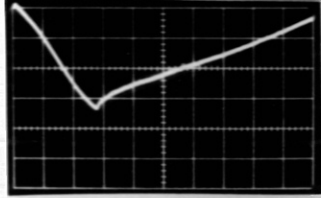
13/1

$E_0 = 2,79$ V/cm



16/1

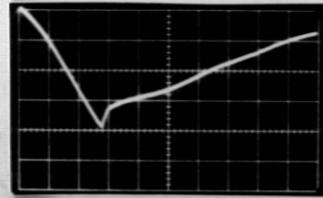
$E_0 = 2,97$



13/2

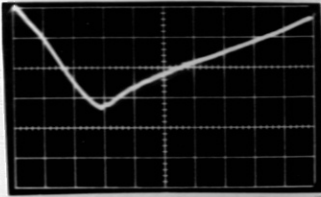
$E_0 = 2,79$

50



16/2

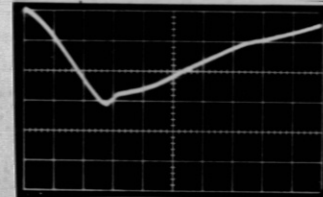
$E_0 = 3,00$



13/3

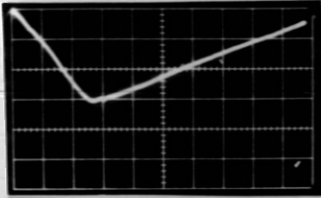
$E_0 = 2,86$

100



16/3

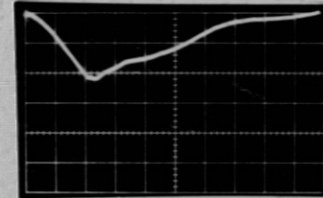
$E_0 = 3,03$



14/1

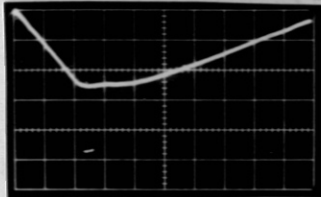
$E_0 = 2,88$

150



17/1

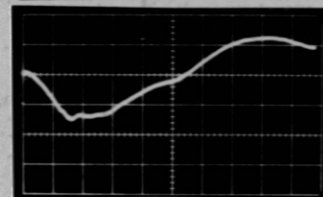
$E_0 = 3,18$



14/2

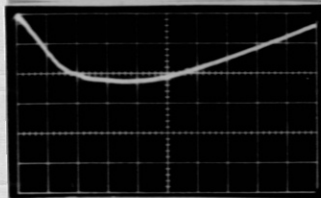
$E_0 = 2,92$

200



17/2

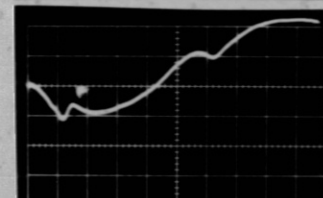
$E_0 = 3,08$



14/3

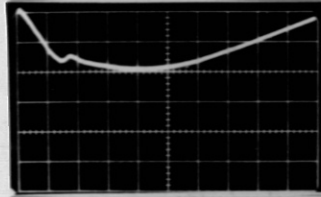
$E_0 = 2,94$

250



17/3

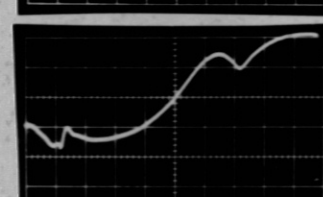
$E_0 = 3,11$



15/1

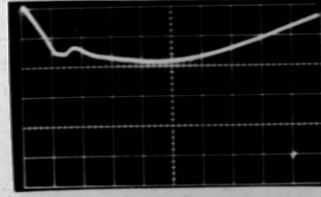
$E_0 = 2,97$

300



18/1

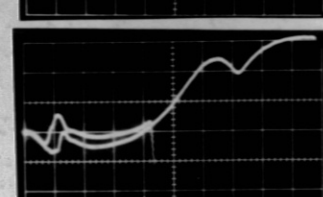
$E_0 = 3,14$



15/2

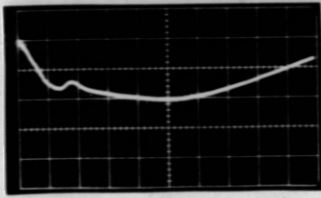
$E_0 = 3,00$

350



18/2

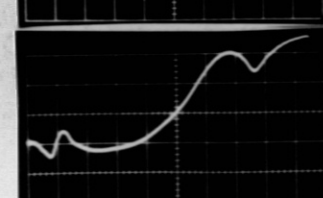
$E_0 = 3,16$



15/3

$E_0 = 3,08$

380



18/3

$E_0 = 3,20$

Diffusion mit B_2^+ und B_0 -Feld

Mon. v. 16.10.61 PTT 57 -49-

Ordinate : 236 V/SKT

1SKT $\Delta E = 9236$ V/cm

$E_0 = 11,8 \cdot U_K [V]$ V/cm

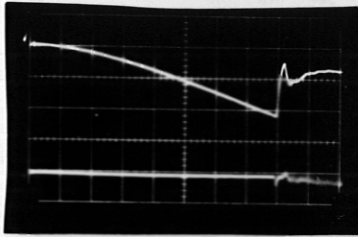
Abszisse : 150 T/SKT

$p = 12$ Torr He

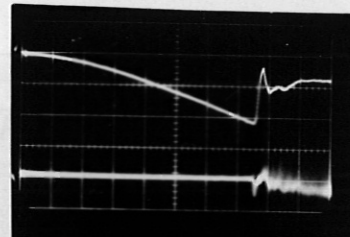
$B_0 [A]$

$B_2^{(+)}$ $B_0^{(+)}$

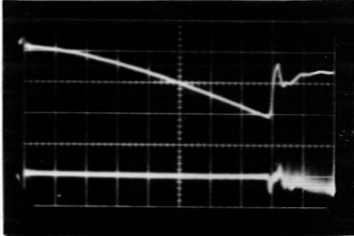
$B_2^{(-)}$ $B_0^{(-)}$



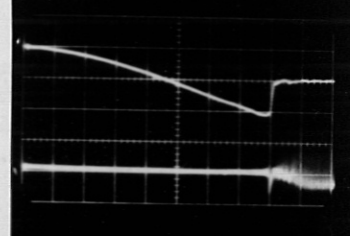
2/1
 $B_0 = 0$
 $U_K = 0,65$ V



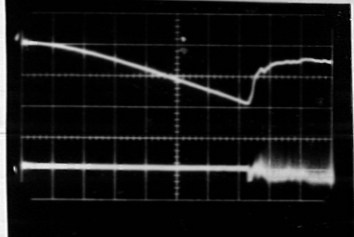
5/1
 $B_0 = 0$
 $U_K = 0,69$ V



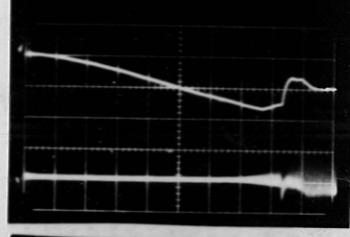
2/2
 $B_0 = 0$
 $U_K = 0,65$ V



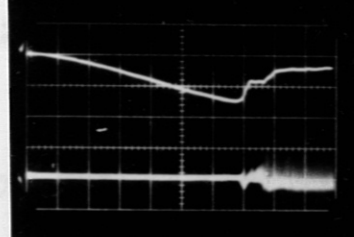
5/2
 $B_0 = 150$
 $U_K = 0,69$ V



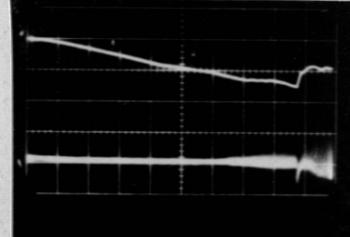
3/1
 $B_0 = 150$
 $U_K = 0,67$ V



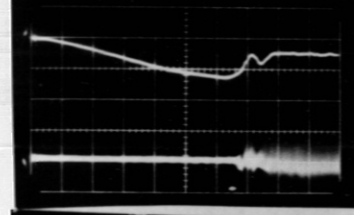
5/3
 $B_0 = 300$
 $U_K = 0,70$ V



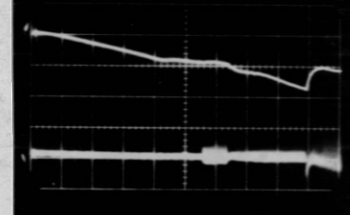
3/2
 $B_0 = 300$
 $U_K = 0,68$ V



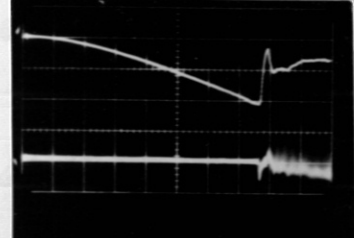
6/1
 $B_0 = 500$
 $U_K = 0,72$ V



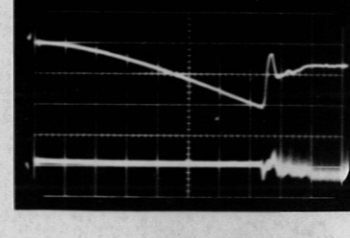
3/3
 $B_0 = 500$
 $U_K = 0,695$ V



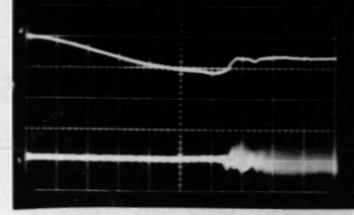
6/2
 $B_0 = 600$
 $U_K = 0,725$ V



4/1
 $B_0 = 0$
 $U_K = 0,68$ V



6/3
 $B_0 = 0$
 $U_K = 0,70$ V



4/2
 $B_0 = 600$
 $U_K = 0,710$ V

Fig 49

